Динамические системы, 2020, том 10(38), №1, 7–22

УДК 517.929

Редукция дифференциальных уравнений нейтрального типа к уравнениям запаздывающего типа[1]

А. С. Баландин

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь 614990. *E-mail: balandin-anton@yandex.ru*

Аннотация. В работе рассматривается линейное автономное функционально-дифференциальное уравнение нейтрального типа. Показано, что исследование экспоненциальной устойчивости таких уравнений можно свести к изучению экспоненциальной устойчивости уравнения запаздывающего типа. Это сведение достигается на основе преобразований характеристической функции рассматриваемого уравнения. С помощью известных условий экспоненциальной устойчивости для уравнений запаздывающего типа получены новые эффективные условия (в т. ч. необходимые и достаточные) устойчивости для уравнений нейтрального типа.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнения, уравнения нейтрального типа, последействие, экспоненциальная устойчивость, функция Коши, эффективные признаки.

Reduction of differential equations of neutral type to equations of retarded type

A. S. Balandin

Perm National Research Polytechnic University, Perm 614990.

Abstract. In this paper, we consider linear autonomous functional differential equations of neutral type. We show that the study of exponential stability for these equations is reduced to the study of exponential stability for linear autonomous differential equations of retarded type. The reduction is established on the basis of the integral transformations for the characteristic functions of given equations. Using known conditions of exponential stability for differential equations of retarded type we obtain new effective conditions (including necessary and sufficient ones) of exponential stability for some classes of linear autonomous functional differential equations of neutral type with concentrated and distributed delays.

Keywords: functional differential equations, equations of neutral type, aftereffect, exponential stability, the Cauchy function, effective conditions.

MSC 2010: 34K20, 34K40

1. Постановка задачи

Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{C}$ — пространство комплексных чисел, I — тождественный оператор.

[1]Работа выполнена в рамках госзадания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (задание FSNM-2020-0028) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00928).

Рассмотрим уравнение

$$(I - aS)\dot{x}(t) = (Tx)(t) + f(t), \tag{1}$$

в следующих предположениях и обозначениях:

$$(S_h y)(t) = \begin{cases} y(t-h), & t \geqslant h, \\ 0, & t < h, \end{cases} \quad (Ty)(t) = \int_0^\omega (S_\xi y)(t)\, dr(\xi),$$

$S = S_1$, $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in [0,1]$, функция $r\colon [0,\omega] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию, $r(0) = 0$, интеграл понимается в смысле Римана–Стилтьеса, функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ суммируема на каждом конечном отрезке.

Под *решением* уравнения (1) будем понимать абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке функцию $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую (1) почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Как известно (см. [1, с. 84, теорема 1.1], [2], [3]), уравнение (1) с заданными начальными условиями однозначно разрешимо и его решение представимо в виде *формулы Коши*:

$$x(t) = X(t)x(0) + \int\limits_0^t Y(t-s)f(s)\, ds, \tag{2}$$

где $X\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ называется *фундаментальным решением*, а $Y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — *функцией Коши* уравнения (1). Удобно доопределить нулём фундаментальное решение и функцию Коши на отрицательной полуоси.

Теорема 1 ([2, 3])**.** *Функция Коши и фундаментальное решение уравнения* (1) *связаны соотношением*

$$X(t) = (I - aS)Y(t). \tag{3}$$

Обозначим через $g(p)$ характеристическую функцию уравнения (1):

$$g(p) = p\left(1 - ae^{-p}\right) - g_T(p), \quad g_T(p) = \int_0^\omega e^{-p\xi}\, dr(\xi), \quad p \in \mathbb{C}.$$

В работах [2, 3] показано, что к уравнению (1) применимо преобразование Лапласа, а для фундаментального решения и функции Коши установлен следующий результат.

Лемма 1 ([2, 3])**.** *При некотором* $\alpha \in \mathbb{R}$ *Лаплас-образы функций* X *и* Y *являются аналитическими в полуплоскости* $\{p \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} p \geqslant \alpha\}$*, причём*

$$L_X(p) = \frac{1 - ae^{-p}}{g(p)}, \quad L_Y(p) = \frac{1}{g(p)}.$$

Определение 1. Уравнение (1) будем называть *экспоненциально устойчивым*, если при некоторых положительных M и γ для всех $t \geqslant 0$ справедлива оценка

$$|Y(t)| \leqslant Me^{-\gamma t}. \tag{4}$$

Очевидно, что в силу равенства (3) из оценки (4) вытекает аналогичная оценка на фундаментальное решение, а на основе формулы (2) можно получать точные оценки решения уравнения (1) при любых начальных условиях и внешних возмущениях.

В данной работе мы получим ряд эффективных признаков экспоненциальной устойчивости уравнения (1), сводя задачу к исследованию экспоненциальной устойчивости уравнения запаздывающего типа. Это сведение будет достигаться на основе преобразований характеристической функции уравнения (1).

2. Основные результаты

Лемма 2. *Пусть* p_0 *— корень уравнения* $1 - ae^{-p} = 0$*. Тогда при любом достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *найдётся корень* q_0 *того же уравнения, такой, что* $\operatorname{Re} p_0 = \operatorname{Re} q_0 = \ln|a|$*, а в круге* $|q_0 - p| < \varepsilon$ *функция* $g(p)$ *имеет нуль.*

Доказательство. При $a > 0$ корни уравнения $1 - ae^{-p} = 0$ имеют вид $p_k = \ln a + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Если $a < 0$, то $p_k = \ln|a| + (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Можно выбрать $\varepsilon < \pi$ так, что в круге $|z| < \varepsilon$ функция $1 - ae^{-(p_0+z)}$ имеет единственный нуль, а на окружности $|z| = \varepsilon$ выполняется неравенство $|1 - ae^{-(p_0+z)}| \geqslant \mu > 0$.

Пусть $\zeta(z) = 1 - ae^{-(p_0+z)}$, $\xi_k(z) = ae^{-(p_0+z)} - ae^{-(p_k+z)} - \frac{g_T(p_k+z)}{p_k+z}$. Имеем

$$|\xi_k(z)| = \left|\frac{g_T(p_k+z)}{p_k+z}\right| \leqslant \frac{A}{|p_k| - \varepsilon},$$

где A — некоторое вещественное число. Заметим, что найдётся k_0 такое, что $\frac{A}{|p_{k_0}|-\varepsilon} < \mu$. Обозначим $q_0 = p_{k_0}$. Итак, при $|z| = \varepsilon$ выполняется $|\zeta(z)| > \mu > |\xi_{k_0}(z)|$. Значит, по теореме Руше функции $\zeta(z)$ и $\zeta(z) + \xi_{k_0}(z)$ при $|z| < \varepsilon$ имеют одинаковое количество нулей. Следовательно, в круге $|q_0 - p| < \varepsilon$ существует точка, где $1 - ae^{-p} + \frac{g_T(p)}{p} = 0$. □

Теорема 2. *Уравнение* (1) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда* $|a| < 1$ *и все нули функции* g *лежат слева от мнимой оси.*

Доказательство. При $a = 0$ теорема, очевидно, справедлива.

Необходимость. Из оценки (4) следует, что функция L_Y аналитична при $\alpha = -\gamma < 0$. Поэтому все нули функции g лежат в полуплоскости $P_1 = \{p \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} p \leqslant -\gamma\}$.

Допустим, что функция $1 - ae^{-p}$ имеет хотя бы один нуль в полуплоскости $P_2 = \{p \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} p > -\gamma\}$. Тогда, в силу леммы 2 и открытости полуплоскости P_2, в P_2 найдутся нули функции g. Таким образом, все нули функции $1 - ae^{-p}$ лежат в полуплоскости P_1. Следовательно, $|a| < 1$.

Достаточность. Так как $|a| < 1$, для сколь угодно малого $\delta > 0$ в полуплоскости $P = \{p \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} p \geqslant \ln|a| + \delta\}$ выполняется $|1 - ae^{-p}| \geqslant 1 - e^{-\delta} > 0$. Значит, при $p \in P$ и достаточно большом $|\operatorname{Im} p|$ справедлива оценка

$$|g(p)| \geqslant |p||1 - ae^{-p}| - |g_T(p)| > 0.$$

Следовательно, в полуплоскости P лежит не более чем конечное число нулей функции g. Таким образом, все нули функции g лежат слева от мнимой оси и отделены от неё. Значит, среди них есть корень с наибольшей (отрицательной, в силу условий теоремы) вещественной частью. Тогда существует такое число γ: $0 < \gamma < -\ln|a|$, что в полуплоскости $\{p \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} p > -\gamma\}$ функция g не обращается в нуль. В силу леммы 1, при $\operatorname{Re} p > -\gamma$ функция $X(p)$ является аналитической. По формуле обратного преобразования Лапласа имеем:

$$X(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} \frac{(1-ae^{-p})e^{pt}\,dp}{g(p)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} e^{pt}\left(\frac{1-ae^{-p}}{g(p)} - \frac{1}{p}\right)dp =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} e^{pt}\,\frac{g_T(p)}{pg(p)}\,dp = e^{-\gamma t}\int_{-\infty}^{\infty} O\left(\frac{1}{\gamma^2+\zeta^2}\right)d\zeta,$$

откуда следует $|X(t)| \leqslant Ne^{-\gamma t}$, $N > 0$.

Для оценки Y применим формулу (3). Так как $|a| < 1$, то [4, с. 230] оператор $I - aS$ обратим в пространстве функций, ограниченных на полуоси, причём

$$(I - aS)^{-1} = I + aS + \ldots + a^n S^n + \ldots$$

Следовательно,

$$Y(t) = (I + aS + \ldots + a^n S^n + \ldots)\,X(t) = X(t) + aX(t-1) + \ldots + a^n X(t-n) + \ldots,$$

и, с учётом установленной выше оценки на X, а также следующего из определения γ неравенства $|a|e^{\gamma} < 1$, получаем оценку (4):

$$|Y(t)| \leqslant Ne^{-\gamma t}\,(1 + |a|e^{\gamma} + \ldots + |a|^n e^{n\gamma} + \ldots) \leqslant \frac{Ne^{-\gamma t}}{1-|a|\gamma} = Me^{-\gamma t}.$$

□

В силу теоремы 2 необходимым условием экспоненциальной устойчивости уравнения (1) является выполнение неравенства $|a| < 1$. Далее мы всюду считаем, что оно выполнено.

По коэффициентам уравнения (1) построим ещё одну функцию

$$g_r(p) = p + \frac{a}{1-a^2}\int_0^{\omega} e^{-p(1-\xi)}\,dr(\xi) - \frac{1}{1-a^2}\int_0^{\omega} e^{-p\xi}\,dr(\xi),$$

с которой будем сопоставлять нули функции g.

Лемма 3. *Пусть $|a| < 1$. Функции g и g_r имеют одинаковый набор нулей на мнимой оси.*

Доказательство. Непосредственным подсчётом убеждаемся, что

$$g_r(i\varphi) = \alpha g(i\varphi) + \beta\overline{g(i\varphi)}, \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

где $\alpha = \frac{1}{1-a^2}$, $\beta = -\frac{a}{1-a^2}e^{-i\varphi}$.

Если $g(i\varphi_0) = 0$, то $\overline{g(i\varphi_0)} = 0$, значит, $g_r(i\varphi_0) = 0$. Теперь пусть $g_r(i\varphi_0) = 0$. Отсюда вытекает, что

$$\begin{cases} \alpha g(i\varphi_0) + \beta\overline{g(i\varphi_0)} = 0, \\ \overline{\alpha}\overline{g(i\varphi_0)} + \overline{\beta}g(i\varphi_0) = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $\alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta} \neq 0$. Поэтому данная система относительно $g(i\varphi_0)$ и $\overline{g(i\varphi_0)}$ имеет только тривиальное решение. Значит, $g(i\varphi_0) = 0$. □

Обозначим $\psi(p,\tau) = (1-\tau)g(p) + \tau g_r(p)$, $p \in \mathbb{C}$, где $\tau \in [0,1]$.

Лемма 4. *Пусть $|a| < 1$. Если при некотором τ функция $\psi(\cdot,\tau)$ имеет нули на мнимой оси, то и функция g имеет те же нули на мнимой оси. Если функция g имеет нули на мнимой оси, то при любом τ функция $\psi(\cdot,\tau)$ имеет те же нули на мнимой оси.*

Доказательство. Очевидно, что $\psi(i\varphi,\tau) = (1-\tau+\alpha\tau)g(i\varphi) + \tau\beta\overline{g(i\varphi)}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Если при некотором φ функция $g(i\varphi) = 0$, то при любом τ справедливо $\psi(i\varphi,\tau) = 0$.

Теперь пусть $\psi(i\varphi,\tau) = 0$ при некотором $\tau \in [0,1]$. Отсюда вытекает, что

$$\begin{cases} (1-\tau+\alpha\tau)g(i\varphi) + \tau\beta\overline{g(i\varphi)} = 0, \\ (1-\tau+\overline{\alpha}\tau)\overline{g(i\varphi)} + \tau\overline{\beta}g(i\varphi) = 0. \end{cases}$$

Легко убедиться, что $(1-\tau+\alpha\tau)(1-\tau+\overline{\alpha}\tau) - \tau^2\beta\overline{\beta} = = (1-\tau)^2 + (\alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta})\tau^2 + \tau(1-\tau)(\alpha+\overline{\alpha}) > 0$. Поэтому указанная система относительно $g(i\varphi)$ и $\overline{g(i\varphi)}$ имеет только тривиальное решение. Значит, если при некоторых τ и ϕ $\psi(i\varphi,\tau) = 0$, то $g(i\varphi) = 0$. □

Приведём отдельно простое следствие теоремы о логарифмическом вычете.

Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область в комплексной плоскости, ограниченная простым замкнутым контуром ∂G, функция $\psi(\cdot,\tau)$ аналитична в G при каждом $\tau \in [\tau_1,\tau_2]$.

Лемма 5. *Если ни при каком значении $\tau \in [\tau_1,\tau_2]$ функция $\psi(p,\tau)$ не имеет нулей на контуре ∂G, то функции $\psi(p,\tau_1)$ и $\psi(p,\tau_2)$ имеют в G одинаковое число нулей.*

Доказательство. При каждом фиксированном $\tau \in [\tau_1,\tau_2]$ заменой переменных $w = \psi(p,\tau)$ преобразуем границу ∂G в некоторый замкнутый контур $l(\tau)$. Пусть

$N(\tau_k)$ — число нулей функции $\psi(p,\tau_k)$ $(k=1,2)$ в области G. По теореме о логарифмическом вычете [11, с. 82]

$$N(\tau_k)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{\frac{\partial}{\partial p}\psi(p,\tau_k)}{\psi(p,\tau_k)}\,dp=\frac{1}{2\pi i}\int_{l(\tau_k)}\frac{dw}{w},\quad k=1,2.$$

Так как при непрерывном изменении τ на отрезке $[\tau_1,\tau_2]$ контур $l(\tau_1)$ непрерывно деформируется на плоскости w в контур $l(\tau_2)$, «не задевая», по условию леммы, единственную особую точку $w=0$ подынтегральной функции $1/w$, то $N(\tau_1)=N(\tau_2)$. □

Лемма 6. *Пусть $|a|<1$. Все нули функции g_r лежат слева от мнимой оси тогда и только тогда, когда все нули функции g лежат слева от мнимой оси.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\phi(p,\tau)=(1-\tau)\left(1-ae^{-p}\right)+\tau=1-(1-\tau)ae^{-p},\quad p\in\mathbb{C},\quad \tau\in[0,1].$$

В силу $|a|<1$ и $1-\tau\in[0,1]$, при любом $\tau\in[0,1]$ все нули функции $\phi(p,\tau)$ лежат слева от мнимой оси. Значит, существует такое $\delta>0$, что $|\phi(p,\tau)|>\delta$.

Пусть $\operatorname{Re}p>0$. Тогда при любом $\tau\in[0,1]$ справедлива оценка

$$\left|\frac{a\tau}{1-a^2}\int_0^\omega e^{-p(1-\xi)}\,dr(\xi)-\frac{\tau}{1-a^2}\int_0^\omega e^{-p\xi}\,dr(\xi)-(1-\tau)\int_0^\omega e^{-p\xi}\,dr(\xi)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{|a|\tau}{1-a^2}\int_0^\omega e^{-\operatorname{Re}p(1-\xi)}\,d|r(\xi)|+\left(\frac{\tau}{1-a^2}+(1-\tau)\right)\int_0^\omega e^{-\operatorname{Re}p\xi}\,d|r(\xi)|\leqslant$$
$$\leqslant\left(\frac{\tau}{1-|a|}+(1-\tau)\right)\int_0^\omega d|r(\xi)|\leqslant A.$$

Обозначим $\Gamma_1=\{p=iy\colon y\in[-R,R]\}$, $\Gamma_2=\{p\colon |p|=R,\operatorname{Re}p>0\}$, $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, $G_1=\{p\in\mathbb{C}\colon \operatorname{Re}p>0,|p|<R\}$, $G_2=\{p\in\mathbb{C}\colon \operatorname{Re}p\geqslant 0,|p|\geqslant R\}$, $R\in\mathbb{R}$. Выберем R так, чтобы $|\psi(p,\tau)|>\Delta>0$ при всех $p\in G_2$. Это возможно, так как

$$|\psi(p,\tau)|=\left|p\left(1-(1-\tau)ae^{-p}\right)-(1-\tau)\int_0^\omega e^{-p\xi}\,dr(\xi)+\right.$$
$$\left.+\frac{a\tau}{1-a^2}\int_0^\omega e^{-p(1-\xi)}\,dr(\xi)-\frac{\tau}{1-a^2}\int_0^\omega e^{-p\xi}\,dr(\xi)\right|>|p|\delta-A>0.$$

Если при некотором τ функция $\psi(\cdot,\tau)$ имеет нуль на Γ_1, то по леммам 3 и 4 функции g и g_r имеют нули на Γ_1, что противоречит условию леммы. Значит, при любом τ функция $\psi(p,\tau)$ не имеет нулей при всех $p\in G_2$, а также при $p\in\Gamma_1$. Тогда вследствие леммы 5 функции $g(p)=\psi(p,0)$ и $g_r(p)=\psi(p,1)$ имеют одинаковое число нулей при $p\in G_1$. Таким образом, все нули функции g_r лежат слева от мнимой оси тогда и только тогда, когда все нули функции g лежат слева от мнимой оси. □

Заметим, что функция g_r является характеристической функцией следующего уравнения

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{1-a^2}\int_0^\omega x(t-s)\,dr(s) - \frac{a}{1-a^2}\int_0^\omega x(t-(1-s))\,dr(s), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (5)$$

Из леммы 6 вытекает

Теорема 3. *Пусть* $|a| < 1$, $\omega \in [0,1]$. *Уравнение* (1) *экспоненциально устойчиво в том и только в том случае, когда уравнение* (5) *экспоненциально устойчиво.*

3. Эффективные признаки

Подчеркнём, что уравнение (5) принадлежит к классу уравнений запаздывающего типа, для которых известно много признаков устойчивости. Используя любой из них, можно, на основе теоремы 3, получать новые признаки устойчивости для уравнения (1).

1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) = b_0 x(t) + b_1 x(t-1/2) + b_2 x(t-1), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (6)$$

Исследование экспоненциальной устойчивости уравнения (6) сводится к исследованию расположения нулей на комплексной плоскости относительно мнимой оси следующей функции

$$g_r(p) = p + \frac{ab_2 - b_0}{1-a^2} - \frac{b_1}{1+a}e^{-p/2} + \frac{ab_0 - b_2}{1-a^2}e^{-p}, \quad p \in \mathbb{C}.$$

В работе [7, теорема 4.7, с. 134] (также см. [6]) был получен критерий того, что все нули функции g_r лежат в левой полуплоскости. Используя данный критерий, получим необходимый и достаточный признак экспоненциальной устойчивости уравнения (6).

Зададим область D в пространстве $\mathbb{R}^3$, состоящую из точек $\{r_1, r_2, r_3\}$, удовлетворяющих условиям:

- $r_3 = 0$, $r_1 + r_2 > 0$ и $r_2 \in (-3\pi/2, \pi/2)$,
- $r_3 \in (-1, 0)$, $r_1 + r_2 > 0$ и $r_2 \in (\eta_1 \sin\eta_1 - r_1\cos\eta_1, \eta_2\sin\eta_2 - r_1\cos\eta_2)$,
- $r_3 > 0$, $r_1 > (\xi\sin\xi - r_2)/\cos\xi$,

где η_n — корень уравнения $r_3 = -\zeta \operatorname{ctg} \zeta$ из интервала $(\pi(n-1), \pi n)$, $n \in \mathbb{N}$, и

$$\xi = \begin{cases} 0, & \text{если } r_2 \in \left[-\sqrt{\eta_2^2 + r_3^2} - r_3, \sqrt{\eta_1^2 + r_3^2} - r_3\right], \\ \eta_1, & \text{если } r_2 \in \left[\sqrt{\eta_1^2 + r_3^2} - r_3, \sqrt{\eta_1^2 + r_3^2} + \sqrt{\eta_3^2 + r_3^2}\right], \\ \eta_2, & \text{если } r_2 \in \left[-\sqrt{\eta_2^2 + r_3^2} - \sqrt{\eta_4^2 + r_3^2}, -\sqrt{\eta_2^2 + r_3^2} - r_3\right], \\ \eta_m, & \text{если выполнено неравенство (7), где } m \geqslant 2, \end{cases}$$

$$\sqrt{\eta_{m-2}^2 + r_3^2} + \sqrt{\eta_m^2 + r_3^2} \leqslant r_2(-1)^{m-1} \leqslant \sqrt{\eta_m^2 + r_3^2} + \sqrt{\eta_{m+2}^2 + r_3^2}. \qquad (7)$$

На рис. 1 изображена область D.

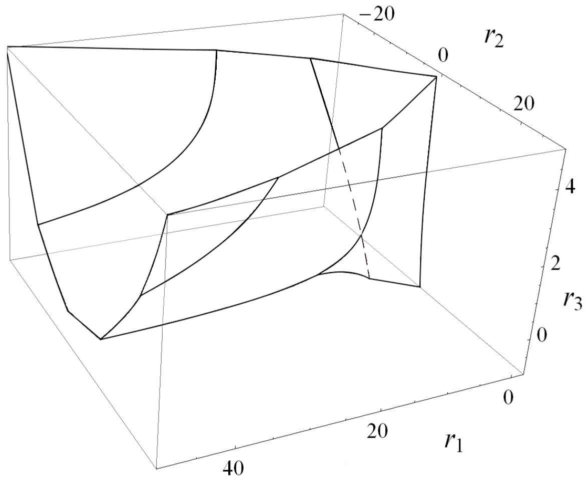


Рис. 1. Область D.

Признак 1. *Уравнение* (6) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда* $|a| < 1$ *и* $\left(-\frac{b_0+b_2}{2(1+a)}, -\frac{b_1}{2(1+a)}, \frac{b_2-b_0}{2(1-a)}\right) \in D$.

Получим несколько следствий из признака 1.

Зададим функцию $u = \phi_1(v)$ в параметрическом виде:

$$\left\{ u = \frac{\theta}{\sin\theta}, \quad v = -\theta \operatorname{ctg} \theta, \quad \theta \in (0, \pi) \right\}.$$

Пусть $G = \{(u, v)\colon -v < u < \phi_1(v), \quad v > -1\}$. На рис. 2 область G закрашена. Заметим, что G есть так называемый «угол Андронова–Майера» [8].

Следствие 1. *Пусть* $b_1 = 0$. *Уравнение* (6) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда* $|a| < 1$ *и* $\left(\frac{ab_0-b_2}{1-a^2}, \frac{ab_2-b_0}{1-a^2}\right) \in G$.

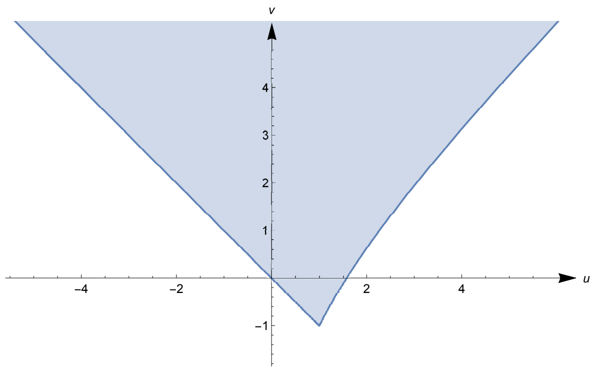


Рис. 2. Область G.

Следствие 2. *Пусть $b_0 = b_2 = 0$. Уравнение (6) экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда $|a| < 1$ и $-\pi < \frac{b_1}{a+1} < 0$.*

2. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) = bx(t-h) + cx(t-1+h), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $h \in (0, 0.5)$, $\frac{1-h}{h} \in (1, 3]$. Исследование экспоненциальной устойчивости уравнения (8) сводится к исследованию расположения нулей на комплексной плоскости относительно мнимой оси следующей функции

$$g_r(p) = p + \frac{ac-b}{1-a^2}e^{-ph} + \frac{ab-c}{1-a^2}e^{-p(1-h)}, \quad p \in \mathbb{C}.$$

Обозначим $n = \frac{1-h}{h}$. Зададим функцию $u = \phi_2(v)$ в параметрическом виде:

$$\{u = \theta \csc(\theta(n-1)) \cos(\theta n), v = -\theta \csc(\theta(n-1)) \cos\theta, \theta \in (0, 2\pi/(n+1))\}.$$

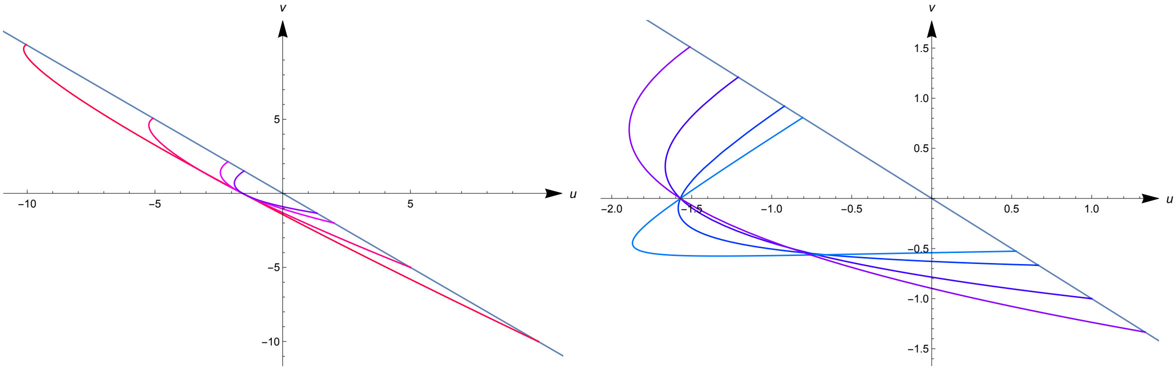
Пусть $H_n = \{(u, v)\colon \phi_2(v) < u < -v\}$. На рис. 3 изображено несколько областей H_n.

Легко убедиться, что при $n \in (1, 3)$ и $\left(\frac{ac-b}{1-a^2}h, \frac{ab-c}{1-a^2}h\right) \in H_n$ все нули функции g_r лежат слева от мнимой оси. Поэтому имеет место следующий достаточный признак устойчивости.

Признак 2. *Пусть $|a| < 1$, $n \in (1, 3)$ и $\left(\frac{ac-b}{1-a^2}h, \frac{ab-c}{1-a^2}h\right) \in H_n$. Уравнение (8) экспоненциально устойчиво.*

В работе [7, теорема 4.7, с. 134] был получен критерий того, что все нули функции g_r лежат в левой полуплоскости в случае $h = 1/3$. Используя данный критерий получим необходимый и достаточный признак экспоненциальной устойчивости уравнения (8) при $h = 1/3$.

Признак 3. *Пусть $h = 1/3$. Уравнение (8) экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда $|a| < 1$ и $\left(\frac{ac-b}{3(1-a^2)}, \frac{ab-c}{3(1-a^2)}\right) \in H_2$.*



$n = 1.1, 1.2, 1.5, 1.75$ $\qquad$ $n = 1.75, 2, 2.5, 2.9$

Рис. 3. Области H_n.

3. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) = b\int_0^1 s^\alpha x(t-s)\,ds + ab\int_0^1 (1-s)^\alpha x(t-s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

где $\alpha > -1$.

Исследование экспоненциальной устойчивости уравнения (9) сводится к исследованию расположения нулей на комплексной плоскости относительно мнимой оси следующей функции

$$g_r(p) = p - b\int_0^1 \xi^\alpha e^{-p\xi}\,d\xi.$$

Функция g_r изучалась в работе [9]. Применим результаты этого исследования.

Пусть $C_\varepsilon(t) = \int_0^t \frac{\cos s}{s^\varepsilon} ds$. Заметим, что при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \approx 0.308$ функции C_ε имеют нули.

Признак 4. *Пусть* $-1 < \alpha < -\varepsilon_0$. *Тогда уравнение* (9) *экспоненциально устойчиво, если и только если* $|a| < 1$ *и* $b < 0$.

Признак 5. *Пусть* $\alpha > -\varepsilon_0$. *Уравнение* (9) *экспоненциально устойчиво, если и только если* $|a| < 1$ *и*

$$0 < -b < \frac{\zeta_1}{\int_0^1 \xi^\alpha \sin\zeta_1\xi\,d\xi},$$

где ζ_1 *— наименьший положительный корень уравнения* $\int_0^1 \xi^\alpha \cos\zeta\xi\,d\xi = 0$.

Признак 6. *Пусть* $\alpha = -\varepsilon_0$. *Уравнение* (9) *экспоненциально устойчиво, если и только если* $|a| < 1$, $b < 0$ *и* $-b \neq \frac{\zeta_1}{\int_0^1 \xi^\alpha \sin\zeta_1\xi\,d\xi}$.

4. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) = ab\int_0^1 s^\alpha x(t-s)\,ds + b\int_0^1 (1-s)^\alpha x(t-s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

где $\alpha > -1$.

Исследование экспоненциальной устойчивости уравнения (10) сводится к исследованию расположения нулей на комплексной плоскости относительно мнимой оси следующей функции

$$g_r(p) = p - b\int_0^1 (1-\xi)^\alpha e^{-p\xi}\,d\xi.$$

В работе [9] изучалась функция g_r. Применим результаты этого исследования.

Признак 7. *Пусть $\alpha > 1$. Уравнение (10) экспоненциально устойчиво, если и только если $|a| < 1$ и $b < 0$.*

Признак 8. *Пусть $-1 < \alpha < 1$. Уравнение (10) экспоненциально устойчиво, если и только если $|a| < 1$ и*

$$0 < -b < \frac{\zeta_2}{\int_0^1 (1-\xi)^\alpha \sin\zeta_2\xi\,d\xi},$$

где ζ_2 — наименьший положительный корень уравнения $\int_0^1 (1-\xi)^\alpha \cos\zeta\xi\,d\xi = 0$.

Признак 9. *Пусть $\alpha = 1$. Уравнение (10) экспоненциально устойчиво, если и только если $|a| < 1$, $b < 0$ и $-\frac{b}{1+\alpha} \neq 2\pi^2 n$, где $n \in \mathbb{N}$.*

В работе [10] также найден простой достаточный признак устойчивости, общий для уравнений (9) и (10). Применяя его, получаем

Признак 10. *Пусть $|a| < 1$, $\alpha > -1$, $0 < -\frac{b}{1+\alpha} < \frac{\pi}{2}$. Тогда уравнения (9) и (10) экспоненциально устойчивы.*

5. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) = b\int_0^1 x(t-s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Исследование экспоненциальной устойчивости уравнения (11) сводится к исследованию расположения нулей на комплексной плоскости относительно мнимой оси следующей функции

$$g_r(p) = p - \frac{b}{1+a}\int_0^1 e^{-p\xi}\,d\xi.$$

Функция такого вида изучалась в работах [12, 13]. Применяя результаты этих исследований, получаем

Признак 11. *Уравнение (11) экспоненциально устойчиво, если и только если $|a| < 1$ и $-\frac{\pi^2}{2} < \frac{b}{1+a} < 0$.*

6. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) = \sum_{m=1}^{M} b_m x(t-h_m), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Исследование экспоненциальной устойчивости уравнения (11) сводится к исследованию расположения нулей на комплексной плоскости относительно мнимой оси функции

$$g_r(p) = p + \sum_{m=1}^{M} \frac{b_m a}{1-a^2} e^{-p(1-h_m)} - \sum_{m=1}^{M} \frac{b_m}{1-a^2} e^{-ph_m}.$$

Далее, воспользовавшись [14], получаем

Признак 12. *Пусть* $a \in (-1,0)$, $b_m < 0$ *и* $h_m \in [0,1]$ *при всех* m, $\sum_{m=0}^{M} \frac{b_m a(1-h_m)}{1-a^2} - \sum_{m=1}^{M} \frac{b_m h_m}{1-a^2} < \frac{\pi}{2}$. *Тогда уравнение* (12) *экспоненциально устойчиво.*

Замечание. В случае, когда для некоторого m справедливо $h_m > 1$, уравнение (1) будет содержать функцию x с опережающим аргументом. Таким образом, уравнению (1) по вышеприведённой схеме мы поставим в соответствие уравнение *опережающего типа* [15]. Изучение уравнений опережающего типа на положительной полуоси эквивалентно исследованию уравнений запаздывающего типа, но на отрицательной полуоси или на всей вещественной оси, которые изучались в работах [16, 17, 18]. Оказалось, что структура пространства решений таких уравнений существенно сложнее; в частности, в этих работах было установлено, что уравнение с запаздывающим аргументом на отрицательной полуоси может иметь решение, которое при $t \to \infty$ растёт быстрее любой экспоненты. Поэтому свойства характеристической функции таких уравнений не являются определяющими при изучении асимптотического поведения решений.

Среди исследователей функционально-дифференциальных уравнений нет полного единства в постановке начальной задачи и в вопросе определения решения. Во многих работах начальная задача для уравнения (1) ставится в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) = \int_0^{\omega} x(t-s)\, dr(s), & t \in \mathbb{R}_+, \\ x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \dot{x}(\xi) = \psi(\xi), & \xi \in [-\tau, 0), \end{cases} \tag{13}$$

где $\tau = \max\{h_1, \ldots, h_J, \omega\}$, а φ, ψ — начальные функции, которыми решение и его производная доопределяются при отрицательных значениях аргументов. При такой постановке задачи начальные функции естественным образом включаются в определения устойчивости.

Обозначим $\eta(t) = a\left(\tilde{S}_1\psi\right)(t) + \int_t^\omega \left(\tilde{S}_\xi\varphi\right)(t)\,dr(\xi)$,

$$\left(\tilde{S}_h y\right)(t) = \begin{cases} y(t-h), & t-h<0, \\ 0, & t-h \geqslant 0. \end{cases}$$

Пусть $\mathbb{X}$ — произвольное нормированное пространство измеримых на множестве $[0,\tau]$ функций.

Определение 2. Будем говорить, что уравнение (13) $\mathbb{X}$–*экспоненциально устойчиво*, если существуют такие $K,\gamma>0$, что при любом $\eta \in \mathbb{X}$ и любом $x(0)\in\mathbb{R}$ решение уравнения (13) имеет оценку:

$$|x(t)| \leqslant Ke^{-\gamma t}\left(|x(0)| + \|\eta\|_{\mathbb{X}}\right), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Между постановками задач в виде (1) и (13) нет противоречия. Следующая теорема связывает экспоненциальную устойчивость уравнения (13) с экспоненциальной оценкой на функцию Коши.

Теорема 4. *Уравнение* (13) L_1*–экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда выполняется оценка* (4).

Доказательство. Необходимость следует схеме доказательства леммы из работы [19].

Достаточность вытекает из формулы (2) и того, что из (4) следует аналогичная экспоненциальная оценка на X:

$$|x(t)| \leqslant |X(t)||x(0)| + \int_0^\tau |Y(t-s)||\eta(s)|\,ds \leqslant \\ \leqslant N_1e^{-\gamma t}|x(0)| + N_2e^{-\gamma(t-\tau)}\|\eta\|_1 \leqslant Ne^{-\gamma t}\left(|x(0)| + \|\eta\|_1\right). \quad \square$$

Заключение

В данной работе найден класс функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа, для которых можно построить уравнение запаздывающего типа так, что, если одно уравнение экспоненциально устойчиво, то и другое уравнение также будет экспоненциально устойчиво (см. теорему 3). Для уравнений запаздывающего типа известно большое число эффективных условий устойчивости. За счёт этого существенно расширен класс уравнений нейтрального типа, для которых установлены эффективные (в т.ч. необходимые и достаточные) условия экспоненциальной устойчивости (см. признаки 1–12 и следствия из них). В дальнейшем представляет интерес рассмотреть случаи, когда при нейтральности стоит больше одного слагаемого или запаздывание в правой части уравнения (1) превосходит 1. Кроме того, по-прежнему остаётся актуальной задачей поиск признаков устойчивости для уравнений высших порядков и систем.

Список цитируемых источников

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина, Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

   Azbelev, N. V., Maksimov, V. P., Rakhmatullina, L. F. Introduction to the Theory of Linear Functional Differential Equations. Atlanta: World Federation Publ., 1995.
2. *Баландин А. С.* Об асимптотическом поведении фундаментального решения и функции Коши дифференциальных уравнений нейтрального типа. Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки, 23, № 122, 187–199 (2018).

   Balandin, A. S. On asymptotic behavior of the fundamental solution and the Cauchy function for neutral differential equations. Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki, 23, No. 122, 187–199 (2018). (in Russian)
3. *Баландин А. С.* О связи между фундаментальным решением и функцией Коши для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа. Прикладная математика и вопросы управления, № 1, 13-25 (2018).

   Balandin, A. S. On relationship between the fundamental soluiton and the Cauchy function for neutral functional differential equations. Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya, No. 1, 13-25 (2018). (in Russian)
4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.

   Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V. Elements of theory of functions and functional analysis. Moscow: Nauka, 1981. (in Russian)
5. *Баландин А. С., Малыгина В. В.* Об устойчивости вместе с производной одного класса дифференциальных уравнений нейтрального типа. Прикладная математика и вопросы управления, № 1. 22-50 (2019).

   Balandin, A. S., Malygina, V. V. On stability with derivative of a class of differential equations of neutral type. Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya, No. 1. 22-50 (2019). (in Russian)
6. *Мулюков М. В.* Структура областей D-разбиения для двупараметрических характеристических уравнений систем с запаздыванием. Материалы конференции «Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения», посвященной 95-летию со дня рождения профессора Н.В. Азбелева (стр. 180–200). Пермь: Издательство ПНИПУ, 2018.

   Mulyukov, M. V. Structure of the D-subdivision domains for the two-parameter characteristic equations of systems with delay. Proc. of the conference "Functional-differential equiations: theory and applications" dedicated to the 95th anniversary of the professor N.V. Azbelev (pp. 180–200). Perm: Izdatel'stvo PNIPU, 2018. (in Russian)
7. *Мулюков М.В.* Устойчивость систем линейных автономных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием: Дис. …канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Пермь, 2017.
8. *Андронов А. А., Майер А. Т.* Простейшие линейные системы с запаздыванием. Автоматика и телемеханика. 7, No. 2, 3, 95–106 (1946).

   Andronov, A. A., Maier, A. G. Simplest linear systems with delay. Avtomat. i Telemekh., 7, No. 2-3, 95–106 (1946). (in Russian)

9. *Малыгина В.В.* Структура областей устойчивости дифференциальных уравнений с распределённым запаздыванием. Тез. докл. международной конференции «Динамические системы в науке и технологиях (DSST-2018)» (стр. 17–18). Симферополь: ИП Корниенко А.А., 2018.

Malygina, V. V. The structure of stability domains of differential equations with distributed delay. In Proc. Int. conf. "Dynamical systems in science and technologies" (pp. 17–18). Simferopol: IP Kornienko A. A., 2018. (in Russian)

10. *Малыгина В. В.* Признаки абсолютной устойчивости дифференциальных уравнений с распределённым запаздыванием // Прикладная математика и вопросы управления, № 4, 53-69 (2018).

Malygina, V. V. Absolute stability conditions for differential equations with distributed delay. Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya, No. 4, 53-69 (2018). (in Russian)

11. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1987.

Lavrent'ev, M. A., Shabat, B. V. Methods of the theory of functions in a complex variable. Moscow: Nauka, 1987. (in Russian)

12. *Вагина М. Ю.* Логистическая модель с запаздывающим усреднением. Автоматика и телемеханика, № 4, 167-173 (2003).

Vagina, M. Yu. A Delay-Averaged Logistic Model. Avtomat. i Telemekh., № 4, 167-173 (2003). (in Russian)

13. *Сабатулина Т. Л., Малыгина В. В.* Некоторые признаки устойчивости линейного автономного дифференциального уравнения с распределённым запаздыванием. Известия вузов. Математика. № 6, 55-63 (2007).

Sabatulina, T. L., Malygina, V. V. Several stability tests for linear autonomous differential equations with distributed delay. Russian Mathematics (Iz. VUZ), 51, No. 6, 52-60 (2007).

14. *Баландин А. С.* Об асимптотической устойчивости одного класса дифференциально-разностных уравнений. Вестник ПГТУ, № 1, 122-129 (2009).

Balandin A. S. On asymptotic stability fot a class of differential–difference equations. Vestnik PGTU, No. 1, 122-129 (2009). (in Russian)

15. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

El'sgol'ts, L. E., Norkin, S. B. Introduction to the theory of differential equations with deviating argument. Moscow: Nauka, 1971. (in Russian)

16. *Баландин А. С., Сабатулина Т. Л.* Разрешимость автономного дифференциального уравнения с ограниченным последействием на отрицательной полуоси. Известия вузов. Математика. № 10, 26-37 (2017).

Balandin, A. S., Sabatulina, T. L. Solvability of an autonomous differential equation with aftereffect on the negative semi-axis. Russian Mathematics, 61, No. 10, 26-37 (2017).

17. *Баландин А. С., Сабатулина Т. Л.* Разрешимость неоднородного автономного дифференциального уравнения с последействием на отрицательной полуоси. Известия вузов. Математика. № 3, 3-18 (2019).

Balandin, A. S., Sabatulina, T. L. Solvability of inhomogeneous autonomous differential equation with aftereffect on the negative semi-axis. Russian Mathematics, 63, No. 3, 3-18 (2019).

18. *Малыгина В.В., Баландин А.С.* О разрешимости на оси автономных дифференциальных уравнений с последействием. Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. Вып. 2(33), 7-13 (2016).

    Malygina V. V., Balandin A. S. On solvability of autonomous delay differential equations on the real axis. Vestnik Permskogo Universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika. Vol. 2(33), 7-13 (2016). (in Russian)

19. *Симонов П. М., Чистяков А. В.* Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных систем. Известия вузов. Математика. № 6, 37-49 (1997).

    Simonov, P. M., Chistyakov, A. V. On exponential stability of linear difference-differential systems. Russian Mathematics, 41, No. 6, 34-45 (1997).

Получена 20.02.2020