

УДК 517.929

Об асимптотической устойчивости перевернутого маятника с трением и двукратным запаздыванием в механизме обратной связи. I¹

М. В. Мулюков

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь
614990. E-mail: Mulykoff@gmail.com

Аннотация. Рассмотрена линейная автономная модель перевернутого плоского маятника с двойным запаздыванием в механизме обратной связи и демпфирующей силой. Величины запаздываний соотносятся как один к двум. На коэффициенты модели наложены некоторые ограничения, при условии соблюдения которых получены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости модели. Критерий устойчивости дан в геометрической и аналитической формах.

Ключевые слова: перевернутый маятник, дифференциальные уравнения с запаздыванием, асимптотическая устойчивость.

On asymptotic stability of inverted pendulum with friction and with double delay in feedback. I

M. V. Mulyukov

Perm State National Research University, Perm 614990,
Perm National Research Polytechnic University, Perm 614990.

Abstract. The linear autonomous model of inverted pendulum with delayed feedback and friction force is considered. There are two terms with delay: the magnitude of the largest delay is twice as large as the least one. The model is considered under some condition on its coefficients. The necessary and sufficient conditions of asymptotic stability of this model are obtained under this coefficient condition. The investigation is based on development of D-subdivision for two-parametric differential equations. The stability domain is described analytically and represented geometrically. The results obtained can be useful for investigations of local asymptotic stability of non-linear models of inverted pendulum with double delay in feedback and with friction force.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-01-00928

Keywords: inverted pendulum, differential equations with delay, asymptotic stability.

MSC 2010: 34K06, 34K20

Введение

Стабилизации перевёрнутого маятника — задача, естественно возникающая во многих прикладных науках, интересна и с теоретической точки зрения.

Наиболее известным решением этой задачи служит метод стабилизации посредством вертикальных колебаний основания. Впервые этот метод был строго обоснован Н. Н. Боголбовым [2] (по-видимому, ещё в 1942) и наглядно продемонстрирован П. Л. Капицей [3] в 1951.

Другой способ стабилизировать колебания перевёрнутого маятника вблизи вертикального положения равновесия состоит в управлении в виде обратной связи. Управляющая сила может реагировать на изменения в угле отклонения и угловой скорости как мгновенно [10], так и с некоторым запаздыванием.

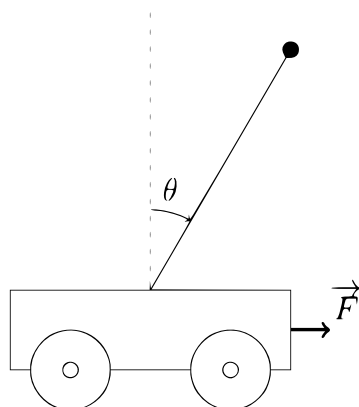


Рис. 1. Схема обратного маятника

По-видимому, G. Stepan первым предложил и исследовал на устойчивость модель, учитывающую запаздывание в механизме обратной связи перевёрнутого маятника [19]. Линеаризация этой модели приводит к дифференциальному уравнению второго порядка с одним постоянным сосредоточенным запаздыванием. В настоящий момент наиболее активно эта идея развивается в нескольких направлениях: либо изучение эффекта нелинейности (как правило, имеет место управление с переключением) [15, 16, 17], либо усложнение и подробное изучение линейных моделей [4, 5, 6, 11, 13, 18].

На рисунке 1 изображён перевёрнутый маятник на тележке, к которой приложена сила \vec{F} . Вообще говоря, величина этой силы может представлять собой функционал как от угла наклона θ , так и от угловой скорости $\dot{\theta}$.

Настоящая работа продолжает исследование [6], в которой рассматривается случай, когда линеаризация функционала \vec{F} вблизи нулевого положения равновесия имеет вид:

$$\vec{F}(t) = -k_1\theta(t-h) - k_2\theta(t-2h),$$

где $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ и $h > 0$.

В отличие от указанной статьи в настоящей работе учитывается сила трения в шарнире, пропорциональная угловой скорости $\dot{\theta}$. Обозначим через $\sigma > 0$ коэффициент пропорциональности этой силы.

Обозначим частоту собственных колебаний маятника через $\omega > 0$.

Основная задача — найти критерий асимптотической устойчивости модели маятника, линеаризованной вблизи вертикального положения равновесия, в терминах параметров задачи: $\omega, \sigma, h, k_1, k_2$.

Знак величины $\omega^2 + k_2$ оказывает влияние на структуру области устойчивости и на доказательство теоремы об устойчивости модели, поэтому исследование модели разбито на две части в зависимости от знака этой величины. В настоящей статье рассмотрен случай, когда данный параметр не отрицателен.

1. Модель

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{\theta}(t) - \omega^2\theta(t) + \sigma\dot{\theta}(t) + k_1\theta(t-h) + k_2\theta(t-2h) = 0, \quad (1)$$

где $\omega, \sigma, h > 0$ и $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Для корректной постановки задачи требуется ввести суммируемую начальную функцию ψ так, что $\theta(\xi) = \psi(\xi)$ при $\xi \in (-h, 0)$. Тогда решение уравнения (1) существует и единственно в пространстве функций с локально абсолютно непрерывными производными.

Под асимптотической устойчивостью уравнения (1) будем понимать стремление к нулю его решения вместе с производной при любой суммируемой начальной функции ψ и любых начальных данных $x(0), \dot{x}(0) \in \mathbb{R}$. Как известно, асимптотическая устойчивость эквивалентна экспоненциальной и, следовательно, эквивалентна расположению в отрицательной полуплоскости всех корней *характеристической функции* Φ , которая в данном случае имеет вид:

$$\Phi(z) = z^2 - \omega^2 + \sigma z + k_1 e^{-zh} + k_2 e^{-2zh}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

Рассмотрим *характеристическое уравнение* в виде

$$z^2 e^z + \chi \operatorname{ch} z + \beta + \zeta \operatorname{sh} z + \mu z e^z = 0, \quad (3)$$

Уравнения (3) и $\Phi(z/h) = 0$ имеет одинаковый набор корней в комплексной плоскости, если положить

$$\chi = h^2(k_2 - \omega^2), \quad \zeta = -h^2(\omega^2 + k_2), \quad \beta = h^2 k_1, \quad \mu = h\sigma.$$

Далее будем исследовать уравнение (3) в предположении независимости его коэффициентов. Однако, в общем случае построить область устойчивости в пространстве четырёх параметров — достаточно сложная задача, поэтому ниже будут наложены три ограничения.

Во-первых, будем считать, что $\mu > 0$. Во-вторых, $\chi + \zeta < 0$. В третьих, $\zeta \leq 0$.

Первые два условия эквивалентны неравенствам $h\sigma > 0$ и $\omega^2 > 0$. Очевидно, эти условия не ограничивают общность задачи.

Третье условие эквивалентно неравенству $\omega^2 + k_2 \geq 0$. Данное неравенство не вытекает из постановки задачи. Таким образом, данное неравенство является существенным ограничением общности задачи. Случай $\omega^2 + k_2 < 0$ должен быть рассмотрен отдельно.

Теорема. Пусть $\chi + \zeta < 0 < \mu$ и $\zeta \leq 0$. Тогда все корни уравнения (3) имеют отрицательные вещественные части в том и только том случае, если выполняются неравенства:

$$\chi + \beta > 0, \quad (4)$$

$$\zeta + \mu > 0, \quad (5)$$

$$\chi \cos \eta + \beta < \eta^2 \cos \eta + \mu \eta \sin \eta, \quad (6)$$

где η — единственный корень уравнения

$$\mu \eta \operatorname{ctg} \eta = \eta^2 - \zeta \quad (7)$$

из интервала $(0, \pi)$.

Доказательство. При фиксированных значениях параметров ζ и μ уравнение (3) имеет вид:

$$\chi f_1(z) + \beta f_2(z) + f_0(z) = 0, \quad (8)$$

где $f_1(z) = \operatorname{ch} z$, $f_2(z) = 1$ и $f_0(z) = z^2 e^z + \zeta \operatorname{sh} z + \mu z e^z$.

Уравнение вида

$$r_1 f_1(z) + r_2 f_2(z) + f_0(z) = 0, \quad (9)$$

где $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ называется *двупараметрическим характеристическим уравнением*. Проведём исследование уравнения (8) в соответствии с методикой, изложенной в работе [7].

Обозначим $F(z, r_1, r_2) = r_1 f_1(z) + r_2 f_2(z) + f_0(z)$. Для краткости, функцию $F(\cdot, r_1, r_2)$ будем называть *устойчивой*, если все её корни лежат слева от мнимой оси.

Будем искать в пространстве параметров r_1, r_2 множество точек, называемое *областью устойчивости*, которым соответствуют устойчивые функции $F(\cdot, r_1, r_2)$. Принадлежность точки $\{\chi, \beta\}$ этой области эквивалентна тому, что при заданных значениях ζ и μ все корни уравнения (8) лежат слева от мнимой оси.

Введём обозначения:

$$\begin{aligned}\Delta(\varphi) &= \operatorname{Im} f_1(-i\varphi) f_2(i\varphi), & u_1(\varphi) &= \operatorname{Im} f_0(i\varphi) f_2(-i\varphi), \\ u_2(\varphi) &= \operatorname{Im} f_0(-i\varphi) f_1(i\varphi), & \mathbf{u} &= \{u_1, u_2\}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\mathbf{u}(\varphi) = ((\zeta - \varphi^2) \sin \varphi + \mu \varphi \cos \varphi) \{1, -\cos \varphi\}.$$

Неотрицательные корни системы уравнений $\mathbf{u}(\varphi) = \mathbf{0}$ называются *частотами*. Обозначим упорядоченное по возрастанию множество частот через $\{\theta_n\}$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Каждой частоте θ_n соответствует прямая L_n , которая описывается уравнением $F(i\theta_n, r_1, r_2) = 0$.

Легко видеть, что $\Delta(\varphi) \equiv 0$ и $\mathbf{u}(\varphi) \not\equiv \mathbf{0}$, следовательно, уравнение (8) представляет собой *двупараметрическое характеристическое уравнение третьего рода* [7, с. 97]. Для уравнений этого типа число корней с положительной вещественной частью в плоскости параметров меняется только при переходе через прямые L_n , поэтому области D-разбиения представляют собой выпуклые многоугольники (ограниченные или неограниченные). Этот факт существенно упрощает анализ изменения области устойчивости при изменении параметров μ и ζ .

Легко видеть, что при любых ζ и μ имеем $\theta_0 = 0$, следовательно, прямая L_0 описывается уравнением $r_1 + r_2 = 0$.

Если $n \geq 1$, то уравнение прямой L_n имеет вид:

$$r_1 \cos \theta_n + r_2 = \mu \theta_n \sin \theta_n + \theta_n^2 \cos \theta_n.$$

Далее будем полагать, что $\mu > 0$.

В рассматриваемом случае уравнение $\mathbf{u}(\varphi) = \mathbf{0}$ эквивалентно уравнению

$$\mu \varphi \operatorname{ctg} \varphi = \varphi^2 - \zeta. \quad (10)$$

Пусть $n \geq 1$. Тогда θ_n — корень уравнения (10) из интервала

$$\begin{cases} (\pi(n-1), \pi n), & \text{если } \zeta + \mu > 0, \\ (\pi n, \pi(n+1)), & \text{если } \zeta + \mu \leq 0. \end{cases}$$

Если $\mathbf{u}'(\theta_n) \neq \mathbf{0}$, то обозначим через \mathcal{H}_n полуплоскость, удовлетворяющая неравенству

$$F(i\theta_n, r_1, r_2) f_2(-i\theta_n) u_1'(\theta_n) > 0. \quad (11)$$

Прямая L_n делит плоскость на две полуплоскости. Заметим, что \mathcal{H}_n — эта та из этих полуплоскостей, для которой при переходе через прямую L_n , количество корней с неотрицательной вещественной частью уменьшается.

Имеем

$$f_2(-i\varphi) u_1'(\varphi) = -(2 + \mu)\varphi \sin \varphi + (\zeta + \mu - \varphi^2) \cos \varphi.$$

В силу уравнения (10) имеем:

$$f_2(-i\theta_n) u_1'(\theta_n) = -\frac{2\theta_n \sin^2 \theta_n + \mu(\theta_n - \sin \varphi \cos \theta_n)}{\sin \theta_n}. \quad (12)$$

Заметим, что при любом натуральном n числитель в выражении (12) положителен, поэтому полуплоскость \mathcal{H}_n определена и описывается неравенством:

$$(r_1 \cos \theta_n + r_2 - \theta_n^2 \cos \theta_n - \mu \theta_n \sin \theta_n) \sin \theta_n < 0. \quad (13)$$

Если $\zeta + \mu \neq 0$, то полуплоскость \mathcal{H}_0 определена и задаётся неравенством

$$(\zeta + \mu)(r_1 + r_2) > 0.$$

Обозначим $\mathcal{D}_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} \mathcal{H}_n$.

Известно [7, с. 101, Следствие 4.1], что если $\mathcal{D}_0 \neq \emptyset$, то либо \mathcal{D}_0 является областью устойчивости, либо область устойчивости пуста.

Далее будем полагать, что $\zeta \leq 0$.

Покажем, что при $\zeta + \mu \leq 0$ область устойчивости пуста.

В работе [8, с. 2060, Теорема 4] рассматривается частный случай уравнения (3) при $\chi = 0$. В частности, показано, что условие $\zeta + \mu > 0$ является необходимым для того, чтобы все корни уравнения

$$z^2 e^z + \beta + \zeta \operatorname{sh} z + \mu z e^z = 0$$

лежали слева от мнимой оси. Следовательно, функция $F(\cdot, 0, \beta)$ неустойчива при любом $\beta \in \mathbb{R}$ и $\zeta + \mu \leq 0$. Точки, соответствующие этому уравнению, принадлежат вертикальной оси.

В силу $\zeta \leq 0$ имеем $\operatorname{ctg} \theta_n > 0$ (при $n \geq 1$), следовательно, $\mu \theta_n \operatorname{tg} \theta_n + \theta_n^2 > 0$, то есть начало координат O принадлежит \mathcal{D}_1 .

Кроме того, точка O принадлежит прямой L_0 , поэтому можем воспользоваться вторым пунктом следствия 4.3 работы [7, с. 101], согласно которому область устойчивости пуста, если существует прямая, проходящая через точку O , но не совпадающая с L_0 такая, что в любой точке этой прямой функция $F(\cdot, r_1, r_2)$ не является устойчивой. Этим условиям удовлетворяет вертикальная ось. Таким образом, при $\zeta + \mu \leq 0$ область устойчивости уравнения (3) пуста.

Далее будем полагать, что $\zeta + \mu > 0$.

Во-первых, отметим, что согласно работе [8, с. 2068, Теорема 5] область устойчивости не пуста (найдутся значения χ такие, что уравнение $F(\chi, 0, \cdot)$ будет устойчивым).

При $r_1 = r_2 = 0$ и $n > 0$ неравенство (13) примет вид: $0 < \mu \theta_n \operatorname{tg} \theta_n + \theta_n^2$, которое, очевидно, справедливо. Следовательно, начало координат принадлежит полуплоскости \mathcal{H}_n при любом $n > 1$. В то же самое время начало координат принадлежит прямой L_0 , таким образом, \mathcal{D}_0 не пуста и, следовательно, является областью устойчивости.

Обозначим через L^* прямую $r_1 = -\zeta$, а через \mathcal{H}^* — полуплоскость, расположенную левее данной прямой.

Обозначим точку пересечения прямых L_0 и L_1 через A ; точку пересечения L_0 и L^* — через B ; точку пересечения L_1 и L^* — через C . Найдём координаты этих точек.

Имеем $A(-g_\mu(\theta_1), g_\mu(\theta_1))$, где

$$g_\mu(\varphi) = \varphi \frac{\mu \sin \varphi + \varphi \cos \varphi}{(1 - \cos \varphi)}$$

,

$$B(-\zeta, \zeta), \quad C(-\zeta, \mu \theta_1 \sin \theta_1 + (\zeta + \theta_1^2) \cos \theta_1).$$

На рисунке 2 обозначен треугольник ABC . Вертикальная прямая L^* ограничивает рассматриваемую полуплоскость (слева).

При $\zeta \rightarrow -\mu$ точка B стремится к точке C , поэтому в плоскости $\zeta + \mu = 0$ треугольник ABC вырождается в отрезок, но при $\zeta + \mu > 0$ данный треугольник имеет непустую внутренность, которая, как мы покажем ниже, совпадает с областью $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{H}^*$.

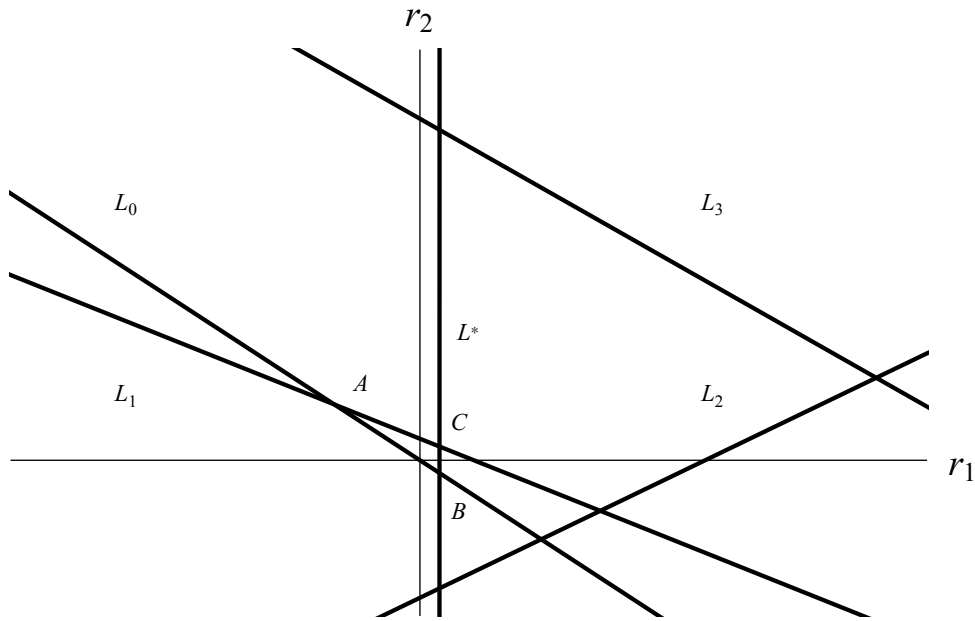


Рис. 2. Сечение область устойчивости уравнения (3) при $\zeta = -2$ и $\mu = 4$

Фактически, утверждение теоремы свелось к тому, чтобы доказать, что вершины треугольника ABC принадлежит \mathcal{H}_n при любом $n > 1$.

Покажем, что точка A принадлежит \mathcal{H}_n при любом $n \geq 1$. По определению это эквивалентно неравенству:

$$-g_\mu(\theta_1) + \frac{g_\mu(\theta_1)}{\cos \theta_n} < \theta_n^2 + \mu \theta_n \operatorname{tg} \theta_n. \tag{14}$$

Преобразуем неравенство (14):

$$\left(-g_\mu(\theta_1) - \zeta\right) + \left(\frac{g_\mu(\theta_1)}{\cos \theta_n} - \frac{\mu \theta_n}{\sin \theta_n \cos \theta_n}\right) < -\zeta + \theta_n^2 - \mu \theta_n \operatorname{ctg} \theta_n. \tag{15}$$

В силу того, что θ_n — корень уравнения (7), правая часть неравенства (15) равна нулю.

Воспользовавшись тем, что θ_1 — корень уравнения (7), получим

$$-g_\mu(\theta_1) - \zeta = -\frac{\theta_1}{1 - \cos \theta_1} \left(\theta_1(1 + \cos \theta_1) + \mu \frac{1 - \cos \theta_1}{\sin \theta_1}\right) < 0.$$

Далее,

$$\frac{\theta_n}{|\sin \theta_n|} > \frac{2 + 2\mu}{\mu} = \frac{1}{\mu} \max_{\varphi \in [0, \pi]} g_\mu(\varphi),$$

следовательно, $\mu \theta_n > g_\mu(\theta_1) \sin \theta_n$. Домножив левую и правую часть неравенства на $\operatorname{ctg} \theta_n$, получаем

$$\frac{g_\mu(\theta_1)}{\cos \theta_n} - \frac{\mu \theta_n}{\sin \theta_n \cos \theta_n} < 0.$$

Итак, выражение, стоящее слева в неравенстве (14), отрицательно, следовательно, неравенство верно. Таким образом, точка A принадлежит $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$.

Покажем, что точка B принадлежит \mathcal{H}_n при любом $n \geq 1$. Для этого необходимо и достаточно показать выполнения неравенства:

$$\theta_n^2 + \mu \theta_n \operatorname{tg} \theta_n > \zeta \left(\frac{1}{\cos \theta_n} - 1 \right).$$

Воспользуемся (7):

$$\frac{\mu \theta_n}{\cos \theta_n \sin \theta_n} > |\zeta| \left(2 - \frac{1}{\cos \theta_n} \right).$$

Усилим данное неравенство, воспользовавшись тем, что $\mu > |\zeta|$:

$$\frac{\theta_n}{\cos \theta_n \sin \theta_n} > 2 - \frac{1}{\cos \theta_n}.$$

Справедливость последнего неравенства вытекает из оценки

$$\varphi > |\sin \varphi (1 - 2 \cos \varphi)|,$$

справедливой для $\varphi > \pi$.

Покажем, что точка C принадлежит \mathcal{H}_n при любом $n \geq 1$.

Заметим, что если бы точка C не принадлежала \mathcal{H}_n при некотором чётном n , то и точка B не принадлежала этой полуплоскости. Следовательно, остаётся рассмотреть случай, когда n — нечётное число, большее единицы.

Точка пересечения прямой L_n с осью ординат имеет координату:

$$r_2 = \sqrt{\theta_n^4 + \mu^2 \theta_n^2 - \zeta^2}.$$

Эти значения монотонно растут с возрастанием n .

Точка пересечения L_n с прямой L_0 имеет абсциссу:

$$r_1 = \frac{\theta_n^2 \cos \theta_n + \mu \theta_n \sin \theta_n}{\cos \theta_n - 1} < 0.$$

Следовательно, прямые L_n и L_1 пересекаются в четвёртом квадранте, а точка C принадлежит первому или второму квадранту. Таким образом, теорема полностью доказана. \square

Обозначив $\xi = \eta/h$ и проведя обратную замену, получим следующее утверждение:

Следствие. Пусть $\omega^2 + k_2 \geq 0$.

Тогда для того, чтобы уравнение (1) было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\begin{aligned}\omega^2 &< k_1 + k_2, \\ \sigma &> h(\omega^2 + k_2), \\ k_1 &< \frac{\xi^2(\xi^2 + \sigma^2) + \omega^4 - k_2^2}{\sqrt{\sigma^2\xi^2 + (\xi^2 + \omega^2 + k_2)^2}},\end{aligned}$$

где ξ — единственный корень уравнения

$$h\xi = \operatorname{arcctg} \frac{\xi^2 + \omega^2 + k_2^2}{\sigma\xi}.$$

Заключение

В настоящей статье проведено частичное исследование устойчивости модели перевернутого плоского маятника с трением в случае, когда в механизме обратной связи имеется двукратное сосредоточенное постоянное запаздывание.

Для случая, когда коэффициенты уравнения (3) удовлетворяют неравенству $\omega^2 + k_2 \geq 0$, построен критерий асимптотической устойчивости. Критерий дан в наглядной геометрической и аналитической формах.

Автор выражает благодарность рецензенту за внимательное прочтение рукописи и замечания, способствовавшие улучшению изложения. Кроме того, автор признателен рецензенту за интересное освещение исторической части вопроса.

Список цитируемых источников

1. Демиденко, Г. В., Дулепова, А. В. Об устойчивости движения перевернутого маятника с вибрирующей точкой подвеса. Сиб. журн. индустр. матем. 21, № 4, 39–50 (2018). DOI: <https://doi.org/10.17377/sibjim.2018.21.404>

Demidenko, G. V., Dulepova, A. V. On stability of the inverted pendulum motion with a vibrating suspension point. Journal of Applied and Industrial Mathematics, 12, № 4, 607–618 (2018). DOI: <https://doi.org/10.17377/sibjim.2018.21.404>

2. Боголюбов, Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике. Сб. тр. Ин-та строительной механики АН УССР. 44, 9–34 (1950).

Bogolyubov, N. N. Teoriya vozmushchenij v nelinejnoj mekhanike. Sb. tr. In-ta stroitel'noj mekhaniki AN USSR. 44, 9–34 (1950). (in Russian)

3. *Капица, П. Л.* Маятник с вибрирующим подвесом. Успехи физических наук. 44, 7-20 (1951).

Kapitza, P. L. Pendulum with a vibrating suspension. Usp. Fiz. Nauk, 44, 7–20 (1951). (in Russian)

4. *Мулюков, М. В.* Устойчивость одной линейной модели осциллятора с запаздывающей обратной связью. Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. № 4(27), 62–67 (2014).

Mulyukov, M. V. Ustoichivost' odnoi lineinoi modeli ostsillatora s zapazdyvaiushchei obratnoi sviaz'iu. Vestnik Permskogo universiteta. Serii: Matematika. Mekhanika. Informatika, № 4(27), 62-67 (2014). (in Russian)

5. *Мулюков, М. В.* Устойчивость линейного автономного осциллятора с запаздывающей обратной связью. Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. № 3(30), 5–11 (2015).

Mulyukov M.V. Ustoichivost' lineinogo avtonomnogo ostsillatora s zapazdyvaiushchei obratnoi sviaz'iu. Vestnik Permskogo universiteta. Serii: Matematika. Mekhanika. Informatika, № 3(30), 5-11 (2015). (in Russian)

6. *Мулюков, М. В.* Устойчивость перевернутого маятника с запаздывающей обратной связью. Прикладная математика и вопросы управления. № 4, 73-86 (2017).

Mulyukov, M. V. Stability of inverted pendulum with delayed feedback, Applied Mathematics and Control Sciences, No.4, 73-86 (2017). (in Russian)

7. *Мулюков, М. В.* Устойчивость двухпараметрических систем линейных автономных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием, Изв. ИМИ УдГУ. 51, 79–122 (2018). DOI: <https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-51-04>

Mulyukov, M. V. Stability of two-parameter systems of linear autonomous differential equations with bounded delay, Izv. IMI UdGU, 51, 79–122 (2018). DOI: <https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-51-04> (in Russian)

8. *Мулюков, М. В.* Устойчивость трехпараметрических систем двух линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Часть II. Сиб. электрон. матем. изв. 16, 2055–2079 (2019). DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.146>

Mulyukov, M. V., Stability of three-parameter systems of two linear differential equations with delay. Part II. Sib. elektron. Mat. Izv., 16, 2019–2054 (2019). DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.146> (in Russian)

9. *Поляков, А. Е.* О практической стабилизации систем с релейным запаздывающим управлением. Автомат. и телемех. №11, 81–95 (2010)

Polyakov, A.E. On practical stabilization of systems with delayed relay control. Autom. Remote Control, 71, No. 11, 2331-2344 (2010).

10. *Рязжских, А. В., Семенов, М. Е., Рукавицын, А. Г., Канищева, О. И., Демчук, А. А., Мелешенко, П. А.*, Стабилизация обратного маятника на двухколесном транспортном средстве, Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ., 9, №3, 41–50 (2017). DOI: <https://doi.org/10.14529/mmph170306>
Ryazhskikh, V. I., Semenov, M. E., Rukavitsyn A. G., Kanishcheva O. I., Demchuk A. A., Meleshenko, P. A. Stabilization of inverted pendulum on a two-wheeled vehicle. Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz., 9, №3, 41–50 (2017). DOI: <https://doi.org/10.14529/mmph170306> (in Russian)
11. *Севостьянов, Р. А., Шаяхметова, Л. В.* Стабилизация обратного маятника с учетом запаздывания, Труды II Международной научной конференции «Конвергентные когнитивно-информационные технологии» (стр. 318-324) (Convergent'2017). Москва, 24-26 ноября, 2017.
Sevostyanov, R. A., Shayakhmetova L. V., Stabilization of the inverted pendulum considering delay, Proceedings of the II International scientific conference «Convergent cognitive information technologies» (Convergent'2017) (pp. 318-324). Moscow, Russia, November 24-26, 2017. (in Russian)
12. *Юрьева, О. Д., Баунина, А. В.* Об управлении и стабилизации перевернутого математического маятника вертикальными силами. Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. № 1, 123-130 (2018).
Yurjeva, O. D., Baunina, A. V. On control and stabilization of the inverted pendulum by vertical forces. The Scientific Notes of Ulyanovsk State University, № 1, 123-130 (2018). (in Russian)
13. *Фишман, Л. З.* Исследование одного уравнения маятникового типа с запаздыванием, Дифференц. уравнения. 42, №6, 850–851 (2006).
Fishman. L. Z. Investigation of a pendulum-type equation with delay. Differ. Uravn., 42, No. 6, 850–851, 864 (2006). (in Russian)
14. *Cruise, D. R., Chagdes, J. R., Liddy, J. J., Rietdyk, S., Haddad, J. M., Zelaznik, H. N., Raman, A.* An active balance board system with real-time control of stiffness and time-delay to assess mechanisms of postural stability. J Biomech (2017). DOI: [10.1016/j.jbiomech.2017.06.018](https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2017.06.018)
15. *Inspurger, T., Milton, J., Stepan G.* Acceleration feedback improves balancing against reflex delay. J.R.Soc.Interface, 10, No. 79 (2013), DOI: <http://dx.doi.org/10.1098/rsif.2012.0763>.
16. *Konishi, K., Kokame, H., Hara, N.* Delayed feedback control based on the act-and-wait concept. Nonlinear Dynamics, 63. No. 3. 513-519 (2011).
17. *Kowalczyk, P., Glendinning, P., Brown, M., Medrano-Cerda, G., Dallali, H., Shapiro, J.* Modelling human balance using switched systems with linear feedback control, Journal of the Royal Society, Interface, 9, No. 67, (2012), DOI: [10.1098/rsif.2011.0212](https://doi.org/10.1098/rsif.2011.0212)

18. *Malakhovskii E., Mirkin L.* On stability of second-order quasipolynomials with a single delay. *Automatica*, 42, 1041-1047 (2006).
19. *Stepan, G.* Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions. New York: Longman Scientific & Technical, 1989.

Получена 21.05.2020 Переработана 20.06.2020