Динамические системы, 2020, том 10(38), №2, 216–224

УДК 517.926

О нулевых спектрах характеристик колеблемости Сергеева уравнения Эйлера

А. Х. Сташ, А. А. Аллахвердян, А. Е. Артисевич, Н. А. Лобода

Кавказский математический центр,
Адыгейский государственный университет, Майкоп 385000,
E-mail: aidamir.stash@gmail.com, alinaallakhverdyan@mail.ru, cokolovangela@rambler.ru, n-loboda@yandex.ru

Аннотация. В данной работе исследуются различные разновидности показателей колеблемости (верхние или нижние, сильные или слабые) и частот Сергеева знаков, нулей и корней ненулевых решений линейных однородных дифференциальных уравнений с непрерывными и ограниченными на положительной полуоси коэффициентами. Известно, что спектры всех перечисленных характеристик колеблемости Сергеева (т.е. их множества значений на ненулевых решениях) уравнений до второго порядка состоят из одного значения, а спектры частот Сергеева уравнений выше второго порядка принадлежат классу суслинских множеств неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой. В автономном случае изучаемые спектры тесно связаны с множеством корней соответсвующего характеристического уравнения, а некоторые из них даже могут достигать мощность континуума. В настоящей статье доказано, что спектры характеристик колеблемости Сергеева уравнения Эйлера состоят из одного нулевого значения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, колеблемость, число нулей, частота Сергеева, показатель колеблемости.

On zero spectra of Sergeyev oscillation characteristic of the Euler's equation

A. Kh. Stash, A. A. Allahverdyan, A. E Artisevich, N. A. Loboda

Caucasus Mathematical Center, Adyghe State University, Maikop 385000.

Abstract. In this paper, we study various types of exponents of oscillation (upper or lower, strong or weak) and Sergeyev's frequencies of signs, zeros and roots of non-zero solutions of linear homogeneous differential equations with continuous coefficients bounded on the positive semi-axis. It is known that the spectra of all the listed Sergeyev oscillation characteristic (i.e their number of values for non-zero solutions) of the equations up to the second order consist of one value, and the spectra Sergeyev's frequencies equations of order greater than two belong to the class of Suslin sets on the nonnegative half-line of the extended real line. In the autonomous case, the spectra under study are closely related to the set of roots of the corresponding characteristic polynomial, and some of them can reach the

cardinality of the continuum. In this article, it is proved that the spectra of Sergeyev oscillation characteristic of the Euler's equation consist of one zero value.
Keywords: differential equations, oscillation, number of zeros, exponents of oscillation, Sergeev's frequencies.

MSC 2010: 34A35

Введение

В работах И. Н. Сергеева [6, 7, 8] на полупрямой вводились и исследовались различные характеристики ляпуновского типа ненулевых решений линейных дифференциальных уравнений и систем. Эти характеристики отвечают за колеблемость и блуждаемость решения. В 2015 году в статье [9] были систематизированы все введенные И. Н. Сергеевым характеристики ляпуновского типа, что привело к изменению названий некоторых из них. В частности, полные и векторные частоты переименованы соответственно в сильные и слабые показатели колеблемости. В работах [1, 2, 3] характеристические частоты [6] были названы *частотами Сергеева.*

Данная работа посвящена изучению спектров характеристик колеблемости Сергеева уравнения Эйлера. Решения линейных однородных уравнений первого порядка на $\mathbb{R}_+$ не имеют нулей (в силу теоремы существования и единственности), поэтому значения всех характеристик колеблемости равны нулю. Спектр каждой из характеристик колеблемости уравнения второго порядка состоит из одного значения [8], а спектры частот Сергеева уравнений выше второго порядка принадлежат классу суслинских множеств неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой [3].

Из общего курса дифференциальных уравнений известно, что уравнение Эйлера сводится к автономному уравнению [14]. Спектры показателей колеблемости автономного уравнения n-го порядка состоят не более чем из n различных значений [8, 10, 11, 12, 13], а спектры частот Сергеева устроены сложнее и полностью не исследованы: для уравнений третьего порядка они всегда конечны [6], а для уравнений четвертого порядка могут иметь мощность континуума [4].

В настоящей работе установлено, что на множестве решений уравнения Эйлера все характеристики колеблемости Сергеева равны нулю.

1. Основные обозначения и определения

Для заданного натурального n рассмотрим множество $\mathcal{E}^n$ линейных однородных уравнений n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty),$$

задаваемых ограниченными непрерывными функциями

$$a \equiv (a_1, \ldots, a_n)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n,$$

с которыми в дальнейшем и будем отождествлять сами уравнения. Через $\mathcal{L}^n$ обозначим подмножество множества $\mathcal{E}^n$, состоящее из уравнений Эйлера:

$$(pt+q)^n y^{(n)} + a_1(pt+q)^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(pt+q)\dot{y} + a_n y = 0, \quad p, q > 0.$$

Множество всех ненулевых решений уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(a)$. Далее, звездочкой снизу будем помечать любое линейное пространство, в котором выколот нуль. Положим

$$\mathcal{S}_*^n = \bigcup_{a \in \mathcal{E}^n} \mathcal{S}_*(a).$$

Определение 1 ([6])**.** Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая смена знака* функции $y \in \mathcal{S}_*^n$, если в любой окрестности этой точки функция y принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Определение 2 ([6])**.** Для момента $t > 0$ и функции $y \in \mathcal{S}_*^n$ введем следующие обозначения:

$\nu^-(y,t)$ — число точек ее *строгой смены знака* на промежутке $(0,t]$;

$\nu^0(y,t)$ — число ее *нулей* на промежутке $(0,t]$;

$\nu^+(y,t)$ — число ее *корней* (т. е. нулей с учетом их *кратности*) на промежутке $(0,t]$.

Далее, для вектора $m \in \mathbb{R}_*^n$ и вектор-функции $\psi y = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$ введем обозначение $\nu^\gamma(y,m,t) \equiv \nu^\gamma(\langle \psi y, m\rangle, t)$, где $\gamma \in \{-,0,+\}$, $\langle \psi y(\cdot), m\rangle$ — скалярное произведение.

Определение 3 ([1, 2, 6])**.** *Верхние* (*нижние*) *частоты Сергеева знаков, нулей* и *корней* любого решения $y \in \mathcal{S}_*^n$ при $\gamma \in \{-,0,+\}$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}^\gamma(y) \equiv \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^\gamma(y,t) \quad \left(\check{\nu}^\gamma(y) \equiv \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^\gamma(y,t)\right).$$

В случае совпадения какой-либо верхней частоты Сергеева решения y с одноименной нижней будем называть ее *точной* и обозначать $\nu^\gamma(y)$. Если дополнительно еще выполняется равенство $\nu^-(y) = \nu^0(y) = \nu^+(y)$, то частоты Сергеева – *абсолютными*.

Определение 4 ([7, 8, 9])**.** *Верхние* (*нижние*) *сильный* и *слабый показатели колеблемости знаков, нулей* и *корней* функции $y \in \mathcal{S}_*^n$ при $\gamma \in \{-, 0, +\}$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}_\bullet^\gamma(y) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\gamma(y, m, t) \quad \left(\check{\nu}_\bullet^\gamma(y) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \varliminf_{t \to +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\gamma(y, m, t) \right),$$
$$\hat{\nu}_\circ^\gamma(y) \equiv \varlimsup_{t \to +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\gamma(y, m, t) \quad \left(\check{\nu}_\circ^\gamma(y) \equiv \varliminf_{t \to +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\gamma(y, m, t) \right).$$

В случае совпадения сильного или слабого верхнего показателя колеблемости решения y с одноименным нижним будем называть его *точным* и обозначать $\nu_\bullet^\gamma(y)$ или $\nu_\circ^\gamma(y)$.

2. Вспомогательные факты

Из сформулированных определений вытекают

Замечание 1. Для любого $y \in \mathcal{S}_*^n$ имеют место следующие соотношения

$$\hat{\nu}_\circ^-(y) \le \hat{\nu}_\circ^0(y) \le \hat{\nu}_\circ^+(y), \quad \check{\nu}_\circ^-(y) \le \check{\nu}_\circ^0(y) \le \check{\nu}_\circ^+(y),$$

$$\hat{\nu}_\bullet^-(y) \le \hat{\nu}_\bullet^0(y) \le \hat{\nu}_\bullet^+(y), \quad \check{\nu}_\bullet^-(y) \le \check{\nu}_\bullet^0(y) \le \check{\nu}_\bullet^+(y),$$
$$\hat{\nu}^-(y) \le \hat{\nu}^0(y) \le \hat{\nu}^+(y), \quad \check{\nu}^-(y) \le \check{\nu}^0(y) \le \check{\nu}^+(y).$$

Замечание 2. Для любых $y \in \mathcal{S}_*^n$ и $\gamma \in \{-, 0, +\}$ справедливы неравенства

$$\hat{\nu}_\circ^\gamma(y) \le \hat{\nu}_\bullet^\gamma(y) \le \hat{\nu}^\gamma(y), \quad \check{\nu}_\circ^\gamma(y) \le \check{\nu}_\bullet^\gamma(y) \le \check{\nu}^\gamma(y).$$

Из доказательства леммы 6 [6] следует справедливость

Лемма 1. *Для любой функции $y \in \mathcal{S}_*^n$ справедливо неравенство $\hat{\nu}^+(\dot{y}) \ge \hat{\nu}^+(y)$.*

Определение 5 ([5])**.** Для заданных множеств M и $F = \{f : \mathbb{R}_+ \to M\}$ назовем функцию $\lambda : F \to \mathbb{R}$ *остаточной*, если для любых функций $f, g \in F$, удовлетворяющих хотя бы для одного $t_0 \in \mathbb{R}_+$ условию $f(t) = g(t)$ при всех $t \ge t_0$, имеет место равенство $\lambda(f) = \lambda(g)$.

Из доказательства леммы 8 [6] следует

Лемма 2. *Функция $\hat{\nu}^+ : \mathcal{S}_*^n \to \mathbb{R}_+$ является остаточной.*

Замечание 3. Свойство остаточности функционала $\hat{\nu}^+$ позволяет производить подсчет количества корней не на $\mathbb{R}_+$, а на любом его подмножестве $[t_0, +\infty)$.

3. Формулировка и доказательство основного результата

Теорема. *Для любого решения* $y \in \mathcal{S}_*(a)$ *любого уравнения* $a \in \mathcal{L}^n$ *выполнена цепочка равненств*

$$\nu^-(y) = \nu^0(y) = \nu^+(y) = \nu^-_\bullet(y) = \nu^0_\bullet(y) = \nu^+_\bullet(y) = \nu^-_\circ(y) = \nu^0_\circ(y) = \nu^+_\circ(y) = 0$$

Доказательство. 1. Фиксируем произвольное уравнение $a \in \mathcal{L}^n$ и приведем его к уравнению $b \in \mathcal{E}^n$ с постоянными коэффициентами с помощью замены $pt + q = e^x$.

Выпишем все корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ характеристического многочлена, соответствующего данному уравнению b, упорядочив их по нестрогому возрастанию модулей их мнимых частей, а в каждой группе корней с равными мнимыми частями — еще и по нестрогому возрастанию их действительных частей.

В соответствии с полученным списком корней выпишем стандартную фундаментальную систему решений [14] следующим образом: каждому действительному корню λ, встречающемуся в списке ровно k раз, поставим в соответствие набор функций в старых переменных

$$(pt+q)^\lambda,\ (pt+q)^\lambda \ln(pt+q), \dots,\ (pt+q)^\lambda \ln^{k-1}(pt+q),$$

а каждой паре комплексно сопряженных корней $\lambda = \alpha \pm i\beta$ $(\beta > 0)$, встречающейся в списке корней ровно k раз, поставим в соответствие набор функций

$$\begin{aligned}&(pt+q)^\alpha \cos(\beta \ln(pt+q)), (pt+q)^\alpha \sin(\beta \ln(pt+q)), \dots,\\ &\dots, (pt+q)^\alpha \cos(\beta \ln(pt+q)) \ln^{k-1}(pt+q), (pt+q)^\alpha \sin(\beta \ln(pt+q)) \ln^{k-1}(pt+q).\end{aligned}$$

В итоге получим упорядоченный список $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{S}_*(a)$ бесконечно-дифференцируемых функций. Следовательно, общее решение уравнения $a \in \mathcal{L}^n$ имеет вид $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$, где $c_1, \dots, c_n$ — произвольные постоянные.

Выберем произвольное решение

$$y = c_r y_r + c_{r+1} y_{r+1} + \dots + c_j y_j, \quad 1 \le r \le j \le n. \tag{3.1}$$

2. Пусть $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Тогда, начиная с достаточно большого момента времени, функция y не имеет нулей и, следовательно, имеет лишь конечное число нулей на полуоси $\mathbb{R}_+$ и потому $\nu^+(y) = 0$.

3. Теперь предположим, что $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Тогда в решении (3.1) выделим главную часть, представив его в виде

$$\begin{aligned}y(t) = (pt+q)^\alpha \ln^k(pt+q)(A_1 \cos(\beta_1 \ln(pt+q) + \gamma_1) + \dots\\ \dots + A_l \cos(\beta_l \ln(pt+q) + \gamma_l)) + \varphi(t)\end{aligned}$$

где

$$k \geq 0, \quad A_1, \ldots, A_l \neq 0, \quad \alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_l \in \mathbb{R}, \quad \beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_l,$$

(если $\beta_l = 0$, то и $\gamma_l = 0$), а остаток φ содержит те слагаемые линейной комбинации, у которых показатель степени $(pt+q)$ либо строго меньше числа α, либо равен α. В последнем случае показатель степени $\ln(pt+q)$ строго меньше k.

А. Если $l = 1$ и $\beta_1 = 0$, то главная часть имеет вид $A_1(pt+q)^\alpha \ln^k(pt+q)$, следовательно, функция (3.1) при достаточно больших t отделена от нуля, а значит, выполнено равенство $\nu^+(y) = 0$.

Б. При $\beta_1 > 0$ введем в рассмотрение функцию

$$z(t) \equiv \frac{y(t)}{(pt+q)^\alpha \ln^k(pt+q)} = A_1 \cos(\beta_1 \ln(pt+q) + \gamma_1) + \ldots$$
$$\cdots + A_l \cos(\beta_l \ln(pt+q) + \gamma_l) + \frac{\varphi(t)}{(pt+q)^\alpha \ln^k(pt+q)}.$$

Производную функции z s-го порядка представим в виде

$$z^{(s)}(t) = p^s (pt+q)^{-s} (\beta_1^s B_1 \cos(\beta_1 \ln(pt+q) + \gamma_{1,s}) + \ldots$$
$$\cdots + \beta_l^s B_l \cos(\beta_l \ln(pt+q) + \gamma_{l,s})) + \left(\frac{\varphi(t)}{(pt+q)^\alpha \ln^k(pt+q)} \right)^{(s)}.$$

Функции $\nu^+(u,t)$ и $\nu^+(v,t)$ эквивалентны при $t \to +\infty$ и достаточно большом значении s, каковым и будем его в дальнейшем считать, где

$$v(t) = \cos(\beta_1 \ln(pt+q) + \gamma_{1,s}),$$

$$u(t) \equiv \frac{(pt+q)^s z^{(s)}(t)}{p^s \beta_1^s B_1} = \cos(\beta_1 \ln(pt+q) + \gamma_{1,s}) + \ldots$$
$$\cdots + \frac{\beta_l^s B_l}{\beta_1^s B_1} \cos(\beta_l \ln(pt+q) + \gamma_{l,s}) + \frac{(pt+q)^s}{p^s \beta_1^s B_1} \left(\frac{\varphi(t)}{(pt+q)^\alpha \ln^k(pt+q)} \right)^{(s)}.$$

Действительно, для достаточно больших значений аргумента все нули функции u являются точками смены знака, поскольку в последней сумме все слагаемые со второго по l-ое малы по модулю при всех $t > 0$ из-за малости величины $(\beta_i/\beta_1)^s$, а последнее слагаемое стремится к нулю при $t \to +\infty$.

4. Собирая полученные данные и учитывая вспомогательные факты настоящей работы, будем иметь цепочку соотношений

$$\hat{\nu}^+(y) = \hat{\nu}^+(z_0) = \hat{\nu}^+(u) \leq \hat{\nu}^+(u^{(s)}) = \hat{\nu}^+(z_s) = \hat{\nu}^+(v) =$$

$$= \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t} \left[\frac{\beta_1 \ln(pt+q) + \gamma_{1,s} + \pi/2}{\pi}\right] =$$

$$= \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t} \left(\frac{\beta_1 \ln(pt+q) + \gamma_{1,s} + \pi/2}{\pi}\right) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\beta_1 \ln(pt+q)}{t} = 0,$$

где $[d]$ — целая часть числа d. Отсюда следует заключение теоремы. □

Авторы выражают глубокую благодарность профессору И. Н. Сергееву за обсуждение результатов данной работы.

Список цитируемых источников

1. *Барабанов Е. А., Войделевич А. С.* К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I. Дифференциальные уравнения. 52, №10, 1302-1320 (2016).

   Barabanov E. A., Voidelevich A. S. Remark on the theory of Sergeev frequencies of zeros, signs and roots for solution of linear differential equation.I. Differential equation, 52. no 10, 1249-1267 (2016).

2. *Быков В. В.* О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения. 52, № 4, 419-425 (2016).

   Bykov V. V. On the Baire classification of Sergeev frequencies of zeros and roots of solution of linear differential equation. Differential equation, 52. no 4, 413-420 (2016).

3. *Войделевич А. С.* О спектрах частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений. Журнал Белорусского гос. ун-та. Математика. Информатика. № 1, 28-32 (2019).

   Voidelevich A. S. On spectra of upper Sergeev frequencies of linear differential equation. Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics, no 1, 28-32 (2019).

4. *Горицкий А. Ю., Фисенко Т. Н.* Характеристические частоты нулей суммы двух гармонических колебаний. Дифференциальные уравнения. 48, № 4, 479-485 (2012).

   Goritskii A. Y., Fisenko T. N. Characteristic frequencies of zero of a sum of two harmonik oscillations. Differential equation, 48. no 4, 486-493 (2012).

5. *Сергеев И. Н.* К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений. Труды семинара им. И. Г. Петровского. 9, 111-166 (1983).

   Sergeev I. N. A contribution to the theory of Lyapunov exponents for linear systems of differential equations. Journal of Mathematical Sciences, 33, no. 6, 1245–1292 (1986).

6. *Сергеев И. Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения. Труды Семинара им. И. Г. Петровского. 25, 249-294 (2006).

   Sergeev I. N. Definition and properties of characteristic frequencies of a linear equation. Journal of Mathematical Sciences, 135, no.1, 2764-2793 (2006).

7. *Сергеев И. Н.* Определение полных частот решений линейного уравнения. Дифференциальные уравнения. 44, № 11. 1577 (2008).

Sergeev I. N. Definition of full frequencies of solutions of the linear equation. Differentsial'nye uravneniya, 44, no. 11. 1577 (2008) (in Russian).

8. *Сергеев И. Н.* Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы. Известия РАН. Серия математическая. 76, № 1, 149-172 (2012).

Sergeev I. N. Oscillation and wandering characteristics of solutions of a linear differential systems.Izvestiya: Mathematics, 76, no. 1, 139-162 (2012).

9. *Сергеев И. Н.* Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем. Известия Института математики и информатики УдГУ. 2 (46), 171-183 (2015).

Sergeev I. N. The complete set of relations between the oscillation, rotation and wandering indicators of solutions of differential systems. Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta, 2 (46), 171-183 (2015) (in Russian).

10. *Бурлаков Д. С., Цой С. В.* Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы. Труды Семинара им. И. Г. Петровского. 30, 75-93 (2014).

Burlakov D. S., Tsoii S. V. Coincidence of complete and vector frequencies of solutions of a linear autonomous system. Journal of Mathematical Sciences, 210, no. 2, 155-167 (2015).

11. *Сташ А. Х.* Свойства полных и векторных частот знака решений линейных автономных дифференциальных уравнений. Дифференц. уравнения. 50, № 10. 1418-1422 (2014).

Stash A. Kh. Properties of complete and vector sign frequencies of solutions of linear autonomous differential equations. Differential Equations, 50, no. 10, 1418-1422 (2014).

12. *Сташ А. Х.* Свойства полных и векторных частот нестрогих знаков и корней решений линейных однородных автономных дифференциальных уравнений. Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно–математические и технические науки. 3 (166), 18-22 (2015).

Stash A. Kh. Properties of full and vector frequencies of lax signs and roots of solutions of linear homogenous autonomous differential equations.Vestnik Adygeiskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 4: Estestvenno–matematicheskie i tekhnicheskie nauki, 3 (166), 18-22 (2015) (in Russian).

13. *Сташ А. Х.* Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т.29. Вып. 4. С. 558–568.

Stash A. Kh. Properties of exponents of oscillation of linear autonomous differential system solutions. Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki, vol. 29, issue 4, 558-568 (2019)(in Russian).

14. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004.

Filippov A. F. Vvedenie v teoriyu differentsial'nyh uravnenii. Moscow: Editorial URS, 2004. (in Russian)

Получена 20.06.2020