Динамические системы, 2020, том 10(38), №2, 205–215

УДК 539.3

Достаточный признак единственности тривиального решения однородной квазирегулярной бесконечной системы линейных уравнений[1]

С. О. Папков

Севастопольский государственный университет,

E-mail: stanislav.papkov@gmail.com

Аннотация. Формулируется и доказывается достаточный признак единственности нулевого решения однородной квазирегулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Проверка данного признака включает в себя аналитическое суммирование рядов в условиях регулярности системы и обращение одного из главных миноров бесконечной матрицы. Приводятся примеры использования признака для вычисления собственных значений кравевых задач теории упругости.

Ключевые слова: бесконечная система линейных алгебраических уравнений, квазирегулярность, единственность, собственные значения, колебания и устойчивость пластин.

A Sufficient Criterion for the Uniqueness of the Trivial Solution of the Homogeneous Quasi-regular Infinite System of Linear Equations

S. O. Papkov

Sevastopol State University, Sevastopol 299053.

Abstract. A sufficient criterion for the uniqueness of the zero solution of the homogeneous quasi-regular infinite system of linear algebraic equations is formulated and proved. Verifying this criterion includes an analytical summation of the series in the regularity conditions of the system and the inversion of one of the main minors of the infinite matrix. Examples are presented for calculation of the eigenvalues of boundary value problems of the theory of elasticity.

Keywords: infinite system of linear algebraic equations, quasiregularity, uniqueness, eigenvalues, vibrations and stability of the plates.

MSC 2010: 15A06, 47A50, 74K20

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и города Севастополь в рамках научного проекта №18-41-920001.

1. Введение

Вопросы, связанные с единственностью решений бесконечных систем линейных уравнений, как правило, представляют интерес с математической точки зрения. Если в теории конечных матриц и конечных систем линейных алгебраических уравнений основную роль играют определители, то в теории бесконечных матриц и систем их роль в значительной степени теряется [4]. В связи с этим, исследование существования и единственности ограниченного решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений основывается на исследовании сходимости метода последовательных приближений в некотором функциональном пространстве последовательностей [2], [3].

В частности, вполне регулярные бесконечные системы

$$z_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} z_n + B_m, \quad m = 1, 2, \ldots$$

для которых по определению верна оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty} |M_{mn}| \leq 1 - \rho$$

при $\rho > 0$ и любого номера m, можно рассматривать как функциональные уравнения в пространстве ограниченных последовательностей ℓ^∞. В [2] доказано существование единственного ограниченного решения для вполне регулярных бесконечных систем при условии ограниченности свободных членов. Очевидно, что однородная вполне регулярная система будет иметь лишь нулевое (тривиальное) решение. Если условия регулярности выполняются, начиная с некоторого номера N_R, то бесконечную систему называют квазирегулярной. Вопрос о существовании ограниченного решения у квазирегулярной бесконечной системы сводится [3] к исследованию конечной линейной системы с коэффициентами, выраженными через решения вспомогательных регулярных бесконечных систем с одинаковой матрицей и различными свободными членами. Таким образом, исследование существования ограниченного решения у квазирегулярной бесконечной системы согласно подходу [3] сводится к исследованию совокупности регулярных бесконечных систем и одной конечной системы линейных уравнений.

Многие задачи математической физики на собственные значения, в частности задачи теории упругости на определение собственных частот колебаний и критических сил, могут быть приведены к однородным бесконечным системам с коэффициентами $M_{mn}(\lambda)$, которые нелинейно зависят от параметра. Такие системы, очевидно, не могут быть вполне регулярными на всем диапазоне изменения параметра λ, так как на собственных значениях краевой задачи имеется нетривиальное решение однородной бесконечной системы. Как правило, вопрос об единственности решения бесконечных систем в практических приложениях отдельно не исследуется (например [6]), данный вывод зачастую делается на основании некоторых априорных соображений, относящихся к форме решения исследуемой краевой задачи. Далее система обычно редуцируется в конечную, определитель которой и дает дисперсионное уравнение для приближенного определения собственных чисел краевой задачи.

В статье развивается подход, ранее представленный в работах [7], [8] об определении собственных частот колебаний упругих тел на основе анализа соответствующих краевым задачам бесконечных систем. В частности, было замечено, что возникающие в краевых задачах теории упругости однородные бесконечные системы являются таковыми, что $\rho > 0$ для всех номеров $m > N_R$. С учетом этого факта формулируется и доказывается достаточный признак существования единственного ограниченного решения у квазирегулярной системы. На практике данный признак позволяет найти малые интервалы изменения λ, где возможно нетривиальное решение бесконечной системы, и как следствие, присутствует собственная частота. Таким образом, представленные ниже достаточные условия единственности однородной квазирегулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, предлагается, главным образом, использовать как эффективный инструмент решения краевых задач математической физики.

2. Основной результат

Рассмотрим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений вида

$$z_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} z_n, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$

которая удовлетворяет условиям квазирегулярности при некоторых $\rho > 0$ и N_R:

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} |M_{mn}| < \infty, \quad m = 1, 2, \ldots, N_R \tag{2.2}$$

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} |M_{mn}| \leq 1 - \rho, \quad m = N_R + 1, N_R + 2, \ldots \tag{2.3}$$

Предлагается следующая теорема.

Теорема 1. *Бесконечная система линейных алгебраических уравнений (2.1), удовлетворяющая условиям квазирегулярности (2.2)-(2.3), будет иметь единственное тривиальное решение, если при некотором номере N существует обратная матрица $\{c_{mi}\}_{m,i=1}^{N}$ к матрице $\{\delta_{mn} - M_{mn}\}_{m,n=1}^{N}$ (δ_{mn} — символы Кронекера) и справедлива оценка*

$$T_N = 1 - \max_{j=1,2,\ldots,N} \sum_{i=1}^{N} |c_{ji}| \left(S_i - \sum_{n=1}^{N} |M_{in}| \right) + \inf_{m>N} \frac{1-\theta-S_m}{\sum\limits_{n=1}^{N} |M_{mn}|} > 0 \tag{2.4}$$

где $0 < \theta < \rho$.

Доказательство. Рассмотрим первые N уравнений бесконечной системы (2.1)

$$Z_m - \sum_{n=1}^{N} M_{mn} Z_n = \sum_{n=N+1}^{\infty} M_{mn} Z_n, \quad m = 1, 2, \ldots, N \tag{2.5}$$

которые, согласно условию теоремы, позволяют явно выразить первые неизвестные в виде

$$Z_m = \sum_{i=1}^{N} c_{mi} \sum_{n=N+1}^{\infty} M_{in} Z_n, \quad m = 1, 2, \ldots, N \tag{2.6}$$

Подстановка (2.6) в уравнения (2.1) при $m > N$ дает возможность исключить первые неизвестные из системы и записать систему относительно оставшихся неизвестных $Z_{N+1}, Z_{N+2}, \ldots$

$$Z_m = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(M_{mn} + \sum_{i,j=1}^{N} M_{mj} c_{ji} M_{in} \right) Z_n, \quad m = N+1, N+2, \ldots \tag{2.7}$$

Используя равенство

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |M_{mn}| = S_m - \sum_{n=1}^{N} |M_{mn}| \tag{2.8}$$

оценим регулярность бесконечной системы (2.7) следующим образом

$$S_m^N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| M_{mn} + \sum_{i,j=1}^{N} M_{mj} c_{ji} M_{in} \right| \leq$$
$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |M_{mn}| + \sum_{j=1}^{N} |M_{mj}| \sum_{i=1}^{N} |c_{ji}| \sum_{n=N+1}^{\infty} |M_{in}| \tag{2.9}$$
$$= S_m - \sum_{n=1}^{N} |M_{mn}| + \sum_{j=1}^{N} |M_{mj}| \sum_{i=1}^{N} |c_{ji}| \left(S_i - \sum_{n=1}^{N} |M_{in}| \right), \quad m = N+1, N+2, \ldots$$

Обозначив для краткости

$$\xi_N = \max_{1\le j\le N} \sum_{i=1}^{N} |c_{ji}| \left(S_i - \sum_{n=1}^{N} |M_{in}| \right) \tag{2.10}$$

можно записать оценку регулярности системы в виде

$$S_m^N \le S_m - (1-\xi_N) \sum_{n=1}^{N} |M_{mn}| \tag{2.11}$$

Далее, алгебраически преобразуем (2.11) таким образом, чтобы условие теоремы (2.4) обеспечивало вполне регулярность бесконечной системы (2.7)

$$S_m - (1-\xi_N) \sum_{n=1}^{N} |M_{mn}| = 1-\theta - \left(1-\xi_N + \frac{1-\theta-S_m}{\sum\limits_{n=1}^{N} |M_{mn}|} \right) \sum_{n=1}^{N} |M_{mn}| \tag{2.12}$$

Действительно, обозначив

$$\vartheta_N = \inf_{m>N} \frac{1-\theta-S_m}{\sum\limits_{n=1}^{N} |M_{mn}|}, \tag{2.13}$$

получаем, что условие (2.4) гарантирует вполне регулярность данной системы

$$S_m^N \le 1-\theta-(1-\xi_N+\vartheta_N) \sum_{n=1}^{N} |M_{mn}| \le 1-\theta \tag{2.14}$$

Следовательно, бесконечная система (2.7) имеет единственное ограниченное решение, которое является тривиальным в силу однородности системы. Очевидно, из равенства (2.6) следует равенство нулю первых неизвестных. □

3. Приложение к нахождению собственных частот колебаний пластины

Уравнение Жермен-Лагранжа, описывающее малые поперечные колебания упругой изотропной пластины $|x| \le a$, $|y| \le b$ постоянной толщины h имеет вид

$$D\Delta\Delta w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0\,, \tag{3.1}$$

где $w(x,y,t)$ — поперечный прогиб срединной плоскости пластины, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — двумерный оператор Лапласа; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — изгибная (цилиндрическая) жесткость пластины, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, ρ — удельная плотность на единицу площади пластины, t — время.

Задача об определении собственных частот и форм колебаний пластины со свободными краями сводится к определению прогиба $W(x,y)$ (гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и далее опущен) и собственной частоты $\Omega^4 = \rho h\omega^2/D$ из однородной краевой задачи

$$\Delta\Delta W - \Omega^4 W = 0 \tag{3.2}$$

с граничными условиями:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial x} = 0\,, \quad x = \pm a\,, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial y \partial x^2} = 0\,, \quad y = \pm b\,. \tag{3.6}$$

Общее решение дифференциального уравнения (3.2) можно построить в виде суммы решений для полос $|x| \le a$ и $|y| \le b$ в форме тригонометрических рядов при помощи разделения переменных. При этом выбираем решение таким образом, чтобы тождественно удовлетворить граничные условия (3.3),(3.5) и иметь достаточный произвол для выполнения оставшихся двух граничных условий. В частности, для симметричных колебаний по обеим координатным осям, функция прогиба имеет вид

$$W = \frac{bx_0}{\Omega}\left(\frac{\cos\Omega y}{\sin\Omega b} - \frac{\operatorname{ch}\Omega y}{\operatorname{sh}\Omega b}\right) + \frac{ay_0}{\Omega}\left(\frac{\cos\Omega x}{\sin\Omega a} - \frac{\operatorname{ch}\Omega x}{\operatorname{sh}\Omega a}\right) \tag{3.7}$$

$$+b\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n A(y,b,\alpha_n)\cos\alpha_n x + a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}y_n A(x,a,\beta_n)\cos\beta_n y;$$

где обозначено $\alpha_n = \pi n/a$, $\beta_n = \pi n/b$;

$$A(z,h,\xi) = \frac{\xi^2+\Omega^2-(2-\nu)\xi^2}{\sqrt{\xi^2-\Omega^2}}\cdot\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\xi^2-\Omega^2}z}{\operatorname{sh}\sqrt{\xi^2-\Omega^2}h} - \frac{\xi^2-\Omega^2-(2-\nu)\xi^2}{\sqrt{\xi^2+\Omega^2}}\cdot\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\xi^2+\Omega^2}z}{\operatorname{sh}\sqrt{\xi^2+\Omega^2}h};$$

$$B(z,h,\xi) = \frac{\xi^2+\Omega^2-(2-\nu)\xi^2}{\sqrt{\xi^2-\Omega^2}}\cdot\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\xi^2-\Omega^2}z}{\operatorname{ch}\sqrt{\xi^2-\Omega^2}h} - \frac{\xi^2-\Omega^2-(2-\nu)\xi^2}{\sqrt{\xi^2+\Omega^2}}\cdot\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\xi^2+\Omega^2}z}{\operatorname{ch}\sqrt{\xi^2+\Omega^2}h}.$$

Подстановка (3.7) в граничные условия (3.4), (3.6) с последующим разложением входящих функций в тригонометрические ряды позволяет из равенства при базисных функциях получить однородную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов.

$$2\nu\, x_0 + a\Omega(\operatorname{ctg} a\Omega + \operatorname{cth} a\Omega) y_0 = 2\nu\Omega^6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{p_{1n}^2 p_{2n}^2}; \tag{3.8}$$

$$b\Omega(\operatorname{ctg} b\Omega + \operatorname{cth} b\Omega) x_0 + 2\nu y_0 = 2\nu\Omega^6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{q_{1n}^2 q_{2n}^2}; \tag{3.9}$$

$$y_m \Delta_s(\beta_m, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\Omega^2((1-\nu)^2\alpha_n^2\beta_m^2 + \nu\Omega^4)}{(\alpha_n^2 + q_{1m}^2)(\alpha_n^2 + q_{2m}^2)} x_n + \frac{4\nu\Omega^4 x_0}{q_{1m}^2 q_{2m}^2}; \tag{3.10}$$

$$x_m \Delta_s(\alpha_m, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\Omega^2((1-\nu)^2\alpha_m^2\beta_n^2 + \nu\Omega^4)}{(\beta_n^2 + p_{1m}^2)(\beta_n^2 + p_{2m}^2)} y_n + \frac{4\nu\Omega^4 y_0}{p_{1m}^2 p_{2m}^2} \tag{3.11}$$

$$(m = 1, 2, \ldots)$$

где $p_{1n}^2 = \alpha_n^2 - \Omega^2; p_{2n}^2 = \alpha_n^2 + \Omega^2;\ q_{1n}^2 = \beta_n^2 - \Omega^2; q_{2n}^2 = \beta_n^2 + \Omega^2;$

$$\Delta_s(z,h) = h\left(\frac{((1-\nu)z^2+\Omega^2)^2}{\sqrt{z^2+\Omega^2}} \operatorname{cth}\sqrt{z^2+\Omega^2}h - \frac{((1-\nu)z^2-\Omega^2)^2}{\sqrt{z^2-\Omega^2}} \operatorname{cth}\sqrt{z^2-\Omega^2}h\right).$$

Для исследования регулярности (квазирегулярности) системы (3.8) - (3.11) используем значения известных рядов [5], которые позволяют аналитически просуммировать ряды

$$S_1 = \frac{b\Omega}{2\nu}\left|\mathrm{ctg}\Omega b + \mathrm{cth}\Omega b\right| + \frac{\Omega^2}{2} + \Omega^6 \sum_{n=1}^{N_1} \frac{1}{q_{2n}^2}\left(\frac{1}{|q_{1n}^2|} - \frac{1}{q_{1n}^2}\right) - \frac{\Omega^3 b}{4}\left(\mathrm{ctg}\Omega b + \mathrm{cth}\Omega b\right)$$

где $N_1 = [\Omega b/\pi] + 1;$

$$S_2 = \frac{a\Omega}{2\nu}\left|\mathrm{ctg}\Omega a + \mathrm{cth}\Omega a\right| + \frac{\Omega^2}{2} + \Omega^6 \sum_{n=1}^{N_2} \frac{1}{p_{2n}^2}\left(\frac{1}{|p_{1n}^2|} - \frac{1}{p_{1n}^2}\right) - \frac{\Omega^3 a}{4}\left(\mathrm{ctg}\Omega a + \mathrm{cth}\Omega a\right)$$

где $N_2 = [\Omega a/\pi] + 1;$

$$S_{2m+1} = \frac{1}{|\Delta_s(\beta_m, a)|}\left(4\Omega^2 \sum_{n=1}^{N_3} \frac{(1-\nu)^2\alpha_n^2\beta_m^2 + \nu\Omega^4}{(\alpha_n^2 + q_{2m}^2)}\left(\frac{1}{|\alpha_n^2 + q_{1m}^2|} - \frac{1}{\alpha_n^2 + q_{1m}^2}\right) + \frac{4\nu\Omega^4}{|q_{1m}^2| q_{2m}^2}\right.$$

$$\left. + (\Omega^4\nu - (1-\nu)^2 q_{1m}^2\beta_m^2)\left(\frac{a\mathrm{cth} q_{1m} a}{q_{1m}} - \frac{1}{q_{1m}^2}\right) - (\Omega^4\nu - (1-\nu)^2 q_{2m}^2\beta_m^2)\left(\frac{a\mathrm{cth} q_{2m} a}{q_{2m}} - \frac{1}{q_{2m}^2}\right)\right);$$

$$S_{2m+2} = \frac{1}{|\Delta_s(\alpha_m, b)|}\left(4\Omega^2 \sum_{n=1}^{N_3} \frac{(1-\nu)^2\alpha_m^2\beta_n^2 + \nu\Omega^4}{(\beta_n^2 + p_{2m}^2)}\left(\frac{1}{|\beta_n^2 + p_{1m}^2|} - \frac{1}{\beta_n^2 + p_{1m}^2}\right) + \frac{4\nu\Omega^4}{|p_{1m}^2| p_{2m}^2}\right.$$

Таблица 1. Локализация собственных значений пластины Ω_n

N	2	4	8	[8]
Ω_1	2,254 – 2,261	2,256 – 2,259	2,257 – 2,258	2,257
Ω_2	2,438 – 2,448	2,441 – 2,446	2,442 – 2,444	2,443
Ω_3	4,046 – 4,057	4,047 – 4,055	4,049 – 4,053	4,051

$$+(\Omega^4\nu-(1-\nu)^2p_{1m}^2\alpha_m^2)\left(\frac{b\mathrm{cth}p_{1m}b}{p_{1m}}-\frac{1}{p_{1m}^2}\right)-(\Omega^4\nu-(1-\nu)^2p_{2m}^2\alpha_m^2)\left(\frac{b\mathrm{cth}p_{2m}b}{p_{2m}}-\frac{1}{p_{2m}^2}\right)\bigg)$$

где

$$N_3=\left[\sqrt{\max\left(0,\left(\frac{a\Omega}{\pi}\right)^2-\left(\frac{a}{b}\right)^2,\left(\frac{b\Omega}{\pi}\right)^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)}\right]+1.$$

Выражения S_m допускают одинаковую асимптотическую оценку для четных и нечетных номеров

$$S_m(\Omega)=\sum_{n=1}^{\infty}|M_{mn}(\Omega)|=\frac{1-\nu}{3+\nu}+O\left(1/m\right),\quad m\to\infty \tag{3.12}$$

Поскольку коэффициент Пуассона может принимать значения $\nu\le 0,5$, то из оценок (3.12) следует, что всегда найдется некоторый номер N_R, что при $m>N_R$ бесконечная система удовлетворяет условию (2.3), то есть является квазирегулярной. Проверяя далее условие предложенной теоремы (2.4) на диапазоне частот, можно найти интервал расположения собственной частоты. Увеличением N удается сузить интервал настолько, что с некоторой точностью получаем значение собственной частоты. Таблица 1 демонстрирует локализацию первой собственной частоты для квадратной пластины при $\nu=0,225$. Заметим, что уже при $N=2$ удается найти значение первых собственных частот с удовлетворительной для практических целей точностью. В последнем столбце таблицы представлены значения собственных частот, найденные согласно методу Ритца [9].

4. Приложение к нахождению критических сил устойчивости пластины

Аналогично проблеме собственных колебаний тонкой пластины, предложенная теорема может быть использована для другой задачи на собственные значения теории пластин. Рассмотрим задачу о статической устойчивости защемленной тонкой пластины $|x|\le a$, $|y|\le b$ постоянной толщины h, равномерно сжатой усилиями

N_x и N_y в плоскости пластины. Согласно [1] функция прогиба $w(x, y)$ должна удовлетворять линеаризованному уравнению устойчивости:

$$D\Delta\Delta w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \tag{4.1}$$

На границе пластины Γ заданы условия жесткого защемления:

$$w|_\Gamma = 0; \quad \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_\Gamma = 0, \tag{4.2}$$

где D — цилиндрическая жесткость пластины.

Решение дифференциального уравнения (4.1) можно получить, аналогично предыдущему разделу, методом разделения переменных. С учетом симметрии решения по обеим координатам получаем:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{ch} p_{1,n} b \left(\frac{\mathrm{ch} p_{1,n} y}{\mathrm{ch} p_{1,n} b} - \frac{\mathrm{ch} p_{2,n} y}{\mathrm{ch} p_{2,n} b} \right) \cos \alpha_n x +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \mathrm{ch} q_{1,n} a \left(\frac{\mathrm{ch} q_{1,n} x}{\mathrm{ch} q_{1,n} a} - \frac{\mathrm{ch} q_{2,n} x}{\mathrm{ch} q_{2,n} a} \right) \cos \beta_n y. \tag{4.3}$$

где $\alpha_n = (n - 1/2)\pi/a$, $\beta_n = (n - 1/2)\pi/b$; $p_{1,n}, p_{2,n}, q_{1,n}, q_{2,n}$ — корни характеристических уравнений ($Q = N_x/D;\ P = N_y/D$):

$$p_{1,n} = \sqrt{\alpha_n^2 - \tfrac{P}{2} + \sqrt{(Q-P)\alpha_n^2 + \tfrac{P^2}{4}}}, \quad q_{1,n} = \sqrt{\beta_n^2 - \tfrac{Q}{2} + \sqrt{(P-Q)\beta_n^2 + \tfrac{Q^2}{4}}},$$
$$p_{2,n} = \sqrt{\alpha_n^2 - \tfrac{P}{2} - \sqrt{(Q-P)\alpha_n^2 + \tfrac{P^2}{4}}}, \quad q_{2,n} = \sqrt{\beta_n^2 - \tfrac{Q}{2} - \sqrt{(P-Q)\beta_n^2 + \tfrac{Q^2}{4}}}.$$

Подставляя решение (4.3) в краевые условия (4.2) получаем однородную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_n, B_n:

$$X_m \Delta_m^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha_n}{(\alpha_n^2 + q_{1,m}^2)(\alpha_n^2 + q_{2,m}^2)} Y_n \tag{4.4}$$

$$Y_m \Delta_m^y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\beta_n}{(\beta_n^2 + p_{1,m}^2)(\beta_n^2 + p_{2,m}^2)} X_n \tag{4.5}$$

$$(m = 1, 2, \dots)$$

где $X_n = B_n \frac{(-1)^n}{a}(q_{1,n}^2 - q_{2,n}^2)\mathrm{ch} q_{1,n} a$, $Y_n = A_n \frac{(-1)^{n+1}}{b}(p_{1,n}^2 - p_{2,n}^2)\mathrm{ch} p_{1,n} b$,

$$\frac{\Delta_m^x}{a} = \frac{q_{1,m} \mathrm{th} q_{1,m} a - q_{2,m} \mathrm{th} q_{2,m} a}{\beta_m (q_{1,m}^2 - q_{2,m}^2)}; \quad \frac{\Delta_m^y}{b} = \frac{p_{1,m} \mathrm{th} p_{1,m} b - p_{2,m} \mathrm{th} p_{2,m} b}{\alpha_m (p_{1,m}^2 - p_{2,m}^2)}.$$

Таблица 2. Локализация критических сил пластины

N	4	10	20	30	50
Интервал для $(b/\pi)^2 Q$	2,456 – 2,586	2,507 – 2,530	2,515 – 2,522	2,517 – 2,520	2,518 – 2,518

Запишем систему (4.4)-(4.5) в канонической форме

$$z_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn}(P,Q) z_n \quad m = 1, 2, \dots \tag{4.6}$$

обозначив $z_{2m-1} = X_m, z_{2m} = Y_m$.

Оценим регулярность (2.3) данной системы при помощи дигамма функции $\psi(z)$:

$$S_{2m-1} = \frac{a\left(\psi\left(\frac{1}{2} + \frac{iaq_{1m}}{\pi}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{iaq_{2m}}{\pi}\right) + \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{iaq_{1m}}{\pi}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{iaq_{2m}}{\pi}\right)\right)}{|\Delta_m^x|\pi(q_{1m}^2 - q_{2m}^2)}$$

$$S_{2m} = \frac{b\left(\psi\left(\frac{1}{2} + \frac{ibp_{1m}}{\pi}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{ibp_{2m}}{\pi}\right) + \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{ibp_{1m}}{\pi}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{ibp_{2m}}{\pi}\right)\right)}{|\Delta_m^y|\pi(p_{1m}^2 - p_{2m}^2)}$$

Далее, переходя к пределу, получаем для любых значений P и Q:

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \frac{2}{\pi}.$$

Откуда следует, что система (4.6) удовлетворяет условиям (2.3), начиная с некоторого $m > N_R$, то есть является квазирегулярной.

Проверим условие (2.4) предложенной теоремы для данной системы. В таблице 2 представлены интервалы для критической силы Q в случае одноосного сжатия квадратной пластины $P = 0$ $(a = b)$ при различных значениях параметра теоремы N.

Из данных таблицы следует, что критическое значение $Q_C = 2,518(\pi/b)^2$. В [1] дается значение $Q_1 = 2,517\,(\pi/b)^2$, которое отлично согласуется с найденным значением.

5. Заключение

В статье формулируется и доказывается теорема единственности тривиального решения однородной квазирегулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Представленные примеры показывают, что проверка условия

$T_N > 0$ позволяет с высокой точностью найти собственное значение (собственную частоту или величину критической силы) краевой задачи без численного решения бесконечной системы, опираясь лишь на аналитическое суммирование рядов в условиях регулярности и проверку условия предложенной теоремы.

Автор благодарит рецензента за полезные замечания, способствовавшие улучшению изложения.

Список цитируемых источников

1. *Биргер И. А., Пановко Я. Г. (ред.)* Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. М.: Машиностроение, 1968.

   Birger I. A., Panovko Ya. G. (ed.) Strength, stability, vibrations. Handbook in three volumes. Vol. 3. M.: Mechanical Engineering, 1968. (in Russian)
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.

   Kantorovich L. V., Akilov G. P. Functional analysis. M: Nauka, 1984.
3. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.-Л.: Гос. изд. тех.-теор. лит., 1952. 695 с.

   Kantorovich, L. V.,; Krylov, V. I. Approximate methods of higher analysis. Reprint of the 1958 edition published by P. Noordhoff Ltd. Mineola, NY: Dover Publications, xii, 681 p. (2018).
4. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1960.

   Cooke R. G. Infinite matrices and sequence spaces. London: Macmillan, 1950.
5. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Том 1. Элементарные функции. М.: Наука, 1981.

   Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. Integrals and series. Vol. 1. Elementary functions. M .: Nauka, 1981. (in Russian)
6. *Gorman D.J.* Accurate free vibration analysis of clamped orthotropic plate by the method of superposition // Journal of Sound and Vibration. 1993. 165 (3), P. 409–420.
7. *Papkov S. O., Chekhov V. N.* Limiting Limitants in Dynamic Problems for a Rectangular Prism // International Applied Mechanics 49, No.5, 2013. P. 555-569.
8. *Papkov S.O.* A new method for analytical solution of inplane free vibration of rectangular orthotropic plates based on the analysis of infinite systems // Journal of Sound and Vibration. 2016. 369, P. 228–245.
9. *Leissa A.W.* The free vibration of rectangular plate // Journal of Sound and Vibration. 1973. 31, P. 257–293.

Получена 25.10.2019 Переработана 18.02.2020