Динамические системы, 2020, том 10(38), №2, 151–165

УДК 519.86

Локальные бифуркации и глобальный аттрактор периодической краевой задачи для вариационного уравнения Гинзбурга-Ландау[1]

А. Н. Куликов, Д. А. Куликов

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,

Ярославль 150003. *E-mail: anat_kulikov@mail.ru, kulikov_d_a@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается периодическая краевая задача для двух версий нелинейного эволюционного уравнения, известного под названием "вариационное уравнение Гинзбурга-Ландау". Для классической версии этого уравнения изучены вопросы о существовании и свойствах локальных аттракторов. Приведены достаточные условия существования одномодовых состояний равновесия, а также дан ответ об их устойчивости и локальных бифуркациях. Анализ этих вопросов использует такие методы теории динамических систем как метод интегральных многообразий и нормальных форм. Рассмотрена также периодическая краевая задача для нелокального варианта вариационного уравнения Гинзбурга-Ландау. Доказаны теоремы о существовании гладких глобальных решений и глобального аттрактора, у которого определена его структура и размерность. Обоснование этих теорем основано на следующем результате: получены явные (точные) формулы для всех решений начально-краевой задачи в виде сходящихся функциональных рядов от двух переменных.

Ключевые слова: вариационное уравнение Гинзбурга-Ландау, нелокальное уравнение, устойчивость, локальные бифуркации, глобальный аттрактор.

Local Bifurcations and Global Attractor of a Periodic Boundary Value Problem for the Ginzburg-Landau Variational Equation

A. N. Kulikov, D. A Kulikov

P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl 150003.

Abstract. An periodic boundary value problem is considered for two versions of a nonlinear evolutionary equation known as the "Ginzburg-Landau variational equation". For the classical version of this equation, questions about the existence and properties of local attractors are studied. Sufficient

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-01-00672).

conditions for the existence of single-mode equilibrium states are given, and an answer is given about their stability and local bifurcations. In the analysis of these questions such methods of the theory of dynamical systems as the method of integral manifolds and normal forms are used. A periodic boundary value problem for a nonlocal version of the Ginzburg-Landau variational equation is also considered. A theorem on the existence of global smooth solutions is proved, as well as a theorem on the existence of a global attractor, for which their structure and dimension are determined. Justification of these theorems is based on the following result: explicit (exact) formulas are obtained for all solutions of the initial-boundary value problem in the form of converging functional series in two variables.
Keywords: Ginzburg-Landau variational equation, stability, local bifurcations, global attractor.
MSC 2010: 37L10, 37L25

1. Введение

Уравнение для комплекснозначной функции $u(t,x) = u_1(t,x) + iu_2(t,x)$ вида

$$u_t = u - (1+ic)u|u|^2 + (d+ib)u_{xx}, \tag{1}$$

известно под названием *комплексное уравнение Гинзбурга-Ландау* [6], [7], [8], [9], [12], [14], [16], [20]. Это уравнение, его обобщения и модификации играют значительную роль в нелинейной физике. В обзоре [6] приведен широкий спектр приложений, где используется это уравнение. Среди них можно назвать гидродинамику, теорию сверхпроводимости, нелинейную оптику и многие другие. Здесь $b, d, c \in \mathbb{R}, d \geq 0, b^2 + d^2 \neq 0$.

Если $c = b = 0, d > 0$, то этот вариант уравнения (1), т. е. дифференциальное уравнение

$$u_t = u - u|u|^2 + du_{xx} \tag{2}$$

известно под названием *вариационное комплексное уравнение Гинзбурга-Ландау* [3], [6], [13]. Это название отражает в некоторой степени метод вывода этого уравнения (см. [6]) как необходимого условия экстремума функционала “энергии” . Уравнение (2) своим появлением обязано теории конденсированных сред. В этом разделе физики для него используют иногда другое название: “ψ^4 — модель” теории конденсированных сред. Уравнение (2) в физике чаще всего рассматривают вместе с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \tag{3}$$

Равенство периода величине 2π достигается перенормировкой $x \to \gamma x$. В первой части работы будет описана динамика решений краевой задачи (2), (3).

Среди модифицированных вариантов вариационного комплексного уравнения Гинзбурга-Ландау можно отметить следующее уравнение:

$$u_t = u + du_{xx} - uV, \tag{4}$$

где $V = V(u) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |u|^2 dx \, (u = u(t,x))$. Оно появилось в работах [10],[11],[15],[19] в связи с изучением такого явления как ферромагнетизм. Несколько иная версия нелокального уравнения была предложена в [17]. Безусловно, существуют и иные обобщения и модификации уравнения (2), но в данной работе будут изучены краевые задачи (2), (3) и (4), (3), которые, как уже отмечалось, используются во многих разделах физики. Подчеркнем, что $d > 0$.

2. Традиционный вариант вариационного уравнения Гинзбурга-Ландау

В данном разделе изучим краевую задачу (2), (3). Напомним хорошо известный факт. Если краевую задачу (2), (3) дополнить начальным условием

$$u(0,x) = f(x), \tag{5}$$

то при соответствующем выборе пространства начальных условий можно утверждать, что начально-краевая задача (2), (3), (5) корректно разрешима, если $t \in [0, t_0]$, где t_0 – некоторая положительная постоянная величина [7],[8], но эти работы не гарантируют, конечно, глобальную разрешимость при всех положительных t и любых $f(x)$.

Вместе с уравнением (2) рассмотрим ему сопряженное уравнение

$$\overline{u}_t = \overline{u} - \overline{u}|u|^2 + d\overline{u}_{xx},$$

где $u(t,x)$ по переменной x имеет период 2π. Если теперь домножить уравнение (2) на $\overline{u}$, а сопряженное — на u и проинтегрировать обе части получившихся равенств по переменной x от 0 до 2π, а затем их сложить, то получим

$$\int\limits_0^{2\pi} u_t\overline{u}dx + \int\limits_0^{2\pi} \overline{u}_t u dx = 2\int\limits_0^{2\pi} u\overline{u}dx - 2\int\limits_0^{2\pi} u\overline{u}|u|^2 dx + d\int\limits_0^{2\pi}(u_{xx}\overline{u} + \overline{u}_{xx}u)dx =$$
$$= 2\left[\int\limits_0^{2\pi}|u|^2dx - \int\limits_0^{2\pi}|u|^4dx\right] - 2d\int\limits_0^{2\pi}u_x\overline{u}_x dx.$$

Отметим, что $\int\limits_0^{2\pi} u_x\overline{u}_x dx = \int\limits_0^{2\pi}|u_x|^2dx \geq 0$, а $(\int\limits_0^{2\pi}|u|^2dx)^2 \leq 2\pi\int\limits_0^{2\pi}|u|^4dx$ (неравенство Коши-Буняковского). Поэтому

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^{2\pi}|u|^2dx \leq 2\left[\int\limits_0^{2\pi}|u|^2dx - \frac{1}{2\pi}\Big(\int\limits_0^{2\pi}|u|^2dx\Big)^2\right] \leq 0,$$

если $\int\limits_0^{2\pi} |u|^2 dx \ \geq \ 2\pi$. Итак, решения краевой задачи (2), (3) убывают при $||u||^2_{\mathbb{L}_2(0,2\pi)} > 2\pi$. В иных терминах получаем, что краевая задача (2), (3) диссипативна в смысле нормы пространства $\mathbb{H}_0$, т. е. пространства периодических функций, принадлежащих пространству $\mathbb{L}_2(0, 2\pi)$, если $x \in (0, 2\pi)$.

Непосредственной подстановкой можно проверить, что краевая задача (2), (3) имеет одномерные семейства ненулевых состояний равновесия

$$S_m(\varphi_m) : u_m(x, \varphi_m) = \eta_m \exp(imx + i\varphi_m), \tag{6}$$

где $\eta_m > 0$, а φ_m — произвольная действительная постоянная. В фазовом пространстве решений формула (6) задает окружность радиуса η_m с центром в нуле.

Величина η_m определяется из уравнения

$$1 - dm^2 - \eta_m^2 = 0$$

т.е. $\eta_m = \sqrt{1 - dm^2}$, если, конечно, $1 - dm^2 > 0$. В результате получаем, что $m^2 < 1/d$, и, следовательно, $m = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$, где $n = [\sqrt{1/d}]$, если $\sqrt{1/d} \notin \mathbb{N}$ (множеству натуральных чисел) или $n = [\sqrt{1/d}] - 1$, если $\sqrt{1/d} \in \mathbb{N}$ (подчеркнем, что $n = 0$, если $\sqrt{1/d} < 1$). Через $[b]$ обозначена целая часть $b \in \mathbb{R}$.

Для анализа устойчивости состояний равновесия семейства $S_m(\varphi_m)$ удобно и целесообразно положить

$$u(t, x) = \eta_m \exp(imx + i\varphi_m)[1 + w(t, x)]. \tag{7}$$

В результате замены (7) после преобразований получаем краевую задачу для функции $w(t, x)$

$$w_t = -\eta_m^2(w + \overline{w}) - \eta_m^2[2w\overline{w} + w^2 + w|w|^2] + dw_{xx} + 2dimw_x, \tag{8}$$

$$w(t, x + 2\pi) = w(t, x), \tag{9}$$

у которой следует изучить устойчивость нулевого решения. Для этого, как обычно, рассмотрим линеаризованный вариант краевой задачи (8), (9):

$$w_t = -\eta_m^2(w + \overline{w}) + dw_{xx} + 2dimw_x, \tag{10}$$

$$w(t, x + 2\pi) = w(t, x). \tag{11}$$

В работе [3] было доказано утверждение о том, что решение (6) с номером m устойчиво, если справедливо неравенство

$$d < d_m = \frac{2}{6m^2 - 1},$$

где $m = \pm 1, \ldots, \pm n$, а решение с номером $m = 0$ устойчиво при всех значениях параметров. В этой же статье было доказано утверждение.

Теорема 1. *Краевая задача (2), (3) имеет* $2n+1$ *семейств одномодовых состояний равновесия*

$$S_m(\varphi_m) : u_m(x, \varphi_m) = \eta_m \exp(imx + i\varphi_m),\ \varphi_m \in \mathbb{R},\ m = 0, \pm 1, \ldots, \pm n,$$

где величина n *была определена ранее, а* $\eta_m = \sqrt{1 - dm^2}$.

Каждое решение из семейства $S_m(\varphi_m)$ *устойчиво, если справедливо неравенство* $d < d_m$ $(d_m = 2/(6m^2 - 1))$ *и неустойчиво, если* $d > d_m$.

Отметим, что при $d = d_m$ реализуется критический случай трехкратного нулевого собственного значения спектра устойчивости. Подчеркнем, что при $d = d_m$ линейный дифференциальный оператор

$$Av = -\eta_m^2(v + \overline{v}) + dv_{xx} + 2\dim v_x,$$

где $v = v(x)$ удовлетворяет периодическим краевым условиям $v(x + 2\pi) = v(x)$, имеет трехкратное нулевое собственное значение, отвечающее собственным функциям (см. [3])

$$e_0(x) = i,\ e_1(x) = \cos x - 2im \sin x,\ e_2(x) = \sin x + 2im \cos x.$$

Там же было показано, что при

$$d = d_m(1 + \varepsilon\gamma/2),\ \gamma \in \mathbb{R}, m = \pm 1, \ldots, \pm n$$

из состояний равновесия семейства $S_m(\varphi_m)$ краевой задачи (2), (3) при $\gamma < 0$ рождается двумерное инвариантное многообразие $M_2(\varepsilon, \varphi_m)$, заполненное состояниями равновесия. Все эти состояния равновесия неустойчивы. Для них получены асимптотические формулы

$$u_m(t, x, \varepsilon) = u_m(x, \varepsilon) = \eta_m \exp(imx + i\varphi_m)\Big[1 + \varepsilon^{1/2} a_m[\cos(x + \psi_m) - 2im \sin(x + \psi_m)] +$$
$$+ \varepsilon a_m^2[q_0 + q_1 \cos(2x + 2\psi_m) + iq_2 \sin(2x + 2\psi_m)] + o(\varepsilon)\Big],$$

где $a_m = \sqrt{\dfrac{6m^2 - 1}{3(16m^4 - 1)}}$, $q_0 = -\dfrac{4m^2 + 3}{4}$, $q_1 = \dfrac{1 - 4m^2}{4}$, $q_2 = \dfrac{m(4m^2 - 1)}{2}$, $\varphi_m, \psi_m \in \mathbb{R}$.

В работе [3] найдены состояния равновесия, отличные от уже указанных выше, которые будем называть состояниями равновесия третьего типа:

$$u = u(x) = p_m sn(\delta_m x, k),$$

где $k \in (0,1)$ — параметр эллиптического синуса $sn(y,k)$,

$$p_m = \frac{\sqrt{2}k_m}{\sqrt{1+k_m^2}},\ \delta_m = \frac{1}{\sqrt{d}\sqrt{1+k_m^2}}.$$

Величину k_m выбираем как принадлежащий интервалу $(0,1)$ корень уравнения

$$\frac{1}{m\sqrt{d}} = \frac{2}{\pi}(1+k^2)^{1/2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dy}{\sqrt{1-k^2\sin^2 y}},$$

у которого существует только одно решение $k = k_m = k_m(d)$ при $dm^2 < 1$.

Все состояния равновесия третьего типа неустойчивы.

3. Периодическая краевая задача для нелокального уравнения Гинзбурга-Ландау

В данном разделе будет рассмотрена краевая задача (4), (3). Этот вариант краевой задачи, в отличие от краевой задачи (2), (3), ранее не изучался. Краевая задача (4), (3) имеет нулевое решение, которое, конечно, неустойчиво, так как спектр устойчивости линеаризованной краевой задачи (4), (3):

$$u_t = u + du_{xx},\ u(t,x+2\pi) = u(t,x)$$

содержит собственное значение $\lambda_0 = 1 > 0$.

Решение краевой задачи (4), (3) можно представить в виде ряда Фурье

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t)\exp(inx),\ u_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(t,x)\exp(-inx)dx, n = 0, \pm 1, ...$$

В результате для $u_n(t)$ получим систему из счетного числа обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$u_n' = (1-dn^2)u_n - u_n V(u), \tag{12}$$

где $u_n = u_n(t)$, $V(u) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|u_k|^2$. Последняя формула вытекает из равенства Парсеваля. Систему дифференциальных уравнений (12) можно дополнить начальными условиями

$$u_n(0) = f_n, n \in \mathbb{Z}, \tag{13}$$

где $f_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\exp(-inx)dx$.

В этом разделе будем считать, что $f(x) \in \mathbb{H}_k$. Через $\mathbb{H}_k$ обозначим, как обычно, пространство 2π периодических функций, для которых справедливо включение $f(x) \in \mathbb{W}_2^k[0,2\pi]$, если $x \in [0,2\pi]$ ($\mathbb{W}_2^k[0,2\pi]$ — пространство Соболева). Следовательно, последовательность $\{f_k\}$ принадлежит $\mathbb{H}_{k,d}$ — дискретному аналогу пространства $\mathbb{H}_k$. В частности, сходятся ряды

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{2p}|f_n|^2,\ p = 0, 1, \dots k.$$

Замечание 1. Если $k = 0$ (рассматривается $\mathbb{H}_0$), тогда речь идет о пространстве периодических функций при $x \in (0, 2\pi)$, принадлежащих $\mathbb{L}_2(0, 2\pi)$. Наконец, $\mathbb{H}_{0,d} = l_2$ — пространство последовательностей $\{a_k\}, k = 0, \pm 1, \pm 2...$ для которых сходится ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$.

Положим

$$u_n = u_n(t) = r_n(t)\exp(i\varphi_n(t)) = r_n \exp(i\varphi_n), \tag{14}$$

$$f_n = \rho_n \exp(i\psi_n), \rho_n, \psi_n \in \mathbb{R},$$

где значения функций $\varphi_n(t), r_n(t) \in \mathbb{R}$, и, кроме того, $r_n \geq 0$.

В результате замен (14) вместо задачи Коши (12), (13) получим две новые задачи Коши

$$r_n' = a_n r_n - r_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k^2,\ a_n = 1 - dn^2, \tag{15}$$

$$r_n(0) = \rho_n, n = 0, \pm 1, \dots \tag{16}$$

$$\varphi_n' = 0, \varphi_n(0) = \psi_n, n = 0, \pm 1, ... \tag{17}$$

Задача Коши (17) имеет решение $\varphi_n(t) = \psi_n$. Следовательно, содержательным моментов является только анализ краевой задачи (15), (16).

Будем предполагать сначала, что $a_s \neq 0\,(d \neq 1/s^2)$. Рассмотрим два уравнения из системы (15). Одно из них с произвольным номером $s \neq 0$, а второе с номером $n = 0$, т.е. уравнения

$$r_s' = a_s r_s - r_s V(r),\ r_0' = a_0 r_0 - r_0 V(r).$$

Если теперь первое из них домножить на r_0, а второе на r_s и вычесть почленно, то получим равенство $r_s' r_0 - r_0' r_s = (a_s - a_0) r_s r_0$ и после преобразований

$$\left(\frac{r_s}{r_0}\right)' = (a_s - a_0)\frac{r_s}{r_0},\ a_s - a_0 = -ds^2,$$

где $r_s(0) = \rho_s,\ r_0(0) = \rho_0$. Откуда находим, что

$$r_s(t) = \beta_s r_0(t)\exp(-ds^2 t),\ \beta_s = \frac{\rho_s}{\rho_0}.$$

Следовательно,

$$V(r) = \frac{r_0^2(t)}{\rho_0^2}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\rho_s^2\exp(-2ds^2 t) = \frac{r_0^2(t)}{\rho_0^2}W(t),\ W(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty}\rho_s^2\exp(-2ds^2 t),$$

где $W(t)$ — известная функция переменного t. Подчеркнем, что ряд в правой части последней формулы сходится при всех неотрицательных t, если, конечно, последовательность $\{\rho_s\} \in l_2$. Более того, функция $W(t)$ при всех $t > 0$ имеет производные любого порядка, т.к. ряды для $W(t)$ и $W^{(m)}(t)$:

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty}\rho_s^2\exp(-2ds^2 t),\ \sum_{s=-\infty}^{\infty}\rho_s^2(-2ds^2)^m\exp(-2ds^2 t)$$

при всех натуральных m и $t \geq t_0$ сходятся равномерно (t_0 - любая положительная постоянная).

В результате получаем, что функция $r_0(t)$ может быть определена как решение следующей задачи Коши:

$$r_0' = r_0 - r_0^3 W_0(t), r_0(0) = \rho_0,$$

где $W_0(t) = \dfrac{1}{\rho_0^2}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\rho_n^2\exp(-2dn^2 t)$.

Уравнение для $r_0(t)$ — это уравнение Бернулли, что позволяет найти r_0 в явном виде:

$$r_0(t) = \rho_0\frac{\exp(t)}{\sqrt{1+S(t)}},\ S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\rho_n^2}{a_n}(\exp(2a_n t) - 1).$$

Следовательно,

$$r_n(t) = \rho_n\frac{\exp(a_n t)}{\sqrt{1+S(t)}}.$$

Функция $S(t)$ обладает следующими свойствами:

1. $S(t) \geq 0$ при всех $t,\ S(0) = 0, S(t) > 0$, если $t > 0$;

2. При $t > 0$ функция $S(t)$ имеет производные любого порядка ($S(t) \in \mathbb{C}^\infty(0,\infty)$). Проверка достаточно стандартна. Во-первых, при $t > 0$ справедливо неравенство $(\exp(2a_n t) - 1)/a_n > 0$. Во-вторых,

$$S'(t) = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\rho_n^2\exp(2a_n t),\ S''(t) = 4\sum_{n=-\infty}^{\infty}\rho_n^2 a_n\exp(2a_n t)$$

и при $t \geq t_0 > 0$, где t_0 — любая положительная постоянная, ряды в правой части последних формул равномерно сходятся. Аналогично доказываем, что существуют производные $S(t)$ любого порядка.

Был разобран общий случай, когда предполагалось, что $\rho_k \neq 0, a_k \neq 0$ при любых целых k. Два особых случая следует разобрать отдельно.

Пусть $\rho_s = 0$ при каком-то $s \in \mathbb{Z}$, то $r_s(t) \equiv 0$, а в формуле для $S(t)$ отсутствует слагаемое с этим номером. Перейдем ко второму особому случаю.

Если d — такая постоянная, что $a_p = 0$ при некотором p : $(a_{-p} = 0)$, т.е. $d = 1/p^2$, то меняется формула для $S(t)$. В последнем случае получаем, что

$$S(t) = \sum_{n=-\infty, n\neq p,-p}^{\infty} \frac{p_n^2}{a_n}(\exp(2a_n t) - 1) + 2(\rho_p^2 + \rho_{-p}^2)t.$$

Возвратимся к комплексной форме записи, т.е. к задаче Коши (12), (13). Получаем, что

$$u_k(t) = \rho_k \exp(i\psi_k)\frac{\exp(a_k t)}{\sqrt{1+S(t)}} = f_k \frac{\exp(a_k t)}{\sqrt{1+S(t)}}. \tag{18}$$

.

Наконец, решение краевой задачи (4), (3)

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1+S(t)}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k \exp(i\psi_k)\exp(a_k t)\exp(ikx)$$

или

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1+S(t)}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \exp(a_k t)\exp(ikx), \tag{19}$$

если вспомнить, что $f_k = \rho_k \exp(i\psi_k)$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $f(x) \in \mathbb{H}_k$ $(k = 0, 1, 2...)$.*

1. Тогда функция $u(t,x) \in \mathbb{C}^\infty$, если $t > 0$ $(t \geq t_0 > 0)$.

2. Формула (19) определяет решение $u(t,x)$ начально-краевой задачи (4), (3), (5), для которого $\lim\limits_{t\to 0+} u(t,x) = f(x)$. Этот предел следует понимать в смысле нормы пространства $\mathbb{H}_k$.

Замечание 2. Краевая задача (4), (3) демонстрирует все свойства, характерные для параболических уравнений (см. определения из [2],[4]).

Возвратимся теперь к анализу краевой задачи (4), (3), для которой мы только что показали существование решения при всех $t > 0$, т.е. существование глобального решения начально-краевой задачи (4), (3), (5).

Перейдем к следующему вопросу при анализе краевой задачи (4), (3): это вопрос о поведении ее решений при $t \to \infty$.

Теорема 3. *Краевая задача (4), (3) имеет однопараметрическое семейство состояний равновесия* A_0 :

$$u(t,x) = u_0(x) = \exp(i\varphi_0), \varphi_0 \in \mathbb{R},$$

а также n *трехпараметрических семейств состояний равновесия* A_m :

$$u(t,x) = u_m(x) = \eta_m \exp(imx + i\varphi_m) + \eta_{-m} \exp(-imx + i\varphi_{-m}),$$

где φ_m, φ_{-m} *— произвольные действительные постоянные,* η_m, η_{-m} *— неотрицательные постоянные, для которых справедливо равенство*

$$\eta_m^2 + \eta_{-m}^2 = a_m.$$

Они существуют при тех номерах $m, -m$*, для которых* $a_m = 1 - dm^2 > 0$*, т.е.* $m = 1, \ldots, n$*, где* $n = [\sqrt{1/d}]$*, если* $\sqrt{1/d} \notin \mathbb{N}$ *и* $n = [\sqrt{1/d}]-1$*, если* $\sqrt{1/d} \in \mathbb{N}$.

Пусть $\{0\}$ — нулевое состояние равновесия. Положим $A = \{0\} \bigcup A_0 \bigcup\limits_{m=1}^{n} A_m$, где n было определено ранее (сумма $\bigcup\limits_{m=1}^{n} A_m$ отсутствует, если $n = 0$). Справедливо утверждение.

Теорема 4. *Инвариантное множество* A *— глобальный аттрактор для решений краевой задачи (4), (3).*

Напомним, что инвариантное множество A является глобальным аттрактором, если все решения краевой задачи с начальными условиями, которые не принадлежат инвариантному множеству A с течением времени приближаются к нему.

Справедливость теоремы 2 проверяется подстановкой указанных решений в краевую задачу (4), (3) (см. формулу (19)) и аналогично проверяется справедливость теоремы 3.

Для доказательства теоремы 4 необходимо доказать, что решение краевой задачи (4), (3) с течением времени приближаются к A. В свою очередь, множество A состоит $n+2$ несвязанных компонент: $\{0\}$ и $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Следовательно, необходимо показать, что любое решение $u(t,x) \notin A$ с течением времени приближается к одной из указанных компонент и проверка данного свойства краевой задачи (4), (3) может быть сведена к доказательству трех утверждений.

Рассмотрим вспомогательную систему дифференциальных уравнений (12) и пусть $f_0 \neq 0\,(\rho_0 \neq 0)$, где f_0 — коэффициент ряда Фурье функции $f(x)$, а $\rho_0 = |f_0|$.

Тогда справедливо утверждение.

Лемма 1. $\lim\limits_{t\to\infty} |u_m(t)| = 0$*, если* $m = \pm 1, \ldots,$ *а* $\lim\limits_{t\to\infty} |u_0(t)| = 1$.

Утверждение $\lim\limits_{t\to\infty}|u_0(t)| = 1$ сводится к проверке предельного равенства

$$\lim_{t\to\infty}\rho_0\frac{\exp(t)}{\sqrt{1+S(t)}} = 1,$$

т.к. $|u_0(t)| = r_0(t)$, а $r_0(t) = \rho_0\dfrac{\exp(t)}{\sqrt{1+S(t)}}$. С другой стороны

$$\rho_0\frac{\exp(t)}{\sqrt{1+S(t)}} = \frac{\rho_0}{\sqrt{K(t)}},$$

где $K(t) = \exp(-2t) + \dfrac{\rho_0^2}{a_0}(1-\exp(-2t)) + \sum\limits_{m=-\infty, m\neq 0}^{\infty}\dfrac{\rho_m^2}{a_m}(\exp(-2dm^2t) - \exp(-2t))$. Ясно, что $\lim\limits_{t\to\infty}K(t) = \rho_0^2/a_0 = \rho_0^2$ $(a_0 = 1)$. Отметим, что каждый член равномерно сходящегося ряда стремится к нулю при $t\to\infty$.

Кроме того, при $m\neq 0$ функция

$$|u_m(t)| = r_m(t) = \frac{\rho_m}{\rho_0}\exp(-dm^2t)r_0(t)$$

и, следовательно, при $t\to\infty$ имеет нулевой предел. Из леммы 1, естественно, вытекает, что таким образом выбранные решения краевой задачи (4), (3)

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}u_k(t)\exp(ikx),\ u_k(t) = f_k\frac{\exp(a_kt)}{\sqrt{1+S(t)}}$$

приближаются к циклу A_0.

Рассмотрим теперь второй вариант выбора начальных условий. Пусть

$$f_0 = 0, \ldots, f_{\pm(l-1)} = 0,$$

но $|f_l|^2 + |f_{-l}|^2 \neq 0$, где натуральное число $l\leq n$. Итак, справедливо утверждение.

Лемма 2. $\lim\limits_{t\to\infty}|u_l(t)|^2 = \dfrac{\rho_l^2}{\rho_l^2+\rho_{-l}^2}a_l, \lim\limits_{t\to\infty}|u_{-l}(t)|^2 = \dfrac{\rho_{-l}^2}{\rho_l^2+\rho_{-l}^2}a_{-l}, \quad a_l = a_{-l} = 1-dl^2$ *и* $\lim\limits_{t\to\infty}|u_k(t)| = 0$, *где* $|k|>l$.

Доказательство леммы 2 использует то обстоятельство, что условие $f_0 = 0, \ldots, f_{\pm(l-1)} = 0$ влечет тождества $u_0(t) = 0, \ldots, u_{\pm(l-1)} = 0$. После чего вычисляются соответствующие пределы практически тем же способом, который был использован при доказательстве леммы 1.

Лемма 3. *Пусть* $k>n$. *Тогда*

$$\lim_{t\to\infty}u_{\pm k}(t) = 0.$$

Действительно,

$$|u_k(t)| = \rho_k \frac{\exp(a_k t)}{\sqrt{1+S(t)}} \leq \rho_k \exp(a_k t),$$

но при этих k справедливо неравенство $a_k < 0$. Лемма доказана.

Из леммы 2 вытекает, что все решения краевой задачи (4), (3), если выполнены условия леммы 2 приближаются к инвариантному многообразию A_l.

Из леммы 3, в частности, вытекает следующее. Пусть $f_0 = 0, f_{\pm 1} = 0, \ldots, f_{\pm(k-1)} = 0\,(k > n)$. Тогда $u_0(t) \equiv 0, u_{\pm 1}(t) \equiv 0, \ldots, u_{\pm(k-1)} \equiv 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} u_m(t) = 0$ при всех m. Последнее означает, что соответствующие решения краевой задачи (4), (3) стремятся к нулю, если $t \to \infty$.

Непосредственным следствием теоремы 3 будет утверждение о том, что A_0 – локальный аттрактор, а оставшиеся компоненты глобального аттрактора A, т.е. $A_1, A_2, \ldots, A_n, \{0\}$ седловые инвариантные многообразия в смысле классического определения устойчивости инвариантных многообразий.

Действительно, пусть $u(0,x) = f(x)$, где функция $f(x)$ близка к циклу A_0. Тогда, $|f_0| \neq 0$, т.е. $\rho_0 \neq 0$. Из теоремы 4 и леммы 1 вытекает, что такое решение приближается к циклу A_0 и он устойчив.

Пусть теперь $u(0,x) = f_l(x)$, где функция $f_l(x)$ близка к трехмерному инвариантному многообразию A_l. При этом среди функций $f_l(x)$ можно взять такую, что $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_l(x)dx = \delta$, где $\delta \neq 0$, но тем не менее δ — достаточно малая положительная постоянная. Но опять же, из теоремы 4 и леммы 1 вытекает, что функция $u_l(t,x)$ соответствующая $f_l(x)$, также приближается к A_0, но не к A_l и не к $\{0\}$.

Если взять подпространство пространства начальных условий, выделенное равенствами

$$f_0 = 0, f_{\pm 1} = 0, \ldots, f_{\pm(l-1)} = 0,\ l \leq n,$$

то решения краевой задачи (4), (3) с начальными условиями, для которых $|f_l|^2 + |f_{-l}|^2 \neq 0$ с течением времени приближаются к A_l. Можно сказать, что трехмерное инвариантное многообразие A_l “условно” устойчиво. Напомним, что неустойчивость $\{0\}$ вытекает из линейного анализа краевой задачи (4), (3).

4. Заключение

В статье рассмотрены две версии вариационного уравнения Гинзбурга-Ландау с периодическими краевыми условиями.

Результаты анализа традиционного варианта вариационного уравнения Гинзбурга-Ландау показали, что краевая задача (2), (3) при достаточно малом

d имеет некоторое количество одномодовых состояний равновесия, часть которых асимптотически устойчива. Анализ возникающих бифуркационных задач показал, что для краевой задачи (2), (3) характерны жесткие докритические бифуркации. Они приводят к образованию в окрестности одномодовых состояний равновесия двумерных седловых инвариантных многообразий, сформированных пространственно неоднородными решениями, неустойчивыми паттернами.

В работах [7], [8] был изучен вопрос о существовании глобального аттрактора для краевой задачи (2), (3). Из результатов этих работ вытекает, что глобальный аттрактор существует, но при существенных ограничениях. Он существует для решений с начальными условиями, принадлежащими $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$. Кроме того, в этих работах использован метод, который не позволяет определить структуру глобального аттрактора и его размерность. Возможна лишь оценка размерности глобального аттрактора.

Иная ситуация реализована при анализе краевой задачи (4), (3) для нелокального варианта вариационного уравнения Гинзбурга-Ландау. В этом случае глобальный аттрактор и глобальные решения существуют при любом выборе периодических функций $f(x) \in \mathbb{L}_2(0, 2\pi)$. Структура глобального аттрактора достаточна проста — это совокупность состояний равновесия, в том числе, неоднородных. При этом глобальный аттрактор разбивается на $n+2$ компоненты, где $n = [\sqrt{1/d}]$ или $n = [\sqrt{1/d}] - 1$ и размерность их равна 1 или 3, если не считать нулевое состояние равновесия. Напомним, что

$$\dim(A_0) = 1,\ \dim(A_k) = 3,\ k = 1, \dots, n,$$

где $n = [\sqrt{1/d}]$, если $\sqrt{1/d} \notin \mathbb{N}$ или $n = [\sqrt{1/d}] - 1$, если $\sqrt{1/d} \in \mathbb{N}$.

Уместно отметить, что в большинстве работ, где изучался вопрос о существовании глобальных аттракторов для известных эволюционных уравнений или систем, как правило, приводилась лишь оценка его размерности (см, например, [1], [5],[18], а также литературные ссылки в этих работах).

Список цитируемых источников

1. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1988.

   Babin A. V., Vishik M. I. Attractors of evolutionary equations. M.: Nauka, 1988.

2. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1977.

   Krein S. G. Linear Equations in Banach Spaces. M.: Nauka, 1977.

3. *Куликов А. Н., Куликов Д. А.* Состояния равновесия вариационного уравнения Гинзбурга-Ландау. Вестник МИФИ. 6, No.6, 496-502 (2017).

Kulikov A. N., Kulikov D. A. Equilibrium states of the variational Ginzburg-Landau equation. Vestnik MIFI. 6, No.6, 496-502 (2017).

4. *Соболевский П. Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве. Труды ММО. 10, 297-350 (1961).

   Sobolevskii P. E. Equations of a parabolic type in a Banach space. Moscov. Mat. Obsc. 10, 297–350 (1961).

5. *Чуешов И. Д.* Глобальные аттракторы в нелинейных задачах математической физики. УМН. 48, No.3, 135-162 (1993).

   Chueshov I. D. Global attractors for non-linear problems of mathematical physics. Uspekhi Mat. Nauk. 48, No.3, 135-162 (1993).

6. *Aronson I. S., Kramer L.* The world of the complex Ginzburg-Landau equation. Reviews of modern physics. 74, 99-143 (2002).

7. *Bartucelli M., Constantin P., Doerling C. R., Gibbon J. D., Gisselfalt M.* On the possibility of soft and hard turbulence in the complex Ginzburg–Landau equation. Physica D. V. 44, 421-444 (1990).

8. *Doering Ch. R., Gibbon J. D., Levermore C. D.* Weak and strong solutions of the complex Ginzburg-Landau equation. Physica D. 71, 285-318 (1994).

9. *Drazin P. G.* Introduction to hydrodynamic stability. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002.

10. *Duan J., Hung V. L., Titi E. S.* The effect of nonlocal interactions on the dynamics of the Ginzburg–Landau equation. ZAMP. 47, 432-455 (1996).

11. *Elmer F. J.* Nonlinear and nonlocal dynamics of spatially extended systems: stationary states, bifurcations and stability. Physica D. 30, 321-341 (1988).

12. *Kulikov A. N., Kulikov D. A.* Local bifurcations of plane running waves for the generalized cubic Schrodinger equation. Differential Equation. 46, 1299–1308 (2010).

13. *Kulikov A. N., Rudy A. S.* States of equilibrium of condensed matter within Ginzburg-Landau ψ^4 — model. Chaos, Solitons and Fractals. 15, 75-85 (2003).

14. *Kuramoto Y.* Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin.: Springer, 1984.

15. *Matkowsky B. J., Volpert V. A.* Coupled nonlocal complex Ginzburg–Landau equations in gasless combustion. Physica D. 54, 203-219 (1992).

16. *Scheuer J., Malomed B. A.* Stable and chaotic solutions of the Ginzburg–Landau equation with periodic boundary conditions. Physica D. 161, 102-115 (2002).

17. *Tanaka D., Kuramoto Y.* Complex Ginzburg–Landau equation with nonlocal coupling. Phys. Review E. E68, 026219-1-026219-8 (2003).

18. *Temam R.* Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. New York: Springer-Verlag, 1997.

19. *Volpert V. A., Nepomnyaschchy A., Stanton L., Golovin A. A.* Bounded Solutions of Nonlocal Complex Ginzburg–Landau Equations for a Subcritical Bifurcation. SIAM. 7, 265-283 (2008).
20. *Whitham G. B.* Linear and Nonlinear Waves. New-York: John Wiley and Sons Inc, 1974.

Получена 15.05.2020