Динамические системы, 2020, том 10(38), №1, 23–36

УДК 517.929.7

О неулучшаемых условиях разрешимости краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений первого порядка[1]

Е. И. Бравый

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь 614990. *E-mail: bravyi@perm.ru*

Аннотация. Для линейных функционально-дифференциальных уравнений первого порядка получены неулучшаемые условия однозначной разрешимости общей краевой задачи при интегральных ограничениях на функциональные операторы. Если эти условия не выполнены, то найдется функциональный оператор, удовлетворяющий заданным интегральным ограничениям, для которого краевая задача не является однозначно разрешимой. Проверка этих необходимых и достаточных условий заключается в проверке отсутствия нулей известной функции, заданной на множестве размерности 8.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, краевые задачи, однозначная разрешимость, неулучшаемые условия.

On unimprovable conditions of the solvability of boundary value problems for first order functional differential equations

E. I. Bravyi

Perm National Research Polytechnic University, Perm 614990.

Abstract. For linear functional differential equations of the first order, unimprovable conditions are obtained for the unique solvability of a general boundary value problem under integral constraints on positive and negative parts of functional operators. If these conditions are not fulfilled, then there is a functional operator satisfying the given integral constraints for which the boundary value problem is not uniquely solvable. Verification of these necessary and sufficient conditions consists in verifying the absence of zeros of a known function defined on a set of dimension 8. The necessary and sufficient conditions for the unique solvability of boundary value problems of a periodic type under integral constraints are also obtained.

Keywords: functional differential equations, boundary value problems, unique solvability, unimprovable conditions.

MSC 2010: 34K06, 34K10

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание FSNM-2020-0028) и при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-01-00332).

1. Введение

Для функционально-дифференциальных уравнений первого порядка будут получены неулучшаемые условия разрешимости краевых задач при интегральных ограничениях на функциональные операторы.

Рассматривается краевая задача для линейного функционально-дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (Tx)(t) + f(t), \quad t \in [a,b], \\ \ell x = \alpha, \end{cases} \tag{1}$$

где функция $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ принадлежит пространству абсолютно непрерывных на отрезке $[a,b]$ вещественных функций $\mathbf{AC}$; линейный ограниченный оператор $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ действует из пространства ограниченных вещественных функций $\mathbf{C}$ в пространство суммируемых вещественных функций $\mathbf{L}$, ограничен и регулярен, то есть представим в виде разности двух линейных положительных операторов (отображающих неотрицательные функции из $\mathbf{C}$ в почти всюду неотрицательные из $\mathbf{L}$); функция f суммируема: $f \in \mathbf{L}$; $\alpha \in \mathbb{R}$; $\ell : \mathbf{AC} \to \mathbb{R}$ — линейный ограниченный функционал; в пространствах $\mathbf{C}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{AC}$ используются стандартные нормы.

Известно, что краевая задача (1) фредгольмова (см., например, [3]). Таким образом, краевая задача (1) имеет единственное решение при всех парах $f \in \mathbf{L}$, $c \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда однородная задача (при $f \equiv 0$, $\alpha = 0$) задача имеет только тривиальное решение.

Условия разрешимости краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений первого порядка достаточно хорошо разработаны в монографии [13], статьях [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16] и других работах. При изучении конкретных краевых задач, как правило, используется техника построения априорных оценок. Однако для сколько-нибудь общих краевых задач неулучшаемые условия разрешимости в терминах ограничений на функциональные операторы, по-видимому, неизвестны. Здесь с помощью метода, описанного, например, в работах [1, 2], будут получены общие необходимые и достаточные условия разрешимости краевой задачи для всех уравнений из рассматриваемого семейства уравнений при интегральных ограничениях на функциональные операторы положительной и отрицательной частей оператора T в задаче (1). Эти условия однозначной разрешимости оказываются неулучшаемыми (в заданном семействе уравнений) в том смысле, что если эти условия не выполнены, то в семействе найдется уравнение, для которого краевая задача не является однозначно разрешимой.

В параграфе 2 доказаны основные общие утверждения: о связи разрешимости задачи для семейств уравнений и разрешимостью задачи для уравнений с двумя постоянными аргументами (теорема 1) и о необходимых и достаточных условиях разрешимости краевой задачи при интегральных ограничениях (теорема 2). В § 3 получены необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач периодического типа (теорема 3).

2. Общие утверждения для уравнения первого порядка

В следующей (основной) лемме показывается, что решение однородной краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения первого порядка с регулярным функциональным оператором является решением задачи с теми же краевыми условиями для однородного уравнения с двумя постоянными значениями аргумента.

Лемма 1. *Пусть однородная краевая задача*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t), \quad t \in [a,b], \\ \ell x = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $T^+, T^- : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ — линейные положительные операторы, $\ell : \mathbf{AC} \to \mathbb{R}$ — линейный ограниченный функционал, имеет нетривиальное решение $u \in \mathbf{AC}$. Тогда функция u является решением краевой задачи для некоторого функционально-дифференциального уравнения с двумя постоянными аргументами:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = p_*(t)x(\tau_*) + p^*(t)x(\tau^*), \quad t \in [a,b], \\ \ell x = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где τ_*, $\tau^* \in [a,b]$, p_*, $p^* \in \mathbf{L}$, и выполнены соотношения

$$p_* + p^* = T^+\mathbf{1} - T^-\mathbf{1}, \tag{4}$$

$$p_*(t), p^*(t) \in [-(T^-\mathbf{1})(t), (T^+\mathbf{1})(t)], \quad t \in [a,b]. \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим через τ_* и τ^* любые точки, в которых решение u на отрезке $[a,b]$ принимает минимальное и максимальное значения соответственно. Таким образом, выполнены неравенства $u(\tau_*) \le u(t) \le u(\tau^*)$, $t \in [a,b]$. Тогда для положительных операторов T^- и T^+ выполнены неравенства

$$(T^+\mathbf{1})(t)u(\tau_*) \le (T^+u)(t) \le (T^+\mathbf{1})(t)u(\tau^*), \ t \in [a,b],$$
$$(T^-\mathbf{1})(t)u(\tau_*) \le (T^-u)(t) \le (T^-\mathbf{1})(t)u(\tau^*), \ t \in [a,b].$$

Следовательно, существуют такие измеримые функции $\zeta, \xi : [a,b] \to [0,1]$, что

$$(T^+u)(t) = (T^+\mathbf{1})(t)(1-\zeta(t))u(\tau_*) + (T^+\mathbf{1})(t)\zeta(t)u(\tau^*), \ t \in [a,b],$$
$$(T^-u)(t) = (T^-\mathbf{1})(t)(1-\xi(t))u(\tau_*) + (T^-\mathbf{1})(t)\xi(t)u(\tau^*), \ t \in [a,b].$$

Поэтому функция u удовлетворяет задаче (3) при p_*, p^*, определенных равенствами

$$p_*(t) = (T^+\mathbf{1})(t)(1-\zeta(t)) - (T^-\mathbf{1})(t)(1-\xi(t)), \ t \in [a,b],$$
$$p^*(t) = (T^+\mathbf{1})(t)\zeta(t) - (T^-\mathbf{1})(t)\xi(t), \ t \in [a,b].$$

Очевидно, что при этом выполнено равенство (4) и неравенства (5). □

Верно и обратное утверждение.

Лемма 2. *Пусть заданы неотрицательные функции p^+, $p^- \in \mathbf{L}$. Пусть все задачи (2) при всех таких линейных положительных операторах T^+, $T^- : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$, что $T^+\mathbf{1} = p^+$, $T^-\mathbf{1} = p^-$, имеют только тривиальное решение.*

Тогда все краевые задачи (3) имеют только тривиальное решение при всех τ_*, $\tau^* \in [a,b]$ и всех функциях p_*, $p^* \in \mathbf{L}$, удовлетворяющих условиям (4), (5).

Доказательство. Пусть краевая задача (3) при некоторых τ_*, $\tau^* \in [a,b]$ и при некоторых функциях p_*, $p^* \in \mathbf{L}$, удовлетворяющих условиям (4),(5), имеет нетривиальное решение u. Определим линейные операторы T^+, T^- равенствами

$$T^+x = p_1^+ x(\tau_1) + (p^+ - p_1^+)x(\tau_2), \quad T^-x = p_1^- x(\tau_1) + (p^- - p_1^-)x(\tau_2),$$

где p_1^+, p_1^- — положительная и отрицательная части функции p_1 ($p_1^+ = (|p_1|+p_1)/2$, $p_1^- = (|p_1| - p_1)/2$). Операторы T^+, $T^- : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ положительны и выполнены равенства $T^+\mathbf{1} = p^+$, $T^-\mathbf{1} = p^-$. Тогда функция u — нетривиальное решение задачи однородной задачи (2), которая поэтому не является однозначно разрешимой. Противоречие доказывает утверждение. □

Из лемм 1 и 2 и фредгольмовости задачи

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t) + f(t), \quad t \in [a,b], \\ \ell x = \alpha, \end{cases} \tag{6}$$

следует необходимое и достаточное условие разрешимости для всего семейства.

Теорема 1. *Пусть заданы неотрицательные функции p^+, $p^- \in \mathbf{L}$. Задача (6) однозначно разрешима при всех таких линейных положительных операторах T^+, $T^- : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$, что $T^+\mathbf{1} = p^+$, $T^-\mathbf{1} = p^-$, в том и только том случае, когда все задачи (3) имеют только тривиальное решение при всех τ_*, $\tau^* \in [a,b]$ и всех функциях p_*, $p^* \in \mathbf{L}$, удовлетворяющих условиям (4), (5).*

Замечание 1. В утверждении теоремы 1 можно полагать $\tau_* < \tau^*$, причем τ_* — точка минимума, τ^* — точка максимума некоторого нетривиального решения.

2.1. Условия разрешимости краевых задач с двумя постоянными аргументами

Лемма 3. *Краевая задача*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = p_*(t)x(\tau_*) + p^*(t)x(\tau^*), \quad t \in [a,b], \\ \ell x = 0, \end{cases} \tag{7}$$

где p_*, $p^* \in \mathbf{L}$, τ_*, $\tau^* \in [a,b]$,

$$\ell x \equiv \psi x(a) + \int_a^b \phi(s)\dot{x}(s)\,ds, \ \psi \in \mathbb{R}, \ \phi \in \mathbf{L}_\infty, \tag{8}$$

имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$\triangle \equiv \begin{vmatrix} -1 & 1-\int_a^{\tau_*} p_*(s)\,ds & -\int_a^{\tau_*} p^*(s)\,ds \\ -1 & -\int_a^{\tau^*} p_*(s)\,ds & 1-\int_a^{\tau^*} p^*(s)\,ds \\ \psi & \int_a^b \phi(s)p_*(s)\,ds & \int_a^b \phi(s)p^*(s)\,ds \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (9)$$

Доказательство. Решение задачи (7) представимо в виде

$$x(t) = x(a) + \int_a^t p_*(s)\,ds\,x(\tau_*) + \int_a^t p^*(s)\,ds\,x(\tau^*), \quad t \in [a,b],$$

где значения $x(a)$, $x(\tau_*)$, $x(\tau^*)$ удовлетворяют равенствам

$$x(\tau_*) = x(a) + \int_a^{\tau_*} p_*(s)\,ds\,x(\tau_*) + \int_a^{\tau_*} p^*(s)\,ds\,x(\tau^*),$$

$$x(\tau^*) = x(a) + \int_a^{\tau^*} p_*(s)\,ds\,x(\tau_*) + \int_a^{\tau^*} p^*(s)\,ds\,x(\tau^*)$$

и краевому условию

$$\psi x(a) + \int_a^b \phi(s)p_*(s)\,ds\,x(\tau_*) + \int_a^b p^*(s)\,ds\,x(\tau^*) = 0.$$

Краевая задача (7) имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда система трех последних уравнений относительно неизвестных $x(a)$, $x(\tau_*)$ и $x(\tau^*)$ имеет только тривиальное решение, то есть, когда выполнено условие (9). □

Запишем в более удобном виде условие однозначной разрешимости задачи (6).

Теорема 2. *Пусть заданы неотрицательные числа A, B, ψ, $\overline{\gamma}$ и $\underline{\gamma} \in (0, \overline{\gamma}]$. Тогда задача (6) с функционалом ℓ, определенным равенством (8), однозначно разрешима при всех таких линейных положительных операторах T^+, T^- : $\mathbf{C} \to \mathbf{L}$, что $\| T^+\| = A$, $\| T^-\| = B$, и при всех таких измеримых функциях ϕ, что $\underline{\gamma} \le \phi(t) \le \overline{\gamma}$, $t \in [a,b]$, тогда и только тогда, когда*

$$\triangle \equiv \begin{vmatrix} -1 & 1-c_1 & -c_4 \\ 0 & -1-c_2 & 1-c_5 \\ \psi & D_1 & D_2 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (10)$$

при всех

$$c_5 \in [-M_2, M_1],\ c_4 \in \begin{cases} [-M_2, M_1 - c_5],\ c_5 \ge 0, \\ [-M_2 - c_5, M_1],\ c_5 < 0, \end{cases}$$

$$c_2 \in [-B + M_2, A - M_1],\ c_1 \in \begin{cases} [-B + M_2, A - M_1 - c_2],\ c_2 \ge 0, \\ [-B + M_2 - c_2, A - M_1],\ c_2 < 0, \end{cases}$$

$$M_1 \in [0, A],\ M_2 \in [0, B],\ D_1 \in \left[\underline{\gamma}(A - M_1) - \overline{\gamma}(A - M_2), \overline{\gamma}(A - M_1) - \underline{\gamma}(A - M_2)\right],$$

$$D_2 \in \left[\underline{\gamma}M_1 - \overline{\gamma}M_2, \overline{\gamma}M_1 - \underline{\gamma}M_2\right].$$

Доказательство. Условие (9) имеет следующий вид:

$$\triangle \equiv \begin{vmatrix} -1 & 1-c_1 & -c_4 \\ -1 & -c_1-c_2 & 1-c_4-c_5 \\ \psi & D_1 & D_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1-c_1 & -c_4 \\ 0 & -1-c_2 & 1-c_5 \\ \psi & D_1 & D_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{11}$$

где

$$c_1 = \int_a^{\tau_*} p_*(s)\,ds,\ c_2 = \int_{\tau_*}^{\tau^*} p_*(s)\,ds,\ c_4 = \int_a^{\tau_*} p^*(s)\,ds,\ c_5 = \int_{\tau_*}^{\tau^*} p^*(s)\,ds,$$

$$D_1 = \int_a^b \phi(s)p_*(s)\,ds,\ D_2 = \int_a^b \phi(s)p^*(s)\,ds.$$

Пусть $\underline{\gamma} \le \phi(t) \le \overline{\gamma}$, $t \in [a,b]$, где $0 < \underline{\gamma} \le \overline{\gamma}$. При некоторых $\zeta, \xi : [0,1] \to [0,1]$ имеем

$$D_1 =$$

$$= \int_a^b \phi(s)\left((T^+\mathbf{1})(t)(1-\zeta(t)) - (T^-\mathbf{1})(t)(1-\xi(t))\right)dt \in \left[\underline{\gamma}N_1 - \overline{\gamma}N_2, \overline{\gamma}N_1 - \underline{\gamma}N_2\right],$$

$$D_2 = \int_a^b \phi(s)\left((T^+\mathbf{1})(t)\zeta(t) - (T^-\mathbf{1})(t)\xi(t)\right)\,dt \in \left[\underline{\gamma}M_1 - \overline{\gamma}M_2, \overline{\gamma}M_1 - \underline{\gamma}M_2\right],$$

где

$$N_1 = \int_a^b (T^+\mathbf{1})(t)(1-\zeta(t))\,dt,\ N_2 = \int_a^b (T^-\mathbf{1})(t)(1-\xi(t))\,dt,$$

$$M_1 = \int_a^b (T^+\mathbf{1})(t)\,\zeta(t)\,dt,\ M_2 = \int_a^b (T^-\mathbf{1})(t)\xi(t)\,dt,$$

$$N_1 + M_1 = \|\,T^+\| \equiv A,\ N_2 + M_2 = \|\,T^-\| \equiv B, \quad N_1, M_1, N_2, M_2 \ge 0.$$

Далее имеем $c_1 = \int_a^{\tau_*}(T^+\mathbf{1})(t)(1-\zeta(t))\,dt - \int_a^{\tau_*}(T^-\mathbf{1})(t)(1-\xi(t))\,dt$, $c_4 = \int_a^{\tau_*}(T^+\mathbf{1})(t)\zeta(t)\,dt - \int_a^{\tau_*}(T^-\mathbf{1})(t)\xi(t)\,dt$, $c_2 = \int_{\tau_*}^{\tau^*}(T^+\mathbf{1})(t)(1-\zeta(t))\,dt - \int_{\tau_*}^{\tau^*}(T^-\mathbf{1})(t)(1-\xi(t))\,dt$, $c_5 = \int_{\tau_*}^{\tau^*}(T^+\mathbf{1})(t)\zeta(t)\,dt - \int_{\tau_*}^{\tau^*}(T^-\mathbf{1})(t)\xi(t)\,dt$. Таким образом,

$$c_1 = K_1 - K_2,\ c_4 = L_1 - L_2,\ c_2 = P_1 - P_2,\ c_5 = Q_1 - Q_2,$$

$$K_1 + P_1 \le N_1 = A - M_1,\ K_2 + P_2 \le N_2 = B - M_2,$$

$$L_1 + Q_1 \le M_1,\ L_2 + Q_2 \le M_2,\ N_1 + M_1 = \|\,T^+\| \equiv A,\ N_2 + M_2 = \|\,T^-\| \equiv B,$$

$$K_1, K_2, L_1, L_2, P_1, P_2, Q_1, Q_2, N_1, M_1, N_2, M_2 \ge 0.$$

Поэтому при фиксированных $M_1 \in [0,A]$ и $M_2 \in [0,B]$ имеем:

$$K_1 \in [0, A-M_1],\ P_1 \in [0, A-M_1-K_1],\ K_2 \in [0, B-M_2],\ P_2 \in [0, B-M_2-K_2],$$

$$L_1 \in [0, M_1],\ Q_1 \in [0, M_1-L_1],\ L_2 \in [0, M_2],\ Q_2 \in [0, M_2-L_2].$$

И для c_1, c_2, c_4, c_5 получаем:

$$c_1 = K_1 - K_2,\ c_2 \in [M_2 - B + K_2, A - M_1 - K_1],\ c_4 = L_1 - L_2,\ c_5 \in [L_2 - M_2, M_1 - L_1],$$

где

$$K_1 \in [0, A - M_1],\ K_2 \in [0, B - M_2],\ L_1 \in [0, M_1],\ L_2 \in [0, M_2],\ M_1 \in [0, A],\ M_2 \in [0, B].$$

Пусть $c_2 \in [-B + M_2, A - M_1]$. Если $c_2 > 0$, то $K_1 \in [0, A - M_1 - c_2]$, $K_2 \in [0, B - M_2]$. Поэтому

$$c_1 = K_1 - K_2 \in [-B + M_2, A - M_1 - c_2].$$

Если $c_2 \leq 0$, то $K_1 \in [0, A - M_1]$, $K_2 \in [0, c_2 + B - M_2]$. Поэтому

$$c_1 = K_1 - K_2 \in [-c_2 - B + M_2, A - M_1].$$

Пусть $c_5 \in [-M_2, M_1]$. Если $c_5 > 0$, то $L_1 \in [0, M_1 - c_5]$, $L_2 \in [0, M_2]$. Поэтому

$$c_4 = L_1 - L_2 \in [-M_2, M_1 - c_5].$$

Если $c_5 \leq 0$, то $L_1 \in [0, M_1]$, $L_2 \in [0, c_5 + M_2]$. Поэтому

$$c_4 = L_1 - L_2 \in [-M_2 - c_5, M_1].$$

Итак, при заданных неотрицательных числах $A = \| T^+\|$ и $B = \| T^-\|$ функция $\triangle$ из неравенства (11) определена на только что описанном восьмимерном множестве. Отсутствие нулей $\triangle$ по лемме (3) эквивалентно однозначной разрешимости задачи (6) при всех таких линейных положительных операторах T^+, $T^- : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$, что $\| T^+\| = A$, $\| T^-\| = B$, и при всех таких измеримых функциях ϕ в записи функционала краевых условий ℓ, что $\underline{\gamma} \leq \phi(t) \leq \overline{\gamma}$, $t \in [a, b]$. □

Замечание 2. Многомерность множества, на котором надо проверить неравенство (11), определяет трудности при получении конечных условий разрешимости.

3. Краевые задачи периодического типа

Основной результат параграфа — теорема 3, в которой получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости одного класса задач, включающего периодическую краевую задачу (утверждение теоремы обобщает известные результаты о периодических задачах).

Рассмотрим общую краевую задачу для уравнения первого порядка (6) с функционалом краевого условия (8), в котором положим $\psi = 0$. В этом случае в условиях разрешимости (10) этой задачи определитель $\triangle$ не зависит от переменных c_1 и c_4, поэтому размерность множества, на котором решается задача минимизации при применении леммы 3, снижается на 2. При $\phi(s) \equiv 1$ и $\alpha = 0$ краевая задача становится периодической.

Теорема 3. *Пусть заданы числа $A \geq 0$, $B \geq 0$, $\gamma \geq 1$. Для того чтобы краевая задача*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (T^{+}x)(t) - (T^{-}x)(t) + f(t), \quad t \in [a,b], \\ \displaystyle\int_a^b \phi(s)\dot{x}(s)\,ds = \alpha, \end{cases}$$

была однозначно разрешима при всех линейных положительных операторах T^{+}, $T^{-} : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ и всех измеримых функциях ϕ, удовлетворяющих условиям

$$\| T^{+} \| = A,\ \| T^{-} \| = B,\ \phi(s) \in [\underline{\gamma}, \overline{\gamma}],\ s \in [a,b],\ 0 < \underline{\gamma} \leq \overline{\gamma},\ \frac{\overline{\gamma}}{\underline{\gamma}} = \gamma,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{B}{1/\gamma - B} < A < 1 + 1/\gamma + 2\sqrt{1/\gamma - B},$$

или

$$\frac{A}{1/\gamma - A} < B < 1 + 1/\gamma + 2\sqrt{1/\gamma - A}.$$

Замечание 3. При $\gamma = 1$ из теоремы 3 получаем утверждение теоремы 4.1 книги [13] о разрешимости периодической задачи.

Доказательство теоремы 3. Будем искать условия, при которых задача

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = p_{*}(t)x(\tau_{*}) + p^{*}(t)x(\tau^{*}), \quad t \in [a,b], \\ \displaystyle\int_a^b \phi(s)\dot{x}(s)\,ds = 0, \end{cases}$$

не имеет нетривиальных решений для всех $\tau_{*}, \tau^{*} \in [a,b]$, всех таких функций p_{*}, $p^{*} \in \mathbf{L}$, что выполнены соотношения

$$p_{*} + p^{*} = T^{+}\mathbf{1} - T^{-}\mathbf{1}, \quad p_{*}(t),\ p^{*}(t) \in [-(T^{-}\mathbf{1})(t), (T^{+}\mathbf{1})(t)], \quad t \in [a,b],$$

всех линейных положительных операторах T^{+}, $T^{-} : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ с заданными нормами ($\| T^{+} \| = A$, $\| T^{-} \| = B$), всех измеримых функций ϕ, удовлетворяющих неравенствам

$$\underline{\gamma} \leq \phi(t) \leq \overline{\gamma}, \quad t \in [a,b],$$

где $0 < \underline{\gamma} \leq \overline{\gamma}$. В этот класс задач входит и периодическая задача, для которой функция ϕ постоянна.

В этом случае функция $\triangle$ из неравенства (11) имеет вид

$$\triangle = (1 + c_2)D_2 + (1 - c_5)D_1,$$

$$D_1 \in \left[\underline{\gamma}N_1 - \overline{\gamma}N_2, \overline{\gamma}N_1 - \underline{\gamma}N_2\right] = \tag{12}$$
$$= \left[\underline{\gamma}(A - M_1) - \overline{\gamma}(B - M_2), \overline{\gamma}(A - M_1) - \underline{\gamma}(B - M_2)\right],$$
$$D_2 \in \left[\underline{\gamma}M_1 - \overline{\gamma}M_2, \overline{\gamma}M_1 - \underline{\gamma}M_2\right], \quad c_5 \in [-M_2, M_1]$$
$$c_2 \in [M_2 - B, A - M_1]. \tag{13}$$

Удобнее перейти к новым переменным:

$$\triangle' \equiv \frac{\triangle}{\underline{\gamma}} = (1 + c_2)D_2' + (1 - c_5)D_1',$$

где

$$D_1' \in [N_1 - \gamma N_2, \gamma N_1 - N_2] = [A - M_1 - \gamma(B - M_2), \gamma(A - M_1) - (B - M_2)],$$
$$D_2' \in [M_1 - \gamma M_2, \gamma M_1 - M_2],$$
$$\gamma \equiv \frac{\overline{\gamma}}{\underline{\gamma}}, \quad M_1 \in [0, A], \quad M_2 \in [0, B]. \tag{14}$$

Задача (7) не может иметь нетривиальных решений, если при всех параметрах, удовлетворяющих условиям (13)–(14), будет выполнено неравенство $\triangle' \neq 0$.

При $M_1 = M_2 = 0$ имеем $D_2, = 0$, $c_5 = 0$ и $\triangle' = D_1' \in [A - \gamma B, \gamma A - B]$. Если $A \geq B$, то $\gamma A - B > 0$, то есть, правый конец промежутка для $\triangle'$ положителен, и поэтому левый конец этого промежутка для того, чтобы он не содержал нуля, также должен быть положителен: $A - \gamma B > 0$ (в случае $A \leq B$ выполнено неравенство $A - \gamma B < 0$ и поэтому правый конец не содержащего нуля промежутка также должен быть отрицателен: $A < \frac{1}{\gamma}B$).

Рассмотрим сначала случай $A \geq B$. Нас интересуют условия, при которых

$$\triangle' = (1 + c_2)D_2' + (1 - c_5)D_1' > 0,$$

для всех c_2, c_5, D_1', D_2', M_1, M_2, удовлетворяющих (13)–(14) где параметры

$$A = \|\, T^+\|, \; B = \|\, T^-\|, \; \gamma = \frac{\overline{\gamma}}{\underline{\gamma}} \geq 1$$

определяются исходной краевой задачей.

Минимум $\triangle'$ может принимать только на границах всех ограничений по c_2, c_5, D_1', D_2'. Необходимо рассмотреть все возможные случаи с учетом очевидного сокращения перебора: если $c_2 = A - M_1$, то $\triangle'$ будет принимать минимальное значение при $D_2' = M_1 - \gamma M_2$. Аналогично получаем, что
если $c_2 = M_2 - B > -1$, то $D_2' = M_1 - \gamma M_2$;
если $c_2 = M_2 - B \leq -1$, то $D_2' = \gamma M_1 - M_2$;
если $c_5 = M_1 > 1$, то $D_1' = \gamma(A - M_1) - (B - M_2)$;
если $c_5 = M_1 \leq 1$, то $D_1' = (A - M_1) - \gamma(B - M_2)$;
если $c_5 = -M_2$, то $D_1' = (A - M_1) - \gamma(B - M_2)$.

Случай 1: $c_2 = M_2,\ B > -1,\ D_2' = M_1 - \gamma M_2,\ c_5 = M_1 > 1,\ D_1' = \gamma(a - M_1) - (B - M_2)$. В этом случае $\triangle' = (1 + M_2 - B)(M_1 - \gamma M_2) + (1 - M_1)(\gamma(A - M_1) - (B - M_2)) = -\gamma M_2^2 + (B\gamma + 1 - \gamma)M_2 + M_1 - \gamma M_1 - B + \gamma A + \gamma M_1^2 - M_1\gamma A$.

Коэффициент при M_2 отрицателен, поэтому минимальное значение выражения $\triangle'$ будет приниматься на одном из концов отрезка $M_2 \in [B - 1, B]$. Левый конец в данном случае проверять не обязательно, так как он не является границей множества ограничений. При $M_2 = B$ имеем

$$\triangle' = \gamma M_1^2 + (1 - \gamma - \gamma A)M_1 - B\gamma + \gamma A.$$

Это выражение принимает минимальное значение либо при $M_1 = 0$ ($\triangle' = \gamma(A - B) > 0$ при $A > B$), либо при $M_1 = A$ ($\triangle' = A - \gamma B > 0$), либо при $M_1 = M_{1,min} = -\frac{1}{2}\frac{1-\gamma\gamma A}{\gamma}$, если $M_{1,min} \in [1, A]$, то есть, при $a > 1 + 1/\gamma$. Тогда

$$\triangle' = -\gamma^2 A^2 + 2\gamma(\gamma + 1) - (1 - \gamma)^2 - 4\gamma^2 B,$$

и $\triangle' > 0$ тогда и только тогда, когда величина A принадлежит интервалу

$$\left(1 + 1/\gamma - 2\sqrt{1/\gamma - B}, 1 + 1/\gamma + 2\sqrt{1/\gamma - B}\right).$$

Таким образом, $\triangle' > 0$, если при $B \le 1/\gamma$ и при $A > 1 + 1/\gamma$ выполнено неравенство

$$A < 1 + 1/\gamma + 2\sqrt{1/\gamma - B}.$$

Случай 2: $c_2 = a - M_1,\ D_2' = M_1 - \gamma M_2,\ c_5 = M_1 > 1,\ D_1' = \gamma(a - M_1) - (B - M_2)$.

Тогда $\triangle' = (1 - M_1 + \gamma(M_1 - 1) - \gamma A)M_2 + M_1 + AM_1 - \gamma M_1 - M_1^2 + gA + \gamma M_1^2 - B - M_1\gamma A + BM_1$.

Коэффициент при M_2 отрицателен: $(M_1 - 1)(\gamma - 1) < A\gamma$, поэтому минимальное значение выражения $\triangle'$ будет приниматься при максимально возможном $M_2 = B$. Тогда $\triangle'_{M_2=b} = (\gamma - 1)M_1^2 + (1 - \gamma A + \gamma BA - \gamma)M_1 - \gamma B + \gamma A - \gamma AB$. Минимальное значение это выражение принимает либо при $M_1 = 1$ ($\triangle' = A(1 - \gamma B) > 0$, если $B < 1/\gamma$), либо при $M_1 = A$ ($\triangle' = A - B\gamma > 0$ так как $A \ge 1$ и $B < 1/\gamma$), либо внутри отрезка $[1, A]$ при $M_{1,min} = -\frac{1}{2}\frac{1-\gamma A+\gamma B+A-\gamma}{\gamma-1}$, если $\gamma > 1$. Имеем $M_{1,min} \ge 1$ при $A \ge \frac{\gamma B+\gamma-1}{\gamma-1}$; $M_{1,min} \le A$ при $A \ge \frac{-\gamma B+\gamma-1}{\gamma-1}$. Если оба эти неравенства выполнены, то $A \ge \frac{\gamma B+\gamma-1}{\gamma-1}$ и $\min\triangle' = \frac{1}{4(\gamma-1)}\left(-(\gamma-1)^2A^2 - 2(\gamma-1)(-1+\gamma B-\gamma)A - \gamma^2B^2 + (2\gamma - 2\gamma^2)B + 2\gamma - 1\right)$. Теперь $\min\triangle' > 0$ тогда и только тогда, когда

$$A \in \left(\frac{\gamma + 1 - \gamma B - 2\gamma\sqrt{1/\gamma - B}}{\gamma - 1}; \frac{\gamma + 1 - \gamma B + 2\gamma\sqrt{1/\gamma - B}}{\gamma - 1}\right).$$

Но уже полученная при рассмотрении случая 1 оценка для A является более сильной. Действительно,

$$1 + \gamma + 2\sqrt{1/\gamma - B} < \frac{\gamma + 1 - \gamma B + 2\gamma\sqrt{1/\gamma - B}}{\gamma - 1},$$

так как

$$\frac{\gamma^2-1}{\gamma}+2(\gamma-1)\sqrt{1/\gamma-B}<\gamma+1-\gamma B+2\gamma\sqrt{1/\gamma-B},$$

$$\frac{\gamma^2-1}{\gamma}-\gamma-1+\gamma B<2\sqrt{1/\gamma-B}, \quad \frac{-1-\gamma+\gamma^2 B}{\gamma}<2\sqrt{\gamma-\gamma B},$$

и при $\gamma B<1$ левая часть последнего неравенства отрицательна. При этом границы применимости этого неравенства лежат внутри границ применения неравенства из пункта 1, так как $A \geq \frac{\gamma B+\gamma-1}{\gamma-1}>1+1/\gamma$.

Случай 3: $c_2=M_2-B>-1$, $D_2'=M_1-\gamma M_2$, $c_5=M_1\leq 1$, $D_1'=a-M_1-\gamma(B-M_2)$.

Тогда $\triangle'=(1+M_2-B)(M_1-\gamma M_2)+(1-M_1)(A-M_1-\gamma(B-M_2))=-\gamma M_2^2+(-\gamma M_1+B\gamma+M_1)M_2+A-B\gamma-BM_1+M_1^2+M_1\gamma B-AM_1$.

Коэффициент при M_2^2 отрицателен, поэтому минимальное значение $\triangle'$ может принимать только на концах отрезка изменения величины M_2: $M_2=B-1$ или $M_2=B$. Случай $M_2=B-1$ можно не рассматривать, так как эта точка не будет лежать на границе всех ограничений. При $M_2=B$ имеем $\triangle'=M_1^2-AM_1+A-B\gamma$. При $M_1=1$ $\triangle'=1-\gamma B>0$, если $B\gamma<1$. При $M_1=0$ $\triangle'=A-\gamma B>0$, если $A>B\gamma$. Минимальное значение $\triangle'$ принимает при $M_1=A/2$. Тогда $\triangle'=-\frac{A^2}{4}+A-\gamma B>0$, если $A\in\left[0,2+2\sqrt{1+B\gamma}\right)$. Очевидно, что условия, полученные при рассмотрении случая 1, более ограничительны.

Случай 4: $c_2=A-M_1$, $D_2'=M_1-\gamma M_2$, $c_5=M_1\leq 1$, $D_1'=a-M_1-\gamma(B-M_2)$.

Тогда $\triangle'=(1+A-M_1)(M_1-\gamma M_2)+(1-M_1)(A-M_1-\gamma(B-M_2))=-A\gamma M_2+A-\gamma B+B\gamma M_1$. Минимальное значение достигается при $M_1=0$ и $M_2=B$. Тогда $\triangle'=-A\gamma B+A-B\gamma>0$ при

$$A>\frac{B}{1/\gamma-B}.$$

Случай 5: $c_2=M_2-B>-1$, $D_2'=M_1-\gamma M_2$, $c_5=-M_2$, $D_1'=a-M_1-\gamma(B-M_2)$.

Тогда $\triangle'=(1+M_2-B)(M_1-\gamma M_2)+(1+M_2)(A-M_1-\gamma(B-M_2))=-BM_1+A-B\gamma+M_2A$.

Минимальное значение $\triangle'$ будет принимать при $M_2=0$ и $M_1=A$. Тогда $\triangle'=-BA+A-B\gamma>0$ при $A>\frac{B\gamma}{1-B}$. Но так как должны быть выполнены условия из предыдущих пунктов, то

$$A>\frac{B\gamma}{1-B\gamma}\geq\frac{B\gamma}{1-B}, \tag{15}$$

и условия этого пункта выполнены.

Случай 6: $c_2=A-M_1$, $D_2'=M_1-\gamma M_2$, $c_5=-M_2\leq 1$, $D_1'=a-M_1-\gamma(B-M_2)$.

Тогда $\triangle'=(1+A-M_1)(M_1-\gamma M_2)+(1+M_2)(A-M_1-\gamma(B-M_2))=\gamma M_2^2+(\gamma M_1-\gamma A+A-M_1-B\gamma)M_2+AM_1-B\gamma-M_1^2+A$.

Минимальное значение $\triangle'$ будет достигаться на границах отрезка изменения величины M_1. Рассмотрим сначала случай $M_1=0$.

Тогда $\triangle' = \gamma M_2^2 + M_2(A - \gamma A - \gamma B) - B\gamma) - B\gamma + A$. Минимальное значение будет приниматься при $M_2 = M_{2,min} = \frac{\gamma(A+B)-A}{2\gamma}$. $M_{2,min} \le B$ при $A(\gamma-1) < 1B$ и $M_{2,min}\gamma 0$ при $A(\gamma-1) < \gamma B$. Тогда $\triangle' = \frac{2\gamma-\gamma^2-1}{4\gamma}A^2 + \frac{2-B\gamma+B}{2}A - \frac{B^2\gamma+4B\gamma}{4} = -\frac{(1-\gamma)^2}{4\gamma}A^2 + \frac{2-B(\gamma-1)}{2}A - \frac{B\gamma(B+4)}{4} > 0$, если

$$\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\left((2 - B(\gamma-1) - 2\sqrt{1 - B\gamma(\gamma-1)}\right) < \\ < A < \frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\left((2 - B(\gamma-1) + 2\sqrt{1 - B\gamma(\gamma-1)}\right). \tag{16}$$

Неравенство $A < \frac{\gamma B}{\gamma-1}$, при котором следует проверять неравенство (16), совместно с неравенством $A > \frac{\gamma B}{1-B\gamma}$ (неравенство (15) из предыдущего пункта) тогда и только тогда, когда

$$\gamma \in (1,2), \quad B \in [0, \frac{2-\gamma}{\gamma}]. \tag{17}$$

Тогда $\frac{\gamma B}{1-B\gamma} < A < \frac{\gamma B}{\gamma-1}$. Поэтому если выполнено условие (17), то и неравенство (16) выполнено, так как

$$\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\left((2 - B(\gamma-1) - 2\sqrt{1 - B\gamma(\gamma-1)}\right) < \frac{B\gamma}{1-B\gamma}$$

и

$$\frac{\gamma B}{\gamma-1} < \frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\left((2 - B(\gamma-1) + 2\sqrt{1 - B\gamma(\gamma-1)}\right).$$

При $M_1 = A$ выполнено неравенство $\triangle' = \gamma M_2^2 - B\gamma M_2 + A - B\gamma \ge \triangle'_{M_1=0}$. Таким образом, при $M_1 = A$ выполнено неравенство $\triangle' > 0$, если $\triangle' > 0$ при $M_1 = 0$, что было рассмотрено выше.

Итак, показано, что для того чтобы задача

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t), \quad t \in [a,b], \\ \int_a^b \phi(s)\dot{x}(s)\,ds = 0, \end{cases}$$

не имела нетривиальных решений при всех операторах T^+, T^- и функциях ϕ, таких что

$$\|\,T^+\| = A, \quad \|\,T^-\| = B, \quad 0 < \underline{\gamma} \le \phi \le \overline{\gamma}, \quad \overline{\gamma}/\underline{\gamma} = \gamma \ge 1,$$

при $A \ge B$ необходимо и достаточно выполнения условий

$$\frac{B}{1/\gamma - B} < A < 1 + 1/\gamma + 2\sqrt{1/\gamma - B}, \quad 0 \le B < 1/\gamma.$$

Отметим, что кривые $A(B) = 1+1/\gamma+2\sqrt{1/\gamma - B}$ и $A(B) = \frac{B}{1/\gamma - B}$ пересекаются при

$$B_{max} = \frac{4\gamma - 1 + \sqrt{1+8\gamma}}{8\gamma^2} < 1/\gamma.$$

Рассмотрение при $B \geq A$ аналогично, его можно упростить с помощью следующего утверждения из книги [13]:

Пусть x — решение задачи

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (T^{+}x)(t) - (T^{-}x)(t),\ t \in [a,b], \\ \ell x \equiv \psi x(a) + \int_a^b \phi(s)\dot{x}(s)\,ds = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Тогда

$$y(t) = x(a+b-t), \quad t \in [a,b], \tag{19}$$

является решением задачи

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = (T^{-}y)(t) - (T^{+}y)(t),\ t \in [a,b], \\ \widetilde{\ell} y \equiv \psi y(b) - \int_a^b \phi(a+b-s)\dot{y}(s)\,ds = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Более того, между множествами решений задач (18) и (20) равенство (19) устанавливает взаимно однозначное соответствие.

Таким образом, мы получаем утверждение о разрешимости задачи при $\| T^{+}\| < \| T^{-}\|$ с помощью уже доказанного утверждения для $\| T^{+}\| \geq \| T^{-}\|$. Следовательно, полностью доказана теорема о разрешимости обобщенной периодической задачи для скалярного уравнения. □

4. Заключение

Мы получили необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости линейной краевой задачи для всех уравнений из заданного множества функционально-дифференциальных уравнений. В общем случае проверка этих условий сводится к проверке отсутствия нулей явно заданной вещественной функции, определённой на множестве конечной размерности. Во всех случаях проверка эффективно осуществляется с помощью компьютерных процедур. Примененный метод может использоваться для различных краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений высших порядков и систем таких уравнений. Кроме того, метод может использоваться и для построения неулучшаемых (для данного множества уравнений) оценок решений.

Список цитируемых источников

1. *Бравый, Е. И.* О разрешимости задачи Коши для линейных функционально-дифференциальных уравнений высших порядков. Дифференц. уравнения 48, № 4, 459–470 (2012).

Bravyi, E. I. Solvability of the Cauchy problem for higher-order linear functional differential equations. Differential Equations 48, No.4, 465–476 (2012).

2. *Бравый, Е. И.* О наилучших константах в условиях разрешимости периодической краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений высших порядков. Дифференц. уравнения 48, № 6, 773–780 (2012).

Bravyi, E. I. On the best constants in the solvability conditions for the periodic boundary value problem for higher-order functional differential equations. Differential Equations 48, No.6, 779–786 (2012).

3. *Azbelev, N. V., Maksimov, V. P., Rakhmatullina, L. F.* Introduction to the theory of functional differential equations: Methods and applications. Hindawi Publishing Corporation, 2007.
4. *Dilnaya, N., Ronto, A.* Multistage iterations and solvability of linear Cauchy problems. Miskolc Mathematical Notes 4, No.2, 89-–102 (2003).
5. *Hakl, R., Lomtatidze, A.* On the Cauchy problem for first order linear differential equations with a deviating argument. Archivum Mathematicum 38, 61–71 (2002).
6. *Hakl, R., Lomtatidze, A., Puza, B.* On nonnegative solutions of first order scalar functional differential equations. Mem. Differ. Equ. Math. Phys. 23, 51–84 (2001).
7. *Hakl, R., Lomtatidze, A., Puza, B.* On periodical solutions of first order nonlinear functional differential equations of non-volterra's type. Mem. Differ. Equ. Math. Phys. 24, 83–105 (2001).
8. *Hakl, R., Lomtatidze, A., Puza, B.* New optimal conditions for unique solvability of the Cauchy problem for first order linear functional differential equations. Mathematica Bohemica 127, No.4, 509–524 (2002).
9. *Hakl, R., Lomtatidze, A., Puza, B.* On periodical solutions of first order linear functional differential equations. Nonlinear Anal.-Theor. 49, 929–945 (2002).
10. *Hakl, R., Lomtatidze, A., Sremr, J.* On a periodic type boundary value problem for first order linear functional differential equations. Nelinijni Kolyvannya 5, No.3, 416–432 (2002).
11. *Hakl, R., Lomtatidze, A., Sremr, J.* On an antiperiodic type boundary value problem for first order linear functional differential equations. Archivum Mathematicum 38, 149–160 (2002).
12. *Hakl, R., Lomtatidze, A., Sremr, J.* On constant sign solutions of a periodic type boundary problems for first order functional differential equations. Mem. Differ. Equ. Math. Phys. 26, 66–90 (2002).
13. *Hakl, R., Lomtatidze, A., Sremr, J.* Some Boundary Value Problems For First Order Scalar Functional Differential Equations. Brno : Masaryk University, 2002.
14. *Hakl, R., Lomtatidze, A., Sremr, J.* On nonnegative solutions of a periodic type boundary value problem for first-order scalar functional differential equations. Functional Differential Equations 11, No.3-4, 363-394 (2004).
15. *Lomtatidze, A., Oplustil, Z., Sremr, J.* Solvability conditions for a nonlocal boundary value problem for linear functional differential equations. Fasc. Math. 41, 81–96 (2009).
16. *Sremr, J., Sremr, P.* On a two point boundary problem for first order functional differential equations with deviating argument. Mem. Differ. Equ. Math. Phys. 29, 75—124 (2003).

Получена 12.02.2020