Динамические системы, 2020, том 10(38), №1, 84–96

УДК 517.929

О достаточных признаках экспоненциальной устойчивости линейных автономных дифференциальных уравнений с последействием[1]

Т. Л. Сабатулина

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь 614990. *E-mail: tlsabatulina@list.ru*

Аннотация. В работе рассматриваются линейные автономные функционально-дифференциальные уравнения с последействием. Предлагается способ получения эффективных, легко проверяемых достаточных признаков устойчивости таких уравнений на основе положительности фундаментального решения некоторого вспомогательного уравнения. Используя известные условия положительности фундаментального решения дифференциальных уравнений с последействием, установлены новые признаки экспоненциальной устойчивости для некоторых классов линейных автономных дифференциальных уравнений с последействием.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, последействие, экспоненциальная устойчивость, эффективные признаки.

On sufficient conditions of exponential stability for linear autonomous differential equations with aftereffect

T. L. Sabatulina

Perm National Research Polytechnic University, Perm 614990.

Abstract. In this paper we consider linear autonomous functional differential equations with aftereffect. These equations may contain a large number of parameters. We propose an approach to obtain effective and easily verifiable sufficient conditions of exponential stability for these equations. In the approach, we use the positiveness of the fundamental solution of an auxiliary equation. Based on known conditions of the positiveness of the fundamental solution for differential equations with aftereffect, we obtain new sufficient conditions of exponential stability for some classes of linear autonomous equations with aftereffect. The equations contain concentrated delays, distributed delays, or singular component (in the form of the Cantor function).

Keywords: functional differential equations, aftereffect, exponential stability, effective conditions.

MSC 2010: 34K20

[1]Работа выполнена в рамках госзадания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (задание FSNM-2020-0028) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00928).

Введение

Как известно [1, 2, 3, 4], задачу устойчивости для линейных автономных функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) полностью решает исследование нулей его характеристической функции. Однако, как показывает опыт, исчерпывающее исследование расположения нулей характеристической функции возможно лишь для сравнительно простых уравнений с небольшим количеством параметров [3, 4, 5, 17, 6, 7]. Поэтому задача получения легко проверяемых достаточных признаков устойчивости, применимых к широким классам ФДУ, остаётся актуальной. В данной работе предлагается способ получения таких признаков на основе положительности фундаментального решения некоторого вспомогательного уравнения. Решения ФДУ первого порядка, в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, не обладают свойствами знакоопределённости и монотонности [7, 8]. Однако для некоторых классов ФДУ эти свойства сохраняются. Используя их, удаётся получать более точные и эффективно проверяемые признаки устойчивости.

1. Постановка задачи

Пусть $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, L_∞ — пространство ограниченных в существенном на $\mathbb{R}_+$ функций с нормой $\|x\|_\infty = \operatorname{vrai\,sup}_{t\in\mathbb{R}_+} |x(t)|$.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + \int_0^\omega x(t-s)\,dr(s) = \int_0^\tau x(t-s)\,dk(s) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $\omega, \tau \in \mathbb{R}_+$, функции $r\colon [0,\omega] \to \mathbb{R}$ и $k\colon [0,\tau] \to \mathbb{R}$ имеют ограниченную вариацию, $r(0) = 0$, $k(0) = 0$, интегралы понимаются в смысле Римана–Стилтьеса, функция f локально суммируема.

Обозначим $R = \int_0^\omega dr(s)$, $K = \int_0^\tau |dk(s)|$.

Следуя [9, с. 9], назовём *решением* уравнения (1) локально абсолютно непрерывную функцию, удовлетворяющую (1) почти всюду. При отрицательных значениях аргумента, не нарушая общности, функцию x полагаем равной нулю.

Как известно [9, с. 84, теорема 1.1], в указанных предположениях решение уравнения (1) при любом заданном начальном условии $x(0)$ существует, единственно и представимо в виде

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t X(t-s)f(s)\,ds. \tag{2}$$

Функцию X называют *фундаментальным решением* уравнения (1). Из представления (2) следует, что фундаментальное решение является решением уравнения

$$\dot{x}(t) + \int_0^\omega x(t-s)\,dr(s) = \int_0^\tau x(t-s)\,dk(s), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

дополненного начальным условием $x(0) = 1$. Фундаментальное решение естественно сделать основным объектом исследования.

Определение 1. Уравнение (1) будем называть *экспоненциально устойчивым*, если при некоторых положительных N и γ для всех $t \geqslant 0$ справедлива оценка $|X(t)| \leqslant Ne^{-\gamma t}$.

2. Основной результат

Рассмотрим уравнение, которое определяется левой частью уравнения (1):

$$\dot{x}(t) + \int_0^\omega x(t-s)\,dr(s) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{4}$$

Это уравнение далее будем называть *уравнением сравнения.* Через X_0 обозначим фундаментальное решение уравнения (4).

Лемма 1. *Пусть уравнение* (4) *экспоненциально устойчиво. Тогда* $\int_0^\infty X_0(t)\,dt = 1/R$.

Доказательство. Проинтегрируем уравнение (4), а затем поменяем порядок интегрирования (в силу теоремы Фубини [10, с. 317] это возможно):

$$\begin{aligned} X_0(t) - X_0(0) &= -\int_0^\omega \int_0^s X_0(s-\xi)\,dr(\xi)\,ds - \int_\omega^t \int_0^\omega X_0(s-\xi)\,dr(\xi)\,ds = \\ &= -\int_0^\omega \int_\xi^\omega X_0(s-\xi)\,ds\,dr(\xi) - \int_0^\omega \int_\omega^t X_0(s-\xi)\,ds\,dr(\xi) = \\ &= -\int_0^\omega \int_\xi^t X_0(s-\xi)\,ds\,dr(\xi) = -\int_0^\omega \int_0^{t-\xi} X_0(s)\,ds\,dr(\xi). \end{aligned}$$

Перейдём к пределу при $t \to \infty$, при этом учтём, что уравнение (4) экспоненциально устойчиво, то есть $X_0(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, и воспользуемся теоремой Лебега [10, с. 302–303]:

$$1 = \int_0^\omega \int_0^\infty X_0(s)\,ds\,dr(\xi) = R\int_0^\infty X_0(s)\,ds,$$

что завершает доказательство леммы. □

Лемма 2. *Пусть $a \in \mathbb{R}$ и для фундаментального решения уравнения* (4) *справедливо неравенство $\dot{X}_0(t) \leqslant -aX_0(t)$. Тогда $X_0(t) \leqslant e^{-at}$.*

Доказательство. Из условия леммы вытекает, что

$$\frac{d}{dt}\left(X_0(t)e^{at}\right) = e^{at}\Big(\dot{X}_0(t) + aX_0(t)\Big) \leqslant 0.$$

Тогда функция $X_0(t)e^{at}$ не возрастает. Значит, $X_0(t)e^{at} \leqslant X_0(0)e^{a\cdot 0} = 1$, то есть $X_0(t) \leqslant e^{-at}$. □

Приведём в удобной для нас форме теорему типа Боля–Перрона.

Предложение 1 ([11, с. 103, теорема 3.3.1]). *Для уравнения* (1) *эквивалентны следующие утверждения:*

а) при любых $x(0) \in \mathbb{R}$ *и* $f \in L_\infty$ *решение уравнения* (1) *принадлежит* L_∞*;*

б) уравнение (1) *экспоненциально устойчиво.*

На основе предложения 1 докажем следующий признак экспоненциальной устойчивости.

Теорема 1. *Пусть* $K < R$ *и существуют* $N_0, \gamma_0 > 0$*, такие что при любом* $t \in \mathbb{R}_+$ *выполняются оценки*

$$0 < X_0(t) \leqslant N_0 e^{-\gamma_0 t}. \tag{5}$$

Тогда уравнение (1) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. Опираясь на формулу (2), перепишем уравнение (1) в эквивалентном интегральном виде

$$(I - T)x = g, \tag{6}$$

где

$$g(t) = X_0(t)x(0) + \int_0^t X_0(t-s)f(s)\,ds, \ (Tx)(t) = \int_0^t X_0(t-s)\int_0^\tau x(s-\xi)\,dk(\xi)\,ds.$$

Заметим, что если $f \in L_\infty$, то $g \in L_\infty$. Учитывая положительность функции X_0 и лемму 1, оценим норму оператора $T\colon L_\infty \to L_\infty$:

$$\begin{aligned}\|(Tx)(t)\|_\infty &= \sup_{t\geqslant 0}\left|\int_0^t X_0(t-s)\int_0^\tau x(s-\xi)\,dk(\xi)\,ds\right| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{t\geqslant 0}\left(\int_0^t X_0(t-s)\int_0^\tau |dk(\xi)|\,ds\right)\|x\|_\infty = K\sup_{t\geqslant 0}\left(\int_0^t X_0(t-s)\,ds\right)\|x\|_\infty = \\ &= K\left(\int_0^\infty X_0(s)\,ds\right)\|x\|_\infty = \frac{K}{R}\|x\|_\infty.\end{aligned}$$

Следовательно, $\|T\| \leqslant K/R$. Если $K < R$, то $\|T\| < 1$ и, в силу принципа сжимающих отображений [10, с. 320], при любом $f \in L_\infty$ уравнение (6) имеет решение в L_∞. Поэтому из предложения 1 вытекает теорема 1. □

Для успешного применения теоремы 1 требуются эффективные условия положительности фундаментального решения уравнения (4). Это само по себе является самостоятельной задачей, которая решалась для различных классов уравнений в работах [13, 14, 7, 15, 8]. Используя полученные в них результаты, можно устанавливать достаточные признаки экспоненциальной устойчивости для линейных автономных ФДУ с последействием. Далее мы найдём такие признаки для нескольких классов уравнений вида (1).

3. Эффективные признаки устойчивости

3.1. Уравнение с сосредоточенными запаздываниями

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + a_1 x(t-h_1) + a_2 x(t-h_2) = \int_0^\tau x(t-s)\,dk(s), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{7}$$

где $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$, $h_1, h_2 > 0$. Не теряя общности, можно считать, что $h_1 < h_2$.

Для (7) уравнение сравнения имеет вид

$$\dot{x}(t) + a_1 x(t-h_1) + a_2 x(t-h_2) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{8}$$

Зададим функцию $v = \varphi_1(u)$ параметрически равенствами

$$\left\{ u = -\frac{1+\zeta h_2}{h_2 - h_1} e^{\zeta h_1}, \quad v = \frac{1+\zeta h_1}{h_2 - h_1} e^{\zeta h_2}, \quad \zeta \in \left[-\frac{1}{h_2}, -\frac{1}{h_1} \right] \right\}.$$

Множество P_1 определим следующим образом: $P_1 = \{(u,v)\colon 0 \leqslant v \leqslant \varphi_1(u)\}$. На рис. 1 множество P_1 закрашено.

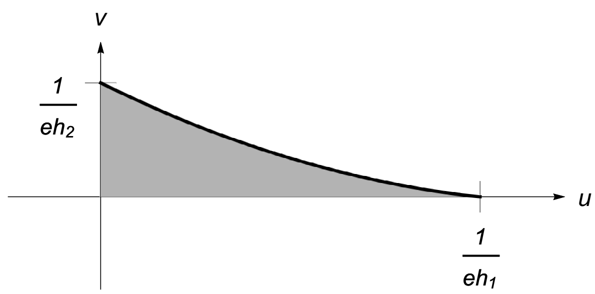

Рис. 1. Множество P_1.

В работе [12] показано, что фундаментальное решение уравнения (8) положительно при $\{a_1, a_2\} \in P_2$. Этот результат позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\{a_1, a_2\} \in P_1$ *и* $\int_0^\tau |dk(s)| < a_1 + a_2$. *Тогда уравнение* (7) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. Как было отмечено выше, фундаментальное решение X_0 уравнения (8) положительно. Тогда $\dot{X}_0(t) < 0$, значит, $X_0(t)$ убывает на $\mathbb{R}_+$ и $\dot{X}_0(t) \leqslant -a_1X_0(t) - a_2X_0(t) = -(a_1 + a_2)X_0(t)$. Поэтому из леммы 2 следует $X_0(t) \leqslant e^{-(a_1+a_2)t}$. Для уравнения (7) $R = a_1 + a_2$. Ссылка на теорему 1 завершает доказательство. □

Приведём два следствия теоремы 2.

Следствие 1. *Пусть* $\{a_1, a_2\} \in P_1$ *и* $\sum_{m=1}^{M} |b_m| < a_1 + a_2$. *Тогда уравнение*

$$\dot{x}(t) + a_1x(t - h_1) + a_2x(t - h_2) = \sum_{m=1}^{M} b_m x(t - \tau_m), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{9}$$

экспоненциально устойчиво.

Следствие 2. *Пусть* $0 < ah \leqslant \frac{1}{e}$ *и* $\sum_{m=1}^{M} |b_m| < a$. *Тогда уравнение*

$$\dot{x}(t) + ax(t - h) = \sum_{m=1}^{M} b_m x(t - \tau_m), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{10}$$

экспоненциально устойчиво.

3.2. Уравнение с распределёнными запаздываниями

Пусть теперь уравнение сравнения содержит распределённое запаздывание:

$$\dot{x}(t) + a_1 \int_{t-h_1}^{t} x(s)\,ds + a_2 \int_{t-h_2}^{t} x(s)\,ds = \int_0^{\tau} x(t - s)\,dk(s), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{11}$$

где $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$, $h_1, h_2 > 0$. Не теряя общности, можно считать, что $h_1 < h_2$.

Для (11) уравнение сравнения имеет вид

$$\dot{x}(t) + a_1 \int_{t-h_1}^{t} x(s)\,ds + a_2 \int_{t-h_2}^{t} x(s)\,ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{12}$$

Зададим функцию $v = \varphi_2(u)$ параметрически равенствами

$$\left\{ u = -\frac{\zeta e^{\zeta h_1}\left(2e^{\zeta h_2} - \zeta h_2 - 2\right)}{h_1(e^{\zeta h_2} - 1) - h_2(e^{\zeta h_1} - 1)}, \quad v = \frac{\zeta e^{\zeta h_2}\left(2e^{\zeta h_1} - \zeta h_1 - 2\right)}{h_1(e^{\zeta h_2} - 1) - h_2(e^{\zeta h_1} - 1)}, \zeta \in \left[-\frac{\zeta_0}{h_2}, -\frac{\zeta_0}{h_1}\right] \right\},$$

где ζ_0 — положительный корень уравнения $e^{-\zeta} = 1 - \frac{\zeta}{2}$. Множество P_2 определим следующим образом: $P_2 = \{(u, v)\colon 0 \leqslant v \leqslant \varphi_2(u)\}$. На рис. 2 множество P_2

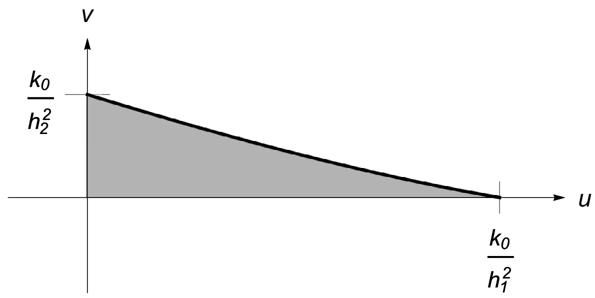

Рис. 2. Множество P_2.

закрашено. Постоянная k_0 определяется через корень ζ_0. Численные методы дают значение $k_0 = \zeta_0(2 - \zeta_0) \approx 1.59362$.

Из работ [16] и [19] следует, что фундаментальное решение уравнения (12) положительно при $\{a_1, a_2\} \in P_2$. Этот результат позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\{a_1, a_2\} \in P_2$ *и* $\int_0^\tau |dk(s)| < a_1h_1 + a_2h_2$. *Тогда уравнение* (11) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. Как было отмечено выше, фундаментальное решение X_0 уравнения (12) положительно. Тогда $\dot{X}_0(t) < 0$, значит, $X_0(t)$ убывает на $\mathbb{R}_+$ и $\dot{X}_0(t) \leqslant -a_1 \int_{t-h_1}^t X_0(t)\,ds - a_2 \int_{t-h_2}^t X_0(t)\,ds = -(a_1h_1 + a_2h_2)X_0(t)$. Поэтому из леммы 2 вытекает $X_0(t) \leqslant e^{-(a_1h_1+a_2h_2)t}$. Для уравнения (11) $R = a_1h_1 + a_2h_2$. Остаётся применить теорему 1. □

Приведём два следствия теоремы 3.

Следствие 3. *Пусть* $\{a_1, a_2\} \in P_2$ *и* $\sum_{m=1}^M |b_m| + \sum_{n=1}^N |c_n|\theta_n < a_1h_1 + a_2h_2$. *Тогда уравнение*

$$\dot{x}(t) + a_1 \int_{t-h_1}^t x(s)\,ds + a_2 \int_{t-h_2}^t x(s)\,ds = \\ = \sum_{m=1}^M b_m x(t - \tau_m) + \sum_{n=1}^N c_n \int_{t-\theta_n}^t x(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{13}$$

экспоненциально устойчиво.

Следствие 4. *Пусть* $0 < ah^2 \leqslant k_0$ *и* $\int_0^\tau |dk(s)| < ah$. *Тогда уравнение*

$$\dot{x}(t) + a \int_{t-h}^t x(s)\,ds = \int_0^\tau x(t-s)\,dk(s), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{14}$$

экспоненциально устойчиво.

3.3. Уравнение со слагаемыми без запаздываний

Область положительности фундаментального решения существенно расширяется, если в уравнение сравнения входит слагаемое, содержащее нулевое запаздывание. Рассмотрим два таких уравнения:

$$\dot{x}(t) + a_1 x(t) + a_2 x(t-h) = \int_0^\tau x(t-s)\, dk(s), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{15}$$

$$\dot{x}(t) + a_1 x(t) + a_2 \int_{t-\theta-h}^{t-\theta} x(s)\, ds = \int_0^\tau x(t-s)\, dk(s), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{16}$$

где $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $h, \tau, \theta \in \mathbb{R}_+$.

Отметим, что, в отличие от уравнений (7) и (11), в уравнениях (15) и (16) коэффициенты a_1, a_2 не обязательно положительны.

Для (15) и (16) уравнения сравнения имеют вид

$$\dot{x}(t) + a_1 x(t) + a_2 x(t-h) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{17}$$

$$\dot{x}(t) + a_1 x(t) + a_2 \int_{t-\theta-h}^{t-\theta} x(s)\, ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{18}$$

Определим $P_3 = \{(u,v)\colon -v < u \leqslant e^{-v-1}\}$. Множество P_3 изображено на рис. 3.

В работе [14] доказано, что фундаментальное решение уравнения (17) положительно тогда и только тогда, когда $a_2 h \leqslant e^{-a_1 h - 1}$. Этот результат позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $\{a_2 h, a_1 h\} \in P_3$ *и* $\int_0^\tau |dk(s)| < a_1 + a_2$. *Тогда уравнение* (15) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. В силу [17] и [14] для фундаментального решения уравнения (17) выполняется (5). Для уравнения (15) $R = a_1 + a_2$. Применение теоремы 1 обеспечивает экспоненциальную устойчивость уравнения (15). □

В декартовой системе координат $Ouvw$ зададим поверхность $u = \omega(v,w)$ параметрически:

$$\left\{ u = \zeta + \frac{\zeta\left(1 - e^{\zeta}\right)}{e^{\zeta}(\zeta(w+1)-1) + (1-\zeta w)}, \quad v = \frac{\zeta^2 e^{-\zeta w}}{e^{\zeta}(\zeta(w+1)-1) + (1-\zeta w)}, \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad w \geqslant 0. \right\}$$

Определим $P_4 = \{(u,v)\colon -v \leqslant u \leqslant \omega(v,w)\}$. Множество P_4 изображено на рис. 3 (находится между плоскостью и поверхностью).

В работе [7] доказано, что фундаментальное решение уравнения (18) положительно тогда и только тогда, когда $a_2 h^2 \leqslant \omega(a_1 h, \theta/h)$. Этот результат позволяет доказать следующее утверждение.

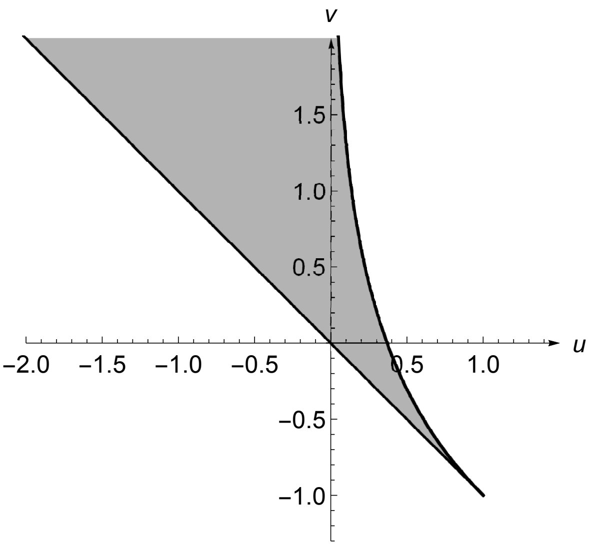

Рис. 3. Множество P_3.

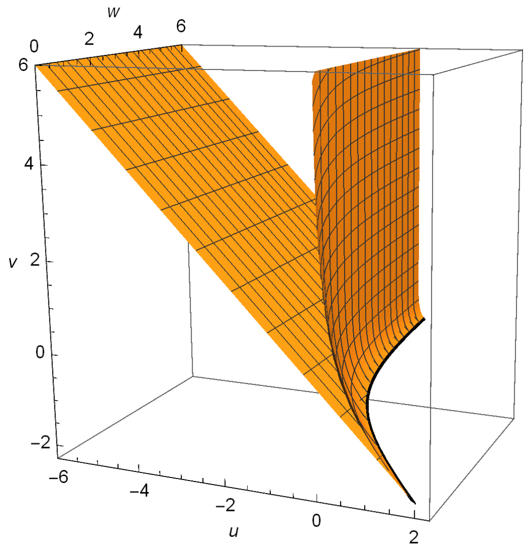

Рис. 4. Множество P_4.

Теорема 5. *Пусть* $\{a_2h^2, a_1h, \theta/h\} \in P_4$ *и* $\int_0^\tau |dk(s)| < a_1 + a_2h$. *Тогда уравнение* (16) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. В силу [18] и [7] для фундаментального решения уравнения (18) выполняется (5). Для уравнения (16) $R = a_1 + a_2h$. Остаётся применить теорему 1. □

3.4. Уравнение с сингулярной составляющей

В качестве уравнения сравнения можно выбирать и уравнение с сингулярной составляющей. Рассмотрим пример, в котором функция r является «канторовой лестницей» [10, с. 341]:

$$\dot{x}(t) + a\int_0^1 x(t-s)\,dc(s) = \int_0^\tau x(t-s)\,dk(s), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{19}$$

где $a \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}_+$.

Для (19) уравнение сравнения имеет вид

$$\dot{x}(t) + a\int_0^1 x(t-s)\,dc(s) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{20}$$

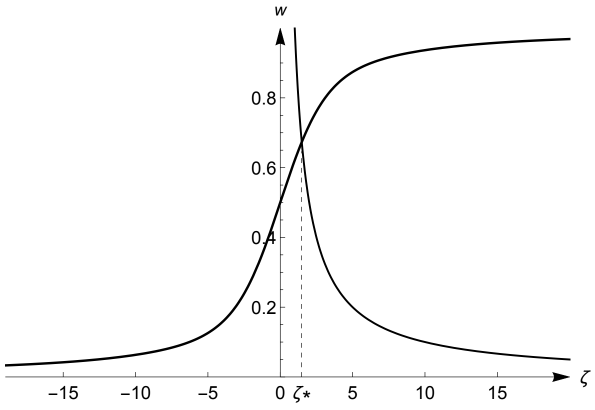

Рис. 5. Функция $w(\zeta)$ (толстая линия).

Пусть $\phi(\zeta) = \int_0^1 e^{\zeta\xi}\,dc(\xi)$, $w(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)}$. Свойства функции w исследованы в работе [8]: функция w определена и непрерывно дифференцируема на всей оси, монотонно возрастает от 0 до 1, $w(\zeta) + w(-\zeta) = 1$. График функции w изображён на рис. 5. Обозначим единственный корень уравнения $1/\zeta = w(\zeta)$ через ζ_* (см. рис. 5) и положим $a_* = \zeta_*/\phi(\zeta_*)$. Численные методы дают $\zeta_* \approx 1.48$, $a_* \approx 0.618$. В той же работе [8] доказано, что фундаментальное решение уравнения (20) положительно тогда и только тогда, когда $a \leqslant a_*$. На основе этого результата получим ещё один признак устойчивости.

Теорема 6. *Пусть* $\int_0^\tau |dk(s)| < a \leqslant a_*$. *Тогда уравнение* (19) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. Как отмечалось выше, в условиях леммы $X_0 > 0$. Тогда $\dot{X}_0(t) < 0$, значит, $X_0(t)$ убывает на $\mathbb{R}_+$ и $\dot{X}_0(t) \leqslant -a\int_0^1 X_0(t)\,dc(s) = -aX_0(t)$. Поэтому из леммы 2 следует $X_0(t) \leqslant e^{-at}$. Для уравнения (19) $R = a$. Ещё раз применяя теорему 1, получаем требуемое утверждение. □

Заключение

В работе предложен новый метод получения эффективных легко проверяемых признаков экспоненциальной устойчивости для линейных автономных ФДУ с последействием. Эти условия устанавливаются на основе положительности фундаментального решения уравнения сравнения. Суть метода состоит в построении уравнения сравнения — устойчивого ФДУ, фундаментальное решение которого положительно, — с последующим описанием класса близких к нему уравнений, для которых устойчивость сохраняется. Эффективность метода напрямую зависит от наличия и точности условий положительности фундаментального решения для уравнения сравнения, что стимулирует продолжение исследований в этом направлении. Используемую в работе технику предполагается развивать дальше, применяя её к изучению устойчивости линейных неавтономных ФДУ, а также нелинейных уравнений и систем.

Список цитируемых источников

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально–разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

   Bellman, R., Cooke, K. L. Differential–difference equations. New York: Academic Press, 1963.

2. *Зубов В. И.* К теории линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом. Известия вузов. Математика, № 6, 86-95 (1958).

   Zubov, V. I. On the theory of linear stationary systems with lagging arguments. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., № 6, 86-95 (1958). (in Russian)

3. *Неймарк Ю. И.* Устойчивость линеаризованных систем (дискретных и распределённых). Л.: ЛКВВИА, 1949.

   Neimark, Yu. I. Stability of linearized systems (discrete and distributed). Leningrad: LKVVIA, 1949. (in Russian)

4. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

   El'sgol'ts, L. E., Norkin, S. B. Introduction to the theory of differential equations with deviating argument. Moscow: Nauka, 1971. (in Russian)

5. *Мулюков М. В.* Устойчивость двупараметрических систем линейных автономных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием. Изв. ИМИ УдГУ, 51, 79–122 (2018).

   Mulyukov, M. V. Stability of two-parameter systems of linear autonomous differential equations with bounded delay. Izv. IMI UdGU, 51, 79–122 (2018). (in Russian)

6. *Вагина М. Ю.* Логистическая модель с запаздывающим усреднением. Автоматика и телемеханика, № 4, 167-173 (2003).

   Vagina, M. Yu. A Delay-Averaged Logistic Model. Avtomat. i Telemekh., № 4, 167-173 (2003). (in Russian)

7. *Малыгина В. В., Сабатулина Т. Л.* Знакоопределённость решений и устойчивость линейных дифференциальных уравнений с переменным распределённым запаздыванием. Известия вузов. Математика. № 8, 73-77 (2008).

   Malygina, V. V., Sabatulina, T. L. The fixed sign property of solutions and stability of linear differential equations with varying distributed delay. Russian Mathematics (Iz. VUZ), 52, No. 8, 61-64 (2008).

8. *Sabatulina, T., Malygina, V.* On positiveness of the fundamental solution for a linear autonomous differential equation with distributed delay. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. No. 61., 1-16 (2014).

9. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

   Azbelev, N. V., Maksimov, V. P., Rakhmatullina, L. F. Introduction to the Theory of Linear Functional Differential Equations. Atlanta: World Federation Publ., 1995.

10. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.

    Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V. Elements of theory of functions and functional analysis. Moscow: Nauka, 1981. (in Russian)

11. *Азбелев Н. В., Симонов П. М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновнными производными. Пермь: изд-во Пермск. ун-та, 2001.

    Azbelev, N. V., Simonov, P. M. Stability of differential equations with aftereffect. Stability and Control: Theory, Methods and Applications 20. London: Taylor and Francis, 2003.

12. *Баландин А. С.* О положительности фундаментального решения линейных автономных дифференциально-разностных уравнений с коэффициентами разных знаков. Сборник трудов VII Международной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2014)» (стр. 22-25). Воронеж: ООО «Издательство «Научная книга», 2014.

    Balandin, A. S. On positiveness of the fundamental solution of linear autonomous differential-difference equations with different sign coefficients. In Proc. VII Int. conf. “Modern methods of applied mathematics, control theory and computer technology” (pp. 22-25). Voronezh: OOO ”Izdatel’stvo ”Nauchnaya kniga”, 2014. (in Russian)

13. *Мышкис А. Д.* О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом. Матем. сб. 28 (70), № 3, 641-658 (1951).

    Myshkis, A. D. On solutions of linear homogeneous differential equations of the first order of stable type with a retarded argument. Mat. Sb. (N.S.) 28 (70), No. 3, 641-658 (1951). (in Russian)

14. *Гусаренко С. А., Домошницкий А. И.* Об асимптотических и осцилляционных свойствах линейных скалярных функционально-дифференциальных уравнений первого порядка. Дифференц. уравнения. **25**, No. 12, 2090–2103 (1989).

    Gusarenko, S. A., Domoshnitskii, A. I. Asymptotic and oscillation properties of first-order linear scalar functional-differential equations. Differ. Equ. 25, No. 12, 1480–1491 (1990).

15. *Agarwal, R. P., Berezansky, L., Braverman, E., Domoshnitsky, A.* Nonoscillation theory of functional differential equations with applications. New York: Springer, 2012.

16. *Сабатулина Т. Л.* Об осцилляции решений автономного дифференциального уравнения с двумя распределёнными запаздываниями. Сборник трудов IX Международной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2016)» (стр. 293-296). Воронеж: ООО «Издательство «Научная книга», 2016.

    Sabatulina, T. L. On oscillation of solutions for autonomous differential equation with two distributed delays. In Proc. IX Int. conf. “Modern methods of applied mathematics, control theory and computer technology” (pp. 293-296). Voronezh: OOO ”Izdatel’stvo ”Nauchnaya kniga”, 2016. (in Russian)

17. *Андронов А. А., Майер А. Г.* Простейшие линейные системы с запаздыванием. Автоматика и телемеханика. 7, № 2-3, 95-106 (1946).

    Andronov, A. A., Maier, A. G. Simplest linear systems with delay. Avtomat. i Telemekh., 7, No. 2-3, 95–106 (1946). (in Russian)

18. *Сабатулина Т. Л., Малыгина В. В.* Некоторые признаки устойчивости линейного автономного дифференциального уравнения с распределённым запаздыванием. Известия вузов. Математика. № 6, 55-63 (2007).

    Sabatulina, T. L., Malygina, V. V. Several stability tests for linear autonomous differential equations with distributed delay. Russian Mathematics (Iz. VUZ), 51, No. 6, 52-60 (2007).

19. *Sabatulina, T. L.* Oscillating and sign-definite solutions to autonomous functional-differential equations. J. Math. Sci., 230, No. 5, 766-769 (2018).

Получена 24.02.2020