Динамические системы, 2020, том 10(38), №1, 51–69

УДК 517.929

Об экспоненциальной устойчивости уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами[1]

В. В. Малыгина, А. С. Баландин

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь 614990. *E-mail: mavera@list.ru, balandin-anton@yandex.ru*

Аннотация. Исследуется устойчивость линейных уравнений нейтрального типа с постоянными запаздываниями и периодическими коэффициентами. Установлено, что для таких уравнений экспоненциальная устойчивость эквивалентна наличию экспоненциальной оценки функции Коши. Показано, что поведение решений исходного уравнения асимптотически эквивалентно поведению решений некоторого автономного уравнения, допускающего конструктивное построение. На основе известных признаков экспоненциальной устойчивости для автономных уравнений получены новые признаки экспоненциальной устойчивости для исходного уравнения.

Ключевые слова: уравнения нейтрального типа, функция Коши, экспоненциальная устойчивость.

On exponential stability of equations of neutral type with periodic coefficients

V. V. Malygina, A. S. Balandin

Perm National Research Polytechnic University, Perm 614990.

Abstract. We investigate stability of linear neutral equations with constant delays and periodic coefficients. On the basis of the integral representation of a solution, we deduce the problem of stability to the study of asymptotic behavior of the fundamental solution and the Cauchy function. For equations of the mentioned above form we find a formula connecting the fundamental solution and the Cauchy function and show that the exponential stability is equivalent to the existence of an exponential estimate for the Cauchy function. We also show that one may establish a correspondence between the original equation and an autonomous equation with coefficients formed by averaging over the length of the period, where the autonomous equation is exponentially stable if and only if the original equation is exponentially stable. Based on known conditions of exponential stability for autonomous equations, we obtain new effective sufficient conditions of exponential stability for equations with periodic coefficients.

Keywords: equations of neutral type, Cauchy function, exponential stability.

MSC 2010: 34K20, 34K40

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №18-01-00928.

Введение

Среди функционально-дифференциальных уравнений наиболее востребованными (и потому наиболее изученными) являются автономные уравнения, т. е. такие, решения которых инвариантны относительно сдвига начальной точки. Для этих уравнений известно максимальное число признаков устойчивости, сформулированных как в аналитической, так и в геометрической форме — в виде областей устойчивости в пространстве параметров.

С учетом этого представляется полезным выделение различных классов неавтономных уравнений, которые допускают сведение к автономным.

В настоящей статье рассмотрен класс дифференциально-разностных уравнений с периодическими коэффициентами, асимптотически эквивалентных автономным, к исследованию которых удалось эффективно применить уже известные результаты.

Впервые возможность сведения уравнений с периодическими коэффициентами к автономным была отмечена А. М. Зверкиным в «Дополнении» к монографии [8] (с. 498–512), где было показано, что исследование асимптотической устойчивости уравнения

$$\dot{x}(t)+\sum_{j=0}^{J} b_j(t)x(t-jh)=0\ , \quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{1}$$

с непрерывными h-периодическими коэффициентами b_j можно заменить исследованием автономного уравнения

$$\dot{x}(t)+\sum_{j=0}^{J} B_j x(t-jh)=0, \quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где $B_j=\frac{1}{h}\int_0^h b_j(t)dt$. В частности, справедлив следующий результат [8, с. 505].

Теорема. *Уравнение* (1) *асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда асимптотически устойчиво уравнение* (2).

Заметим, что асимптотическая устойчивость здесь совпадает с экспоненциальной, поскольку (1) и (2) — уравнения запаздывающего типа.

1. Постановка задачи

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$, $\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, $L_p(E)$ — пространства функций, суммируемых со степенью p $(1\leqslant p<\infty)$, а $L_\infty(E)$ — пространство измеримых и ограниченных в существенном на множестве E функций с естественными нормами.

Символом I будем обозначать единичный (тождественный) оператор, символом Θ — нулевой оператор. Через Δ обозначим множество $\Delta=\{(t,s)\in\mathbb{R}^2 : t\geqslant s\}$.

Основным объектом изучения в данной работе является уравнение нейтрального типа

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - \sum\limits_{k=1}^{K} a_k \dot{x}(t-kh) = \sum\limits_{j=0}^{J} b_j(t) x(t-jh) + f(t), & t \geqslant s, \\ x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \dot{x}(\xi) = \psi(\xi), & \xi < s, \end{cases} \tag{3}$$

где $s \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $a_k \in \mathbb{R}$, b_j — суммируемые периодические функции с периодом h, f — локально суммируемая функция. Для корректной постановки задачи функцию x и ее производную $\dot{x}$ необходимо доопределить при отрицательных значениях аргумента начальными функциями $\varphi \in L_\infty[s-\omega, s]$, $\psi \in L_1[s-\omega, s]$, где $\omega = \max\{Kh, Jh\}$.

История построения теории функционально-дифференциальных уравнений наглядно показывает, что выбор пространства начальных функций — отдельная задача, которая допускает множество подходов. Начнем с постановки, которая принята в научной школе Н. В. Азбелева [1].

Обозначим через S_h оператор сдвига, действующий в пространстве непрерывных (кусочно-непрерывных, суммируемых) функций:

$$(S_h y)(t) = \begin{cases} y(t-h), & t-h \geqslant s, \\ 0, & t-h < s, \end{cases}$$

введем операторы $(Sy)(t) = \sum\limits_{k=1}^{K} a_k (S_h^k y)(t)$, $(Ty)(t) = \sum\limits_{j=0}^{J} b_j(t)(S_h^j y)(t)$ и рассмотрим уравнение

$$(I - S)\dot{x} = Tx + f, \quad t \geqslant s. \tag{4}$$

Заметим, что в такой постановке задачи не требуется доопределять решение для $t < s$.

Как известно ([1], с. 84, теорема 1.1), уравнение (4) с заданными начальными условиями однозначно разрешимо в классе локально абсолютно непрерывных функций и его решение представимо в виде:

$$x(t) = X(t,s)x(s) + \int_s^t Y(t,\tau) f(\tau)\, d\tau, \tag{5}$$

где X — фундаментальное решение, Y — функция Коши. Далее всюду полагаем, что $X(t,s) = Y(t,s) = 0$ при $t < s$. Функции X и Y описывают любое решение уравнения (4), а исследование задач устойчивости сводится к исследованию их асимптотического поведения.

2. Фундаментальное решение

Отметим ряд простых, но важных свойств фундаментального решения X. Из формулы (5) следует, что при любом фиксированном s функция $X(t,s)$ является локально абсолютно непрерывной по t и определяется как решение соответствующего (4) однородного уравнения с заданным начальным условием:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X(t,s)}{\partial t} - \sum\limits_{k=0}^{K} a_k \dfrac{\partial X(t-kh,s)}{\partial t} = \sum\limits_{j=0}^{J} b_j(t) X(t-jh,s), \quad t \geqslant s, \\ X(s,s) = 1. \end{cases} \tag{6}$$

Первое свойство фундаментального решения, которое мы установим, показывает, что при увеличении разности аргументов функция X не может расти быстрее экспоненты. Для этого понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть* $b = b(\tau)$ *— неотрицательная, суммируемая на отрезке* $[s,t]$ *функция. Тогда* $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \int_s^t b(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)}\, d\tau = 0$.

Доказательство. Обозначим $E_n = \{\tau \in [s,t] \colon b(\tau) \geqslant n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что множество E_n измеримо (по Лебегу) и

$$\mu E_n \leqslant \tfrac{1}{n} \int_{E_n} b(\tau)\, d\tau \leqslant \tfrac{1}{n} \int_s^t b(\tau)\, d\tau \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Не нарушая общности, можно считать, что $\alpha > 0$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега найдется такое N, что $\int_{E_N} b(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau \leqslant \int_{E_N} b(\tau) d\tau < \varepsilon/2$. С другой стороны,

$$\int_{[s,t]\setminus E_N} b(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)}\, d\tau \leqslant N \int_s^t e^{-\alpha(t-\tau)}\, d\tau = \frac{N}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha(t-s)}\right) < \frac{N}{\alpha},$$

следовательно, при $\alpha > 2N/\varepsilon$ имеем $\int_s^t b(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau < \varepsilon$. □

Пусть $P_\alpha[s, s+l]$ — пространство кусочно-непрерывных на $[s, s+l]$ функций, имеющих разрывы разве лишь в точках, кратных h, с весовой нормой $\|y\|_\alpha = \sup\limits_{t\in[s,s+l]} |y(t)| e^{-\alpha(t-s)}$. Несложно убедиться, что пространство $P_\alpha[s, s+l]$ является банаховым.

Заметим, что операторы S_h и S переводят пространство $P_\alpha[s, s+l]$ в себя, а поскольку $\|S_h y\|_\alpha \leqslant e^{-\alpha h} \|y\|_\alpha$, то $\|S_h\|_\alpha \leqslant e^{-\alpha h}$, следовательно, $\|S_h^n\|_\alpha \leqslant e^{-\alpha h n}$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Пусть $A = \sum\limits_{k=1}^{K} |a_k|$. Тогда

$$\|S\|_\alpha = \left\| \sum\nolimits_{k=1}^{K} a_k S_h^k \right\|_\alpha \leqslant \sum\nolimits_{k=1}^{K} |a_k| \left\| S_h^k \right\|_\alpha \leqslant \sum\nolimits_{k=1}^{K} |a_k| e^{-\alpha h k} \leqslant A e^{-\alpha h},$$

следовательно, $\|S^n\|_\alpha \leqslant A^n e^{-\alpha h n}$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$.

Теорема 1. *Существуют такие* $\alpha > 0$, $N_1, N_2 > 0$, *что при всех* $(t,s) \in \Delta$ *справедливы оценки* $|X(t,s)| \leqslant N_1 e^{\alpha(t-s)}$ *и* $\int_s^t |\frac{d}{d\tau} X(\tau,s)| d\tau \leqslant N_2 e^{\alpha(t-s)}$.

Доказательство. Считая, что операторы S и T применяются только к первому аргументу, а второй остается фиксированным, перепишем (6) в виде: $(I-S)\dot{X} = TX$.

Найдем $n \in \mathbb{N}_0$ такое, что $nh \leqslant t-s < (n+1)h$. Тогда $S^{n+1} = \Theta$, а $(I-S)^{-1} = I + S + \ldots + S^n$. Следовательно, $\dot{X}$ можно представить в виде $\dot{X} = (I-S)^{-1}TX = (I+S+\ldots+S^n)TX$.

Заметим, что в силу h-периодичности функций b_j операторы S и T перестановочны: $ST = TS$, значит

$$\dot{X} = T(I + S + \ldots + S^n)X. \tag{7}$$

Интегрируя последнее равенство, получаем $X = 1 + KX$, где оператор K определяется равенством:

$$(Ky)(t) = \int_s^t \sum_{j=0}^{J} b_j(\tau) S_h^j (I + S + \ldots + S^n) y(\tau)\, d\tau.$$

Очевидно, что оператор K действует в пространстве $P_\alpha[s, s+(n+1)h]$ и ограничен. Оценим его норму. По определению нормы в пространстве $P_\alpha[s, s+(n+1)h]$ имеем:

$$\begin{aligned}
\|Ky\|_\alpha &= \sup_{t\in[s,s+(n+1)h]} e^{-\alpha(t-s)} \left| \int_s^t \sum_{j=0}^{J} b_j(\tau) S_h^j (I + S + \ldots + S^n) y(\tau)\, d\tau \right| \leqslant \\
&\leqslant \sup_{t\in[s,s+(n+1)h]} \left(\int_s^t \sum_{j=0}^{J} |b_j(\tau)|\, e^{-\alpha(t-\tau)} \left\| S_h^j (I + S + \ldots + S^n) y \right\|_\alpha \, d\tau \right) \leqslant \\
&\leqslant \sup_{t\in[s,s+(n+1)h]} \left(\sum_{j=0}^{J} e^{-\alpha h j} \int_s^t |b_j(\tau)|\, e^{-\alpha(t-\tau)}\, d\tau \right) \left(1 + Ae^{-\alpha h} + \ldots + A^n e^{-\alpha h n}\right) \|y\|_\alpha .
\end{aligned}$$

Подчиним параметр α условию $\left|Ae^{-\alpha h}\right| < 1$. Тогда $1 + Ae^{-\alpha h} + \ldots + A^n e^{-\alpha h n} \leqslant (1 - Ae^{-\alpha h})^{-1}$, а для нормы оператора K получаем оценку

$$\|K\|_\alpha \leqslant \frac{1}{1 - Ae^{-\alpha h}} \left(\sum_{j=0}^{J} e^{-\alpha h j} \max_{t\in[s,s+(n+1)h]} \int_s^t |b_j(\tau)| e^{-\alpha(t-\tau)}\, d\tau \right).$$

Применяя лемму 1, заключаем, что $\|K\|_\alpha \underset{\alpha\to+\infty}{\to} 0$, следовательно, для некоторого $\alpha > 0$ выполнено неравенство $\|K\|_\alpha < 1$. В силу принципа сжимающих отображений [9, с. 230] уравнение $X = 1 + KX$ имеет в пространстве $P_\alpha[s, s+(n+1)h]$ единственное решение $X \in P_\alpha[s, s+(n+1)h]$, т. е. $|X(t,s)|e^{-\alpha(t-s)} \leqslant N_1$. Первое утверждение теоремы доказано.

Чтобы доказать второе утверждение, вновь используем соотношение (7), а также неравенства, полученные выше при оценке $\|Ky\|_\alpha$, и оценку на фундаментальное решение:

$$\sup_{t\in[s,s+(n+1)h]} e^{-\alpha(t-s)} \int_s^t \left|\frac{d}{d\tau}X(\tau,s)\right| d\tau =$$
$$= \sup_{t\in[s,s+(n+1)h]} e^{-\alpha(t-s)} \int_s^t |T(I+S+\ldots+S^n)X(\tau,s)|\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{1-A\mathrm{e}^{-\alpha h}} \sum_{j=0}^{J} \mathrm{e}^{-\alpha hj} \max_{t\in[s,s+(n+1)h]} \int_s^t |b_j(\tau)|\, \mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}\, d\tau\right) \|X\|_\alpha = N_2.$$

□

Обозначим

$$B(r) = \{z\in\mathbb{C} : |z| < r\},\ P_a(z) = \sum_{k=1}^{K} a_k z^k,\ B_j = \frac{1}{h}\int_0^h b_j(t)dt,\ P_b(z) = \sum_{j=0}^{J} B_j z^j,$$
$$G(\zeta+s,z) = \exp\left\{\frac{1}{1-P_a(z)}\sum_{j=0}^{J}\left(\int_s^{\zeta+s} b_j(\tau)\,d\tau\right)z^j\right\},$$

и рассмотрим функцию

$$F(\zeta+s,z) = \frac{G(\zeta+s,z)}{1-z\exp\left\{\frac{hP_b(z)}{1-P_a(z)}\right\}},\quad z\in\mathbb{C},\quad \zeta\in[0,h]. \tag{8}$$

Лемма 2. *Существует непустая окрестность нуля $B(r)\subseteq\mathbb{C}$ такая, что при любом $z\in B(r)$ краевая задача*

$$(1-P_a(z))\frac{\partial F(\zeta+s,z)}{\partial\zeta} = \left(\sum_{j=0}^{J} b_j(\zeta+s)z^j\right)F(\zeta+s,z), \tag{9}$$
$$F(s,z) = zF(h+s,z)+1 \tag{10}$$

имеет единственное решение, определяемое формулой (8).

Доказательство. Выберем круг $B(r_1)\subseteq\mathbb{C}$, в котором $1-P_a(z)\neq 0$. Такой круг найдется, т.к. $P_a(z)$ — многочлен, причем $P_a(0)=0\neq 1$. При любом $z\in B(r_1)$ общее решение уравнения (8) имеет вид

$$F(\zeta+s,z) = C\cdot G(\zeta+s,z), \tag{11}$$

где C — произвольное комплексное число. Покажем, что можно выбрать C, при котором будет выполняться (10). Подставляя (11) в (10), с учетом введенных выше обозначений, получаем:

$$C(1-zG(h+s,z)) = 1.$$

Так как b_j — периодические функции с периодом h, то $\int_s^{h+s} b_j(\tau)d\tau = \int_0^h b_j(\tau)d\tau$, следовательно,

$$G(h+s,z) = \exp\left\{\frac{1}{1-P_a(z)}\sum_{j=0}^{J}\left(\int_0^h b_j(\tau)\,d\tau\right)z^j\right\} = \\ = \exp\left\{\tfrac{h}{1-P_a(z)}\sum_{j=0}^{J} B_j z^j\right\} = \exp\left\{\tfrac{hP_b(z)}{1-P_a(z)}\right\}.$$

Найдем круг $B(r_2) \subseteq B(r_1)$, в котором $1 - z\exp\left\{\frac{hP_b(z)}{1-P_a(z)}\right\} \neq 0$; такой круг найдется в силу непрерывности, а значит, ограниченности функции $\exp\left\{\frac{hP_b(z)}{1-P_a(z)}\right\}$ на любом замкнутом подмножестве круга $B(r_1)$. При любом $z \in B(r_2)$ константа C однозначно определяется: $C = \left(1 - z\exp\left\{\frac{hP_b(z)}{1-P_a(z)}\right\}\right)^{-1}$. Тем самым доказано, что при всех $z \in B(r_2)$ функция $F(\cdot, z)$, заданная формулой (8), является единственным решением краевой задачи (9)–(10). $\square$

Для любого фиксированного $s \geqslant 0$ представим $t \geqslant s$ в виде $t = nh+\zeta+s$, где $n \in \mathbb{N}_0$, $\zeta \in [0,h)$, и обозначим $x_n(\zeta+s) = X(t,s)$. Любая из функций $x_n(\zeta+s)$ является абсолютно непрерывной по $\zeta \in [0,h]$, а последовательность $x_n(\zeta+s)$ однозначно определяется как решение следующей краевой задачи ($\dot{x}(\zeta+s) = \frac{\partial}{\partial\zeta}x(\zeta+s)$)

$$\begin{cases} \dot{x}_n(\zeta+s) - \sum\limits_{k=0}^{K} a_k\dot{x}_{n-k}(\zeta+s) = \sum\limits_{j=0}^{J} b_j(\zeta+s)x_{n-j}(\zeta+s), & n \in \mathbb{N}_0, \\ x_n(s) = x_{n-1}(h+s), & n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{12}$$

дополненной начальными условиями $x_0(s) = 1$ и $x_n(\zeta+s) = \dot{x}_n(\zeta+s) = 0$, если $n = -1, -2, \ldots$

Отметим, что в силу теоремы 1 при некоторых $N_1, N_2, R > 0$ справедливы оценки $|x_n(\zeta+s)| \leqslant N_1R^{-n}$ и $\int_0^h |\dot{x}_n(\zeta+s)|d\zeta \leqslant N_2R^{-n}$.

Построим производящую функцию для последовательности $\{x_n(\zeta+s)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$F_X(\zeta+s,z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(\zeta+s)z^n.$$

Приведенная выше оценка обеспечивает сходимость этого ряда в некоторой ненулевой окрестности нуля при всех $\zeta \in [0,h)$. Обоснуем возможность почленного дифференцирования данного ряда. Для этого докажем еще одно вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Пусть $\alpha_n(t)$, $n \in \mathbb{N}_0$, — абсолютно непрерывные на $[a,b]$ функции, такие, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t)$ сходится в каждой точке отрезка $[a,b]$*

и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_a^b|\dot\alpha_n(t)|dt$ *также является сходящимся. Тогда сумма ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n(t)$ *есть абсолютно непрерывная на* $[a,b]$ *функция, ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dot\alpha_n(t)$ *абсолютно сходится п. в. на* $[a,b]$, *а* $\frac{d}{dt}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dot\alpha_n(t)$.

Доказательство. По теореме Леви [9, с.305] имеем:

$$\int_a^b\sum_{n=0}^{\infty}|\dot\alpha_n(t)|\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b|\dot\alpha_n(t)|\,dt<\infty,$$

следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dot\alpha_n(t)$ абсолютно сходится п. в. на $[a,b]$, а его сумма принадлежит $L_1[a,b]$. Обозначим $\sigma(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n(t)$. Тогда

$$\sigma(t)=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\alpha_k(t)=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\left(\alpha_n(a)+\int_a^t\dot\alpha_n(s)ds\right)=$$
$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\alpha_k(a)+\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\int_a^t\dot\alpha_n(s)ds=\sigma(a)+\lim_{m\to\infty}\int_a^t\sum_{n=0}^{m}\dot\alpha_n(s)ds.$$

Легко видеть, что $\left|\sum\limits_{n=0}^{m}\dot\alpha_n(s)\right|\leqslant\sum\limits_{n=0}^{m}|\dot\alpha_n(s)|\leqslant\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\dot\alpha_n(s)|$, следовательно, по теореме Лебега [9, с. 302], возможен предельный переход под знаком интеграла:

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^t\sum_{n=0}^{m}\dot\alpha_n(s)\,ds=\int_a^t\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\dot\alpha_n(s)\,ds=\int_a^t\sum_{n=0}^{\infty}\dot\alpha_n(s)\,ds.$$

Возвращаясь к представлению функции σ, имеем окончательно

$$\sigma(t)=\sigma(a)+\lim_{m\to\infty}\int_a^t\sum_{n=0}^{m}\dot\alpha_n(s)\,ds=\sigma(a)+\int_a^t\sum_{n=0}^{\infty}\dot\alpha_n(s)\,ds.$$

Как было показано выше, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dot\alpha_n(t)\in L_1[a,b]$, следовательно, σ абсолютно непрерывна, а $\frac{d\sigma(t)}{dt}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dot\alpha_n(t)$. □

Следствие 1. *Функция* $F_X(\zeta+s,z)$ *абсолютно непрерывна по* $\zeta\in[0,h]$, *а при всех* $z\in B(R)$ *справедливо равенство* $\frac{\partial}{\partial\zeta}F_X(\zeta+s,z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dot x_n(\zeta+s)z^n$.

Доказательство. Поточечная сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n(\zeta+s)z^n$ отмечалась выше. Из оценки $\int\limits_0^h |\dot{x}_n(\zeta+s)|d\zeta \leqslant N_2 R^{-n}$ следует, что при $z \in B(R)$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z|^n \int\limits_0^h |\dot{x}_n(\zeta+s)|d\zeta$ сходится. Утверждение следствия теперь вытекает из леммы 3. □

Теорема 2. *Производящая функция последовательности* $\{x_n(\zeta+s)\}_{n=0}^{\infty}$ *задается равенством* (8), *т. е.* $F_X(\zeta+s,z) = F(\zeta+s,z)$.

Доказательство. Умножая обе части равенств задачи (12) на z^n и суммируя по n, получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dot{x}_n(\zeta+s)z^n - \left(\sum_{k=1}^{K} a_k z^k\right) \sum_{n=0}^{\infty} \dot{x}_n(\zeta+s)z^n = \left(\sum_{j=1}^{J} b_j(\zeta+s)z^k\right) \sum_{n=0}^{\infty} x_n(\zeta+s)z^n,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n(s)z^n = z\sum_{n=0}^{\infty} x_n(h+s)z^n + 1.$$

С учетом введенных выше обозначений и свойств функции F_X, последним двум равенствам можно придать вид:

$$(1-P_a(z))\frac{\partial F_X(\zeta+s,z)}{\partial \zeta} = \left(\sum_{j=0}^{J} b_j(\zeta+s)z^j\right) F_X(\zeta+s,z),$$
$$F_X(s,z) = zF_X(h+s,z) + 1.$$

Следовательно, при всех z из некоторой окрестности нуля функция $F_X(\cdot,z)$ является решением задачи (9)–(10). Не нарушая общности, можно считать, что в этой окрестности решение задачи (9)–(10) единственно, а значит, совпадает с функцией F. □

3. Функция Коши

Рассмотрим уравнение

$$Y(t,s) = 1 + \sum_{k=1}^{K} a_k Y(t,s+kh) + \sum_{j=0}^{J} \int_{s+jh}^{t} b_j(\tau)Y(t,\tau)\,d\tau, \quad t \geqslant s. \tag{13}$$

Как показано в [1, с.61], уравнение (13) может быть принято за определение функции Коши уравнения (4).

Лемма 4. *При любых* $(t,s) \in \Delta$ *справедливо равенство* $Y(t+h,s+h) = Y(t,s)$.

Доказательство. Подставляя функцию $Y(t+h, s+h)$ в (13) и используя h-периодичность функций b_j, убеждаемся, что эта функция обращает (13) в тождество. Так как (13) имеет единственное решение, то лемма доказана. □

Замечание. Из леммы 4 следует, что поведение функции Y определяется разностью аргументов $t-s$, если s принимает любые значения с отрезка $[0, h]$. Поэтому далее, не нарушая общности, будем считать, что $s \in [0, h]$.

Следующее утверждение устанавливает простую связь между функцией Коши и фундаментальным решением уравнения (4).

Теорема 3. *При любых* $(t, s) \in \Delta$ *функция Коши и фундаментальное решение связаны соотношением*

$$Y(t,s) - \sum_{k=1}^{K} a_k Y(t, s+kh) = X(t,s). \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $hn \leqslant t-s < (n+1)h$, $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $S^{n+1} = \Theta$, оператор $I-S$ обратим, причем $(I-S)^{-1} = I + S + S^2 + \ldots + S^n$. На отрезке $[s, s+(n+1)h]$ уравнение (4) можно переписать в эквивалентном виде

$$\dot{x} = (I-S)^{-1}Tx + (I-S)^{-1}f. \tag{15}$$

Легко видеть, что (15) имеет то же самое фундаментальное решение $X(t,s)$, что и уравнение (4). Так как (15) — уравнение запаздывающего типа, то его решение при $x(s) = 0$ имеет вид

$$x(t) = \int_s^t X(t,\tau)\,(I-S)^{-1} f(\tau)\,d\tau = \sum_{i=0}^{n} \int_s^t X(t,\tau) S^i f(\tau)\,d\tau. \tag{16}$$

Обозначим

$$(S_h^* y)(t,s) = \begin{cases} y(t, s+h), & t-h \geqslant s, \\ 0, & t-h < s, \end{cases} \qquad S^* = \sum_{k=1}^{K} a_k S_h^{*k},$$

и заметим, что $(S^*)^{n+1} = \Theta$, а $(I-S^*)^{-1} = I + S^* + S^{*2} + \ldots + S^{*n}$. Далее, имеем:

$$\int_s^t X(t,\tau) S_h f(\tau)\,d\tau = \int_{s+h}^t X(t,\tau) f(\tau-h)\,d\tau =$$
$$= \int_s^{t-h} X(t,\tau+h) f(\tau)\,d\tau = \int_s^t S_h^* X(t,\tau) f(\tau)\,d\tau,$$

$$\int_s^t X(t,\tau) S_h^k f(\tau)\,d\tau = \int_s^t S_h^{*k} X(t,\tau) f(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда следует, что

$$\int_s^t X(t,\tau)Sf(\tau)\,d\tau = \int_{s+h}^t X(t,\tau)\sum_{k=1}^K a_k S_h^k f(\tau)\,d\tau =$$
$$= \int_s^{t-h}\sum_{k=1}^K a_k S_h^{*k} X(t,\tau)f(\tau)\,d\tau = \int_s^t S^* X(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$$\int_s^t X(t,\tau)S^i f(\tau)\,d\tau = \int_s^t S^{*i} X(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$$\sum_{i=0}^n \int_s^t X(t,\tau)S^i f(\tau)\,d\tau = \int_s^t \sum_{i=0}^n S^{*i}X(t,\tau)f(\tau)d\tau = \int_s^t (I-S^*)^{-1}X(t,\tau)f(\tau)\,d\tau.$$

Опираясь на представления (5) и (16), заключаем, что при любой функции f из $L_1[s, s+(n+1)h]$

$$\int_s^t (I-S^*)^{-1}X(t,\tau)f(\tau)\,d\tau = \int_s^t Y(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

следовательно, $(I-S^*)^{-1}X(t,s) = Y(t,s)$ или $X(t,s) = (I-S^*)Y(t,s)$. В силу определения оператора S^* получаем представление (14). $\square$

Соединяя лемму 4 и теорему 3, получаем

Следствие 2. *При любых* $(t,s)\in\Delta$ *справедливо равенство* $X(t+h, s+h) = X(t,s)$.

Из теоремы 3 и леммы 4 вытекает другая формула, связывающая функцию Коши и фундаментальное решение. Она давно известна для автономных уравнений и применялась при исследовании вопросов устойчивости в работах [7]–[13].

Следствие 3. *Функция Коши и фундаментальное решение уравнения* (4) *связаны соотношением*

$$Y(t,s) - \sum_{k=1}^K a_k Y(t-kh, s) = X(t,s), \quad (t,s)\in\Delta. \tag{17}$$

Отметим еще одно важное свойство функции Коши.

Следствие 4. *Существуют такие* $\alpha > 0$, $N > 0$, *что при всех* $(t,s)\in\Delta$ *справедлива оценка* $|Y(t,s)| \leqslant Me^{\alpha(t-s)}$.

Доказательство. Считая, что оператор S_h (следовательно, и S) применяется только к первому аргументу, а второй остается фиксированным, перепишем (17) в виде: $(I-S)Y = X$. Найдем $n\in\mathbb{N}_0$ такое, что $nh \leqslant t-s < (n+1)h$. Тогда $S^{n+1} = \Theta$, а $(I-S)^{-1} = I + S + \ldots + S^n$. Следовательно, функцию Коши можно представить в виде $Y = (I-S)^{-1}X = (I+S+\ldots+S^n)X$.

Опираясь на теорему 1, легко установить для любого $i = \overline{0,n}$ оценку $|S^iX(t,s)| \leqslant Ne^{\alpha(t-s)}A^ie^{-\alpha hi}$, из которой следует, что $|Y(t,s)| \leqslant Ne^{\alpha(t-s)}\sum\limits_{i=0}^{n} A^ie^{-\alpha hi}$. Заметим, что в процессе доказательства теоремы 1 показатель α выбирался так, чтобы выполнялось неравенство $|Ae^{-\alpha h}| < 1$. Тогда $|Y(t,s)| \leqslant \frac{Ne^{\alpha(t-s)}}{1-Ae^{-\alpha h}} = Me^{\alpha(t-s)}$, что и требовалось. □

Для любого фиксированного s представим $t \geqslant s$ в виде $t = nh+\zeta+s$, где $n \in \mathbb{N}_0$, $\zeta \in [0,h)$, обозначим $y_n(\zeta+s) = Y(t,s)$ и построим производящую функцию для последовательности $\{y_n(\zeta+s)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$F_Y(\zeta+s,z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(\zeta+s)z^n. \tag{18}$$

Следствие 4 обеспечивает сходимость этого ряда в некоторой ненулевой окрестности нуля при всех $\zeta \in [0,h)$. В терминах последовательностей $\{x_n(\zeta+s)\}_{n=0}^{\infty}$, $\{y_n(\zeta+s)\}_{n=0}^{\infty}$ равенство (17) можно переписать в виде

$$y_n(\zeta+s) - \sum_{k=0}^{K} a_k y_{n-k}(\zeta+s) = x_n(\zeta+s).$$

Домножая обе части этого равенства на z^n и суммируя по n, получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(\zeta+s)z^n - \left(\sum_{k=0}^{K} a_k z^k\right)\sum_{n=0}^{\infty} y_n(\zeta+s)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(\zeta+s)z^n,$$

а с учетом введенных выше обозначений это означает, что

$$(1-P_a(z))F_Y(\zeta+s,z) = F_X(\zeta+s,z).$$

Так как для функции F_X найден явный вид (формула (8)), то в итоге установлена

Теорема 4. *Производящая функция последовательности $\{y_n(\zeta)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет вид:*

$$F_Y(\zeta+s,z) = \frac{1}{1-P_a(z)} \cdot \frac{G(\zeta+s,z)}{1-z\exp\left\{\frac{hP_b(z)}{1-P_a(z)}\right\}}. \tag{19}$$

Обозначим через z_0 ближайшую к нулю точку, в которой нарушается аналитичность функции $F_Y(\zeta+s,\cdot)$; очевидно, что $|z_0| > 0$. Из (19) следует, что z_0 не зависит от ζ и s, следовательно, в круге $B(|z_0|)$ функция $F_Y(\zeta+s,\cdot)$ является аналитической при всех $\zeta \in [0,h]$.

Теорема 5. *Для всех членов последовательности $\{y_n(\zeta+s)\}_{n=0}^{\infty}$ справедлива оценка $|y_n(\zeta+s)| \leqslant Ne^{-\gamma n}$ с положительными, независящими от ζ и s постоянными N,γ тогда и только тогда, когда $|z_0| > 1$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $|y_n(\zeta+s)| \leqslant Ne^{-\gamma n}$. Тогда $|y_n(\zeta+s)z^n| \leqslant Ne^{-\gamma n}|z|^n$, следовательно, ряд (18) сходится в круге $B(e^{\gamma})$, где $\gamma > 0$, поэтому $|z_0| > 1$.

Достаточность. Пусть $|z_0| > 1$. Выберем R так, чтобы $1 < R < |z_0|$. Используя неравенство Коши для оценки коэффициентов степенного ряда, получаем оценку $|y_n(\zeta + s)| \leqslant NR^{-n}$, где $N = \max\limits_{|z|=R;\ \zeta,s\in[0,h]} |F_Y(\zeta + s, z)|$. Обозначив $\gamma = \ln R$, приходим к требуемому неравенству. □

Теорема 6. *Функция Коши уравнения* (4) *имеет при некоторых* $N, \gamma > 0$ *экспоненциальную оценку*

$$|Y(t, s)| \leqslant Ne^{-\gamma(t-s)}, \quad (t, s) \in \Delta, \tag{20}$$

тогда и только тогда, когда все корни уравнений $P_a(z) = 1$, $z \exp\left\{\frac{hP_b(z)}{1-P_a(z)}\right\} = 1$ *лежат вне единичного круга* $|z| \leqslant 1$.

Доказательство. Следует из теоремы 5 и определения функций $y_n(\zeta)$. □

Следствие 5. *Если функция Коши уравнения* (4) *имеет оценку* (20), *то аналогичная оценка справедлива и для фундаментального решения:* $|X(t, s)| \leqslant Me^{-\gamma(t-s)}$, $(t, s) \in \Delta$.

Доказательство. Следует из соотношения (14). □

Заметим, что обратное утверждение неверно: из экспоненциальной оценки на фундаментальное решение не следует оценка на функцию Коши. Соответствующий пример приведен в работе [7].

Из теоремы 6 следует, что отсутствие у многочлена $1 - P_a(z)$ корней внутри единичного круга $|z|1$ есть необходимое условие для существования оценки (20). В работе [6] показано, что этому условию можно придать ряд эквивалентных переформулировок.

Теорема 7. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Все корни многочлена* $1 - P_a(z)$ *расположены вне единичного круга* $|z| \leqslant 1$.
2. *Оператор* $I - S$ *обратим в пространстве* $L_p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
3. *Разностное уравнение* $x_n = \sum\limits_{k=1}^{K} a_k x_{n-k}$, $n \in \mathbb{N}_0$, *экспоненциально устойчиво.*

4. Связь с автономными уравнениями

Поставим в соответствие уравнению (4) автономное уравнение

$$(I - S)\,\dot{x} = T_0x + f, \quad t \geqslant 0, \tag{21}$$

где $(T_0x)(t) = \sum\limits_{j=0}^{J} B_j(S_h^j x)(t)$, а $B_j = \frac{1}{h}\int_0^h b_j(\tau)d\tau$; операторы S_h, S и функция f — те же, что и в уравнении (4). Через Y_0 обозначим функцию Коши уравнения (21).

Теорема 8. *Функция Коши уравнения* (21) *имеет экспоненциальную оценку тогда и только тогда, когда функция Коши уравнения* (4) *имеет экспоненциальную оценку.*

Доказательство. Уравнение (21) — частный случай уравнения (4) при $b_j(t) = B_j$, $j = \overline{1, J}$, причем многочлены $P_a(z)$ и $P_b(z)$ для уравнений (4) и (21) совпадают. По теореме 6 функция $Y_0(t, s)$ имеет экспоненциальную оценку вида (20) тогда и только тогда, когда все корни уравнений $P_a(z) = 1$ и $z \exp\left\{\frac{hP_b(z)}{1-P_a(z)}\right\} = 1$ лежат вне единичного круга $|z| \leqslant 1$, то есть ровно в том случае, когда экспоненциальную оценку имеет функция $Y(t, s)$. □

5. Связь с постановкой, учитывающей начальную функцию

Вернемся к постановке, включающей начальную функцию, то есть к уравнению (3). В таком виде задача ставится во многих работах (см., например, классические монографии [8], [12], [11]). Более того, при такой постановке начальная функция, как правило, считается частью решения, и тогда логично требовать, чтобы $\dot{\varphi} = \psi$, а $x(s) = \varphi(s)$. В записи (3) такие предположения не обязательны: решение и его производная могут доопределяться независимо.

Прежде всего подчеркнем, что уравнения (3) и (4) не противоречат друг другу. Уравнение (4) можно рассматривать как частный случай уравнения (3) с нулевыми начальными функциями. С другой стороны, и уравнение (3) можно переписать в виде (4), если внешнее возмущение $f(t)$ заменить на $f(t) + \eta(t)$, где

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{K} a_k \psi(t - kh)\chi_k(t) + \sum_{j=1}^{J} b_j(t)\varphi(t - jh)\chi_j(t),$$

а $\chi_n(t)$ — характеристическая функция множества $(-\infty, s+nh)$. Определение экспоненциальной устойчивости можно дать в терминах функции η.

Уравнение (3) называется *экспоненциально устойчивым*, если найдутся такие $N, \gamma > 0$, что при любых $x(s) \in \mathbb{R}$ и $\eta \in L_1[s, s + \omega]$ его решение имеет оценку

$$|x(t)| \leqslant Ne^{-\gamma(t-s)}\left(|x(s)| + \|\eta\|_1\right), \quad (t, s) \in \Delta.$$

Определение экспоненциальной устойчивости, приведенное, например, в монографии [12, с. 114], является частным случаем этого определения: если функции φ, ψ непрерывны на отрезке $[s - \omega, s]$, то сумму $|x(s)| + \|\eta\|_1$ можно заменить на $\max\limits_{t\in[s-\omega,s]} |\varphi(t)| + \max\limits_{t\in[s-\omega,s]} |\psi(t)|$.

Так как фундаментальное решение и функция Коши не зависят от начальных функций и внешнего возмущения, то они общие для уравнений (3) и (4). Связь между экспоненциальной устойчивостью уравнения (3) и свойствами функции Коши проясняет следующая теорема, установленная в [10].

Теорема 9. *Уравнение* (3) *экспоненциально устойчиво при* $\eta \in L_1[s, s+\omega]$ *тогда и только тогда, когда его функция Коши имеет экспоненциальную оценку* (20).

6. Примеры

Теорема 8 сводит вопрос об экспоненциальной оценке функции Коши уравнения (4) к той же задаче для автономного уравнения. Это связь оказывается особенно полезной для получения эффективных признаков устойчивости, так как любой признак устойчивости, найденный для автономного уравнения, порождает новый признак устойчивости для уравнения (4).

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) = -b(t)x(t) + c(t)x(t-1) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{22}$$

где $a \in \mathbb{R}$, b, c — суммируемые на $[0,1]$ функции, причем $b(t+1) = b(t)$, $c(t+1) = c(t)$.

Зададим в трехмерном пространстве $Ouvw$ поверхность

$$\Gamma_1 = \{(u, v, w) : u = \cos\theta + \sin\theta/\theta,\ w = -\theta\sin\theta + v\cos\theta,\ \theta \in \mathbb{R}\}.$$

В поверхности Γ_1 ограничим область изменения параметра θ: пусть $\theta \in (\theta_1, \pi)$ при $v \geqslant 0$, где θ_1 — наименьший положительный корень уравнения $\cos y + \frac{v siny}{y} = -1$, и $\theta \in (0, \theta_2)$ при $v \in (-2, 0)$, где θ_2 – наименьший положительный корень уравнения $\cos y + \frac{v siny}{y} = 1$. Вместе с плоскостями $v = w$, $u = \pm 1$ поверхность Γ_1 ограничивает в пространстве $Ouvw$ область D (границы не принадлежат D), изображенную на рис. 1.

Предложение 1. *Уравнение* (22) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда точка с координатами* $\left(a, \int_0^1 b(t)dt, \int_0^1 c(t)dt\right)$ *принадлежит* D.

Доказательство. Поставим в соответствие уравнению (22) автономное уравнение

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) = -\left(\int_0^1 b(t)\,dt\right)x(t) + \left(\int_0^1 c(t)\,dt\right)x(t-1) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

для которого в работе [3] установлен признак экспоненциальной устойчивости. Применяя теорему 8, получаем условия, при которых функция Коши имеет экспоненциальную оценку, применяя теорему 9 — критерий экспоненциальной устойчивости уравнения (22). □

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - a_1\dot{x}(t-1) - a_2\dot{x}(t-2) = -b(t)x(t-1) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{23}$$

где $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, а b — суммируемая на $[0,1]$ функция, причем $b(t+1) = b(t)$.

Зададим в трехмерном пространстве $Ouvw$ криволинейную поверхность

$$\Gamma_2 = \{(u,v,w) : u = (1-v)\cos\theta,\ w = -(1+v)\theta\sin\theta,\ v \in (-1,1),\ \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Поверхность Γ_2 разбивает пространство $Ouvw$ на счетный набор множеств. Множество, ограниченное поверхностью Γ_2 и плоскостью $w = 0$, и содержащее точки $(0,0,w)$ при $w \in (0, \pi/2)$, обозначим через H (границы не принадлежат H). Область H изображена на рис. 2.

Предложение 2. *Уравнение* (23) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда точка с координатами* $\left(a_1, a_2, \int_0^1 b(t)dt\right)$ *принадлежит области* H.

Доказательство. Поставим в соответствие уравнению (23) автономное уравнение

$$\dot{x}(t) - a_1\dot{x}(t-1) - a_2\dot{x}(t-2) = -\left(\int_0^1 b(t)dt\right)x(t-1) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

для которого в работе [5] установлен признак экспоненциальной устойчивости. Остается применить теоремы 8 и 9. $\square$

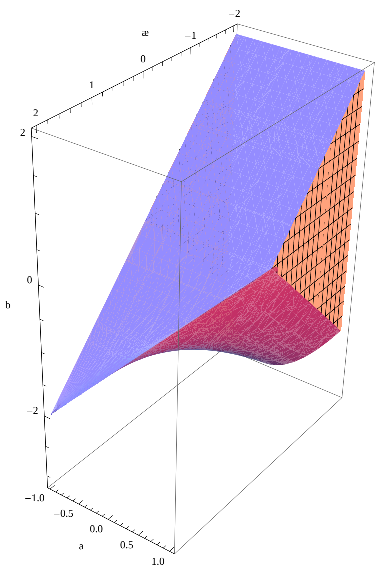

Рис. 1. Область D

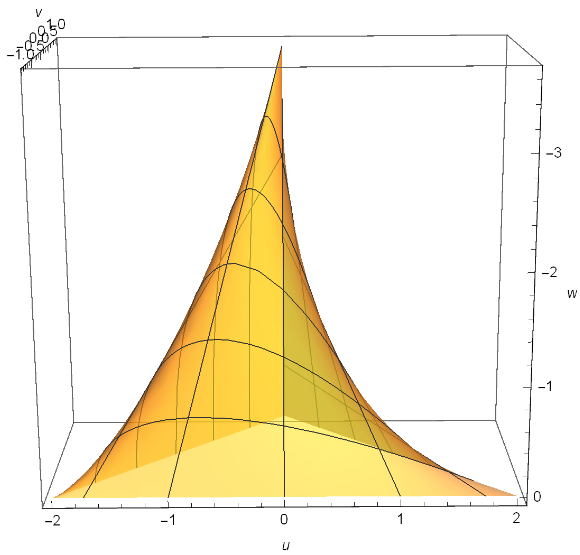

Рис. 2. Область H

В заключение приведем легко проверяемый достаточный признак экспоненциальной устойчивости для уравнений с любым количеством запаздываний.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - \sum_{k=1}^{K} a_k \dot{x}(t-kh) = -\sum_{j=0}^{J} b_j(t)x(t-jh) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{24}$$

где $a_k \in \mathbb{R}_+$, b_j — суммируемые на $[0,h]$ функции, причем $b_j(t+h) = b_j(t)$, а $\int_0^h b_j(t)dt \in \mathbb{R}_+$. Обозначим $Q(z) = (1 - P_a(z))^{-1}$.

Предложение 3. *Пусть выполнено любое из утверждений теоремы 7 и*

$$\dot{Q}(1) \sum_{j=0}^{J} \int_0^h b_j(t)\,dt + Q(1) \sum_{j=1}^{J} j \int_0^h b_j(t)\,dt < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда уравнение (24) *экспоненциально устойчиво, а его функция Коши имеет оценку* (20).

Доказательство. Ставим в соответствие уравнению (24) автономное уравнение

$$\dot{x}(t) - \sum_{k=1}^{K} a_k \dot{x}(t-kh) = -\sum_{j=0}^{J} \left(\frac{1}{h} \int_0^h b_j(t)\,dt \right) x(t-jh) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

применяем признак, полученный в [2], и вновь используем теоремы 8 и 9. □

Заключение

В работе рассмотрен класс функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами, эквивалентных автономным уравнениям (теорема 8). Используя известные признаки экспоненциальной устойчивости для автономных уравнений, удалось получить новые эффективные признаки устойчивости для уравнений с периодическими коэффициентами (предложения 1–3). В теоретическом плане принципиальным продвижением является теорема 3, которая устанавливает связь между фундаментальным решением и функцией Коши рассматриваемого неавтономного уравнения. Дальнейшие возможности изучения асимптотических свойств решений неавтономных функционально-дифференциальных уравнений связаны с обобщением этой теоремы на более широкие классы уравнений.

Список цитируемых источников

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

Azbelev N. V., Maksimov V. P., Rahmatullina L. F. Introduction to the Theory of Functional Differential Equations. Moscow: Nauka, 1991 (in Russian, with English summary) Zbl 0725.34071

2. *Баландин А. С.* Об асимптотической устойчивости одного класса дифференциально-разностных уравнений. Вестник Перм. гос. техн. ун-та, №1, 122–129 (2009).

   Balandin A. S. On asymptotic stability of a class of differential-difference equations. Vestnik PGTU, No.1, 122–129 (2009) (in Russian)

3. *Баландин А. С.* Об устойчивости одного дифференциального уравнения, не разрешённого относительно производной. Сб. тр. X Междунар. конф. «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2017)» (стр. 68–71). Воронеж, 2017.

4. *Баландин А. С.* О связи между фундаментальным решением и функцией Коши для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа. Прикладная математика и вопросы управления. №1, 13–25 (2018).

   Balandin A. S. On relationship between the fundamental soluiton and the Cauchy function for neutral functional differential equations. Applied Mathematics and Control Sciences. No.1, 13–25 (2018) (in Russian)

5. *Баландин А. С.* Об устойчивости некоторых автономных дифференциальных уравнений нейтрального типа. Сб. тр. XII Междунар. конф. «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2019)» (стр. 59–63). Воронеж, 2019.

6. *Баландин А. С., Малыгина В. В.* О разрешимости одного класса разностных уравнений. Вычислительная механика: сб. научн. тр., №4, 67–72. Пермь, 2006.

7. *Баландин А. С., Малыгина В. В.* Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа. Известия вузов. Математика. №7, 17–27 (2007).

   Balandin A. S., Malygina V. V. Exponential stability of linear differential-difference equations of neutral type. Russian Mathematics (Iz. VUZ), 51, No.7, 15–24 (2007). Zbl 1182.34095

8. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения: Пер. с англ. М.: Мир, 1967.

   Bellman R., Cooke K. Differential-difference equations. Academic Press, 1963. Zbl 0105.06402

9. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.

   Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of the theory of functions and functional analysis. Moscow: Nauka, 1981 (in Russian) Zbl 0501.46002

10. *Симонов П. М., Чистяков А. В.* Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных систем. Известия вузов. Математика. №6, 37–49 (1997).

    Simonov P. M., Chistyakov A. V. On exponential stability of linear difference-differential systems. Russian Math. (Iz. VUZ), 41, No.6, 34–45 (1997). Zbl 0910.34067

11. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений: Пер. с англ. М.: Мир, 1984.

    Hale J. Theory of Functional Differetial Equations. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1977.

12. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

El'sgol'ts L. E., Norkin S. B. Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument. Moscow: Nauka, 1971 (in Russian) Zbl 0224.34053

13. *Balandin A. S., Chudinov K. M.* On the asymptotic behavior of linear autonomous functional differential equations of neutral type. Functional Differential Equations, 15, No.1-2, 5–15 (2008). Zbl 1217.34120

Получена 22.02.2020