

УДК 517.929

Об экспоненциально убывающих оценках решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием, используемых в моделях динамики популяций¹

Н. В. Перцев

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск 630090. E-mail: homlab@ya.ru

Аннотация. Исследуется поведение решений задачи Коши для систем нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием, возникающих в моделях динамики популяций. Приведена совокупность условий, обеспечивающих экспоненциально убывающие оценки компонент решений изучаемой задачи Коши. Параметры экспоненциальных оценок находятся как решение нелинейной системы неравенств, построенной на основе линейных мажорант отображений, входящих в правые части рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. Представлены результаты построения экспоненциальных оценок для модели, описывающей динамику численности изолированной популяции, и трехкомпонентной модели процесса производства клеток крови.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения с запаздыванием, задача Коши, глобальная разрешимость, неотрицательность решений, экспоненциально убывающие оценки решений, -матрица, математическая биология, динамика популяций.

On exponentially decreasing estimates of solutions to nonlinear delay functional differential equations used in population dynamics models

N. V. Pertsev

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk 630090.

Abstract. The behavior of solutions to the Cauchy problem for systems of nonlinear delay functional differential equations arising in models of population dynamics is studied. A set of conditions providing exponentially decreasing estimates of the components of solutions to the studied Cauchy problem is presented. The parameters of exponential estimates are found as a solution to a nonlinear system of inequalities constructed on the basis of linear majorant mappings included in the right-hand sides of the system of differential equations under consideration. The results of constructing exponential estimates for a model describing the dynamics of an isolated population and a three-component model of the blood cell production process are presented.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект No. 18-29-10086.

Keywords: delay functional differential equations, Cauchy problem, global solvability, nonnegativity of solutions, exponential decreasing estimates of solutions, M -matrix, mathematical biology, population dynamics.

MSC 2010: 34K12, 34K20, 34K25

Введение

Одно из направлений математического моделирования живых систем связано с исследованием дифференциальных уравнений с запаздыванием, используемых для описания динамики различных популяций. Многие модели динамики популяций могут быть представлены в форме задачи Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x_t) - (\mu + g(t, x_t))x(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$x(t) = \psi(t), \quad t \in I_\omega = [-\omega, 0], \quad (2)$$

для системы линейных или нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием. В уравнениях системы (1) и начальных условиях (2) использованы обозначения

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_1(t), \dots, x_m(t))^T, \quad \psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_m(t))^T, \\ f(t, x_t) &= (f_1(t, x_t), \dots, f_m(t, x_t))^T, \\ g(t, x_t) &= \text{diag}(g_1(t, x_t), \dots, g_m(t, x_t)), \quad \mu = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_m), \end{aligned}$$

где $x(t)$ – искомая функция, описывающая численность популяций $P_1, \dots, P_m$; запаздывающая переменная $x_t : I_\omega \rightarrow R^m$ отражает предысторию развития популяций $P_1, \dots, P_m$, и для каждого фиксированного $t \geq 0$ определена по правилу: $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in I_\omega$; начальная функция $\psi(t)$ задает численность изучаемых популяций при $t \leq 0$. Для фиксированного $1 \leq i \leq m$ отображение $f_i(t, x_t)$ описывает скорость появления новых индивидуумов популяции P_i , отображение $g_i(t, x_t)$ таково, что $g_i(t, x_t)x_i(t)$ задает скорость гибели или превращения индивидуумов популяции P_i за счет взаимодействия индивидуумов между собой, а также под влиянием внешней среды. Выражение $\mu_i x_i(t)$ означает скорость естественной смертности или миграционного оттока индивидуумов популяции P_i , где μ_i – некоторая константа. Под $dx(t)/dt$ понимается правосторонняя производная $x(t)$ (покомпонентно).

Положим $J = [a, b] \subset R$, $R_+ = \{v \in R : v \geq 0\}$, $A \subseteq R^m$. Пусть E – единичная $m \times m$ матрица, $\|v\|_{R^m} = \sum_{i=1}^m |v_i|$ – норма вектора $v \in R^m$. Через $C(J, A)$ обозначим множество всех непрерывных функций $z : J \rightarrow A$ с нормой

$$\|z\| = \max_{\theta \in J} (\|z(\theta)\|_{R^m}), \quad z \in C(J, R^m).$$

Обозначим через $B_d = \{z \in C(I_\omega, R^m) : \|z\| \leq d\}$ шар в пространстве $C(I_\omega, R^m)$. Для $u, w \in R^m$ неравенства $u < 0$, $u > 0$, $u \leq w$, $u \geq w$ понимаются покомпонентно.

Если $x, y \in C(J, A)$, то для каждого $t \in J$ неравенство $x(t) \leq y(t)$ понимается как неравенство между соответствующими векторами.

Примем, что отображения, функции и константы, входящие в (1), (2), удовлетворяют набору предположений, совокупность которых при всех $1 \leq i \leq m$ обозначим через **(H0)**:

1) $f_i, g_i : R_+ \times C(I_\omega, A_\xi) \rightarrow R$, где $A_\xi = \{u \in R^m : u \geq \xi\}$, $\xi \in R^m$, $\xi < 0$ — некоторый фиксированный вектор;

2) $f_i, g_i : R_+ \times C(I_\omega, R_+^m) \rightarrow R_+$;

3) $f_i(t, z), g_i(t, z)$ непрерывны по $(t, z) \in R_+ \times C(I_\omega, A_\xi)$ и локально липшицевы по z : для каждого $d \in R$, $d > 0$, существуют константы $L_f^{(i)} = L_f^{(i)}(\xi, d) > 0$, $L_g^{(i)} = L_g^{(i)}(\xi, d) > 0$, такие, что при всех $z_1, z_2 \in B_d \cap C(I_\omega, A_\xi)$ и $t \in [0, \infty)$ выполнены неравенства

$$|f_i(t, z_1) - f_i(t, z_2)| \leq L_f^{(i)} \|z_1 - z_2\|, \quad |g_i(t, z_1) - g_i(t, z_2)| \leq L_g^{(i)} \|z_1 - z_2\|;$$

4) $\psi_i : I_\omega \rightarrow R_+$ — непрерывная функция;

5) $\mu_i > 0$.

Следуя [2], [10], решением задачи Коши (1), (2) на полуоси R_+ будем называть функцию $x(t)$, непрерывную на любом конечном промежутке $I_\omega \cup [0, \tau]$, $\tau > 0$, удовлетворяющую начальному условию (2), имеющую непрерывную производную на промежутке $[0, \tau)$, которая удовлетворяет уравнениям системы (1) для всех $t \in [0, \tau)$.

Задача Коши (1), (2) для линейных и нелинейных систем (1) детально исследована в работах автора [4], [5], [6]. В этих работах получены условия глобальной разрешимости задачи Коши (1), (2), установлена неотрицательность компонент решения $x(t)$ при неотрицательных компонентах функции $\psi(t)$, получены покомпонентные верхние оценки для $x(t)$ и экспоненциально убывающие оценки для компонент $x(t)$ в случае линейной системы уравнений (1). Перечисленные результаты получены на основе теории монотонных операторов [3], [7], [8].

Целью настоящей работы является исследование задачи Коши (1), (2) для нелинейной системы уравнений (1) и получение условий, обеспечивающих существование экспоненциально убывающих оценок компонент решения $x(t)$ изучаемой задачи на промежутке $[0, \infty)$.

1. Вспомогательные результаты

Используя метод вариации произвольной постоянной, перейдем от системы (1), (2) к системе интегральных уравнений, дополненной начальными данными

$$x(t) = e^{-\int_0^t (\mu + g(s, x_s)) ds} \psi(0) + \int_0^t e^{-\int_a^t (\mu + g(s, x_s)) ds} f(a, x_a) da, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$x(t) = \psi(t), \quad t \in I_\omega, \quad (4)$$

где символом

$$e^{-\int_a^t (\mu + g(s, x_s)) ds}$$

обозначена диагональная матричная экспонента, построенная с помощью диагональной матрицы $\mu + g(s, x_s)$.

Опираясь на стандартный подход [10], получаем, что задачи (1), (2) и (3), (4) эквивалентны. Следовательно, для изучения поведения решения $x(t)$ задачи Коши (1), (2) можно воспользоваться системой (3), (4).

Зафиксируем $\tau > 0$. Под $C_\psi \subset C([-\omega, \tau], R^m)$ будем понимать множество, состоящее из всех функций $x \in C([-\omega, \tau], R^m)$, таких, что $x(t) = \psi(t)$, $t \in I_\omega$. Решением задачи (3), (4) на промежутке $[0, \tau]$ будем называть функцию $x \in C_\psi$, такую, что $x(t)$ удовлетворяет (3) для всех $t \in [0, \tau]$. Примем, что $C_{\psi,0} \subset C_\psi$ — множество, состоящее из функций $x \in C_\psi$, таких, что $x(t) \geq 0$, $t \in [-\omega, \tau]$. Опираясь на (3), (4), определим оператор F , который каждой функции $x \in C_{\psi,0}$ сопоставляет функцию $F(x) \in C_{\psi,0}$ по формулам

$$F(x)(t) = \psi(t), \quad t \in I_\omega,$$

$$F(x)(t) = e^{-\int_0^t (\mu + g(s, x_s)) ds} \psi(0) + \int_0^t e^{-\int_a^t (\mu + g(s, x_s)) ds} f(a, x_a) da, \quad t \in [0, \tau].$$

Пусть $v = v(t) = (v_1(t), \dots, v_m(t))^T$ — некоторая функция с неотрицательными компонентами, непрерывная на промежутке $[-\omega, \tau]$. Положим, что $C_{\psi,0,v}$ состоит из функций $x \in C_\psi$, удовлетворяющих неравенствам $0 \leq x(t) \leq v(t)$, $t \in [-\omega, \tau]$.

Используя леммы 1, 2, 5 работы [6], приходим к следующим результатам.

Лемма 1. Пусть выполнено предположение (H0) и существует функция v , такая, что $F : C_{\psi,0,v} \rightarrow C_{\psi,0,v}$. Тогда задача (3), (4) имеет на промежутке $[0, \tau]$ единственное решение $x \in C_\psi$, причем $x \in C_{\psi,0,v}$.

Теорема 1. Пусть выполнено предположение (H0) и для всех $(t, z) \in R_+ \times C(I_\omega, R_+^m)$ имеет место оценка

$$f(t, z) \leq p + \int_{-\omega}^0 d\nu(\theta) z(\theta), \quad (5)$$

где $p \in R_+^m$, ν — $m \times m$ матрица, элементы которой определены и не убывают на I_ω , матрица $\Delta\nu = \nu(0) - \nu(-\omega)$ содержит хотя бы один положительный элемент. Тогда задача (3), (4) однозначно разрешима на полуоси R_+ , и при всех $t \geq 0$ верна оценка $0 \leq x(t) \leq c e^{\eta t}$, где $c \in R^m$, $c > 0$ — некоторый вектор, $\eta \in R$ — некоторая константа, зависящие от μ , p , $\Delta\nu$.

Из теоремы 1 следует, что искомая экспоненциально убывающая оценка для решения $x(t)$ задачи Коши (1), (2) может быть найдена в рамках оценки вида (5) и выполнения условий, при которых $\eta < 0$.

2. Дополнительное предположение и основной результат

Примем, что отображение $f(t, x_t)$ удовлетворяет предположению **(H1)**:

1) для всех $(t, x_t) \in R_+ \times C(I_\omega, R_+^m)$ имеет место оценка

$$f(t, x_t) \leq \widehat{f}(x_t) = \sum_{i=0}^n L_i x(t - \omega_i) + \int_{-\omega_{n+1}}^0 L_{n+1}(\theta) x(t + \theta) d\theta, \quad (6)$$

где запаздывания $0 < \omega_i \leq \omega$, $1 \leq i \leq n+1$, $\omega_0 = 0$, $L_0, \dots, L_n, L_{n+1}(\theta)$ – неотрицательные матрицы, элементы матрицы $L_{n+1}(\theta)$ интегрируемы по Риману;

2) каждая строка матрицы

$$L = \sum_{i=0}^n L_i + \int_{-\omega_{n+1}}^0 L_{n+1}(\theta) d\theta \quad (7)$$

содержит хотя бы один ненулевой элемент.

Заметим, что матрица L , заданная формулой (7), является неотрицательной, а внедиагональные элементы матрицы $\mu - L$ не положительны. Будем говорить, что $\mu - L$ является невырожденной М-матрицей, если она имеет обратную и обратная матрица $(\mu - L)^{-1}$ неотрицательна. В монографиях [1], [9] приведен ряд критериев, позволяющих проверять матрицу $\mu - L$ на принадлежность к семейству невырожденных М-матриц.

Рассмотрим задачу Коши для функции $y(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))^T$:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \widehat{f}(y_t) - \mu y(t), \quad t \geq 0, \quad (8)$$

$$y(t) = \psi(t), \quad t \in I_\omega. \quad (9)$$

Решением задачи Коши (8), (9) на полуоси R_+ будем называть функцию $y(t)$, непрерывную на любом конечном промежутке $I_\omega \cup [0, \tau]$, $\tau > 0$, удовлетворяющую начальному условию (9), имеющую на $[0, \tau]$ непрерывную производную, которая удовлетворяет уравнениям системы (8) для всех $t \in [0, \tau]$; при $t = 0$ под $dy(t)/dt$ понимается правосторонняя производная.

Используя метод вариации произвольной постоянной и учитывая начальные условия, перейдем к изучению системы линейных интегральных уравнений, эквивалентной задаче (8), (9), а именно:

$$y(t) = e^{-\mu t} \psi(0) + \int_0^t e^{-\mu(t-a)} \widehat{f}(y_a) da, \quad t \geq 0, \quad (10)$$

$$y(t) = \psi(t), \quad t \in I_\omega. \quad (11)$$

Лемма 2. Пусть матрица L , введенная в предположении (H1), такова, что $\mu - L$ является невырожденной М-матрицей. Тогда для решения $y(t)$ задачи Коши (8), (9) имеет место оценка

$$0 \leq y(t) \leq c e^{-r t}, \quad t \in I_\omega \cup R_+, \quad (12)$$

где $c \in R^m$, $r \in R$ удовлетворяют системе неравенств

$$c > 0, \left(\mu - rE - \sum_{i=0}^n e^{r\omega_i} L_i - \int_{-\omega_{n+1}}^0 e^{-r\theta} L_{n+1}(\theta) d\theta \right) c \geq 0, \quad (13)$$

$$c \geq \max_{t \in I_\omega} (e^{rt} \psi(t)), \quad 0 < r < \min(\mu_1, \dots, \mu_m). \quad (14)$$

Доказательство. Пусть $c \in R^m$, $r \in R$ — некоторые вектор и константа. Введем функцию

$$v(t) = c e^{-rt}, \quad t \in I_\omega \cup R_+. \quad (15)$$

Опираясь на условия леммы, используем теорему 3 работы [4] применительно к задаче Коши (8), (9) и эквивалентной ей задаче (10), (11). Получаем, что существуют $c \in R^m$ и $r \in R$, удовлетворяющие (13), (14), и такие, что для функции $v(t)$ вида (15) верны неравенства

$$e^{-\mu t} \psi(0) + \int_0^t e^{-\mu(t-a)} \widehat{f}(v_a) da \leq v(t), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (16)$$

$$\psi(t) \leq v(t), \quad t \in I_\omega. \quad (17)$$

Кроме того, из (10), (11), (16), (17) следует, что при всех $t \in I_\omega \cup R_+$ для решения $y(t)$ задачи Коши (8), (9) верно $0 \leq y(t) \leq v(t) = c e^{-rt}$, то есть имеет место оценка (12). Лемма доказана. $\square$

Отметим, что способы нахождения $c \in R^m$ и $r \in R$, используемых в оценке (12), приведены в разделе 3 работы [4] и в разделе 2 работы [5].

Теорема 2. Пусть выполнены предположения (H0), (H1), $\mu - L$ является невырожденной M -матрицей. Тогда задача Коши (1), (2) имеет на полуоси R_+ единственное решение $x(t)$, и справедлива оценка

$$0 \leq x(t) \leq c e^{-rt}, \quad t \in I_\omega \cup R_+, \quad (18)$$

где $c \in R^m$, $r \in R$ удовлетворяют системе неравенств (13), (14).

Доказательство. Используя лемму 2, рассмотрим функцию v , определенную формулой (15) и удовлетворяющую соотношениям (16), (17). Имеем, что для всех $t \in I_\omega$ верно $\psi(t) \leq v(t)$. Опираясь на оценку (6), получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} 0 &\leq e^{-\int_0^t (\mu + g(s, v_s)) ds} \psi(0) + \int_0^t e^{-\int_a^t (\mu + g(s, v_s)) ds} f(a, v_a) da \\ &\leq e^{-\mu t} \psi(0) + \int_0^t e^{-\mu(t-a)} \widehat{f}(v_a) da \leq v(t), \quad 0 \leq t < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, для каждого фиксированного $\tau > 0$ верно $0 \leq F(v)(t) \leq v(t)$, $t \in [-\omega, \tau]$. Более того, если $x \in C_{\psi, 0, v}$, то

$$0 \leq F(x)(t) \leq F(v)(t) \leq v(t), \quad t \in [-\omega, \tau].$$

Последнее означает, что $F(x) \in C_{\psi,0,v}$, то есть множество функций $C_{\psi,0,v}$ является инвариантным для оператора F . Используя лемму 1, устанавливаем, что для фиксированного $\tau > 0$ задача (3), (4) имеет на промежутке $[0, \tau]$ единственное решение $x \in C_\psi$, причем $x \in C_{\psi,0,v}$. Заметим, что компоненты функции $v(t)$ не зависят от τ . Учитывая произвольность выбора τ и используя теорему 1, получаем, что задача Коши (1), (2) имеет единственное решение $x = x(t)$ на полуоси R_+ , и для этого решения справедлива оценка (18). Теорема доказана. $\square$

3. Примеры

Применение теоремы 2 к исследованию конкретных моделей означает поиск условий, приводящих к вырождению популяций. Экспоненциально убывающие оценки позволяют оценить скорость и время до вырождения популяций в зависимости от начальных данных и параметров линейной мажорирующей системы.

3.1. Динамика изолированной популяции

Пусть $m = 1$ и $x = x(t)$ – численность взрослых индивидуумов некоторой изолированной популяции P . Примем, что динамика $x(t)$ задается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= f(t, x_t) - (\mu + g(t, x_t))x(t) \\ &= \frac{\rho e^{-\lambda\omega_1} x^2(t - \omega_1)}{1 + \beta x(t - \omega_1)} - \left(\mu + \gamma x(t) + \int_{-\omega_2}^0 \varphi(\theta) x(t + \theta) d\theta \right) x(t), \quad t \geq 0, \\ x(t) &= \psi(t), \quad t \in I_\omega = [-\max\{\omega_1, \omega_2\}, 0], \end{aligned}$$

где $\rho, \lambda, \beta, \omega_1, \mu, \gamma, \omega_2$ – положительные константы, $\varphi(\theta), \psi(t)$ – неотрицательные, непрерывные функции, $\psi(t) \not\equiv 0$. Выражение

$$f(t, x_t) = \frac{\rho e^{-\lambda\omega_1} x^2(t - \omega_1)}{1 + \beta x(t - \omega_1)}$$

опирается на стадия-зависимый вариант модели Базыкина и задает скорость воспроизводства индивидуумов популяции. Запоздывание ω_1 означает продолжительность периода от появления новых индивидуумов до их перехода в группу взрослых индивидуумов, константа λ означает интенсивность гибели молодых индивидуумов популяции. Отметим, что для любых $x_t = x(t - \omega_1) \geq 0$ верно $0 \leq f(t, x_t) \leq (\alpha/\beta) x(t - \omega_1)$, где $\alpha = \rho e^{-\lambda\omega_1}$. Выражение

$$g(t, x_t) = \gamma x(t) + \int_{-\omega_2}^0 \varphi(\theta) x(t + \theta) d\theta$$

описывает интенсивность гибели взрослых индивидуумов популяции вследствие их конкуренции за некоторые ресурсы и отражает один из вариантов модели Лотки-Вольтерра.

Для рассматриваемой модели выполнены предположения (Н0) и (Н1), причем $\widehat{f}(x_t) = (\alpha/\beta) x(t - \omega_1)$. При $m = 1$ система (8) с начальным условием (9) имеет достаточно простой вид, а именно: $y(t) \in R$,

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \widehat{f}(y_t) - \mu y(t) = (\alpha/\beta) y(t - \omega_1) - \mu y(t), \quad t \geq 0, \\ y(t) &= \psi(t), \quad t \in I_\omega. \end{aligned}$$

Обратимся к условиям теоремы 2. Вместо матрицы $\mu - L$ следует рассмотреть константу $\mu - \alpha/\beta$ и потребовать ее положительность. Тогда, если $\mu > \alpha/\beta$, то решение $x(t)$ изучаемой модели неотрицательно и имеет экспоненциально убывающую верхнюю оценку:

$$0 \leq x(t) \leq c e^{-rt}, \quad t \in I_\omega \cup [0, \infty). \quad (19)$$

В оценке (19) константы $c \in R$, $r \in R$ находятся как решение следующей системы неравенств:

$$c > 0, \quad 0 < r < \mu, \quad (\mu - r - e^{r\omega_1} \alpha/\beta) c \geq 0, \quad c \geq \max_{t \in I_\omega} (e^{rt} \psi(t)).$$

Учитывая, что $c > 0$, константу r находим как корень уравнения

$$\mu - r = e^{r\omega_1} \alpha/\beta, \quad 0 < r < \mu. \quad (20)$$

Очевидно, что уравнение (20) имеет единственный корень r на указанном промежутке. Далее полагаем, что

$$c = \max_{t \in I_\omega} (e^{rt} \psi(t)).$$

Пусть, в частности, $\alpha/\beta = 1$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 1$, $\mu = 1.5$ и $\psi(t) = 10000 + 200t$, $t \in I_\omega$. Численное решение уравнения (20) дает корень $r = 0.235$ (с округлением до третьего знака). Поскольку $\psi(t)$ – монотонно возрастающая функция, то $c = \psi(0)$. Тогда приходим к оценке

$$0 \leq x(t) \leq 10000 e^{-0.235t}, \quad t \in [-\omega, \infty).$$

Неравенство $\mu > \alpha/\beta$ отражает ситуацию, в которой интенсивность естественной гибели взрослых индивидуумов популяции μ превышает уровень α/β , интерпретируемый как максимальная интенсивность производства потомства в расчете на одного взрослого индивидуума. Нетрудно заметить, что в случае $\mu > \alpha/\beta$ популяция вырождается при любой ее начальной численности.

3.2. Динамика гемопоэза

Рассмотрим модель, описывающую производство зрелых клеток крови одной из миелоидной линий кроветворения (моноцитов, макрофагов, гранулоцитов). Предполагаем, что производство зрелых клеток крови регулируется с помощью положительной и отрицательной обратной связи, определяющей скорость выработки молекул гормона-поэтина. Система уравнений модели имеет вид:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \sigma_0 \beta_0 s_0 x_3(t - \omega_3) - (\beta_1 + \mu_1)x_1(t), \quad (21)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \sigma_1 \beta_1 x_1(t - \omega_1) - \mu_2 x_2(t), \quad t \geq 0, \quad (22)$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = \alpha x_2(t - \omega_2) h(x_2(t - \omega_2)) - \mu_3 x_3(t), \quad (23)$$

$$x_i(t) = \psi_i(t), \quad t \in I_\omega = [-\omega, 0], \quad i = 1, 2, 3. \quad (24)$$

В системе (21)–(24) переменная $x_1(t)$ означает численность созревающих клеток костного мозга, $x_2(t)$ — численность зрелых клеток крови, $x_3(t)$ — концентрацию гормона-поэтина в момент времени t . Начальные значения этих переменных описываются с помощью неотрицательных, непрерывных функций $\psi_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, $t \in I_\omega$, $\omega = \max\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Параметры ω_3, ω_1 задают время, необходимое для превращения клеток одной популяции в клетки другой популяции, s_0 означает число стволовых кроветворных клеток костного мозга, которое принято постоянным. Параметры β_0, β_1 задают интенсивности переходов клеток из одной популяции в другую, μ_1, μ_2, μ_3 — интенсивности разрушения созревающих клеток костного мозга, зрелых клеток крови и молекул гормона-поэтина за счет естественного старения и взаимодействия с факторами, которые в модели явно не учитываются. Параметры σ_0, σ_1 отражают пролиферативную активность стволовых кроветворных клеток и созревающих клеток костного мозга (коэффициенты, учитывающие количество делений этих клеток в процессе размножения и гибель части делящихся клеток). Слагаемое $\alpha x_2(t - \omega_2) h(x_2(t - \omega_2))$, входящее в (23), описывает скорость производства гормона-поэтина в условиях положительных и отрицательных обратных связей, α — некоторая константа. Параметр ω_2 учитывает запаздывание в реакции организма с точки зрения зависимости скорости производства гормона-поэтина от изменения численности зрелых клеток крови. Все указанные параметры и запаздывания положительны.

Примем, что $h(u)$ является неотрицательной, непрерывной, невозрастающей, локально-липпшицевой на промежутке $u \in [0, \infty)$ функцией и $h(0) = 1$. Характерным примером $\rho(u)$ служат функции

$$\rho_1(u) = \frac{\alpha u}{1 + u^n}, \quad \rho_2(u) = \alpha u e^{-\lambda u}, \quad u \geq 0,$$

где $\alpha > 0$, $n > 1$, $\lambda > 0$ — некоторые константы.

Из системы (21)–(23) видно, что матрица μ и компоненты отображений

$$f(t, x_t) = (f_1(t, x_t), f_2(t, x_t), f_3(t, x_t))^T, \quad g(x_t) = \text{diag}(g_1(x_t), g_2(x_t), g_3(x_t))$$

имеют следующий вид: $\mu = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, $f_1(t, x_t) = \sigma_0 \beta_0 s_0 x_3(t - \omega_3)$,

$$f_2(t, x_t) = \sigma_1 \beta_1 x_1(t - \omega_1), \quad f_3(t, x_t) = \alpha x_2(t - \omega_2) h(x_2(t - \omega_2)), \\ g_1(x_t) = \beta_1, \quad g_2(x_t) \equiv 0, \quad g_3(x_t) \equiv 0.$$

Очевидно, что μ , $f(t, x_t)$, $g(t, x_t)$ удовлетворяют предположению (H0). Используя неравенство $0 \leq h(u) \leq 1$, $u \geq 0$, получаем, что для всех $x_2(t - \omega_2) \geq 0$ верно $f_3(t, x_t) \leq \alpha x_2(t - \omega_2)$.

Заметим, что $g_1(x_t)x_1(t) = \beta_1 x_1(t)$ — линейно зависит от $x_1(t)$. Поэтому, опираясь на структуру системы уравнений (21)–(23), можно использовать другую запись матрицы μ и отображения $g_1(x_t)$, а именно:

$$\mu = \text{diag}(\beta_1 + \mu_1, \mu_2, \mu_3), \quad g_1(x_t) \equiv 0. \quad (25)$$

Тогда для модели (21)–(24) система (8), (9) может быть представлена в виде:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = \sigma_0 \beta_0 s_0 y_3(t - \omega_3) - (\beta_1 + \mu_1)y_1(t), \quad (26)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = \sigma_1 \beta_1 y_1(t - \omega_1) - \mu_2 y_2(t), \quad t \geq 0, \quad (27)$$

$$\frac{dy_3(t)}{dt} = \alpha y_2(t - \omega_2) - \mu_3 y_3(t), \quad (28)$$

$$y_i(t) = \psi_i(t), \quad t \in I_\omega, \quad i = 1, 2, 3. \quad (29)$$

Обозначим: $a_1 = \sigma_1 \beta_1$, $a_2 = \alpha$, $a_3 = \sigma_0 \beta_0 s_0$,

$$\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t))^T, \quad y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))^T,$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем систему (26)–(29) в компактной форме

$$\frac{dy(t)}{dt} = \hat{f}(y_t) - \mu y(t) = L_1 y(t - \omega_1) + L_2 y(t - \omega_2) + L_3 y(t - \omega_3) - \mu y(t), \quad t \geq 0, \quad (30)$$

$$y(t) = \psi(t), \quad t \in I_\omega, \quad (31)$$

где под μ понимается матрица, заданная формулой (25). Матрица L , используемая в предположении (H1), имеет вид $L = L_1 + L_2 + L_3$ (в соответствии с формулой (7)) и не содержит нулевых строк. Следовательно, отображение $f(t, x_t)$ удовлетворяет предположению (H1).

Обратимся к теореме 2. Матрица $\mu - L$ (с учетом (25)) такова:

$$\mu - L = \begin{pmatrix} \beta_1 + \mu_1 & 0 & -a_3 \\ -a_1 & \mu_2 & 0 \\ 0 & -a_2 & \mu_3 \end{pmatrix}.$$

Получим условия, при которых $\mu - L$ является невырожденной М-матрицей. Применим критерий, связанный с положительностью главных (диагональных) миноров матрицы $\mu - L$, включая ее определитель (см., например, [9]). Вычисляя диагональные миноры этой матрицы, находим, что

$$M_1 = \beta_1 + \mu_1 > 0, \quad M_2 = (\beta_1 + \mu_1) \mu_2 > 0, \quad M_3 = (\beta_1 + \mu_1) \mu_2 \mu_3 - a_1 a_2 a_3.$$

Следовательно, если верно неравенство

$$(\beta_1 + \mu_1) \mu_2 \mu_3 > a_1 a_2 a_3, \quad (32)$$

то $\mu - L$ является невырожденной М-матрицей.

Опираясь на конкретный вид системы (30), (31), обратимся к неравенствам (13), (14) относительно $r \in R$ и $c \in R^3$:

$$\left(\mu - rE - \sum_{i=1}^3 e^{r\omega_i} L_i \right) c \geq 0, \quad (33)$$

$$0 < r < \min(\beta_1 + \mu_1, \mu_2, \mu_3), \quad (34)$$

$$c > 0, \quad c \geq \max_{t \in I_\omega} (e^{rt} \psi(t)). \quad (35)$$

Для нахождения решения системы (33)–(35) используем результаты раздела 2 работы [5]. Обозначим

$$\Omega(r) = \mu - rE - \sum_{i=1}^3 e^{r\omega_i} L_i = \begin{pmatrix} \beta_1 + \mu_1 - r & 0 & -a_3 e^{r\omega_3} \\ -a_1 e^{r\omega_1} & \mu_2 - r & 0 \\ 0 & -a_2 e^{r\omega_2} & \mu_3 - r \end{pmatrix}.$$

Параметр r будем искать как корень уравнения

$$\det \Omega(r) = 0 \quad (36)$$

с учетом неравенства (34). Определитель матрицы $\Omega(r)$ имеет вид:

$$\det \Omega(r) = (\beta_1 + \mu_1 - r)(\mu_2 - r)(\mu_3 - r) - a_1 a_2 a_3 e^{r(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)}.$$

От (36) приходим к уравнению

$$(\beta_1 + \mu_1 - r)(\mu_2 - r)(\mu_3 - r) = a_1 a_2 a_3 e^{r(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)}, \quad (37)$$

корни r которого будем искать на промежутке

$$r \in [r_1, r_2] = [0, \min(\beta_1 + \mu_1, \mu_2, \mu_3)]. \quad (38)$$

Пусть $F_1(r)$, $F_2(r)$ – функции, записанные в левой и правой частях уравнения (37), $r \in [r_1, r_2]$. Видно, что $F_1(r)$ монотонно убывает, а $F_2(r)$ монотонно возрастает на промежутке $r \in (r_1, r_2)$. Имеем, что $F_2(r_2) > F_1(r_2) = 0$. В силу выполнения неравенства (32) находим, что $F_1(r_1) > F_2(r_1) > 0$. Отсюда непосредственно получаем, что уравнение (37) имеет на промежутке (38) единственный корень $r = r_*$, и этот корень таков, что $0 < r_* < \min(\beta_1 + \mu_1, \mu_2, \mu_3)$.

Зафиксируем r_* и найдем решение системы

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \in R^3, \quad \xi > 0, \quad \Omega(r_*)\xi = 0. \quad (39)$$

Для матрицы $\Omega(r_*)$ имеем, что

$$\beta_1 + \mu_1 - r_* > 0, \quad (\beta_1 + \mu_1 - r_*)(\mu_2 - r_*) > 0, \quad \det \Omega(r_*) = 0.$$

Получаем, что ранг матрицы $\Omega(r_*)$ равен 2, и решение системы (39) имеет следующий вид:

$$\xi_3^{(*)} > 0, \quad \xi_1^{(*)} = \frac{a_3 e^{r_* \omega_3}}{\beta_1 + \mu_1 - r_*} \xi_3^{(*)} > 0, \quad \xi_2^{(*)} = \frac{\mu_3 - r_*}{a_2 e^{r_* \omega_2}} \xi_3^{(*)} > 0. \quad (40)$$

Следовательно, найдено решение системы (33) с учетом $c > 0$. Обратимся к неравенствам (35). Положим, что искомый вектор $c = c_* = \xi^{(*)} > 0$. Из (40) следует, что для каждой фиксированной функции $\psi(t)$ можно выбрать компоненту $\xi_3^{(*)}$ вектора $\xi^{(*)}$, обеспечивающую выполнение неравенства

$$\xi^{(*)} \geq \max_{t \in I_\omega} (e^{r_* t} \psi(t)).$$

В итоге получаем, что при выполнении неравенства (32) для решения $x(t)$ модели (21)–(24) имеет место оценка

$$0 \leq x(t) \leq c_* e^{-r_* t}, \quad t \in [-\omega, \infty).$$

Результаты исследования модели (21)–(24) можно интерпретировать следующим образом. Неравенство (32) указывает на связь между параметрами процесса кроветворения, в рамках которой может возникать аплазия костного мозга (полное исчезновение созревающих клеток костного мозга и зрелых клеток крови). Такая ситуация возможна, в частности, за счет увеличения интенсивностей разрушения созревающих клеток костного мозга или зрелых клеток крови, а также снижения пролиферативного потенциала созревающих клеток костного мозга под влиянием различных факторов. Еще одной из причин может являться патологическая ситуация, приводящая к снижению выработки созревающих клеток костного мозга из стволовых кроветворных клеток или нарушения в производстве гормона–поэтина.

Заключение

Основной результат статьи состоит в разработке условий, обеспечивающих покомпонентно экспоненциально убывающие оценки решений задачи Коши для систем нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием специального вида. Параметры экспоненциальных оценок находятся как решение нелинейной системы неравенств, построенной на основе линейных мажорант отображений, входящих в правые части рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. Способы нахождения указанных параметров предполагают использование достаточно простых численных методов. Предложенный подход может быть применен для изучения еще одной проблемы, а именно: построение экспоненциально убывающих оценок по части компонент решений задачи Коши для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. Необходимость построения таких оценок обусловлена изучением высокоразмерных математических моделей, возникающих в задачах иммунологии и эпидемиологии.

Список цитируемых источников

1. *Воеводин, В. В., Кузнецов, Ю. А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
Voevodin, V. V., Kuznetsov, Yu. A. Matrices and Calculations. Moskva: Nauka, 1984. Zbl 0537.65024
2. *Колмановский, В. Б., Носов, В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.
Kolmanovskii, V. B., Nosov, V. R. Stability and periodic modes of a controlled systems with aftereffect. Moskva: Nauka, 1981. Zbl 0457.93002
3. *Красносельский, М. А., Вайникко, Г. М., Забрейко, П. П., Рутицкий, Я. Б., Стеценко, В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
Krasnoselskiy, M. A., Vainikko, G. M., Zabreiko, P. P., Rutitskiy, J. B., Stretsko, V. J. Approximate solution of operator equations. Moskva: Nauka, 1969.
4. *Перцев, Н. В.* Применение М-матриц для построения экспоненциальных оценок решений задачи Коши для некоторых систем линейных разностных и дифференциальных уравнений. Математические труды. 16, № 2, 111–141 (2013).
Pertsev, N. V. Application of M-matrices in construction of exponential estimates for solutions to the Cauchy problem for systems of linear difference and differential equations. Siberian Advances in Mathematics. 24, Issue 4, 240–260 (2014).
5. *Перцев, Н. В.* Двусторонние оценки на решения задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений Важевского с запаздыванием. Сибирский матем. журн. 54, № 6, 1368–1379 (2013).
Pertsev, N. V. Two-sided estimates for solutions to the Cauchy problem for Wazewski linear differential systems with delay. Siberian Math. J., 54, No.6, 1089–1098 (2013). Zbl 1293.34097
6. *Перцев, Н. В.* Глобальная разрешимость и оценки решений задачи Коши для функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием, используемых в моделях живых систем. Сибирский матем. журн. 59, № 1, 143–157 (2018).

- Pertsev, N. V. Global solvability and estimates for solutions to the Cauchy problem for the retarded functional differential equations that are used to the model living systems. *Siberian Math. J.*, 59, No.1, 113–125 (2018).
7. Цалюк, З. Б. Интегральные уравнения Вольтерра. В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Матем. анализ. 15, 131–198 (1977).
- Tsalyuk, Z. B. Volterra integral equations, *Itogi nauki i tekhniki. Mat. analiz* (Results of Science and Technology: Mathematical Analysis). Moskva: VINITI, 15, 131–198 (1977).
8. Azbelev, N. V., Maksimov, V. P., Rakhmatullina, L. F. Introduction to the theory of functional differential equations: Methods and applications. Hindawi Publishing Corporation, 2007. Zbl 1202.34002
9. Berman, A., Plemmons, R. J. Nonnegative matrices in the mathematical sciences. New York: Academic Press, 1979. Zbl 0484.15016
10. Hale J. K. Theory of Functional Differential Equations. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, and Berlin, 1977. Zbl 0352.34001

Получена 12.03.2020