Динамические системы, 2020, том 10(38), №2, 179–196

УДК 517.9+532

Задача о нормальных колебаниях тела, частично заполненного идеальной однородной жидкостью, под действием упругодемпфирующего устройства

К. В. Фордук

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: forduk_kv@mail.ru*

Аннотация. В работе изучается задача о свободных колебаниях тела, частично заполненного идеальной однородной жидкостью, под действием упругодемпфирующего устройства. Доказано, что исследуемая задача имеет дискретный спектр, локализованный в вертикальной полосе, исследована асимптотика спектра. Доказана теорема о базисности по Абелю-Лидскому системы корневых элементов задачи.

Ключевые слова: идеальная жидкость, упругодемпфирующее устройство, спектр, базис Абеля-Лидского.

A Problem on the Normal Oscillations of a Body Partially Filled with an Ideal Homogeneous Fluid under the Action of an Elastic Damping Device

K. V. Forduk

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. We investigate a problem on normal oscillations of a body partially filled with an ideal homogeneous fluid under the action of an elastic damping device. We prove that the problem has a discrete spectrum localized in a vertical strip. The asymptotic behavior of the spectrum is investigated. The theorem on the Abel-Lidsky basis property of root elements of the problem is proven.

Keywords: ideal fluid, elastic damping device, spectrum, basis of Abel-Lidsky.

MSC 2010: 35Q35, 34L20

Введение

В работе исследуется задача о нормальных колебаниях тела, частично заполненного идеальной однородной жидкостью под действием упругодемпфирующего устройства. Эта задача поставлена профессором Н. Д. Копачевским, полученные ранее результаты о сильной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи опубликованы в работах [7, 8].

1. Постановка начально-краевой задачи

Рассмотрим открытый сосуд, частично заполненный однородной идеальной жидкостью плотности $\rho > 0$, которая в состоянии покоя занимает область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ со свободной границей Γ и твердой стенкой S. В состоянии покоя границу Γ считаем горизонтальной прямой. За счет наличия двух пружин, прикрепленных к твердой стенке сосуда, как показано на рис. 1, и неподвижной горизонтальной твердой поверхности, взаимодействующей со дном сосудам, на тело действуют упругие и демпфирующие силы.

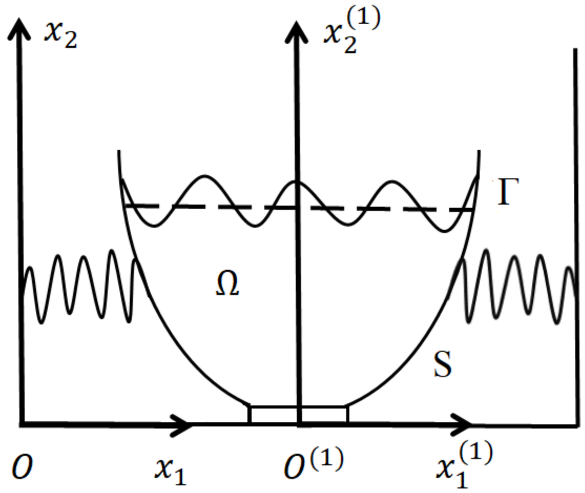

Рис. 1. Схема гидромеханической системы

Для описания малых движений системы введем неподвижную систему координат Ox_1x_2 с ортами $\mathbf{e}_j$, $j = 1, 2$, так, чтобы тело совершало движения вдоль оси Ox_1. Кроме того, введем подвижную систему координат $O^{(1)}x_1^{(1)}x_2^{(1)}$, жестко связанную с телом. Орты подвижной системы обозначим через $\mathbf{e}_j^{(1)}$, $j = 1, 2$. При этом $\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j^{(1)}$. Будем исследовать малые колебания указанной гидромеханической системы под действием внешней силы $\mathbf{f}_b$ и гравитационного поля $-g\mathbf{e}_2$, где g — ускорение свободного падения.

В процессе малых движений тела рассмотрим $x(t)\mathbf{e}_1$ — вектор перемещения тела, $\dot{x}(t)\mathbf{e}_1$ — вектор скорости тела, $\ddot{x}(t)\mathbf{e}_1$ — вектор ускорения тела.

Обозначим через $\mathbf{u}(t, x^{(1)})$ — поле относительных скоростей частиц жидкости. Тогда абсолютная скорость жидкости будет определяться выражением

$\mathbf{u}(t, x^{(1)}) + \dot{x}(t)\mathbf{e}_1$.

Пусть $\zeta(t, x_1^{(1)})$ $(x_1^{(1)} \in \Gamma)$ — функция, описывающая малые отклонения свободной границы $\Gamma(t)$ вдоль $\mathbf{e}_2^{(1)}$ относительно равновесной прямой Γ, описываемой уравнением $x_2^{(1)} = b$, по формуле:

$$b + \zeta(t, x_1^{(1)}) = x_2^{(1)}, \qquad |\zeta| \ll 1.$$

Используя второй закон Ньютона, запишем уравнение движения тела с жидкостью:

$$m\ddot{x}\mathbf{e}_1 + \rho \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\, d\Omega + (k_0^2 + k_1^2)x\mathbf{e}_1 + \alpha\dot{x}\mathbf{e}_1 = k_0^2 x_0 \mathbf{e}_1 + k_1^2 x_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{f}_b + N(t)\mathbf{e}_2 - gm\mathbf{e}_2, \quad (1.1)$$

где $m = m_b + m_f$ — масса тела с жидкостью (m_b — масса тела, m_f — масса жидкости), $N(t)\mathbf{e}_2$ — реакция опоры, действующая на систему, k_0^2 — коэффициент жесткости левой пружины, k_1^2 — коэффициент жесткости правой пружины, x_0 — заданный закон движения левой стенки, x_1 — заданный закон движения правой стенки, $\alpha > 0$ — коэффициент трения дна сосуда о горизонтальную опору.

Малые движения идеальной однородной жидкости описываются линеаризованным уравнением Эйлера:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \ddot{x}\mathbf{e}_1^{(1)}\right) + \nabla p = \rho \mathbf{f}_f, \qquad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad (1.2)$$

где $p = p(t, x^{(1)})$ — отклонение давления в жидкости в процессе движения от равновесного давления, а $\mathbf{f}_f = \mathbf{f}_f(t, x^{(1)})$ — сила, действующая на жидкость.

Граничными условиями в рассматриваемой задаче являются условие непротекания идеальной жидкости на твердой стенке S, а также динамические, кинематические условия на границе Γ и условие сохранения объема жидкости соответственно:

$$\begin{aligned} &u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{на } S), &&p = \rho g \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \\ &\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_2^{(1)} \quad (\text{на } \Gamma), &&\int_\Gamma \zeta\, d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к границе $\partial\Omega := S \cup \Gamma$. На границе Γ, очевидно, будет выполнено соотношение $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2^{(1)}$.

Начальные условия имеют вид

$$x(0) = x^0, \quad \dot{x}(0) = x^1, \quad \mathbf{u}(0, x^{(1)}) = \mathbf{u}^0(x^{(1)}), \quad \zeta(0, x_1^{(1)}) = \zeta^0. \quad (1.4)$$

Таким образом, полная постановка исследуемой начально-краевой задачи состоит в решении уравнений (1.1)-(1.2) с краевыми и начальными условиями (1.3)-(1.4).

Теорема 1. *Будем считать, что поставленная задача* (1.1)-(1.4) *имеет классическое решение — когда все функции в уравнениях, граничных и начальных условиях непрерывны относительно своих переменных. Тогда тождество*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{m_b(\dot{x})^2 + \rho\int_\Omega \left|\mathbf{u} + \dot{x}\mathbf{e}_1^{(1)}\right|^2 d\Omega + (k_0^2 + k_1^2)x^2 + \rho g\int_\Gamma |\zeta|^2 d\Gamma\right\} =$$

$$= -\alpha\dot{x}^2 + (\mathbf{f}_b\cdot\mathbf{e}_1)\dot{x} + \rho\int_\Omega \mathbf{f}_f\cdot\mathbf{u}\,d\Omega + k_0^2x_0\dot{x} + k_1^2x_1\dot{x} \qquad (1.5)$$

представляет собой закон баланса полной энергии исследуемой гидромеханической системы, записанный в дифференциальной форме.

Замечание 1. В соотношении (1.5) слева в фигурных скобках стоят удвоенные кинетическая и потенциальная энергии системы, а справа — мощность силы трения и мощность внешних сил, действующих на систему.

2. Выбор функциональных пространств. Проектирование уравнения движения жидкости

Из закона (1.5) следует, что для описания движения гидросистемы следует привлечь к рассмотрению такие функциональные пространства, для которых поле скоростей и давление приведут в любой момент времени к конечной кинетической и потенциальной энергиям системы. Перейдем к подробному рассмотрению этого вопроса и введем соответствующие пространства и их подпространства.

Введем гильбертово пространство $\mathbf{L}_2(\Omega)$ векторных полей со скалярным произведением и квадратом нормы

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \int_\Omega \mathbf{u}(x^{(1)})\cdot\overline{\mathbf{v}(x^{(1)})}\,d\Omega, \quad \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} := \int_\Omega |\mathbf{u}(x^{(1)})|^2\,d\Omega.$$

Как известно, применительно к данной задаче, пространство $\mathbf{L}_2(\Omega)$ имеет ортогональное разложение (см., например, [6, стр. 106])

$$\mathbf{L}_2(\Omega) = \mathbf{J}_0(\Omega) \oplus \mathbf{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega), \qquad (2.1)$$

где

$$\mathbf{J}_0(\Omega) := \left\{\mathbf{v}\in\mathbf{L}_2(\Omega):\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \quad (\text{в }\Omega), \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0 \quad (\text{на }\ \partial\Omega)\right\}$$

— подпространство соленоидальных полей с нулевой нормальной составляющей на границе $\partial\Omega$,

$$\mathbf{G}_{h,S}(\Omega) := \left\{\mathbf{u} = \nabla\Phi\in\mathbf{L}_2(\Omega):\ \Delta\Phi = 0 \quad (\text{в }\Omega), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad \int_\Gamma \Phi\,d\Gamma = 0\right\}$$

— подпространство потенциальных гармонических полей, для которых нормальная производная потенциала обращается в ноль на S,

$$\mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega) := \big\{\mathbf{w} = \nabla\Psi \in \mathbf{L}_2(\Omega) : \Psi = 0 \quad (\text{на } \Gamma)\big\}$$

— подпространство потенциальных полей, у которых потенциалы обращаются в ноль на границе Γ.

Далее, для обеспечения конечности потенциальной энергии системы, отвечающей отклонению ζ движущейся границы, введем пространство

$$L_{2,\Gamma} := \Big\{\zeta \in L_2(\Gamma) : \int\limits_{\Gamma} \zeta \, d\Gamma = 0\Big\},$$

которое является подпространством $L_2(\Gamma)$, ортогональным единичной функции $1_\Gamma := 1|_\Gamma$.

Таким образом, далее в исследуемой проблеме векторные и скалярные поля будем считать функциями переменной t со значениями в соответствующих введенных выше пространствах и подпространствах.

В силу постановки задачи поле скорости $\mathbf{u}(t)$ должно принадлежать при любом $t \geq 0$ подпространству $\mathbf{J}_0(\Omega) \oplus \mathbf{G}_{h,S}(\Omega)$, а поле градиентов давлений — подпространству $\mathbf{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$.

Введем согласно разложению (2.1) ортопроекторы P_0, $P_{h,S}$, $P_{0,\Gamma}$ пространства $\mathbf{L}_2(\Omega)$ на его подпространства $\mathbf{J}_0(\Omega)$, $\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)$, $\mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$:

$$P_0 : \mathbf{L}_2(\Omega) \to \mathbf{J}_0(\Omega), \quad P_{h,S} : \mathbf{L}_2(\Omega) \to \mathbf{G}_{h,S}(\Omega), \quad P_{0,\Gamma} : \mathbf{L}_2(\Omega) \to \mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega).$$

Будем разыскивать поле скоростей жидкости в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \nabla\Phi, \qquad \mathbf{v} \in \mathbf{J}_0(\Omega), \quad \nabla\Phi \in \mathbf{G}_{h,S}(\Omega),$$

а градиент поля давлений в следующем виде:

$$\nabla p = \nabla\tilde{p} + \nabla\Psi, \qquad \nabla\tilde{p} \in \mathbf{G}_{h,S}(\Omega), \quad \nabla\Psi \in \mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega). \tag{2.2}$$

Потенциал $\tilde{p}$, в силу (2.2) и динамического соотношения из (1.3), является решением задачи Зарембы для уравнения Лапласа:

$$\Delta\tilde{p} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial\tilde{p}}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad \tilde{p} = \rho g \zeta \quad (\text{на } \Gamma).$$

Будем считать, что граница области Ω липшицева. Тогда известно (см. [6, стр. 45-46]), что такая задача имеет единственное слабое решение

$\nabla\tilde{p} = \rho g Q\zeta \in \mathbf{G}_{h,S}(\Omega)$, если выполнено условие $\zeta \in H_{\Gamma}^{1/2} := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}$, где $H^{1/2}(\Gamma)$ — пространство Соболева-Слободецкого с дробным индексом (см. [3, стр. 71-79]).

Применим ортопроекторы $P_0, P_{h,S}, P_{0,\Gamma}$ к левой и правой частям уравнения движения жидкости (1.2). Получим три соотношения

$$\rho\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \ddot{x}P_0\mathbf{e}_1^{(1)}\right) = \rho P_0\mathbf{f}_f, \tag{2.3}$$

$$\rho\left(\frac{d\nabla\Phi}{dt} + \ddot{x}P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\right) + \rho g Q\zeta = \rho P_{h,S}\mathbf{f}_f, \tag{2.4}$$

$$\rho\ddot{x}P_{0,\Gamma}\mathbf{e}_1^{(1)} + \nabla\Psi = \rho P_{0,\Gamma}\mathbf{f}_f. \tag{2.5}$$

Из соотношений (2.3) и (2.5) найдем вихревую составляющую поля скорости $\mathbf{v}$ и часть динамического давления Ψ, если будет известно смещение x. Поэтому далее будем рассматривать только соотношение (2.4).

Спроектируем уравнение движения тела с жидкостью (1.1) на орты $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, получим следующие связи

$$m\ddot{x} + \rho\int\limits_{\Omega}\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot\mathbf{e}_1\right)d\Omega + (k_0^2 + k_1^2)x + \alpha\dot{x} = k_0^2 x_0 + k_1^2 x_1 + \mathbf{f}_b\cdot\mathbf{e}_1, \tag{2.6}$$

$$\rho\int\limits_{\Omega}\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot\mathbf{e}_2\right)d\Omega = \mathbf{f}_b\cdot\mathbf{e}_2 + N(t) - gm. \tag{2.7}$$

Связь (2.7) дает формулу для нахождения $N(t)$, если будет известно поле скоростей жидкости $\mathbf{u}$. Преобразуем интегральное слагаемое в (2.6). С учетом рассуждений, использованных при выводе соотношения (1.5), найдем, что

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}\frac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot\mathbf{e}_1\,d\Omega &= \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\nabla\Phi\cdot\mathbf{e}_1^{(1)}\,d\Omega + \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1^{(1)}\,d\Omega = \\ &= \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\nabla\Phi\cdot\mathbf{e}_1^{(1)}\,d\Omega + \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\mathbf{v}\cdot\nabla x_1^{(1)}\,d\Omega = \\ &= \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\nabla\Phi\cdot\mathbf{e}_1^{(1)}\,d\Omega + \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\left(\operatorname{div}(x_1^{(1)}\mathbf{v}) - x_1^{(1)}\operatorname{div}\mathbf{v}\right)d\Omega = \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\nabla\Phi\cdot\mathbf{e}_1^{(1)}\,d\Omega.\end{aligned}$$

Отсюда и из (2.6) теперь найдем, что

$$m\ddot{x} + \frac{d}{dt}P_\rho\nabla\Phi + (k_0^2 + k_1^2)x + \alpha\dot{x} = k_0^2 x_0 + k_1^2 x_1 + \mathbf{f}_b\cdot\mathbf{e}_1. \tag{2.8}$$

Здесь оператор P_ρ определен по формуле

$$P_\rho\nabla\Phi := \rho\int\limits_{\Omega}\nabla\Phi\cdot\mathbf{e}_1^{(1)}d\Omega, \quad P_\rho:\ \mathbf{G}_{h,S}(\Omega) \to \mathbb{C}.$$

Введем оператор следа γ_n на границе Γ следующим образом:

$$\gamma_n \nabla\Phi := \nabla\Phi \cdot \mathbf{e}_2^{(1)} = \frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_\Gamma, \quad \gamma_n: \ \mathbf{G}_{h,S}(\Omega) \to L_{2,\Gamma}.$$

Рассмотрим систему уравнений (2.4) и (2.8):

$$\begin{cases} \rho\dfrac{d}{dt}\nabla\Phi + \rho\ddot{x}P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)} + \rho g Q\zeta = \rho P_{h,S}\mathbf{f}_f, \\ m\ddot{x} + \dfrac{d}{dt}P_\rho\nabla\Phi + (k_0^2+k_1^2)x + \alpha\dot{x} = k_0^2x_0 + k_1^2x_1 + \mathbf{f}_b\cdot\mathbf{e}_1. \end{cases} \tag{2.9}$$

Систему (2.9) запишем в виде дифференциально-операторного уравнения первого порядка

$$\begin{pmatrix} \rho I & \rho P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)} \\ P_\rho & mI \end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \nabla\Phi \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nabla\Phi \\ \dot{x} \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} \rho g Q & 0 \\ 0 & (k_0^2+k_1^2)I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho P_{h,S}\mathbf{f}_f \\ \mathbf{f}_b\cdot\mathbf{e}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k_0^2x_0 + k_1^2x_1 \end{pmatrix},$$

которое с учетом обозначений:

$$B_{12} := \begin{pmatrix} \rho g Q & 0 \\ 0 & (k_0^2+k_1^2)I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(B_{12}) = \mathcal{D}(Q)\oplus\mathbb{C},$$
$$C_1 := \begin{pmatrix} \rho I & \rho P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)} \\ P_\rho & mI \end{pmatrix}, \quad P_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$
$$f_1 := \begin{pmatrix} \rho P_{h,S}\mathbf{f}_f \\ \mathbf{f}_b\cdot\mathbf{e}_1 \end{pmatrix}, \quad f_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ k_0^2x_0 + k_1^2x_1 \end{pmatrix},$$
$$z_1 := \begin{pmatrix} \nabla\Phi \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad z_2 := \begin{pmatrix} \zeta \\ x \end{pmatrix},$$

примет вид

$$C_1\frac{dz_1}{dt} + \alpha P_1 z_1 + B_{12}z_2 = f_1 + f_2. \tag{2.10}$$

Рассмотрим систему из двух очевидных связей

$$\begin{cases} \rho g\dfrac{d\zeta}{dt} = \rho g\gamma_n\nabla\Phi, \\ (k_0^2+k_1^2)\dfrac{dx}{dt} = (k_0^2+k_1^2)\dot{x}. \end{cases} \tag{2.11}$$

Систему (2.11) запишем в виде дифференциально-операторного уравнения первого порядка

$$\begin{pmatrix} \rho g I & 0 \\ 0 & (k_0^2+k_1^2)I \end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \zeta \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\rho g\gamma_n & 0 \\ 0 & -(k_0^2+k_1^2)I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nabla\Phi \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которое с учетом введенных выше обозначений и обозначений

$$C_2 := \begin{pmatrix} \rho g I & 0 \\ 0 & (k_0^2 + k_1^2) I \end{pmatrix},$$

$$B_{21} := \begin{pmatrix} -\rho g \gamma_n & 0 \\ 0 & -(k_0^2 + k_1^2) I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(B_{21}) = \mathcal{D}(\gamma_n) \oplus \mathbb{C},$$

примет вид

$$C_2 \frac{dz_2}{dt} + B_{21} z_1 = 0. \tag{2.12}$$

Таким образом, исходная начально-краевая задача о малых движениях тела, частично заполненного идеальной жидкостью, под действием упругих и демпфирующих сил, приводится к дифференциально-операторным уравнениям (2.10), (2.12) с соответствующими начальными условиями. Итак, имеем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} C_1 \dfrac{dz_1}{dt} + \alpha P_1 z_1 + B_{12} z_2 = f_1 + f_2, \\ C_2 \dfrac{dz_2}{dt} + B_{21} z_1 = 0, \end{cases} \tag{2.13}$$

$$z_1(0) = (P_{h,S} \mathbf{u}^0; x^1)^\tau, \quad z_2(0) = (\zeta^0; x^0)^\tau, \tag{2.14}$$

где символом τ обозначена операция транспонирования.

Систему дифференциальных уравнений (2.13) и начальные условия (2.14) можно коротко записать в виде задачи Коши для дифференциального-операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{C} \frac{dz}{dt} + (\alpha \mathcal{P} + i \mathcal{B}) z = f, \quad z(0) = (z_1(0), z_2(0))^\tau, \tag{2.15}$$

где

$$z := (z_1; z_2)^\tau \in \mathcal{H} := \big(\mathbf{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \mathbb{C}\big) \oplus \big(L_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}\big), \quad f := (f_1 + f_2; 0)^\tau,$$

$$\mathcal{C} := \operatorname{diag}\big(C_1, C_2\big), \quad \mathcal{B} := \begin{pmatrix} 0 & -iB_{12} \\ -iB_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P} := \operatorname{diag}\big(P_1, 0\big).$$

Без доказательства приведем лемму о свойствах операторных коэффициентов в (2.15).

Лемма 1. *Имеют место следующие свойства операторных коэффициентов:*
1. Оператор $\mathcal{B}$ является самосопряженным на $\mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{D}(B_{21}) \oplus \mathcal{D}(B_{12})$.
2. Оператор $\mathcal{P}$ ограничен и неотрицателен в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.
3. Операторная матрица $\mathcal{C}$ является ограниченным положительно определенным оператором в $\mathcal{H}$.

В работе [7] приводится теорема о сильной разрешимости начально-краевой задачи. Сформулируем определение сильного решения задачи (1.1)-(1.4) и приведем теоремы о разрешимости операторного уравнения и исходной начально-краевой задачи.

Определение 1. *Сильным решением* начально-краевой задачи (1.1)-(1.4) назовем такое поле $\mathbf{u}(t)$ и функции $p(t)$, $\zeta(t)$, для которых функция $z(t) = (\nabla\Phi; \dot{x}; \zeta; x)^\tau$ является решением задачи Коши (2.15).

Будем говорить, что задача Коши (2.15) имеет решение $z(t)$ на полуоси $\mathbb{R}_+ := [0; +\infty)$, если все слагаемые в уравнении из (2.15) являются непрерывными функциями t со значениями в $\mathcal{H}$, выполнено уравнение из (2.15) при любом $t \in \mathbb{R}_+$ и начальное условие $z(0) = z^0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия*

$$z(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{B}), \quad f \in C^1\big(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}\big).$$

Тогда задача (2.15) *имеет единственное решение.*

Опираясь на теорему 2, получено утверждение об однозначной разрешимости исходной начально-краевой задачи (1.1)-(1.4) на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия*

$$P_{h,S}\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(\gamma_n), \quad \zeta^0 \in \mathcal{D}(Q) = H_\Gamma^{1/2},$$
$$\mathbf{f}_b \in C^1\big(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2\big), \quad \mathbf{f}_f \in C^1\big(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega)\big).$$

Тогда задача (1.1)-(1.4) *имеет единственное сильное решение.*

3. Задача о нормальных колебаниях, основные свойства спектра

Будем искать решение однородной задачи о нормальных колебаниях тела, частично заполненного однородной жидкостью под действием упругодемпфирующего устройства (2.15) в виде $z(t) = ze^{-\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. В результате придем к следующей спектральной задаче

$$-\lambda\mathcal{C}z + (\alpha\mathcal{P} + i\mathcal{B})z = 0, \quad z = (z_1; z_2)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{H}. \tag{3.1}$$

Запишем спектральную задачу (3.1), с учетом введенных выше обозначений, в виде системы двух уравнений в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, где $\mathcal{H}_1 := \mathbf{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \mathbb{C}$ и $\mathcal{H}_2 := L_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} -\lambda C_1 z_1 + \alpha P_1 z_1 + B_{12} z_2 = 0, \\ -\lambda C_2 z_2 + B_{21} z_1 = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Лемма 2. *Число $\lambda = 0$ не является собственным значением спектральной задачи* (3.2).

Доказательство. Подставим значение $\lambda = 0$ в систему (3.2). Из второго уравнения системы получим, что $B_{21}z_1 = 0$. Тогда

$$\begin{cases} \rho g \gamma_n \nabla\Phi = 0, \\ (k_0^2 + k_1^2)\dot{x} = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \nabla\Phi = 0, \\ \dot{x} = 0, \end{cases} \Longrightarrow z_1 = (\nabla\Phi; \dot{x})^\tau = 0. \tag{3.3}$$

С учетом (3.3) из первого уравнения системы (3.2) получим $B_{12}z_2 = 0$, откуда следует, что

$$\begin{cases} \rho g Q\zeta = 0, \\ (k_0^2 + k_1^2)x = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \zeta = 0, \\ x = 0, \end{cases} \Longrightarrow z_2 = (\zeta; x)^\tau = 0.$$

Таким образом, при $\lambda = 0$ задача (3.2) имеет только тривиальное решение $z = (z_1; z_2)^\tau = 0$. Следовательно, $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (3.2). □

Из второго уравнения системы (3.2) выразим элемент z_2 и подставим его в первое уравнение системы, будем иметь

$$\lambda^2 C_1 z_1 - \lambda\alpha P_1 z_1 - B_{12}C_2^{-1}B_{21}z_1 = 0. \tag{3.4}$$

Определим оператор C_B по формуле

$$C_B := -B_{12}C_2^{-1}B_{21}, \quad \mathcal{D}(C_B) = \big\{z_1 \in \mathcal{D}(B_{21}) : \ C_2^{-1}B_{21}z_1 \in \mathcal{D}(B_{12})\big\}.$$

Осуществим в спектральной задаче (3.4) замену $C_B^{1/2}z_1 =: u$ и применим к (3.4) слева оператор $C_B^{-1/2}$, в результате придем к следующей основной спектральной задаче в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_1$:

$$L(\lambda)u := (I - \lambda\alpha V_1 + \lambda^2 V_2)u = 0, \tag{3.5}$$

где $V_1 := C_B^{-1/2}P_1C_B^{-1/2}$, $V_2 := C_B^{-1/2}C_1C_B^{-1/2}$.

Лемма 3. *Оператор C_B самосопряжен и положительно определен в $\mathcal{H}_1$, а оператор C_B^{-1} компактен.*

Справедлива следующая теорема о локализации и дискретности спектра задачи (3.5).

Теорема 4. *Имеют место следующие утверждения:*
1. Спектр задачи (3.5) *симметричен относительно вещественной оси.*
2. Задача (3.5) *имеет дискретный спектр с возможной предельной точкой в бесконечности.*
3. Спектр задачи (3.5) *лежит в полосе*

$$0 \leq \operatorname{Re}\lambda \leq \frac{\alpha}{c},$$

где $c > 0$ — верхняя грань всех констант, которые могу стоять в неравенстве положительной определенности оператора C_1.

Доказательство. Доказательство проведем в несколько шагов.

1. Для доказательства первого утверждения достаточно доказать (см. [10, стр. 174]), что пучок $L(\lambda)$ самосопряжен, то есть

$$\big(L(\bar{\lambda})\big)^* = L(\lambda).$$

В силу самосопряженности операторов $C_1, C_B^{-1/2}, P_1$ имеем

$$\big(L(\bar{\lambda})\big)^* = I - \lambda\alpha V_1^* + \lambda^2 V_2^* = I - \lambda\alpha V_1 + \lambda^2 V_2 = L(\lambda).$$

2. Для доказательства дискретности спектра достаточно проверить, что фредгольмов пучок (3.5) является непрерывно обратимым хотя бы в одной точке (см. [6, стр. 74]). Действительно, при $\lambda = -1$ оператор

$$L(-1) = I + \alpha V_1 + V_2$$

является положительно определенным и, следовательно, имеет ограниченный обратный. Поскольку фредгольмова оператор-функция $L(\lambda)$ имеет особенность только в бесконечно удаленной точке, то ее спектр дискретен с возможной предельной точкой накопления в бесконечности.

3. Докажем, что спектр задачи (3.5) лежит в указанной полосе. Поскольку спектр задачи дискретен, доказываемое свойство нужно проверить для собственных значений задачи (3.5). Пусть λ, u — собственное значение и отвечающий ему собственный элемент. Умножим пучок (3.5) скалярно на u в пространстве $\mathcal{H}_1$, будем иметь

$$(L(\lambda)u, u)_{\mathcal{H}_1} = (u, u)_{\mathcal{H}_1} - \lambda\alpha(V_1 u, u)_{\mathcal{H}_1} + \lambda^2(V_2 u, u)_{\mathcal{H}_1} = 0.$$

Полученное выражение разделим на λ, получим

$$\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} \cdot \frac{\|u\|^2_{\mathcal{H}_1}}{\lambda} - \alpha\|V_1^{1/2}u\|^2_{\mathcal{H}_1} + \lambda\|V_2^{1/2}u\|^2_{\mathcal{H}_1} = 0. \tag{3.6}$$

Выделяя в (3.6) вещественную часть, найдем, что

$$\operatorname{Re}\lambda \cdot \left[\frac{\|u\|^2_{\mathcal{H}_1}}{|\lambda|^2} + \|V_2^{1/2}u\|^2_{\mathcal{H}_1}\right] = \alpha\|V_1^{1/2}u\|^2_{\mathcal{H}_1}.$$

Отсюда следует оценка

$$0 \le \operatorname{Re}\lambda = \frac{\alpha\|V_1^{1/2}u\|^2_{\mathcal{H}_1}}{\dfrac{\|u\|^2_{\mathcal{H}_1}}{|\lambda|^2} + \|V_2^{1/2}u\|^2_{\mathcal{H}_1}} \le \frac{\alpha\|V_1^{1/2}u\|^2_{\mathcal{H}_1}}{\|V_2^{1/2}u\|^2_{\mathcal{H}_1}} =$$

$$= \frac{\alpha(P_1C_B^{-1/2}u, C_B^{-1/2}u)_{\mathcal{H}_1}}{(C_1C_B^{-1/2}u, C_B^{-1/2}u)_{\mathcal{H}_1}} \le \frac{\alpha\|C_B^{-1/2}u\|^2_{\mathcal{H}_1}}{c\|C_B^{-1/2}u\|^2_{\mathcal{H}_1}} = \frac{\alpha}{c},$$

где $c > 0$ — точная нижняя грань оператора C_1. □

4. Об асимптотике спектра и базисности по Абелю-Лидскому системы корневых элементов

Теорема 5. *Спектральная задача* (3.5) *имеет в области* $\{0 \le \operatorname{Re}\lambda \le \alpha c^{-1}\}$ *две ветви собственных значений с асимптотикой*

$$\lambda_k^{(\pm i)} = \pm i\left(\frac{|\Gamma|}{g\pi}\right)^{-1/2} k^{1/2}(1 + o(1)) \quad (k \to \infty).$$

Доказательство. Перепишем задачу (3.5) в виде

$$L(\lambda)u := \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \frac{\lambda\alpha}{k_0^2 + k_1^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \lambda^2\begin{pmatrix} g^{-1}A & A^{1/2}C_{12} \\ C_{21}A^{1/2} & \dfrac{m}{k_0^2 + k_1^2} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

где

$$A := (Q\gamma_n)^{-1},\ C_{12} := \rho^{1/2}g^{-1/2}(k_0^2 + k_1^2)^{-1/2}P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)},\ C_{21} := \rho^{-1/2}g^{-1/2}(k_0^2 + k_1^2)^{-1/2}P_\rho.$$

Запишем спектральную задачу (4.1) в виде системы:

$$\begin{cases} u_1 + \lambda^2 g^{-1}Au_1 + \lambda^2 A^{1/2}C_{12}u_2 = 0, \\ u_2 - \dfrac{\lambda\alpha}{k_0^2 + k_1^2}u_2 + \lambda^2 C_{21}A^{1/2}u_1 + \dfrac{\lambda^2 m}{k_0^2 + k_1^2}u_2 = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

из второго уравнения системы (4.2) найдем u_2:

$$u_2 = -\frac{\lambda^2(k_0^2 + k_1^2)}{\lambda^2 m - \lambda\alpha + k_0^2 + k_1^2}C_{21}A^{1/2}u_1. \tag{4.3}$$

Подставляя выражение (4.3) в первое уравнение системы (4.2), получим задачу для элемента u_1:

$$\left\{I + \lambda^2 g^{-1} A - \frac{\lambda^4(k_0^2+k_1^2)}{\lambda^2 m - \lambda\alpha + k_0^2 + k_1^2} A^{1/2} C_{12} C_{21} A^{1/2}\right\} u_1 = 0,$$

которая после выделения из соответствующей дроби целой части, примет вид

$$\begin{gathered}\Bigg\{ I + \bigg(\frac{(k_0^2+k_1^2)^2}{m^2} - \frac{\alpha^2(k_0^2+k_1^2)}{m^3} - \frac{\lambda\alpha(k_0^2+k_1^2)}{m^2} - \\ - \frac{\lambda\alpha(k_0^2+k_1^2)(\alpha^2 - 2m(k_0^2+k_1^2)) - \alpha^2(k_0^2+k_1^2)^2 + m(k_0^2+k_1^2)^3}{m^3(\lambda^2 m - \lambda\alpha + k_0^2+k_1^2)} \bigg) A^{1/2} C_{12} C_{21} A^{1/2} + \\ + \lambda^2 \bigg(g^{-1} A - \frac{k_0^2+k_1^2}{m} A^{1/2} C_{12} C_{21} A^{1/2} \bigg) \Bigg\} u_1 = 0. \qquad (4.4)\end{gathered}$$

С учетом определения оператора P_ρ, вычислим оператор

$$\begin{aligned} C_{12}C_{21} &= \frac{1}{g(k_0^2+k_1^2)} P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)} P_\rho = \frac{\rho}{g(k_0^2+k_1^2)} \left(\cdot, \mathbf{e}_1^{(1)}\right)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)} = \\ &= \frac{\rho \|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|^2_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}}{g(k_0^2+k_1^2)} \left(\cdot, \frac{P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}}{\|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}} \right)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} \frac{P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}}{\|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}} =: \\ &=: \frac{\rho \|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|^2_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}}{g(k_0^2+k_1^2)} P, \end{aligned}$$

где оператор P определяется формулой:

$$P := \left(\cdot, \frac{P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}}{\|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}} \right)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} \frac{P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}}{\|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}}. \qquad (4.5)$$

Определим оператор

$$K := I - \frac{g(k_0^2+k_1^2)}{m} C_{12}C_{21} = I - \frac{\rho \|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|^2_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}}{m} P. \qquad (4.6)$$

Докажем, что оператор K из (4.6) положительно определен. Заметим, что имеет место оценка

$$\|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|^2_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} < \|\mathbf{e}_1^{(1)}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \int_\Omega |\mathbf{e}_1^{(1)}|^2 \, d\Omega = |\Omega|.$$

С учетом этой оценки теперь найдем, что для любого $\nabla\Phi \in \mathbf{G}_{h,S}(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
(K\nabla\Phi, \nabla\Phi)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} &= (\nabla\Phi, \nabla\Phi)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} - \frac{\rho}{m}\|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|^2_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}(P\nabla\Phi, \nabla\Phi)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} = \\
&= \left(1 - \frac{\rho}{m}\|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|^2_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}\right)(P\nabla\Phi, \nabla\Phi)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} + ((I-P)\nabla\Phi, \nabla\Phi)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} \geq \\
&\geq \left(1 - \frac{\rho}{m}|\Omega|\right)(P\nabla\Phi, \nabla\Phi)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} + ((I-P)\nabla\Phi, \nabla\Phi)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} \geq \\
&\geq \left(1 - \frac{m_f}{m}\right)\{(P\nabla\Phi, \nabla\Phi)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} + ((I-P)\nabla\Phi, \nabla\Phi)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}\} = \\
&= \left(1 - \frac{m_f}{m}\right)(\nabla\Phi, \nabla\Phi)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

С учетом введенных в (4.5), (4.6) операторов, спектральная задача (4.4) примет вид

$$
\begin{aligned}
\Bigg\{I + \frac{\lambda^2}{g}A^{1/2}KA^{1/2} + \frac{\rho\|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|^2_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}}{m^2 g}\Bigg(k_0^2 + k_1^2 - \frac{\alpha^2}{m} - \lambda\alpha - \\
- \frac{\lambda\alpha(\alpha^2 - 2m(k_0^2+k_1^2)) - \alpha^2(k_0^2+k_1^2) + m(k_0^2+k_1^2)^2}{m(\lambda^2 m - \lambda\alpha + k_0^2 + k_1^2)}\Bigg)A^{1/2}PA^{1/2}\Bigg\}u_1 = 0. \quad (4.7)
\end{aligned}
$$

Определим оператор B по следующей формуле:

$$
B := g^{-1}A^{1/2}KA^{1/2} = (g^{-1/2}K^{1/2}A^{1/2})^*(g^{-1/2}K^{1/2}A^{1/2}).
$$

По теореме о полярном разложении (см. [5, стр. 419-420]) существует частично изометричный оператор U такой, что

$$
g^{-1/2}K^{1/2}A^{1/2} = UB^{1/2}, \quad g^{-1/2}A^{1/2}K^{1/2} = B^{1/2}U^*.
$$

Тогда

$$
A^{1/2} = g^{1/2}B^{1/2}U^*K^{-1/2} = g^{1/2}K^{-1/2}UB^{1/2}. \quad (4.8)
$$

Перепишем задачу (4.7) в виде

$$
l(\lambda)u_1 = 0, \quad l(\lambda) := I + \lambda^2 B + G(\lambda), \quad (4.9)
$$

где

$$
\begin{aligned}
G(\lambda) &:= \lambda\mu(\lambda)A^{1/2}PA^{1/2}, \\
\mu(\lambda) &:= \frac{\rho\|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|^2_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}}{m^2 g}\Bigg(\frac{k_0^2+k_1^2}{\lambda} - \frac{\alpha^2}{\lambda m} - \alpha - \\
&\quad - \frac{\alpha^3 - 2m\alpha(k_0^2+k_1^2)}{m(\lambda^2 m - \lambda\alpha + k_0^2 + k_1^2)} - \frac{m(k_0^2+k_1^2)^2 - \alpha^2(k_0^2+k_1^2)}{m\lambda(\lambda^2 m - \lambda\alpha + k_0^2 + k_1^2)}\Bigg).
\end{aligned}
$$

Для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ определим секторы $\Lambda_\varepsilon^{\pm} := \{\lambda : |\arg\lambda \pm \pi/2| < \varepsilon, \quad -\pi < \arg\lambda < \pi\}$. Для задачи (4.9) проверим выполнение условий леммы М. Б. Оразова (см. [11, стр. 412, лемма 3]). Докажем, что если $\lambda \in \Lambda_\varepsilon^{\pm}$ и $\lambda \neq \big(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4m(k_0^2 + k_1^2)}\big)/(2m)$, то

$$T(\lambda) := (I - \lambda B^{1/2})^{-1} G(\lambda)(I + \lambda B^{1/2})^{-1} \longrightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \to \infty. \tag{4.10}$$

С использованием формулы (4.8) и леммы 3.3 из статьи А. С. Маркуса, В. И. Мацаева (см. [9, стр. 399]) найдем, что

$$\begin{aligned}
&\|T(\lambda)\| = \|\lambda\mu(\lambda)(I - \lambda B^{1/2})^{-1} A^{1/2} P A^{1/2} (I + \lambda B^{1/2})^{-1}\| = \\
&= \|\lambda\mu(\lambda) g (I - \lambda B^{1/2})^{-1} B^{1/2} U^* K^{-1/2} P K^{-1/2} U (I + \lambda B^{1/2})^{-1} B^{1/2}\| \le \\
&\le g|\lambda||\mu(\lambda)|\|(I - \lambda B^{1/2})^{-1} B^{1/2}\| \cdot \|U^* K^{-1/2} P K^{-1/2} U\| \cdot \|(I + \lambda B^{1/2})^{-1} B^{1/2}\| \le \\
&\qquad \le 4g|\mu(\lambda)||\lambda|^{-1} \max\big\{1; \big\|(I + \lambda B^{1/2})^{-1}\big\|\big\} \cdot \max\big\{1; \big\|(I - \lambda B^{1/2})^{-1}\big\|\big\} \times \\
&\qquad\qquad \times \big\|U^* K^{-1/2} P K^{-1/2} U\big\| = O(|\lambda|^{-1}),
\end{aligned}$$

откуда следует (4.10).

Для применения указанной леммы М. Б. Оразова осталось показать, что оператор B имеет степенную асимптотику собственных значений. Запишем оператор B в виде разности двух операторов:

$$B = \frac{(Q\gamma_n)^{-1}}{g} - \frac{\rho\|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|^2_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}}{gm} (Q\gamma_n)^{-1/2} P (Q\gamma_n)^{-1/2}.$$

Асимптотика собственных значений оператора $g^{-1}(Q\gamma_n)^{-1}$ следует из обзора М. Ш. Бирмана, М. З. Соломяка (см. [4, стр. 28]) и имеет вид

$$\lambda_k\left(\frac{(Q\gamma_n)^{-1}}{g}\right) = \frac{|\Gamma|}{g\pi}\, k^{-1}(1 + o(1)) \quad (k \to \infty).$$

Введем операторы

$$T_1 := \frac{(Q\gamma_n)^{-1}}{g}, \quad T_2 := \frac{\rho\|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|^2_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}}{gm} (Q\gamma_n)^{-1/2} P (Q\gamma_n)^{-1/2}.$$

Эти операторы неотрицательны, поэтому их s-числа совпадают с их собственными значениями. Оператор T_2 является одномерным, поэтому все его собственные значения, за исключением одного, равны нулю. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
&s_k(T_1) = \lambda_k(T_1) = \frac{|\Gamma|}{g\pi}\, k^{-1}(1 + o(1)) \quad (k \to \infty), \\
&s_k(T_2) = \lambda_k(T_2) = o(k^{-1}) \quad (k \to \infty).
\end{aligned}$$

Тогда из теоремы Ки Фань (см. [1, лекция 8, следствие 4]) следует, что

$$\lambda_k(B) = \lambda_k(T_1 - T_2) = \frac{|\Gamma|}{g\pi}\, k^{-1}(1 + o(1)) \quad (k \to \infty). \tag{4.11}$$

Таким образом, по лемме М. Б. Оразова и утверждению 3 в теореме 4 получаем, что исследуемая спектральная задача (3.5) имеет в полосе $\{0 \le \operatorname{Re}\lambda \le \alpha c^{-1}\}$ две ветви собственных значений со следующим асимптотическим поведением:

$$\lambda_k^{(\pm i)} = \pm i\lambda_k^{-1/2}(B)(1 + o(1)) \quad (k \to \infty).$$

Отсюда и из (4.11) следует формула из формулировки теоремы. □

Теорема 6. *Система корневых элементов задачи* (3.1) *образует базис Абеля-Лидского со скобками в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ порядка $\beta > 1$.*

Доказательство. Преобразуем спектральную задачу (3.1) к виду

$$\big(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{B} - \alpha i\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P} - (-i\lambda)I\big)z = 0.$$

Осуществим замену спектрального параметра $-i\lambda =: \mu$, получим задачу

$$\big(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{B} - \alpha i\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P} - \mu I\big)z = 0.$$

Обозначим операторы

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1, \quad \mathcal{A}_0 := \mathcal{C}^{-1}\mathcal{B}, \quad \mathcal{A}_1 := -\alpha i\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}. \tag{4.12}$$

Укажем свойства введенных в (4.12) операторов в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ оператора $\mathcal{C}$. Оператор $\mathcal{A}_0$ является самосопряженным оператором в $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ с дискретным спектром с асимптотикой

$$\mu_k^{\pm}(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{B}) = \pm\left(\frac{|\Gamma|}{g\pi}\right)^{-1/2} k^{1/2}(1 + o(1)) \quad (k \to \infty). \tag{4.13}$$

Оператор $\mathcal{A}_1$ является ограниченным оператором в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$. Отсюда следует, что оператор $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_0^{-q}$ ограничен в $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ при $q = 0$:

$$\|\mathcal{A}_1\mathcal{A}_0^{-q}\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{C}}} = \|\mathcal{A}_1\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{C}}} < \infty.$$

Из (4.13) и теоремы 6.2.4 (см. [2, стр. 106]), которая распространяется на случай, когда собственные значения оператора $\mathcal{A}_0$ имеют две точки накопления $\pm\infty$, получаем, что система корневых элементов спектральной задачи (3.1) образует базис Абеля-Лидского со скобками порядка β, где

$$\beta > \beta_0 = \frac{1}{p} - (1 - q) = 2 - (1 - 0) = 1.$$

Определение понятия базиса Абеля-Лидского весьма громоздко и здесь не приводится. С этим методом суммирования по корневым элементам можно подробно ознакомиться, например, в [2, стр. 106]. □

Заключение

В работе исследуется задача о нормальных колебаниях тела, частично заполненного идеальной однородной жидкостью под действием упругодемпфирующего устройства. Доказано, что спектр изучаемой задачи расположен в некоторой вертикальной полосе, дискретен, и симметричен относительно действительной оси. Найдена формула асимптотического распределения собственных значений. Доказано, что система корневых элементов рассматриваемой задачи образует базис Абеля-Лидского со скобками порядка $\beta > 1$.

Автор благодарен рецензенту за ценные замечания, позволившие улучшить качество статьи.

Список цитируемых источников

1. *Агранович, М. С.* Операторы с дискретным спектром. 2005. https://mccme.ru/ium/f04/spectrum.html, 21.05.2020.

   Agranovich, M. S. Operators with discrete spectrum. 2005. https://mccme.ru/ium/f04/spectrum.html, 21.05.2020.

2. *Агранович, М. С.* Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях. Дифференциальные уравнения с частными производными – 6, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. №63, 5–129 (1990).

   Agranovich, M. S. Elliptic operators on closed manifolds. Partial differential equations – 6, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr. №63, 5–129 (1990). (in Russian)

3. *Агранович, М. С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. М.: МЦМНО, 2013.

   Agranovich, M. S. Sobolev Spaces, Their Generalizations and Elliptic Problems in Smooth and Lipschitz Domains. Moscow: MCCME, 2013. (in Russian)

4. *Бирман, М. Ш., Соломяк, М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений. Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. №14, 5-58 (1977).

   Birman, M. SH., Solomyak, M. Z. Asymptotic properties of the spectrum of differential equations. Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal. №14, 5-58 (1977). (in Russian)

5. *Като, Т.* Теория возмущений линейных операторов: Пер. с англ. М.: Мир, 1972.

   Kato, T. Perturbation theory for linear operators. New York: Springer Science + Business Media, 1966.

6. *Копачевский, Н. Д., Крейн, С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. М.: Наука, 1989.

Kopachevsky, N. D., Krein, S. G., Ngo Zuy Kan. Operator methods in linear hydrodynamics: evolution and spectral problems. M.: Nauka, 1989. (in Russian)

7. *Копачевский, Н. Д., Плохая, Е. В., Фордук, К. В.* О колебаниях тела, частично заполненного жидкостью, под действием упругодемпфирующего устройства. Математика, информатика, компьютерные науки, математическое моделирование, образование 1, 35-39 (2019).

Kopachevsky, N. D., Syomkina, E. V., Forduk, K. V. On oscillations of a body partially filled with a fluid under the action of an elastic damping device. Matematika, informatika, komp'yuternye nauki, matematicheskoe modelirovanie, obrazovanie. 1, 35-39 (2019). (in Russian)

8. *Копачевский, Н. Д., Плохая, Е. В., Фордук, К. В.* Малые движения и нормальные колебания тела, частично заполненного идеальной жидкостью, под действием упругодемпфирующего устройства. XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. 1, 176-179 (2019).

Kopachevsky, N. D., Plohaya, E. V., Forduk, K. V. On oscillations of a body partially filled with a fluid under the action of an elastic damping device. XXX Krymskaya Osennyaya Matematicheskaya Shkola-simpozium po spektral'nym i evolyucionnym zadacham. 1, 176-179 (2019). (in Russian)

9. *Маркус, А. С., Мацаев, В. И.* Теорема о сравнении спектров и спектральная асимптотика для пучка М. В. Келдыша. Математический сборник 3, №123(165), 391-406 (1984).

Markus, A. S., Matsaev, V. I. A theorem on comparison of spectra, and a spectral asymptotics for a Keldysh pencil. Mat. Sb. (N.S.) 3, №123(165), 391-406 (1984). (in Russian)

10. *Маркус, А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. Кишенев: Штиинца, 1986.

Markus, A. S. Introduction to the spectral theory of polynomial operator pencils. Kishinev: Stiinza, 1986. (in Russian)

11. *Оразов, М. Б.* О локализации спектра в задаче о нормальных колебаниях упругой оболочки, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., №25(3), 403–412 (1985).

Orazov, M. B. Localization of the spectrum in the problem of normal oscillations of an elastic shell filled with a viscous incompressible fluid. Zh. Vychisl. Mat. Mat.-Fiz., №25(3), 403–412 (1985). (in Russian)

Получена 12.05.2020 Переработана 01.06.2020