Динамические системы, 2020, том 10(38), №1, 37–50

УДК 517.925.5+517.929

Об аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом[1]

Г. В. Демиденко, И. А. Уварова

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
Новосибирск 630090. *E-mail: demidenk@math.nsc.ru, sibirochka@ngs.ru*

Аннотация. Изучены связи между решениями системы дифференциальных уравнений большой размерности, моделирующей многостадийный синтез вещества, и уравнения с запаздывающим аргументом. Предложен новый метод аппроксимации решений уравнения с запаздывающим аргументом на полуоси. Установлены оценки аппроксимации.

Ключевые слова: системы обыкновенных дифференциальных большой размерности, уравнения с запаздывающим аргументом, глобальные предельные теоремы, функция Хаара.

On approximation of solutions to delay differential equations

G. V. Demidenko, I. A. Uvarova
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Novosibirsk State University,
Novosibirsk 630090.

Abstract. Connections between solutions to a system of differential equations of high dimension modeling multi-stage substance synthesis and delay differential equation are studied. A new method of approximation of solutions to the delay equation on the half-axis is proposed. Estimates of approximation are established.

Keywords: systems of ordinary differential equations of high dimension, delay differential equations, global limit theorems, Haar function.
MSC 2010: 34K05, 34A12, 34A34, 34A45

1. Введение

В настоящей работе мы продолжаем изучение взаимосвязей между решениями дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \tag{1.1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10086).

и системы обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности вида

$$\frac{dx}{dt} = A_n x + F(t,x), \quad t > 0, \tag{1.2}$$

где

$$A_n = \begin{pmatrix} -\frac{n-1}{\tau} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{n-1}{\tau} & -\frac{n-1}{\tau} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{n-1}{\tau} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{n-1}{\tau} & -\theta \end{pmatrix}, \quad \theta > 0, \quad \tau > 0, \quad n \gg 1,$$

$$F(t,x) = (g(t,x_n), 0, \dots, 0)^{\mathrm{T}}, \quad x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^{\mathrm{T}}.$$

Напомним, что системы вида (1.2) возникают при моделировании многостадийного синтеза вещества [4, 11]. Количество дифференциальных уравнений в (1.2) соответствует числу стадий синтеза, τ — суммарное время протекания стадий из первого состояния в n-е. Компоненты $x_i(t)$ искомой вектор-функции $x(t)$ определяют концентрацию вещества на i-й стадии процесса.

Отметим, что процесс синтеза может иметь очень большое число промежуточных стадий (например, $n \approx 10^{30}$), поэтому при определении концентрации конечного продукта $x_n(t)$ исследователь может столкнуться с *“проблемой большой размерности”*. Как отмечалось в [2, 9, 10], решение этой проблемы было предложено в 2002 г. в результате совместной деятельности биологов и математиков [4, 11]. Метод ее решения основан на доказанных предельных теоремах, устанавливающих связи между решениями системы (1.2) и решениями уравнения с запаздывающим аргументом (1.1). В частности, рассматривая задачу Коши для системы (1.2) в автономном случае с нулевыми начальными данными, в работе [11] была доказана оценка

$$\max_{t \in [0,T]} |x_n(t) - y(t)| \le \frac{c}{n^{1/4}}, \quad n \ge n_0, \tag{1.3}$$

где $y(t)$ — решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям

$$y(t) \equiv 0, \quad 0 \le t \le \tau, \quad y(\tau + 0) = 0, \tag{1.4}$$

константа $c > 0$ зависит от функции $g(z)$, величины T и параметров τ, θ. Из этого результата вытекает, что, если число стадий n достаточно велико, то для приближенного нахождения концентрации конечного продукта $x_n(t)$ достаточно найти решение $y(t)$ начальной задачи (1.1), (1.4). А неравенство (1.3) будет характеризовать теоретическую оценку точности полученного результата $x_n(n) \approx y(t)$, $n \gg 1$.

В дальнейшем был доказан ряд предельных теорем [2, 3, 5, 6, 7, 8, 12, 14], обобщающих и усиливающих первый результат [11]. Что позволило находить приближенные решения более общих систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности, в частности, существенно нелинейных дифференциальных уравнений (см., например, [2, 12]), а также обосновать эквивалентность двух различных подходов к моделированию многостадийного синтеза вещества, основанных на использовании систем дифференциальных уравнений большой размерности или уравнений с запаздывающим аргументом. На основе доказанных предельных теорем был также предложен новый способ аппроксимации на конечном отрезке $[0,T]$ решений уравнения с запаздывающим аргументом (1.1) [7].

В настоящей работе мы дадим аналогичный способ аппроксимации решений уравнения (1.1) на всей полуоси $(0,\infty)$. Как и ранее, будем предполагать, что нелинейная функция $g(t,z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу

$$|g(t,z)| \le G < \infty, \quad |g(t,z^1) - g(t,z^2)| \le L|z^1 - z^2|, \quad t \ge 0, \quad z^1, z^2 \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Однако в отличие от [7] дополнительно потребуем, чтобы

$$g(t,0) \equiv 0, \quad 0 < L < \theta. \tag{1.6}$$

Именно при таких дополнительных условиях нам впервые удалось доказать предельные теоремы в пространстве Лебега $L_1(0,\infty)$ (см. [9]). В работе [10] доказаны глобальные предельные теоремы в пространстве $L_2(0,\infty)$. В работах [9, 10], как и на конечном отрезке $[0,T]$, установлены аналогичные связи между решениями системы уравнений большой размерности (1.2) и уравнения с запаздывающим аргументом (1.1) при всех достаточно больших $n \gg 1$ на всей полуоси $(0,\infty)$.

Глобальные предельные теоремы в формулировке [10] позволят нам доказать обратную глобальную предельную теорему, являющуюся аналогом теоремы из [7], которая дает способ аппроксимации решений уравнения (1.1) решениями системы (1.2) при $n \gg 1$ на всей полуоси $(0,\infty)$.

2. Предварительные сведения

В этом параграфе мы приведем формулировки некоторых предельных теорем, полученных в работах [9, 10], которые мы будем использовать при доказательстве основного результата.

Отметим, что из условий на функцию $g(t,z)$ следует, что задача Коши для системы (1.2) однозначно разрешима, при этом решение существует на всей полуоси $[0,\infty)$. Более того, как показано в работе [9], нулевое решение системы (1.2) асимптотически устойчиво. Приведем соответствующую формулировку теоремы, при этом в дальнейшем, чтобы подчеркивать размерность системы (1.2), для ее решения будем использовать обозначение

$$x^n(t) = (x_1^n(t), x_2^n(t), \ldots, x_n^n(t))^{\mathrm{T}}.$$

(Верхний индекс соответствует числу уравнений в системе, нижний — номеру компоненты решения).

Теорема 1. *Пусть функция* $g(t,z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$ *удовлетворяет условиям (1.5), (1.6). Тогда нулевое решение системы (1.2) асимптотически устойчиво. Более того, для решения задачи Коши для этой системы с начальными данными* $x|_{t=0} = x^{n,0}$ *при всех достаточно больших* $n \gg 1$ *имеют место следующие оценки*

$$|x_j^n(t)| \le c \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k^{n,0}| \right) e^{-\delta t}, \quad j = 1, \dots, n,$$

где

$$\delta = \min \left\{ \frac{\theta - L}{2}, \frac{1}{\tau} \ln \frac{\theta + L}{2L} \right\},$$

и константа c *не зависит от* $n > n_0$.

Рассмотрим последовательность задач Коши для систем вида (1.2)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A_n x + F(t,x), \quad t > 0, \\ x|_{t=0} = x^{n,0}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Увеличивая неограниченно число уравнений в (2.1) и рассматривая только последнюю компоненту решения каждой из задач Коши, получаем последовательность функций $\{x_n^n(t)\}$. Сейчас мы приведем некоторые глобальные предельные теоремы для этой последовательности, доказанные в [9, 10].

Рассмотрим последовательность задач Коши вида (2.1), предполагая, что начальные векторы имеют вид

$$x^{n,0} = (0, \dots, 0, a)^{\mathrm{T}}, \quad |a| \ge 0. \tag{2.2}$$

В работе [9] была доказана следующая глобальная предельная теорема.

Теорема 2. *Пусть функция* $g(t,z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$ *удовлетворяет условиям (1.5), (1.6), и начальные данные имеют вид (2.2). Тогда последовательность* $\{x_n^n(t)\}$ *равномерно сходится на любом отрезке* $[0,T]$*:*

$$x_n^n(t) \to y(t), \quad n \to \infty.$$

Предельная функция $y(t)$ *является решением следующей начальной задачи*

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = a e^{-\theta t}, \quad t \in [0,\tau], \\ y(\tau+0) = a e^{-\theta\tau}, \end{cases} \tag{2.3}$$

при этом существует $n_0 = n_0(\theta, \tau, L)$ *такое, что при* $n > n_0$ *имеет место оценка*

$$\sup_{t\in[0,\infty)} |x_n^n(t) - y(t)| \le \frac{c|a|}{\sqrt{n}},$$

где константа $c > 0$ *не зависит от* n.

В работе [10] был доказан аналог теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для последовательности* $\{x_n^n(t)\}$ *имеет место сходимость к решению задачи (2.3)*

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_2(0,\infty)\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

при этом существует $n_1 = n_1(\theta, \tau, L)$ *такое, что при* $n > n_1$ *имеет место оценка*

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_2(0,\infty)\| \le \frac{c|a|}{\sqrt{n}},$$

где константа $c > 0$ *не зависит от* n.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда решение начальной задачи (2.3) принадлежит соболевскому пространству* $W_2^1(\tau,\infty)$.

Рассмотрим последовательность задач Коши вида (2.1), предполагая, что $n = 2l + 1$ и вектор начальных данных имеет вид

$$x^{n,0} = (x_1^{n,0}, \dots, x_n^{n,0})^{\mathrm{T}}, \quad x_{l+1}^{n,0} = a, \quad x_j^{n,0} = 0 \ \text{ при } \ j \ne l+1. \tag{2.4}$$

Как мы знаем [7], при таких начальных условиях на любом конечном интервале $(0, T)$ последовательность $\{x_n^n(t)\}$ сходится в $L_p(0,T)$, $1 \le p < \infty$:

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_p(0,T)\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

при этом предельная функция $y(t) \in W_p^1(\tau, T)$ является обобщенным решением начальной задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = 0, \qquad\qquad\qquad t \in [0, \tau/2), \\ y(t) = ae^{-\theta(t-\tau/2)}, \quad t \in (\tau/2, \tau], \\ y(\tau+0) = ae^{-\theta\tau/2}. \end{cases} \tag{2.5}$$

В работе [10] были доказаны аналоги этого результата в пространстве $L_2(0,\infty)$.

Теорема 4. *Пусть функция* $g(t,z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$ *удовлетворяет условиям (1.5), (1.6), и начальные данные имеют вид (2.4). Тогда обобщенное решение* $y(t)$ *начальной задачи (2.5) принадлежит соболевскому пространству* $W_2^1(\tau,\infty)$, *и выполняются оценки*

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_2(0,\infty)\| \le \frac{c|a|}{n^{1/6}}, \quad n = 2l+1 > n_0(\theta,\tau,L),$$

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_2(\tau+\varepsilon,\infty)\| \le \frac{c(\varepsilon)|a|}{\sqrt{n}}, \quad \varepsilon > 0, \quad n = 2l+1 > n_0(\theta,\tau,L),$$

где константы $c, c(\varepsilon) > 0$ *не зависят от* n.

Теорема 5. *Пусть функция* $g(t,z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$ *удовлетворяет условиям (1.5), (1.6),* $n = ml+1$, $0 \le s < m$ *— целое и начальные условия в (2.1) имеют вид*

$$x^{n,0} = (x_1^{n,0}, \dots, x_n^{n,0})^{\mathrm{T}}, \quad x_{sl+1}^{n,0} = a, \quad x_j^{n,0} = 0 \text{ при } j \ne sl+1.$$

Тогда последовательность $\{x_n^n(t)\}$ *сходится в* $L_2(0,\infty)$. *Предельная функция* $y(t)$ *принадлежит соболевскому пространству* $W_2^1(\tau,\infty)$ *и является обобщенным решением начальной задачи*

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = 0, \quad t \in \left[0, \frac{m-s}{m}\tau\right), \\ y(t) = ae^{-\theta\left(t - \frac{m-s}{m}\tau\right)}, \quad t \in \left(\frac{m-s}{m}\tau, \tau\right], \\ y(\tau+0) = ae^{-\theta\frac{s}{m}\tau}. \end{cases}$$

Теорема 6. *Пусть функция* $g(t,z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$ *удовлетворяет условиям (1.5), (1.6),* $i \in \mathbb{N}$ *— фиксировано и начальные данные в задаче Коши (2.1) имеют вид*

$$x^{n,0} = (a_1, \dots, a_i, 0, \dots, 0)^{\mathrm{T}}.$$

Тогда последовательность $\{x_n^n(t)\}$ *сходится в* $L_2(0,\infty)$. *Предельная функция* $y(t)$ *принадлежит соболевскому пространству* $W_2^1(\tau,\infty)$ *и является обобщенным решением начальной задачи*

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = 0, \quad t \in [0,\tau), \\ y(\tau+0) = a_1 + \dots + a_i. \end{cases}$$

Используя теоремы 3–6, можно доказать аналогичные глобальные предельные теоремы в пространстве $L_2(0,\infty)$ в случае, когда предельная функция $y(t)$ будет обобщенным решением начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = e^{-\theta t}\varphi_{m,k}(t/\tau), \quad t \in [0, \tau), \\ y(\tau + 0) = a, \end{cases} \tag{2.6}$$

где $\varphi_{m,k}(s)$ — функции Хаара

$$\varphi_{m,k}(s) = \begin{cases} 2^{m/2}, & s \in [(k-1)2^{-m}, (k-1/2)2^{-m}), \\ -2^{m/2}, & s \in [(k-1/2)2^{-m}, k2^{-m}), \\ 0, & s \notin [(k-1)2^{-m}, k2^{-m}), \end{cases}$$

$$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k = 1, 2, \dots, 2^m.$$

Сформулируем предельную теорему [10], положив для определенности $m = 1$, $k = 1$.

Теорема 7. *Пусть функция $g(t,z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$ удовлетворяет условиям (1.5), (1.6), $n = 4l+1$, компоненты начального вектора $x^{n,0} = (x_1^{n,0}, \dots, x_n^{n,0})^{\mathrm{T}}$ в задаче Коши (2.1) имеют вид*

$$x_1^{n,0} = ae^{-\theta\tau}, \qquad x_{2l+1}^{n,0} = \sqrt{2}e^{-\theta\tau/2},$$

$$x_{3l+1}^{n,0} = -2\sqrt{2}e^{-\theta\tau/4}, \qquad x_{4l+1}^{n,0} = \sqrt{2},$$

остальные компоненты равны нулю. Тогда последовательность $\{x_n^n(t)\}$ сходится в $L_2(0,\infty)$, предельная функция $y(t)$ принадлежит пространству $W_2^1(\tau,\infty)$ и является обобщенным решением задачи (2.6), где $m = k = 1$.

Приведем теперь формулировку глобальной предельной теоремы в пространстве $L_2(0,\infty)$ с указанием скорости сходимости.

Теорема 8. *Пусть функция $g(t,z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$ удовлетворяет условиям (1.5), (1.6), и последовательность начальных векторов $\{x^{n,0}\}$ в (2.1) такая, что последовательность $\{x_n^n(t)\}$ сходится в пространстве $L_2(0,\infty)$ к обобщенному решению $y(t) \in W_2^1(\tau,\infty)$ начальной задачи*

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = \varphi(t), \quad 0 \le t \le \tau, \\ y(\tau + 0) = a, \end{cases} \tag{2.7}$$

с некоторой кусочно-непрерывной функцией $\varphi(t)$, имеющей разрывы первого рода. Тогда существует $n_0 = n_0(\theta,\tau,L)$ такое, что при $n > n_0$ справедлива оценка

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_2(0,\infty)\| \le \frac{c\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k^{n,0}|}{n^{1/6}},$$

где константа $c > 0$ не зависит от n и начального вектора $x^{n,0}$.

3. Непрерывная зависимость решений начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом

В этом параграфе мы будем рассматривать начальную задачу (2.7) для дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом, предполагая, что начальная функция $\varphi(t)$ кусочно-непрерывна на $[0, \tau]$ и имеет конечное число точек разрыва $\{t_j\}$ первого рода

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = \tau.$$

Используя метод шагов (см., например, [13]), можно показать, что при этих условиях на любом отрезке $[\tau, T]$, $T > 2\tau$ задача (2.7) имеет единственное кусочно-гладкое решение

$$y(t) \in C[\tau, T] \bigcap_{j=0}^{k-1} C^1(\tau + t_j, \tau + t_{j+1}) \cap C^1(2\tau, T].$$

Ясно, что $y(t)$ принадлежит соболевскому пространству $W_p^1(\tau, T)$, $p \geq 1$. В следующей теореме мы докажем непрерывную зависимость решения задачи (2.7) от начальных условий.

Теорема 9. *Пусть функция $g(t, z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$ удовлетворяет условиям (1.5), (1.6). Предположим, что $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — кусочно-непрерывные функции на отрезке $[0, \tau]$ с конечным числом точек разрыва, причем все разрывы первого рода. Тогда для обобщенных решений $y_1(t)$, $y_2(t)$ начальных задач*

$$\begin{cases} \dfrac{dy_j(t)}{dt} = -\theta y_j(t) + g(t - \tau, y_j(t - \tau)), \quad t > \tau, \\ y_j(t) = \varphi_j(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \\ y_j(\tau + 0) = a_j, \end{cases}$$

где $j = 1, 2$, имеет место оценка

$$\|y_1(t) - y_2(t), W_p^1(\tau, \infty)\| \leq c\big(|a_1 - a_2| + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t), L_p(0, \tau)\|\big), \quad 1 < p < \infty, \tag{3.1}$$

где $c > 0$ — константа, не зависящая от начальных данных $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и a_1, a_2.

Доказательство. По определению нормы в пространстве Соболева W_p^1, имеем

$$\|y_1(t) - y_2(t), W_p^1(\tau, T)\| = \|y_1(t) - y_2(t), L_p(\tau, T)\| + \|D_t y_1(t) - D_t y_2(t), L_p(\tau, T)\|.$$

Учитывая, что $y_1(t)$, $y_2(t)$ являются обобщенными решениями начальных задач вида (2.7), получаем

$$\|y_1(t) - y_2(t), W_p^1(\tau, T)\| \leq (1 + \theta)\|y_1(t) - y_2(t), L_p(\tau, T)\|$$

$$+\|g(t-\tau, y_1(t-\tau)) - g(t-\tau, y_2(t-\tau)), L_p(\tau, T)\|.$$

Так как функция $g(t,z)$ удовлетворяет условию Липшица, то будем иметь

$$\|y_1(t) - y_2(t), W_p^1(\tau, T)\|$$

$$\leq (1+\theta)\|y_1(t) - y_2(t), L_p(\tau, T)\| + L\|y_1(t-\tau) - y_2(t-\tau), L_p(\tau, T)\|$$
$$= (1+\theta)\|y_1(t) - y_2(t), L_p(\tau, T)\| + L\|y_1(t) - y_2(t), L_p(0, T-\tau)\|.$$

А поскольку на начальном отрезке $[0,\tau]$ функции $y_1(t)$, $y_2(t)$ принимают значения $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ соответственно, то

$$\|y_1(t) - y_2(t), W_p^1(\tau, T)\|$$

$$\leq L\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t), L_p(0,\tau)\| + (1+\theta+L)\|y_1(t) - y_2(t), L_p(\tau, T)\|. \tag{3.2}$$

Оценим теперь L_p-норму разности решений.

Учитывая, что для решения задачи (2.7) справедливо соотношение

$$y(t) = ae^{-\theta(t-\tau)} + \int\limits_0^{t-\tau} e^{-\theta(t-\tau-s)} g(s, y(s)) ds, \quad t > \tau,$$

имеем

$$y_1(t) - y_2(t) = (a_1 - a_2)e^{-\theta(t-\tau)} + \int\limits_0^{t-\tau} e^{-\theta(t-\tau-s)} (g(s, y_1(s)) - g(s, y_2(s)))\, ds.$$

Тогда

$$\|y_1(t) - y_2(t), L_p(\tau, T)\| \leq |a_1 - a_2| \|e^{-\theta(t-\tau)}, L_p(\tau, T)\|$$
$$+ \left\| \int\limits_0^{t-\tau} e^{-\theta(t-s-\tau)} |g(s, y_1(s)) - g(s, y_2(s))| ds, L_p(\tau, T) \right\|.$$

Используя неравенство Юнга и то, что функция $g(t,z)$ удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу, получаем

$$\|y_1(t) - y_2(t), L_p(\tau, T)\| \leq \frac{|a_1 - a_2|}{(p\theta)^{1/p}} + L \int\limits_0^{\infty} e^{-\theta t} dt \|y_1(s) - y_2(s), L_p(0, T)\|$$

$$= \frac{|a_1 - a_2|}{(p\theta)^{1/p}} + \frac{L}{\theta} \|y_1(s) - y_2(s), L_p(0, T)\|.$$

В силу условий теоремы разность $1 - L/\theta$ положительна, следовательно

$$\|y_1(t) - y_2(t), L_p(\tau, T)\|$$

$$\leq (\theta - L)^{-1}\left(\theta\frac{|a_1 - a_2|}{(p\theta)^{1/p}} + L\|\varphi_1(s) - \varphi_2(s), L_p(0,\tau)\|\right).$$

Тогда, учитывая (3.2), получаем

$$\|y_1(t) - y_2(t), W_p^1(\tau,T)\| \leq \frac{\theta^{1-1/p}(1+\theta+L)}{(\theta-L)p^{1/p}}|a_1 - a_2|$$

$$+\frac{L(1+2\theta)}{\theta - L}\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t), L_p(0,\tau)\|. \tag{3.3}$$

Так как правая часть неравенства не зависит от T, то в оценке (3.3) можно перейти к пределу при $T \to \infty$. Отсюда следует оценка (3.1) с константой

$$c = \max\left\{\frac{\theta^{1-1/p}(1+\theta+L)}{(\theta-L)p^{1/p}}, \frac{L(1+2\theta)}{\theta-L}\right\}.$$

Теорема доказана. □

Замечание. По теореме вложения пространство Соболева $W_p^1(\tau,\infty)$ вложено в пространство непрерывных функций $C[\tau,\infty)$, убывающих на бесконечности. Таким образом, из оценки (3.1) следует, что выполнено неравенство

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq \hat{c}(|a_1 - a_2| + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t), L_p(0,\tau)\|), \quad t \geq \tau,$$

где константа $\hat{c} > 0$ не зависит от $y_j(t)$, $\varphi_j(t)$, a_j, $j = 1,2$, при этом

$$|y_1(t) - y_2(t)| \to 0, \quad t \to \infty.$$

4. Обратная предельная теорема на полуоси

В этом параграфе мы докажем, что решение задачи (2.7) для любой кусочно-непрерывной начальной функции $\varphi(t)$ с конечным числом точек разрыва первого рода можно сколь угодно точно аппроксимировать последовательностью $\{x_n^n(t)\}$, полученной в результате специального выбора начальных данных в серии задач Коши вида (2.1) для систем дифференциальных уравнений большой размерности.

Для этого мы будем использовать функции Хаара $\varphi_{m,k}(s)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k = 1,2,\ldots,2^m$. Напомним, что набор функций $\{\varphi_{m,k}(s)\} \cup \{1\}$ образует ортонормированный базис в пространстве $L_2(0,1)$ (см., например, [1]).

Опираясь на предельные теоремы из [7, 9, 10], приведенные в параграфе 2, и свойства функций Хаара, мы докажем следующую теорему.

Теорема 10. *Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (2.7) с кусочно-непрерывной начальной функцией $\varphi(t)$, которая имеет конечное число точек разрыва первого рода. Тогда функция $y(t)$ может быть сколь угодно точно аппроксимирована решениями задачи Коши вида (2.1) при $n \gg 1$.*

Доказательство. Поскольку начальная функция $\varphi(t)$ принадлежит $L_2(0,\tau)$, то используя функции Хаара $\{\varphi_{m,k}(s)\}$, представим ее в виде

$$\varphi(t) = e^{-\theta t}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^m} c_{m,k}\varphi_{m,k}(t/\tau) + c_0 e^{-\theta t},$$

$$c_{m,k} = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau e^{\theta s}\varphi_{m,k}(s/\tau)\varphi(s)ds, \qquad c_0 = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau e^{\theta s}\varphi(s)ds. \tag{4.1}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi_M(t) = e^{-\theta t}\sum_{m=0}^{M}\sum_{k=1}^{2^m} c_{m,k}\varphi_{m,k}(t/\tau) + c_0 e^{-\theta t},$$

с коэффициентами, определенными в (4.1). Пусть $y_M(t)$ — обобщенное решение начальной задачи вида (2.7)

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = \varphi_M(t), \quad 0 \le t \le \tau, \\ y(\tau+0) = a. \end{cases} \tag{4.2}$$

В силу определения функции $\varphi_M(t)$ и базисности набора функций $\{\varphi_{m,k}(s)\} \cup \{1\}$ в $L_2(0,1)$, очевидно, имеем

$$\|\varphi(t) - \varphi_M(t), L_2(0,\tau)\| \to 0, \quad M \to \infty.$$

Поэтому, учитывая однозначную разрешимость начальной задачи вида (2.7) для уравнения с запаздывающим аргументом и используя теорему 9, получаем сходимость

$$\|y(t) - y_M(t), W_2^1(\tau,\infty)\| \to 0, \quad M \to \infty.$$

В силу сказанного выше для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое M_ε, что для решения $y_{M_\varepsilon}(t)$ начальной задачи (4.2) при $M = M_\varepsilon$ и решения $y(t)$ задачи (2.7) выполнена оценка

$$\|y(t) - y_{M_\varepsilon}(t), W_2^1(\tau,\infty)\| < \varepsilon/2.$$

Учитывая предельные теоремы 3–8, аналогичным образом можно показать, что найдутся такое число n_ε и такой начальный вектор в задаче Коши (2.1), что

$$\|x_{n_\varepsilon}^{n_\varepsilon}(t) - y_{M_\varepsilon}(t), W_2^1(\tau,\infty)\| < \varepsilon/2,$$

где $x_{n_\varepsilon}^{n_\varepsilon}(t)$ — последняя компонента решения задачи Коши (2.1) при $n = n_\varepsilon$.

Из этих оценок, очевидно, имеем

$$\|y(t) - x_{n_\varepsilon}^{n_\varepsilon}(t), W_2^1(\tau,\infty)\| \le \|y(t) - y_{M_\varepsilon}(t), W_2^1(\tau,\infty)\|$$

$$+\|x_{n_\varepsilon}^{n_\varepsilon}(t) - y_{M_\varepsilon}(t), W_2^1(\tau,\infty)\| < \varepsilon.$$

Отсюда по теореме вложения соболевского пространства $W_2^1(\tau,\infty)$ в $C[\tau,\infty)$ вытекает неравенство

$$|y(t) - x_{n_\varepsilon}^{n_\varepsilon}(t)| < c\varepsilon, \quad t \ge \tau,$$

где константа $c > 0$ не зависит от ε.

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ любое решение дифференциального уравнения с параметром запаздывания $\tau > 0$, совпадающее на отрезке $[0,\tau]$ с кусочно-непрерывной функцией, может быть сколь угодно точно аппроксимировано решениями задачи Коши вида (2.1) при $n \gg 1$.

Теорема доказана. □

Список цитируемых источников

1. *Блаттер К.* Вейвлет-анализ. Основы теории. — Пер. с нем. — М.: Техносфера, 2004.

   Blatter C. (1998). Wavelets. A primer. Transl. from the German. Natick, MA: A K Peters.

2. *Демиденко Г. В.* О классах систем дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнениях с запаздывающим аргументом // Итоги науки. Юг России. Сер.: Математический форум. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. — Т. 5. — С. 45–56.

   Demidenko G. V. (2011). On classes of systems of differential equations of a higher dimension and delay equations. Itogi Nauki. Yug Rossii. Ser. Mat. Forum. Vladikavkaz: YuMI VNTs RAN i RSO-A, 5, 45–56. (in Russian)

3. *Демиденко Г. В.* Системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. — 2012. — Т. 53, № 6. — С. 1274–1282.

   Demidenko G. V. (2012). Systems of differential equations of higher dimension and delay equations. Sib. Math. J., 53, No. 6, 1021–1028.

4. *Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И.* Математическое моделирование регуляторных контуров генных сетей // Журн. выч. матем. матем. физ. — 2004. — Т. 44, № 12. — С. 2276–2295.

   Demidenko G. V., Kolchanov N. A., Likhoshvai' V. A., Matushkin Yu. G., Fadeev S. I. (2004). Mathematical modeling of regular contours of gene networks. Comput. Math. Math. Phys., 44, No. 12, 2166–2183.

5. *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е.* Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. — 2006. — Т. 47, № 1. — С. 58–68.

   Demidenko G. V., Likhoshvai' V. A., Kotova T. V., Khropova Yu. E. (2006). On one class of systems of differential equations and on retarded equations. Sib. Math. J., 47, No. 1, 45–54.

6. *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Мудров А. В.* О связи между решениями дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и бесконечномерных систем дифференциальных уравнений // Дифф. уравн. — 2009. — Т. 45, № 1. — С. 34–46.

   Demidenko G. V., Likhoshvai' V. A., Mudrov A. V. (2009). On the relationship between solutions of delay differential equations and infinite-dimensional systems of differential equations. Diff. Eq., 45, No. 1, 33–45.

7. *Демиденко Г. В., Мельник (Уварова) И. А.* Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. — 2010. — Т. 51, № 3. — С. 528–546.

   Demidenko G. V., Mel'nik (Uvarova) I. A. (2010). On a method of approximation of solutions to delay differential equations. Sib. Math. J., 51, No. 3, 419–434.

8. *Демиденко Г. В., Уварова И. А.* Класс систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности // Сиб. журн. индустр. мат. — 2016. — Т. 19, № 2. — С. 47–60.

   Demidenko G. V., Uvarova I. A. (2016). A class of systems of ordinary differential equations of large dimension. J. Appl. Ind. Math., 10, No. 2, 179–191.

9. *Демиденко Г. В., Уварова И. А.* Предельные теоремы для одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом // Динамические системы. — 2018. — Т. 8(36), № 3. — С. 205–234.

   Demidenko G. V., Uvarova I. A. (2018). Limit theorems for one system of ordinary differential equations of high dimension and delay differential equations. Dinamicheskie Sistemy, 8(36), No. 3, 205–234. (in Russian)

10. *Демиденко Г. В., Уварова И. А., Хазова Ю. А.* Об одной системе обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнении с запаздывающим аргументом // Сиб. журн. индустр. мат. — 2019. — Т. 22, № 3. — С. 59–73.

    Demidenko G. V., Uvarova I. A., Khazova Yu. A. (2019). On one system of ordinary differential equations of large dimension and a delay equation. J. Appl. Ind. Math., 13, No. 3, 447–459.

11. *Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г.* Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // Сиб. журн. индустр. мат. — 2004. — Т. 7, № 1. — С. 73–94.

    Likhoshvai' V. A., Fadeev S. I., Demidenko G. V., Matushkin Yu. G. (2004). Modeling multistage synthesis without branching by a delay equation. Sibirsk. Zh. Industr. Mat., 7, No. 1, 73–94. (in Russian)

12. *Матвеева И. И., Мельник (Уварова) И. А.* О свойствах решений одного класса нелинейных систем дифференциальных уравнений большой размерности // Сиб. мат. журн. — 2012. — Т. 53, № 2. — С. 312–324.

    Matveeva I. I., Mel'nik (Uvarova) I. A. (2012). On the properties of solutions to a class of nonlinear systems of differential equations of large dimension. Sib. Math. J., 53, No. 2, 248–258.

13. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972.

Myshkis A. D. (1972). Linear differential equations with retarded argument. Moscow: Nauka. (in Russian)

14. *Demidenko G. V., Kotova T. V.* (2010). Limit properties of solutions to one class of systems of differential equations with parameters. J. Anal. Appl., 8, No. 2, 63–74.

Получена 02.03.2020