Динамические системы, 2020, том 10(38), №2, 197–204

УДК 531.36+536.381

Применение алгоритма Ковачича для исследования случая Гесса в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой[1]

Б. С. Бардин*, **А. С. Кулешов****

*Московский авиационный институт (технический университет),
Москва 125080. *E-mail: bardin@yandex.ru*
**Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Москва 119234. *E-mail: kuleshov@mech.math.msu.su*

Аннотация. В 1890 году немецкий математик и механик В. Гесс указал новый частный случай интегрируемости уравнений Эйлера – Пуассона движения тяжёлого твердого тела с неподвижной точкой. В 1892 году П. А. Некрасов показал, что решение задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой при условиях Гесса сводится к интегрированию линейного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. В работе дан вывод соответствующего уравнения второго порядка и показано, как привести коэффициенты этого уравнения к виду рациональных функций. Затем при помощи алгоритма Ковачича исследуется вопрос о существовании лиувиллевых решений у соответствующего линейного уравнения второго порядка. Показано, что лиувиллевы решения могут существовать лишь в двух случаях: в случае, соответствующем случаю Лагранжа движения твердого тела с неподвижной точкой и в случае, когда постоянная интеграла площадей равна нулю.

Ключевые слова: тяжелое твердое тело с неподвижной точкой; случай Гесса; лиувиллевы решения; алгоритм Ковачича.

Application of the Kovacic Algorithm for the Investigation of Motion of a Heavy Rigid Body with a Fixed Point in the Hess Case

B. S. Bardin, A. S. Kuleshov
Moscow Aviation Institute, Moscow 125080,
M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант No. 19-01-00140 и No. 20-01-00637

Abstract. In 1890 German mathematician and physicist W. Hess found new special case of integrability of Euler – Poisson equations of motion of a heavy rigid body with a fixed point. In 1892 P. A. Nekrasov proved that the solution of the problem of motion of a heavy rigid body with a fixed point under Hess conditions reduces to integrating the second order linear differential equation. In this paper the corresponding linear differential equation is derived and its coefficients are presented in the rational form. Using the Kovacic algorithm, we proved that the liouvillian solutions of the corresponding second order linear differential equation exists only in the case, when the moving rigid body is the Lagrange top, or in the case when the constant of the area integral is zero.
Keywords: rigid body with a fixed point, Hess case, Liouvillian solutions, Kovacic algorithm.
MSC 2010: 70E17; 70E40; 34A30

1. Уравнения Эйлера – Пуассона. Случай Гесса.

Рассмотрим движение твердого тела с одной закрепленной точкой O в однородном поле сил тяжести. Введем подвижную систему координат $Ox_1x_2x_3$, оси которой совпадают с главными осями эллипсоида инерции тела для точки O. Пусть M – масса тела, g – ускорение свободного падения, A_1, A_2, A_3 – моменты инерции тела относительно осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 соответственно; ω_1, ω_2, ω_3, γ_1, γ_2, γ_3 и x_1, x_2, x_3 – проекции на оси Ox_1, Ox_2 и Ox_3 вектора мгновенной угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}$, единичного вектора $\boldsymbol{\gamma}$, направленного по вертикали вверх, и радиуса – вектора $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OG}$ центра масс тела.

Уравнения движения тела получим из теоремы об изменении кинетического момента. В системе координат $Ox_1x_2x_3$ эти уравнения записываются в виде:

$$\begin{aligned}
&A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\,\omega_2\omega_3 = Mg\,(x_3\gamma_2 - x_2\gamma_3)\,,\\
&A_2\dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3)\,\omega_1\omega_3 = Mg\,(x_1\gamma_3 - x_3\gamma_1)\,,\\
&A_3\dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1)\,\omega_1\omega_2 = Mg\,(x_2\gamma_1 - x_1\gamma_2)\,;\\
&\\
&\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3,\\
&\dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1,\\
&\dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Известно, что для решения уравнений Эйлера – Пуассона достаточно найти четыре независимых первых интеграла системы (1.1). При любых значениях параметров A_1, A_2, A_3, x_1, x_2, x_3 известны три независимых первых интегралов системы (1.1) – интеграл энергии

$$H = \frac{1}{2}\left(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2\right) + Mg\,(x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3) = E,$$

интеграл площадей

$$K = A_1\omega_1\gamma_1 + A_2\omega_2\gamma_2 + A_3\omega_3\gamma_3 = k$$

и геометрический интеграл

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

В 1890 году В. Гесс показал [1], что при выполнении условий

$$x_3 = 0, \quad A_2 \left(A_3 - A_1\right) x_2^2 = A_1 \left(A_2 - A_3\right) x_1^2, \quad A_2 \geq A_3 \geq A_1, \tag{1.2}$$

уравнения (1.1) допускают частный четвертый интеграл, имеющий вид:

$$A_1 \omega_1 x_1 + A_2 \omega_2 x_2 = 0.$$

Детальное аналитическое исследование решения Гесса было выполнено П. А. Некрасовым [2, 3]. Он привел задачу к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка с двоякопериодическими комплексными коэффициентами и показал, что решения в случае Гесса являются, вообще говоря, неоднозначными. П. А. Некрасов изучил аналитические свойства полученного линейного дифференциального уравнения и выявил основные свойства траекторий на сфере Пуассона. Также П. А. Некрасовым [2, 3] было показано, что при выполнении условий Гесса и при дополнительном условии равенства нулю постоянной интеграла площадей уравнения Эйлера – Пуассона интегрируются в эллиптических функциях.

Поскольку решение задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка, то можно поставить задачу о существовании у соответствующего линейного дифференциального уравнения решений, имеющих аналитическое представление в виде лиувиллевых функций. Как известно, лиувиллевы функции строятся последовательно из рациональных функций с использованием алгебраических операций, неопределённого интегрирования и взятия экспоненты заданного выражения [4]. Решение линейного дифференциального уравнения второго порядка, выражающееся через лиувиллевы функции, наиболее точно соответствует понятию “решение в замкнутой форме” или “решение в квадратурах”. Для нахождения лиувиллевых решений у линейного дифференциального уравнения второго порядка можно воспользоваться так называемым алгоритмом Ковачича [4], позволяющим находить в явном виде соответствующие решения или доказать их отсутствие. Для того, чтобы воспользоваться этим алгоритмом, необходимо, чтобы коэффициенты линейного дифференциального уравнения второго порядка были рациональными функциями независимой переменной.

Ниже показано, как получить линейное дифференциальное уравнение второго порядка в случае Гесса и как привести его к уравнению с рациональными коэффициентами.

2. Приведение к одному линейному уравнению второго порядка. Основной результат.

Введем новые обозначения

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},$$

и новые переменные

$$L_1 = A_1\omega_1\cos\alpha + A_2\omega_2\sin\alpha, \quad L_2 = A_2\omega_2\cos\alpha - A_1\omega_1\sin\alpha, \quad L_3 = A_3\omega_3,$$

$$\nu_1 = \gamma_1\cos\alpha + \gamma_2\sin\alpha, \quad \nu_2 = \gamma_2\cos\alpha - \gamma_1\sin\alpha, \quad \nu_3 = \gamma_3.$$

В переменных L_1, L_2, L_3, ν_1, ν_2, ν_3 система уравнений Эйлера – Пуассона (1.1) примет вид:

$$\begin{aligned}
&\dot L_1 = -bL_1L_3,\\
&\dot L_2 = (a-c)\,L_1L_2 + bL_2L_3 + \nu_3\Gamma,\\
&\dot L_3 = -(a-c)\,L_1L_2 + bL_1^2 - bL_2^2 - \nu_2\Gamma,\\
&\\
&\dot\nu_1 = cL_3\nu_2 - (cL_2 + bL_1)\,\nu_3,\\
&\dot\nu_2 = -cL_3\nu_1 + (aL_1 + bL_2)\,\nu_3,\\
&\dot\nu_3 = (bL_1 + cL_2)\,\nu_1 - (aL_1 + bL_2)\,\nu_2.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь обозначено

$$a = \frac{A_2x_1^2 + A_1x_2^2}{A_1A_2\left(x_1^2+x_2^2\right)}, \quad b = \frac{(A_1-A_2)\,x_1x_2}{A_1A_2\left(x_1^2+x_2^2\right)}, \quad c = \frac{1}{A_3}, \quad \Gamma = Mg\sqrt{x_1^2+x_2^2}.$$

Чтобы обнаружить дополнительный первый интеграл, существующий в случае Гесса, достаточно рассмотреть только первое уравнение полученной системы (2.1). В этом уравнении правая часть равна самой переменной L_1, умноженный на ограниченный по модулю коэффициент $-bL_3$. В связи с этим, если в начальный момент времени величина $L_1 = 0$, то и в любой момент времени окажется, что

$$L_1 \equiv 0. \tag{2.2}$$

Инвариантное многообразие (2.2) вместе с условиями (1.2) и определяет случай Гесса. При выполнении всех этих условий уравнения (2.1) заметно упрощаются и принимают вид:

$$\begin{aligned}
&\dot L_2 = bL_2L_3 + \nu_3\Gamma, \quad \dot L_3 = -bL_2^2 - \nu_2\Gamma,\\
&\\
&\dot\nu_1 = cL_3\nu_2 - cL_2\nu_3, \quad \dot\nu_2 = bL_2\nu_3 - cL_3\nu_1, \quad \dot\nu_3 = cL_2\nu_1 - bL_2\nu_2.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Система уравнений (2.3) допускает следующие первые интегралы:

$$\frac{c}{2}\left(L_2^2+L_3^2\right)+\Gamma\nu_1=E; \quad L_2\nu_2+L_3\nu_3=k; \quad \nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1. \tag{2.4}$$

Заметим, что случай $b=0$ соответствует интегрируемому случаю Лагранжа. Вводя безразмерные переменные и параметры

$$L_2=\sqrt{\frac{\Gamma}{c}}y, \quad L_3=\sqrt{\frac{\Gamma}{c}}z, \quad t=\frac{\tau}{\sqrt{\Gamma c}},$$

$$d_1=\frac{b}{c}, \quad h=\frac{E}{\Gamma}, \quad k_1=k\sqrt{\frac{c}{\Gamma}}.$$

запишем систему уравнений (2.3) и первые интегралы (2.4) в безразмерной форме

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{d\tau}=d_1yz-\nu_3, \quad \frac{dz}{d\tau}=-d_1y^2+\nu_2,\\
&\frac{d\nu_1}{d\tau}=z\nu_2-y\nu_3, \quad \frac{d\nu_2}{d\tau}=d_1y\nu_3-z\nu_1, \quad \frac{d\nu_3}{d\tau}=y\nu_1-d_1y\nu_2,\\
&\frac{y^2+z^2}{2}+\nu_1=h, \qquad y\nu_2+z\nu_3=k_1.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Из системы уравнений (2.5) можно получить следующие уравнения

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)=-\sqrt{\left(y^2+z^2\right)\left[1-\left(\frac{y^2+z^2}{2}-h\right)^2\right]-k_1^2},$$

$$y\frac{dz}{d\tau}-z\frac{dy}{d\tau}=-d_1y\left(y^2+z^2\right)-k_1.$$

Введем теперь полярные координаты x и φ по формулам:

$$y=x\cos\varphi, \quad z=x\sin\varphi.$$

Тогда для определения величин x и φ мы получаем следующую систему двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&x\frac{dx}{d\tau}=-\sqrt{x^2\left[1-\left(\frac{x^2}{2}-h\right)^2\right]-k_1^2},\\
&x^2\frac{d\varphi}{d\tau}=-d_1x^3\cos\varphi-k_1.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Из этой системы находим зависимость $\varphi = \varphi(x)$, которая определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d_1 x^3 \cos\varphi + k_1}{x\sqrt{x^2\left[1 - \left(\frac{x^2}{2} - h\right)^2\right] - k_1^2}}. \tag{2.7}$$

Заметим, что при переходе от системы (2.6) к уравнению (2.7) мы исключаем из рассмотрения случай $x = \mathrm{const}$, то есть $y^2 + z^2 = \mathrm{const}$ или $\nu_1 = \mathrm{const}$. Между тем, у тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса существуют стационарные движения, для которых $\nu_1 = \nu_1^0 = \mathrm{const}$ (см., например, [5]).

При помощи замены

$$w = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

уравнение (2.7) приводится к уравнению Риккати:

$$\frac{dw}{dx} = f_2 w^2 + f_0, \tag{2.8}$$

$$f_2 = -\frac{d_1 x^3 - k_1}{2x\sqrt{x^2\left[1 - \left(\frac{x^2}{2} - h\right)^2\right] - k_1^2}} \quad f_0 = \frac{d_1 x^3 + k_1}{2x\sqrt{x^2\left[1 - \left(\frac{x^2}{2} - h\right)^2\right] - k_1^2}}.$$

Из общей теории дифференциальных уравнений известно (см. [6]), что если общее уравнение Риккати имеет вид (2.8), то заменой переменных вида

$$u(x) = \exp\left(-\int f_2(x)\, w(x)\, dx\right)$$

данное уравнение приводится к линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$f_2\frac{d^2u}{dx^2} - \left(\frac{df_2}{dx} + f_1 f_2\right)\frac{du}{dx} + f_0 f_2^2 u = 0, \tag{2.9}$$

или, если разделить на f_2:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \left(\frac{1}{f_2}\frac{df_2}{dx} + f_1\right)\frac{du}{dx} + f_0 f_2 u = 0. \tag{2.10}$$

Заметим, что переход от уравнения (2.9) к уравнению (2.10) возможен только в том случае, когда $f_2 \neq 0$. Условие $f_2 = 0$ с учётом того, что $x \neq \mathrm{const}$, равносильно одновременному выполнению условий

$$d_1 = 0, \quad k_1 = 0.$$

В дальнейшем будем считать, что $f_2 \neq 0$. Окончательно, дифференциальное уравнение второго порядка, к решению которого сводится решение задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса, имеет вид:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + a\left(x\right)\frac{du}{dx} + b\left(x\right)u = 0, \tag{2.11}$$

$$a\left(x\right) = \frac{d_1x^9 - 4k_1x^6 - 4d_1\left(h^2-1\right)x^5 + 12k_1hx^4 - 8k_1^2d_1x^3 - 8k_1\left(h^2-1\right)x^2 - 4k_1^3}{x\left(x^6 - 4hx^4 + 4\left(h^2-1\right)x^2 + 4k_1^2\right)\left(d_1x^3 - k_1\right)},$$

$$b\left(x\right) = \frac{\left(d_1x^3 + k_1\right)\left(d_1x^3 - k_1\right)}{x^2\left(x^6 - 4hx^4 + 4\left(h^2-1\right)x^2 + 4k_1^2\right)}.$$

Применение дифференциальному уравнению (2.11) алгоритма Ковачича [4] приводит к следующему результату.

Теорема 1. *Лиувиллевы решения в задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса существуют только если $d_1 = 0$ (случай Лагранжа) или если $k_1 = 0$ (постоянная интеграла площадей равна нулю).*

Список цитируемых источников

1. *Hess, W.* Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikulare Lösung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt. Mathematische Annalen. 37, No. 2, 153–181 (1890).

2. *Некрасов, П. А.* К задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Математический сборник. 16, No. 2, 508–517 (1892).

   Nekrasov, P. A. On the problem of motion of a heavy rigid body about a fixed point. Mathem. Sb. 16, No. 2, 508–517 (1892) (in Russian)

3. *Некрасов, П. А.* Аналитическое исследование одного случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Математический сборник. 18, No. 2, 161–274 (1896)

   Nekrasov, P. A. Recherches analytiques sur un cas de rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe. Mathematische Annalen. 47, 445–530 (1896).

4. *Kovacic, J.* An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations. J. Symb. Comput. 2, 3–43 (1986).

5. *Новиков, М. А.* О стационарных движениях твердого тела при существовании частного интеграла Гесса. Известия РАН. Механика твердого тела. No. 3. 28–37 (2018)

   Novikov, M. A. On Stationary Motions of a Rigid Body under the Partial Hess Integral Existence. Mechanics of Solids. 53, No. 3. 262–270 (2018)

6. *Зайцев, В. Ф., Полянин, А. Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит. (2001)

Polyanin, A. D. Zaitsev, V. F. Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations. CRC Press, Boca Raton–New York. (2003)

Получена 09.05.2020