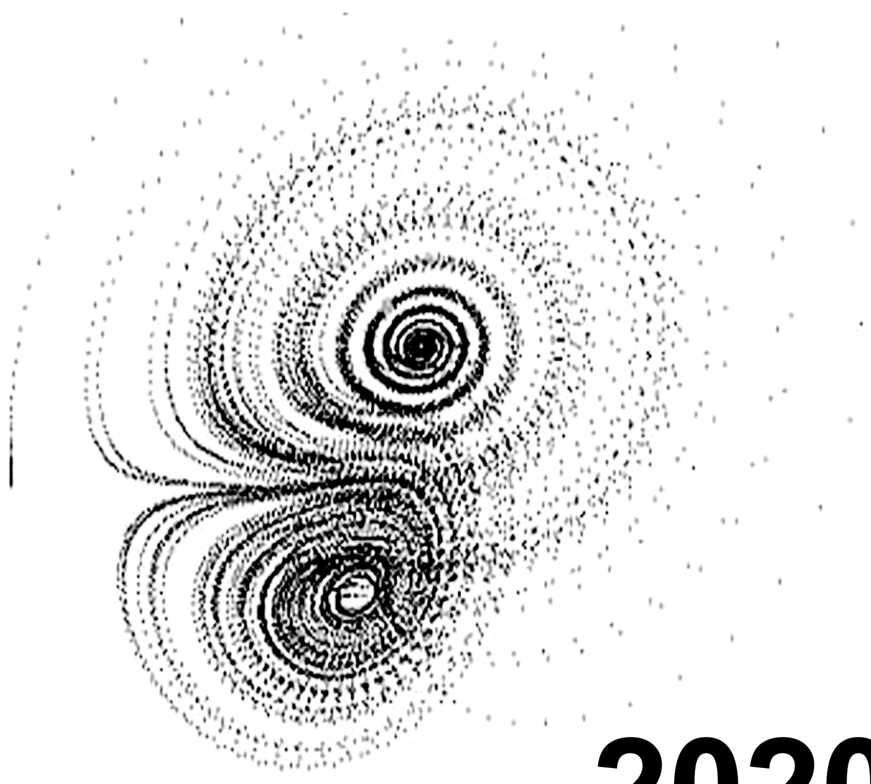
ISSN 0203-3755

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Том 10 (38), №2



2020

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Министерство образования и науки Российской Федерации
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского

Математический журнал

Том 10(38), №2, 127-226.
Печатается по решению Научно-технического Совета КФУ протокол № 2 от 03.06.2020.

ISSN 0203–3755

Адрес редакционной коллегии: Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, к. 203В, пр-т Вернадского, 4, Симферополь 295007, Россия.
Тел. +7 978 7715582. E-mail: dynsys2011@yandex.ru

Свидетельство о регистрации средства массовой информации — ПИ №ФС77-61810, выдано 18.05.15.

Динамические системы, 2020, том 10(38), №2, 129–139

MSC 2010: 37D05, 37D15

On Realization of Gradient-like Flows on the Four-dimensional Projective-like Manifold[1]

E. Gurevich, A. Chernov, A. Ivanov

National Reseasrch University Higher School of Economics

Nizhnii Novgorod, 603155.

E-mail: egurevich@hse.ru, mrandche@gmail.com, artynn98@gmail.com

Abstract. In 1962 Eells and N. Kuiper provided manifolds admitting the Morse function with exactly three critical points. They shown that the dimension n of such manifolds takes the values $2, 4, 8$ and 16, and the critical points of the Morse function have indices $0, n/2$ and n. Later these manifolds were called projective-like. In 2013 E. V. Zhuzhoma and V. S. Medvedev obtained a topological classification of gradient flows of such Morse function. In particular, they proved that all such flows on four-dimensional manifolds are topologically equivalent that means that there is only one projective-like manifold of dimension four (that is not true for higher dimension). In this paper, we study the relationship between the numbers of equilibrium states of various indices of a gradient-like flow on the projective-like manifold of dimension four. We also provide an algorithm of realization such flows with the given numbers of equilibrium states of different indices.

Keywords: gradient-like flow, heteroclinic curves, topological classification, projective-like manifolds.

1. Introduction and Statement of Results

Let M^n be a smooth closed connected manifold of dimension n. Recall that a flow f^t on M^n is called *Morse-Smale* if its non-wandering set Ω_{f^t} belongs to a finite set of hyperbolic equilibrium states and closed trajectories, and invariant manifolds of different equilibrium states and closed trajectories have only transversal intersection. A Morse-Smale flow without closed trajectories is called *gradient-like*. S. Smale in [1] showed that for an arbitrary manifold M^n there exists a Morse function (a smooth function whose critical points are non-generated) defined on M^n, and it is possible to choose a metric on M^n such that the gradient flow of the Morse function will be a gradient-like flow. Hence, gradient-like flows exist on all manifolds.

[1]This work was supported by the Russian Science Foundation under grant 17-11-01041, except the proof of Theorem 1 which was performed with support of the Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, of the Ministry of science and higher education of the RF grant ag. № 075-15-2019-1931.

Recall that the sets

$$W^s_p = \{q \in M^n\colon \lim_{t\to+\infty} f^t(q) \to p\}, W^u_p = \{q \in M^n\colon \lim_{t\to+\infty} f^{-t}(q) \to p\}$$

are called *stable and unstable manifolds of an equilibrium state* p correspondingly.

According to [2, Theorem 2.3], if there is a gradient-like flow f^t on a manifold M^n then M^n is a disjoint union of stable manifolds of all points from Ω_{f^t} and for any point $p \in \Omega_{f^t}$ its stable and unstable manifolds are smoothly embedded open balls. Dimension $dim\, W^u_p$ of the unstable manifold of the point p is called *a Morse index* of p. It follows from hyperbolicity of the point p that $dim\, W^u_p \in \{0, 1, \dots, n\}$ and $dim\, W^s_p + dim\, W^u_p = n$. An equilibrium p such that $dim\, W^u_p = 0$ ($dim\, W^u_p = n$) is called *a sink* (*a source*), and an equilibrium p such that $dim\, W^u_p \in (0, n)$ is called *a saddle* point.

It follows from the observation above that for any gradient-like flow f^t the set Ω_{f^t} contains at least one source and one sink. If the set Ω_{f^t} is exhausted by these two points, then the ambient manifold M^n is a sphere, and all such flows are topologically equivalent. According to [9] any gradient-like flow has an *energy function* — a Morse function decreasing along non-singular trajectories of f^t such that the set of critical points of f coincides with the set Ω_{f^t}. Then the question of an existing of gradient-like flows with non-wandering set consisting of exactly three equilibrium states is reduced to the problem of existing of Morse function with exactly three critical points. Manifolds admitting such Morse function were studied in [7]. In particular, there was proven that the dimension of these manifolds takes the values $n \in \{2, 4, 8, 16\}$ and the indices of the critical points equal $0, \frac{n}{2}, n$. For $n = 2$ this manifold is the projective plane.

Gradient-like flows with non-wandering set consisting of exactly three points were studied in [3], [4]. In these papers manifolds admitting such flows were called *projective-like manifolds*. It was also proved that for $n = 4$ all flows on a projective-like manifold which non-wandering set consists of exactly three hyperbolic equilibrium states are topologically equivalent. Hence, all four-dimensional projective-like manifolds are homeomorphic. This fact is not true in case $n > 4$, since, due to [7], in each dimension $8, 16$ there exist projective-like manifolds with different homotopy types.

In this paper, we do the first step to solution of a problem of topological classification of gradient-like flows on projective-like manifolds with arbitrary number of equilibria. Namely, we study a structure of a non-wandering set of gradient-like flows on a projective-like manifold of dimension four and provide an algorithm of a realization of such flows for given number of equilibria of different Morse indices.

For gradient-like flow f^t on a four-dimensional manifold denote by l_{f^t} the number of sink and source equilibrium states, by h_{f^t} — the number of saddle equilibrium states of

Morse index two, and by k_{f^t} the number of saddle equilibrium states of Morse indices one and three.

Main results of the paper are following.

Theorem 1. *Let f^t be a gradient-like flow on the four-dimensional projective-like manifold M^4. Then $l_{f^t}-k_{f^t}+h_{f^t}=3$. If for any two different saddle equilibria $p,q\in\Omega_{f^t}$ the intersection $W^s_p\cap W^u_q$ is empty then $h_{f^t}=1$.*

Theorem 2. *Let $l\geq 2$, $k\neq 0$, $h\geq 1$ be integers such that $l-k+h=3$. Then there is a gradient-like flow f^t on the four-dimensional projective-like manifold such that $l_{f^t}=l, k_{f^t}=k, h_{f^t}=h$.*

2. The Structure of non-wandering set of gradient-like flows on four-dimensional projective-like manifolds

This section is devoted to the proof of Theorem 1.

2.1. Auxiliary results

Let us recall that *a sphere* S^k is the manifold homeomorphic to the standard sphere $\mathbb{S}^k=\{(x_1,\dots,x_{k+1})\subset\mathbb{R}^{k+1}|\ x_1^2+\dots+x_{k+1}^2=1\}$, *a ball* (*an open ball*) B^n is the manifold homeomorphic to the standard ball (the interior of the standard ball) $\mathbb{B}^n=\{(x_1,\dots,x_n)\subset\mathbb{R}^n|\ x_1^2+\dots+x_n^2\leq 1\}$.

The sphere Σ^k topologically embedded in a topological manifold M^n ($1\leq k\leq n-1$) is called *locally flat* if for any point $z\in\Sigma^k$ there exists a neighborhood $U_z\subset M^n$ and a homeomorphism $\varphi_z\colon U_z\to\mathbb{R}^n$ such that $\varphi_z(\Sigma^k\cap U_z)=\mathbb{R}^k\subset\mathbb{R}^n$. If the sphere Σ^k is not flat at a point z, then the point z is called *the point of wildness* and the sphere Σ^k is called *wild.*

The statement below follows from [2, Theorem 2.3].

Statement 1. *Let f^t be a gradient-like flow on a closed manifold M^n. Then*

1. $M^n=\bigcup\limits_{p\in\Omega_{f^t}}W^s_p=\bigcup\limits_{p\in\Omega_{f^t}}W^u_p$;

2. *for any point $p\in\Omega_{f^t}$ the manifold W^u_p is a smooth submanifold of M^n;*

3. *for any point $p\in\Omega_{f^t}$ and any connected component l^u_p of set $W^u_p\setminus p$ the closure $cl\ l^u_p$ of l^u satisfy the equality $cl\ l^u_p\setminus(l^u_p\cup p)=\bigcup\limits_{q\in\Omega_f:W^s_q\cap l^u_p\neq\emptyset}W^u_q$.*

Item 1 of the Statement 1 and the fact that an unstable manifold of a hyperbolic equilibrium state p is a ball of dimension $ind_p \in \{0, \dots, 4\}$ lead to the fact that the set Ω_{f^t} of any gradient-like flow f^t contains at least one source and one sink. Indeed, in the absence of sinks (or sources), a manifold M^n of dimension n would be represented as a finite union of smoothly embedded balls of smaller dimension that is impossible.

Everywhere below we suppose that f^t is a gradient-like flow on projective-like manifold M^4.

Denote by $\Omega^i_{f^t}$ the set of all equilibrium states of the flow f^t which have the dimension of the unstable manifold equal to $i \in \{0,1,2,3,4\}$ and by $|\Omega^i_{f^t}|$ the capacity of the set $|\Omega_{f^t}|$. Put $l_{f^t} = |\Omega^0_{f^t}| + |\Omega^4_{f^t}|$, $k_{f^t} = |\Omega^1_{f^t}| + |\Omega^3_{f^t}|$, and $h_{f^t} = |\Omega^2_{f^t}|$. It follows from [7] that Euler characteristic $\chi(M^4)$ of M^4 is 3. Then due to Poincare-Hopf Theorem we have

$$l_{f^t} - h_{f^t} + k_{f^t} = 3. \tag{2.1}$$

It immediately follows from Equation (2.1) that if the set $\Omega^1_{f^t} \cup \Omega^3_{f^t}$ is empty then the set Ω_{f^t} consists of exactly three equilibrium states: a source, a sink, and a saddle with a Morse index two.

Let $p, q \in \Omega_{f^t}$ are saddle points such that $W^s_p \cap W^u_q \neq \emptyset$. Then the intersection $W^s_p \cap W^u_q$ is called *heteroclinic intersection.*

Lemma 1. *Let a flow f^t has no heteroclinic intersections, and $p \in \Omega^1_{f^t}$ $(p \in \Omega^3_{f^t})$. Then the closure $cl\, W^s_p$ $(cl\, W^u_p)$ of stable (unstable) manifolds W^s_p (W^u_p) of the point p is a locally flat sphere of dimension 3 that divides the manifold M^4 into two connected components.*

Proof. Assume that the set $\Omega^1_{f^t}$ is non-empty and prove the lemma for an arbitrary point $p \in \Omega^1_{f^t}$ (the proof for the point $p \in \Omega^{n-1}_{f^t}$ is carried out similarly). It follows from item 3 of Statement 1 that for any point $p \in \Omega^1_{f^t}$ the closure $cl\, W^s_p$ of its stable manifold W^s_p is the union of the manifold W^s_p itself and a source equilibrium state α_p. Therefore $cl\, W^s_p$ is a sphere of dimension $(n-1)$. Due to item 2 of Statement 1 the sphere $cl\, W^s_p$ is smooth (and, therefore it is locally flat) at all points of W^s_p. According to [8, St 3A.6] a sphere S^{n-1} embedded in a manifold M^n of dimension $n \geq 4$ is either locally flat at each point or has more than a countable number of wildness points[2]. Hence, $cl\, W^s_p$ is a locally flat sphere.

Let us show that the sphere $cl\, W^s_p$ divides the manifold M^4 into two connected components. Since, by virtue of [7], the fundamental group $\pi_1(M^4)$ is trivial then M^4

[2]In the paper [8] it is noted that this statement is a consequence of results of A. V. Chernavsky and R. Kirby obtained independently in 1968. Earlier, in 1963, J. Cantrell proved the following: if the sphere $S^{n-1} \subset S^n$, $n \geq 4$, is wild and B is a set of points such that S^{n-1} is locally flat in each point of the set $S^{n-1} \setminus B$, then the set B consists of more than one point (see [6]).

is orientable. By [5, Theorem 3] a locally flat sphere S^{n-1} in an orientable manifold M^n ($n \geq 3$) is cylindrically embedded, which means that there is a closed neighborhood $V \subset M^n$ of a sphere S^{n-1} and a homeomorphism $h\colon S^{n-1} \times [-1,1] \to V$ such that $h(S^{n-1} \times \{0\}) = S^{n-1}$. Therefore there is a neighborhood V_p of the sphere $cl\,W^s_p$, which is divided by the sphere $cl\,W^s_p$ into two connected components. Choose points x, y that belong to different connected components $V_p \setminus cl\,W^s_p$ and connect them with a smooth arc $l_p \subset V_p$ that intersects the sphere $cl\,W^s_p$ at the only one point. If $cl\,W^s_p$ does not divide M^4, then there is an arc $b_p \subset M^4 \setminus cl\,W^s_p$ connecting the points x, y. By construction, the intersection index of the arc $\lambda_p = l_p \cup b_p$ and the sphere $cl\,W^s_p$ is 1 or -1 (depending on the choice of orientations). On the other hand, since $\pi_{n-1}(M^4)$ is trivial, it is not difficult to choose a sphere $S^{n-1} \subset M^4 \setminus \lambda_p$, homotopic to the sphere $cl\,W^s_p$. Since the intersection index is a homotopy invariant, the intersection index of the sphere S^{n-1} and the arc λ_p must be equal ± 1, but since $S^{n-1} \cap \lambda_p = \emptyset$, it equals to zero. This contradiction proves that the sphere $cl\,W^s_p$ divides the manifold M^4 into two connected components. □

Remind that the set A is called an *attractor* of a flow f^t if there is a closed neighborhood (*a trapping neighborhood*) $V \subset M^n$ such that all trajectories of the flow f^t intersect its boundary ∂V transversally, and $A = \bigcap\limits_{t>0} f^t(V)$. The set R is called a *repeller* of the flow f^t if it is an attractor for the flow f^{-t}.

Set
$$A_{f^t} = \bigcup\limits_{p \in \Omega^0_{f^t} \cup \Omega^1_{f^t}} W^u_p, R_{f^t} = \bigcup\limits_{p \in \Omega^3_{f^t} \cup \Omega^2_{f^t} \cup \Omega^4_{f^t}} W^s_p$$
.

Lemma 2. *If f^t has no heteroclinic intersections then the set A_{f^t} is a connected attractor with a trapping neighborhood diffeomorphic to the ball.*

Proof. It follows from [1, 9] that there is a Morse function $\varphi\colon M^4 \to [0,4]$ such that the set of critical points of φ coincides with the set Ω_{f^t}, $\varphi(p) = ind(p)$ for any $p \in \Omega_{f^t}$, and $\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$ for any point $x \notin \Omega(f^t)$ and $t > 0$. Let us show that the set $V = \varphi^{-1}([0;1,5])$ is a trapping neighborhood for A_{f^t}.

It follows from the definition that $A_{f^t} \subset V$. Since A_{f^t} is invariant then $A_{f^t} \subset \bigcap\limits_{t>0} f^t(V)$. Let us prove that $A_{f^t} = \bigcap\limits_{t>0} f^t(V)$. Assume the opposite. Then there is a point $x \in \bigcap\limits_{t>0} f^t(V) \setminus A_{f^t}$. Statement 1 implies that there is an equilibrium state $p \in \Omega_{f^t}$ such that $x \in W^u_p$. Since the set $\bigcap\limits_{t>0} f^t(V)$ is closed and invariant then $p \in \bigcap\limits_{t>0} f^t(V) \setminus A_{f^t}$, which is impossible, since the set V does not contain equilibrium states other than those which belong to A_{f^t}. Therefore, $A_{f^t} = \bigcap\limits_{t>0} f^t(V)$ and A_{f^t} is an attractor.

Let us prove that the trapping neighborhood V is connected. Then A_f will be connected as the intersection of connected compact nested sets. Assume that V is disconnected, that is it can be represented as a union of two disjoint non-empty invariant subsets E_1, E_2. Then the union $\bigcup\limits_{p\in A_{f^t}} W^s_p = \bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}} f^t(E_1\cup E_2)$ is disconnected. Due to Statement 1, $M^4 = \bigcup\limits_{p\in A_{f^t}} W^s_p \cup R_{f^t}$, then $M^4\setminus R_{f^t} = \bigcup\limits_{p\in A_{f^t}} W^s_p$, so $M^n\setminus R_{f^t}$ is disconnected. On the other hand, since the dimension of the set R_{f^t} does not greater than one, then R_{f^t} does not divide M^4, therefore the set $M^4\setminus R_{f^t}$ is connected. This contradiction proves that V and A_{f^t} are connected.

To prove that V is a ball let us prove that A_{f^t} does not contain subsets homeomorphic to a circle. Assume the opposite: let $c\subset A_{f^t}$ be a simple closed curve. It follows from Items 1,3 of Statement 1 that the set $A_{f^t}\setminus\Omega^1_p$ is a finite set of arcs lying in the disjoint union of stable manifolds of sink equilibria. Therefore there is an equilibrium state $p\in\Omega^1_{f^t}$ such that $p\in c$. Due to Lemma 2, the set $cl\,W^s_p$ divides the ambient manifold M^4 in two connected components. Therefore $cl\,W^s_p$ also divides the curve c, so there is a point $x\in c\cap cl\,W^s_p$ different from p. The point x cannot be a source, since A_{f^t} does not contain sources by construction. The point x cannot be a sink or since $x\in W^s_p\setminus p$ and only non-wandering point in W^s_p is p. Hence, x belongs to a one-dimensional unstable manifold of some point $q\in\Omega^1_{f^t}$, but we supposed that f^t has no heteroclinic intersections, so we get a contradiction.

Thus the set A_{f^t} can be represented as a connected graph without cycles, whose vertices are sink points and edges are one-dimensional unstable manifolds of saddle points. Then $|\Omega^0_{f^t}| = |\Omega^1_{f^t}|+1$. It follows from Morse theory that the set V is a smooth subset of M^4 obtained from the disjoint union of $|\Omega^0_{f^t}|$ balls by gluing $|\Omega^1_{f^t}|$ handles of index 1. Using induction one can easy prove that V is a ball. $\square$

Set $\tilde{R}_{f^t} = \bigcup\limits_{p\in\Omega^3_{f^t}\cup\Omega^4_{f^t}} W^s_p$. Considering f^{-t} and applying the Lemma 2 one can get that $\tilde{R}_{f^t}$ is a connected attractor for f^{-t} (hence, it is a repeller for f^t) with a trapping neighborhood W diffeomorphic to the ball. This observation and Lemma 2 immediately lead to the following statement.

Corollary 1. *In assumption of Lemma 2 there are smoothly embedded balls $V, W\subset M^4$ such that:*

1. $A_{f^t}\subset V$, $\tilde{R}_{f^t}\subset W$;
2. *trajectories of the flow f^t are transversal to the boundaries of the balls V, W and are oriented out of the interior of W to the interior of V;*

3. *the non-wandering set of the flow f^t restricted on the set $M^4 \setminus (V \cup W)$ consists of the equilibrium states of index 2.*

2.2. Proof of Theorem 1

Remind that *a connected sum* of smooth orientable connected manifolds M_1^n, M_2^n is the manifold $M_1^n \sharp M_2^n$ obtained as follows. Let $B_1^n \subset M_1^n, B_2^n \subset M_2^n$ be two balls. Then the manifold $M_1^n \sharp M_2^n$ is the result of gluing manifolds $M_1^n \setminus B_1^n), M_2^n \setminus B_2^n$ by a reversing the natural orientation diffeomorphism $h\colon \partial B_1^n \to \partial B_2^n$. According to [10, Lemm 2.1], the connected sum operation is defined the unique (up to diffeomorphism) manifold and does not depend on the choice of balls and a gluing homeomorphism.

Proof of Theorem 1. Suppose that a gradient-like flow f^t on the projective-like manifold M^4 has no heteroclinic intersections. Let us show that the set of saddle equilibrium states of the flow f^t contains exactly one equilibrium state whose Morse index equals two. Then the equality $l_{f^t} - k_{f^t} = 2$ will immediately follow from Hopf-Poincare formula 2.1.

Let $W, V \subset M^4$ be balls described in Corollary 1. Then $M^4 \setminus int\,(W \cup V)$ is the manifold with boundary consisting of two $(n-1)$-spheres. Let $\mathbb{B}_+^n, \mathbb{B}_-^n$ be two standart balls enriched by vector fields $\dot{x} = x$, $\dot{x} = -x$ correspondingly. Glue balls $\mathbb{B}_+^n, \mathbb{B}_-^n$ to $M^4 \setminus int\,(W \cup V)$ with reversing the natural orientation diffeomorphism $\varphi\colon \partial\mathbb{B}_+^n \cup \partial\mathbb{B}_-^n \to \partial W \cup \partial V$, denote by $\tilde{M}^4$ the resulting manifold and by $\pi_\varphi\colon \mathbb{B}_+^n \cup \mathbb{B}_-^n \cup M^4 \setminus int\,(W \cup V) \to \tilde{M}^4$ the natural projection. It is possible to choose the diffeomorphism φ in such a way that it induce on $\tilde{M}^4$ a gradient-like flow $\tilde{f}^t$ such that $\tilde{f}^t|_{M^4 \setminus int\,(W \cup V)} = \pi f^t|_{M^4 \setminus int\,(W \cup V)}$ and the restrictions $\tilde{f}^t|_{\mathbb{B}_+^n}, \tilde{f}^t|_{\mathbb{B}_-^n}$ are topologically equivalent to dilatation and contraction correspondingly. So, non-wandering set of the flow $\tilde{f}^t$ consists exectly of one source, one sink, and $|\Omega_{f^t}^2|$ saddles of index 2. The operation of gluing balls is equivalent to taking a connected sum with two spheres, so the manifold $\widetilde{M}^4$ is diffeomorphic to the original manifold M^4. Then, due to Poincare-Hopf formula 2.1, $|\Omega_{f^t}^2| = 1$. The Theorem 1 is proven.

3. Realization of gradient-like flows on four-dimensional projective-like manifolds

This section is devoted to the proof of the Theorem 2. Let $l \geq 2$, $k \geq 0$ and $h \geq 1$ be integers such that $l - k + h = 3$.

We are going to construct a gradient-like flow f^t such that the number l_{f^t} of sink and source equilibrium states of f^t equals l, the number h_{f^t} of saddle equilibrium states of Morse index two equals h, and the number k_{f^t} of saddle equilibrium states of Morse index different from two equals k.

To construct the desired flow we define below auxiliary flows g_1^t, g_2^t on the projective-like manifold M^4 and the sphere S^4, respectively, with the following properties:

1. the non-wandering set of the flows g_1^t consists exactly of one source, $(k-h+1)$ saddles of Morse index one, one saddle of Morse index two and $(k-h+2)$ sinks;

2. the non-wandering set of the flows g_1^t consists exactly of one sink, one source, $(h-1)$ saddles of Morse index one and $(h-1)$ saddles of Morse index two.

Choose the balls $B_1^n \subset M^4$, $B_2^n \subset S^4$ that intersect with the sets $\Omega_{g_1^t}, \Omega_{g_2^t}$ exactly at one point: the sink and source respectively, lying in the interior of the balls B_1^4, B_2^4. We form a connected sum of manifolds M^4, S^4 by cutting out the interiors of the balls B_1^4, B_2^4 and gluing the resulting manifolds by a diffeomorphism to induce on the manifold $M^4\sharp S^4$ a gradient-like flow f^t such that the non-wandering set of the flows f^t consists exactly of $l = 3+k-h$ sinks and sources, k saddles of the index 1, and h saddle of the index 2 (see, for example [14]). The connected sum operation with a sphere does not change the topological type of the manifold, so the manifold $M^4\sharp S^4$ is the projective-like manifold, so f^t is the desired flow.

3.1. Construction of the flow g_1^t

Let us describe the buiding of the flow g_1^t step by step.

Step 1. *Realization of a gradient-like flow g_0^t whose non-wandering set consists of exactly three equilibria: a source, a sink and a saddle of Morse index two.*

Let us define the flow f_k^t on the handle $H_k^4 = \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{4-k}$ of the index $k \in \{0, \dots, 4\}$ by the following system of differential equations

$$\begin{cases} \dot{x} = x, x \in \mathbb{B}^k \\ \dot{y} = -y, y \in \mathbb{B}^{4-k}. \end{cases}$$

A non-wandering set of the flow f_k^t consists of a single equilibrium state O which Morse index is k. For $k > 0$ trajectories of the flow f_k^t having non-empty intersection with the foot $F_k^4 = \partial\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{4-k}$ of H_k^4 intersect the foot transversally and directed outside of H_k^4.

First, we are going to obtain a projective-like manifold M^4 by sequentially gluing to the handle H_0^4 the handles H_2^4 and H_4^4. After the gluing handles, the flows f_0^t, f_2^t, f_4^t will induce on M^4 the desired flow g_0^t.

The foot $F_2^4 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ is a solid torus whose core $\mathbb{S}^1 \times \{O\}$ (here O — the center of the ball $\mathbb{B}^2$) belongs to the unstable separatrix of the saddle equilibrium state of the flow f_2^t. Remark that $\partial H_0^4 = \mathbb{S}^3$. Let $c \in \mathbb{S}^3$ be a node (a simple closed curve), N_c is its closed neighborhood, and $P_c = \mathbb{S}^3 \setminus int\, N$.

Let us denote by X_φ a manifold with a boundary obtained by gluing the handle H_0^4 to the handle H_2^4 by means a diffeomorphism $\varphi\colon F_2^4 \to N_c$. We are going to glue the handle H_4^4 to X and obtain a closed manifold, then the boundary of X must be diffeomorphic to the sphere S^3. For this purpose we should choose the gluing diffeomorphism $\varphi\colon F_2^4 \to \partial H_0^4$ and the node c.

As the gluing diffeomorphism $\varphi\colon F_2^4 \to N_c$ is a solid torus diffeomorphism, it maps the meridian of F_2^4 to the meridian of N_c. But the meridian of F_2^4 is the longitude of solid torus $\partial H_2^4 \setminus int\, F_2^4$. So, the gluing operation is a nontrivial surgery. By virtue of [11, Theorem 1], no nontrivial surgery along a nontrivial node will give a sphere. It follows that the knot c must be the boundary of a 2-disk in S^3. Hence, P_c is the solid torus. Let φ send the longitude of N_c to the curve of homotopy type $(1,1)$ in ∂N_c. Then, due to [12], ∂X will be the sphere.

Now we are able to glue the handle H_4^4 to X by an arbitrary orientation reversing diffeomorphism $\psi\colon \partial H_4^4 \to \partial X$. As a result, we get a closed manifold M^4 carrying a gradient-like flow g_1^t whose non-wandering set consist of exactly three equilibrium states. Hence, M^4 is the projective-like manifold.

Step 2. *A realization of a gradient-like flow h^t on the sphere S^4 whose non-wandering set consists of exactly one source, k saddles of index 1, and $k+1$ sink.*

Define a gradient-like flow ψ^t on the sphere S^4, which has a non-wandering set consisting of exactly one source, k saddles of index 1, and $k+1$ sinks.

We construct k copies of the sphere $S_1^4, \dots, S_k^4$, each of which carries the flow ψ_i^t, $i \in \{1, \dots, k\}$ whose non-wandering set consists of exactly one source α_i, one saddle σ_i of index 1, and two sinks ω_i^+, ω_i^-. To do this, we glue one handle of index 1 to two handles of index 0 to get the ball carrying a gradient-like flow whose trajectories are transversal to the boundary of the ball and the non-wandering set consists of two sinks and one saddle. Then we glue the handle H_4^4 to the obtained manifold. As a result, we get the desired flow ψ_i^t.

Select a ball $B_1^4 \subset S_1^4$ ($B_2^4 \subset S_2^4$) that intersect the set $\Omega_{\psi_1^t}$ ($\Omega_{\psi_2^t}$) exactly at one point which is the sink ω_1^+ (the source α_2) lying in the interior of the ball $B_1^n(B_2^n)$. We define a connected sum of spheres S_1^4, S_2^4 by cutting out the interiors of balls B_1^4, B_2^4 and gluing the resulting manifolds with the boundary by an orientation-inverting diffeomorphism $h_{1,2}\colon \partial B_1^n \to \partial B_2^n$ such that $h_{1,2}(W_{\sigma_1}^u) \cap W_{\sigma_2}^s = \emptyset$. The gluing operation induce a gradient-like flow $\psi_{1,2}^t$ without heteroclinic intersection on the connected sum $S_1^4 \sharp S_2^4$. Set $S_{1,2}^4 = S_1^4 \sharp S_2^4$. The non-wandering set of the flow $\psi_{1,2}^t$ consists of one source, two saddles of index 1, and three sinks. Similarly, we form a connected sum of the spheres

$S^4_{1,2}$ and S^4_3, and so on. After k steps, we get the desired flow ψ^t.

Step 3. *Construction of the desired flow* g^t_1

Let us consider the projective-like manifold M^4 carrying the flows g^t_0 defined on the Step 1 and the sphere S^4 carrying the flow h^t defined on the Step 2. As it described above, it is possible to construct the connected sum $M^4 \sharp S^4$ and induce the desired flow g^t_1 on the $M^4 \sharp S^4$.

3.2. Construction of the flow g^t_2

Let us construct an auxiliary gradient-like flows η^t on the sphere S^4 whose non-wandering set consists exactly on one source, one sink, and two saddles of Morse index one and two respectively. In [13] it is proved that the intersection of invariant manifolds of these two saddles is non-empty and consists of finite number of non-compact curves (trajectories) that are called heteroclinic curves. Then we take $(h-1) \geq 1$ copies of spheres with carrying such flows and construct the connected sum of the spheres as it described above. As a result we obtain the desired flow g^t_2.

To construct a flow η^t let us construct a mainfold M_1 by gluing the hande H_1 to the hand H_0 by meanse of an arbitrary smooth embedding $g\colon \mathbb{S}^0 \times \mathbb{B}^4 \to \mathbb{S}^3$. Then $\partial\, M_1$ is homeomorphic to $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ and flows f^t_0, f^t_1 induce on M_1 a gradient-like flow η^t_1 whose non-wandering set consists of exactly two equilibria: a source ω and a saddle σ_1 of Morse index one.

Set $S^2_{\eta^t_1} = W^s_{\sigma_1} \cap \partial M_1$. By construction $S^2_{\psi^t}$ is the 2-sphere which does not bounds any ball in ∂M_1. Then there is a homeomorphism $\theta\colon \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \partial M_1$ such that $\theta(\mathbb{S}^2 \times \{x\}) = S^2_{\eta^t}$, $x \in \mathbb{S}^1$. Set $c = \theta(z \times \mathbb{S}^1)$, $z \in \mathbb{S}^2$ and denote by $N_c \subset \partial\, M_1$ a tubular neighborhood of the node c. Let $\mu\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2 \to N_c$ be a diffeomorphism such that $\mu(\mathbb{S}^1 \times \{O\}) = c$. Denote by M_2 a manifold obtained by gluing the handle H_2 to M_1 by means of μ. The boundary of M_2 is the result of gluing two solid tori $\partial H_2 \setminus int\,(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2)$ and $\partial M_1 \setminus int\, N_c$ by means of the diffeomorphism $\eta|_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1}$ that sends a longitude of $\partial H_2 \setminus int\,(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2)$ to the meridian of the solid torus ∂N_1. Hence ∂M_2 is 3−sphere. More over, due to [15, Theorems 3.30., 3.34], the manifold M_2 is diffeomorphic to the ball H_0.

Glue M_2 and the hand H^4_4 to get the sphere S^4 and the desired gradient-like flow η^t.

References

1. *Smale S.* On Gradient Dynamical Systems. Annals of Mathematics. 74, № 1. 199–206 (1961).
2. *Smale S.* Differentiable dynamical systems. Bulletin of the American Mathematical Society. 73, № 6, 747-817 (1967).
3. *Zhuzhoma E. V., Medvedev V.* Morse-Smale systems with few non-wandering points. Topology and its Applications. 160, № 3. 498-507 (2013).

4. *Zhuzhoma E. V., Medvedev V.* Continuous Morse-Smale flows with three equilibrium positions. Sbornik Mathematics. 207, № 5. 702-723 (2016).
5. *Brown M.* Locally flat imbeddings of topological manifolds. Ann. of Math. 75, № 2. 331-341 (1962).
6. *Cantrell J. C.* Almost locally flat sphere S^{n-1} in S^n. Proceeding of the American Mathematical society. 15, № 4. 574-578 (1964).
7. *Eells J., Kuiper N.* Manifolds which are like projective planes. Institut des Haute studes Scientifiques Publications Mathematiques. 14. 5-46 (1962).
8. *Daverman R. J.* Embeddings of (n-1)-spheres in Euclidean n-space. Bulleting of the American Mathematical society. 84, № 3. 377-405 (1978).
9. *Meyer K. R.* Energy Functions for Morse Smale Systems. American Journal of Mathematics. 90, № 4. 1031–1040 (1968).
10. *Kervaire M. A., Milnor J. W.* Groups of homotopy spheres: I. The Annals of Mathematics, 2nd Ser. 77, № 3. 504-537 (1963).
11. *Gordon C., Luecke J.* Knots are determined by their complements. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 20, № 1. 83-87 (1989).
12. *Rolfsen D*. Knots and Links. Berkeley, CA: Publish or Perish-Mathematics, 1976.
13. *Gurevich E., Pavlova D.* On embedding of invariant manifolds of the simplest Morse-Smale flows with heteroclinic curves. Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva. 20, № 4. 378-383 (2018).
14. *Grines V., Gurevich E., Zhuzhoma E., Medvedev V.* On Topology of Manifolds Admitting a Gradient-Like Flow with a Prescribed Non-Wandering Set. Siberian Advances in Mathematics. 29. № 2. 116-127 (2019).
15. *Matsumoto Y.* An Introduction to Morse Theory. Oxford University Press. 2001.

Получена 14.05.2020

Динамические системы, 2020, том 10(38), №2, 140–150

MSC 2010: 37D15

On a stable arc connecting Palis diffeomorphisms on a surface[1]

E. Nozdrinova

Higher School of Economics

Nizhny Novgorod *E-mail:maati@mail.ru*

Abstract. In this paper, a class of gradient-like diffeomorphisms f on a closed orientable surface is considered, under the assumption that all non-wandering points of f are fixed and have a positive orientation type. The main result is a construction of a stable arc joining two such diffeomorphisms. The diffeomorphisms under the consideration are Palis diffeomorphisms, who highlights their as only surface diffeomorphisms included in topological flows. By S. Newhouse, M. Peixoto, and J. Fleitas result, all Morse-Smale flows on a given manifold are joined by a stable arc. However, this fact cannot be used directly to construct an arc between cascades, since Palis diffeomorphisms are included only in the topological flow. An idea of a stable arc construction between Palis diffeomorphisms is based on the construction of a bifurcation-free arc joining a Palis diffeomorphism with a diffeomorphism that is a one-time shift of a generic gradient flow of a Morse function.

Keywords: gradient-like diffeomorphism, stable arc, saddle-node bifurcation.

1. Introduction and formulation of results

The problem of the existence of an arc with no more than a countable (finite) number of bifurcations connecting structurally stable systems (Morse-Smale systems) on manifolds is on the list of fifty Palis-Pugh problems [14] under number 33.

In 1976, S. Newhouse, J. Palis, F. Takens [7] introduced the concept of a stable arc connecting two structurally stable systems on a manifold. Such an arc does not change its quality properties with a small perturbation. In the same year, S. Newhouse and M. Peixoto [9] proved the existence of a simple arc (containing only elementary bifurcations) between any two Morse-Smale flows. It follows from the result of G. Fleitas [3] that a simple arc constructed by Newhouse and Peixoto can always be replaced by a stable one [8].

[1]The construction of a stable arc was supported by RSF (Grant No. 17-11-01041), the construction of a Morse energy function was supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (ag. 075-15-2019-1931) and by Foundation for the Advancement of Theoretical Physics and Mathematics “BASIS” (project 19-7-1-15-1).

For Morse-Smale diffeomorphisms given on manifolds of any dimension, examples of systems that cannot be connected by a stable arc are known. Obstruction appear already for orientation-preserving diffeomorphisms of the circle S^1, which are connected by a stable arc only if the rotation numbers coincide [10]. Beginning with dimension two, additional obstruction appear to the existence of stable arcs between isotopic diffeomorphisms. They are associated with the existence of periodic points [1], [11], heteroclinic intersections [6].

Recall that a diffeomorphism f is *gradient-like* if its non-wandering set Ω_f consists of a finite number of hyperbolic points and the invariant manifolds of different saddle points do not intersect (the diffeomorphism f has no heteroclinic intersections). In this paper, we consider the class $G(M^2)$ of gradient-like diffeomorphisms f on a closed orientable surface M^2, under the assumption that all non-wandering points are fixed and have positive orientation type. The main result of this work is the proof of the following theorem.

Theorem 1. *Any diffeomorphisms $f, f' \in G(M^2)$ can be connected by a stable arc with a finite number of generically unfolding non-critical saddle-node bifurcations.*

The proof of this result is based on the construction of an arc without bifurcations connecting the diffeomorphism $f \in G(M^2)$ with the diffeomorphism $\phi_f \in G(M^2)$, which is a one-time shift of a generic gradient flow of some Morse function. By virtue of the works [9], [3], [8], any two such flows are connected by an arc with a finite number of saddle-node bifurcations.

2. Proof of the main result

In this section, we outline the proof of theorem 1 with references to the statements that will be proved in the following sections. Let us first give the necessary definitions.

Consider a family of diffeomorphisms (*an arc*) $\varphi_t : M \to M, t \in [0,1]$. An arc φ_t is called *smooth*, if map $F : M \times [0,1] \to M$, defined by the formula $F(x,t) = \varphi_t(x)$ is smooth.

A smooth arc φ_t is called a *smooth product* of smooth arcs ϕ_t and ψ_t such that $\phi_1 = \psi_0$, if $\varphi_t = \begin{cases} \phi_{2\tau(t)}, 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \psi_{2\tau(t)-1}, \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$ где $\tau : [0,1] \to [0,1]$ is a smooth monotone map such that $\tau(t) = 0$ for $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}$ and $\tau(t) = 1$ for $\frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1$. We will write

$$\varphi_t = \phi_t * \psi_t.$$

Following [8], an arc φ_t is called *stable* if it is an inner point of the equivalence class with respect to the following relation: two arcs φ_t, φ'_t are called *conjugate* if there are

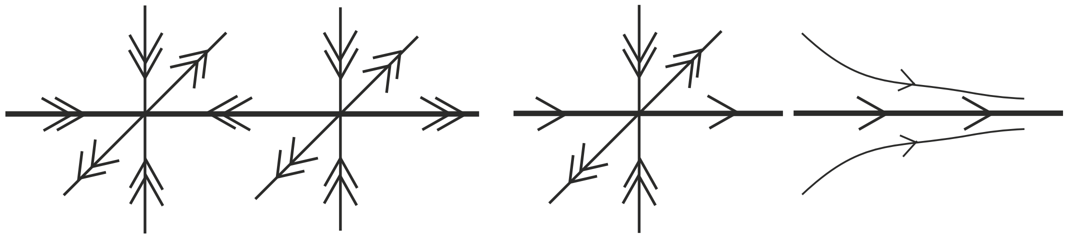


Fig. 1. Saddle-node bifurcation

homeomorphisms $h:[0,1]\to[0,1]$, $H_t: M\to M$ such that $H_t\varphi_t=\varphi'_{h(t)}H_t, t\in[0,1]$ and H_t continuously depend on t.

In [8] also established that the arc $\{\varphi_t\}$, consisting of diffeomorphisms with a finite limit set, is stable iff all its points are structurally stable diffeomorphisms with the exception of a finite number of bifurcation points, $\varphi_{b_i}, i=1,\dots,q$ such that φ_{b_i}:

1) has no cycles;

2) has a unique non-hyperbolic periodic orbit, which is a non-critical saddle-node or flip;

3) the invariant manifolds of all periodic points of the diffeomorphismφ_{b_i} intersect transversally;

4) the transition through φ_{b_i} is a generically unfolded saddle-node or period doubling bifurcation, wherein the saddle-node point is non-critical.

Recall the definition of generically unfolding non-critical saddle-node bifurcations for the case of a fixed saddle-node. An arc $\{\varphi_t\}\in\mathcal{Q}$ *unfolds generically* through a saddle-node bifurcation φ_{b_i} (Fig. 1), if in some neighborhood of the nonhyperbolic point (p,b_i) the arc φ_t is conjugate to

$$\tilde\varphi_{\tilde t}(x_1,x_2,\dots,x_{1+n_u},x_{2+n_u},\dots,x_n)=$$

$$\left(x_1+0,5x_1^2+\tilde t,\pm2x_2,\dots,\pm2x_{1+n_u},\frac{\pm x_{2+n_u}}{2},\dots,\frac{\pm x_n}{2}\right),$$

where $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $|x_i|<1/2$, $|\tilde t|<1/10$.

In the local coordinates $(x_1,\dots,x_n,\tilde t)$ the bifurcation occurs at time $\tilde t=0$ and the origin $O\in\mathbb{R}^n$ is a saddle-node point. The axis Ox_1 is called a *central manifold* W^c_O, the half-space $\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n:\ x_1\geq0,\ x_{2+n_u}=\dots=x_n=0\}$ is the *unstable manifold* W^u_O, half-space $\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n:\ x_1\leq0,\ x_2=\dots=x_{1+n_u}=0\}$ is the *stable manifold* W^s_O of the point O.

If p is a saddle-nodal point of the diffeomorphism φ_{b_i}, then there exists a unique φ_{b_i}-invariant foliation F^{ss}_p with smooth leaves such that ∂W^s_p is a leave of this foliation [5]. F^{ss}_p is called a *strongly stable foliation* (Fig. 2). A similar *strongly unstable foliation* is denoted by F_p^{uu}. A point p is called *s-critical*, if there exists some hyperbolic periodic point q such that W_q^u non-transversally intersect some leaf of the foliation F_p^{ss}; *u-criticality* is defined similarly. Point p is called

- *semi-critical* if it is either s- or u-critical;
- *bi-critical* if it is s- and u-critical;
- *non-critical* if it is not semi-critical.

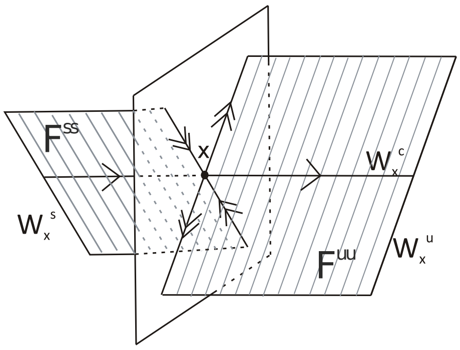


Fig. 2. Strongly stable and unstable foliations

Let $f, f' \in G(M^2)$. Let us prove that the diffeomorphisms f, f' are connected by a stable arc $\varphi_t : M^2 \to M^2, t \in [0,1]$, whose diffeomorphisms are gradient-like except for a finite number of generically unfolding non-critical saddle-node bifurcations.

Proof. In section 4 we construct an arc without bifurcations $\Gamma_{f,t}$, which connects the diffeomorphism $f \in G(M^2)$ with a diffeomorphism $\phi_f \in G(M^2)$ being a one-time map of a generic gradient flow ϕ_f^τ of some Morse function. According to [9], [3], [8] any two such flows ϕ_1^τ, ϕ_2^τ are connected by an arc $\Gamma_{\phi_1^\tau,\phi_2^\tau,t} = \{\gamma_t^\tau, t \in [0,1]\}$ with a finite number of saddle-node bifurcations. Denote by ϕ_1, ϕ_2, γ_t the one-time shift of the flows $\phi_1^\tau, \phi_2^\tau, \gamma_t^\tau$ respectively. By construction, the arc $\Gamma_{\phi_1,\phi_2,t} = \{\gamma_t, t \in [0,1]\}$ connects the diffeomorphisms ϕ_1 and ϕ_2. Then the desired arc is $\varphi_t = \Gamma_{f,t} * \Gamma_{\phi_f,\phi_{f'},t} * \Gamma_{f',1-t}$. $\square$

3. An energy function for canonical diffeomorphisms of the class $G(M^2)$

Let us give necessary definitions, following to [2], [4], for example.

If M^n is a smooth n-manifold and $\Phi : M^n \to \mathbb{R}$ is a C^r-smooth ($r \geq 2$) function then a point $p \in M^n$ is *critical* for Φ if *grad* $\Phi(p) = 0$, that is $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(p) = \cdots = \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}(p) = 0$ in local coordinates $x_1, \ldots, x_n$ of the point p. A point p is called a *non-degenerate* if the matrix of the second derivatives (*Hessian matrix*) $\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}\right)|_p$ is non-degenerate, otherwise the point p is called a *degenerate*. A function Φ is called a *Morse function* if all its critical points are non-degenerate.

A diffeomorphism $f : M^n \to M^n$ is called a *Morse-Smale diffeomorphism* if

1) the non-wandering set Ω_f is finite and hyperbolic;

2) for every two distinct periodic points p, q the manifolds W^s_p, W^u_q intersect transversally.

A continuous function $\Phi : M^n \to \mathbb{R}$ is called *Lyapunov function for a Morse-Smale diffeomorphism* $f : M^n \to M^n$ if

1) $\Phi(f(x)) < \Phi(x)$ for every $x \notin \Omega_f$;

2) $\Phi(f(x)) = \Phi(x)$ for every $x \in \Omega_f$.

A Lyapunov function $\Phi : M^n \to \mathbb{R}$ for a Morse-Smale diffeomorphism $f : M^n \to M^n$ is called a *Morse-Lyapunov function* if every periodic point p is a non-degenerate maximum (minimum) of the restriction of Φ to the unstable (stable) manifold W^u_p (W^s_p). Morse-Lyapunov function Φ is called an *energy function for Morse-Smale diffeomorphism* f if the set of critical points of Φ coincides with the set Ω_f.

D. Pixton [15] proved the existence of an energy function for any Morse–Smale diffeomorphism given on a smooth closed two-dimensional manifold. However, for gradient-like surface diffeomorphisms we need an energy function with more subtle properties. In more detail.

Let $f \in G(M^2)$. Denote by Ω_q, $q \in \{0, 1, 2\}$ the set of fixed points p of the diffeomorphism f such that $\dim\ W^u_p = q$. Let L_p be a frame of saddle separatrices going to the node p, denote k_p their number. Denote $L_k \subset \mathbb{R}^2$ a frame of rays $l_1, \dots, l_k$, which in polar coordinates (ρ, θ) has a form $l_i = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta = \theta_i\}$, $\theta_i \in [0, 2\pi)$.

A diffeomorphism $f \in G(M^2)$ is called a *canonical* if every fixed point p of a diffeomorphism f has a local chart (U_p, ψ_p) such that $p \in U_p, \psi_p(p) = O$ and

1) $\psi_p f \psi_p^{-1}(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$ for $p \in \Omega_0$,
$\psi_p f \psi_p^{-1}(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, 2y\right)$ for $p \in \Omega_1$,
$\psi_p f \psi_p^{-1}(x, y) = (2x, 2y)$ for $p \in \Omega_2$;

2) $\psi_p(L_p) \subset L_{k_p}$ for any nodal point p.

Denote by $G_0(M^2) \subset G(M^2)$ a class of all canonical diffeomorphisms.

Theorem 2. *For any diffeomorphism $g \in G_0(M^2)$ there is an energy function Φ, whose level lines intersect every saddle separatrices at most one point.*

Proof. We split the construction into steps.

Step 1. Construction of local energy functions in the neighborhood of fixed points.

Define functions $\Theta_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q \in \{0, 1, 2\}$ by the formulas:

$\Theta_0(x,y) = -x^2 - y^2$, $\Theta_1(x,y) = 1 + x^2 - y^2$ and $\Theta_2(x,y) = 2 + x^2 + y^2$.

Then, in the neighborhood U_p of $p \in \Omega_q$ a local energy function $\Phi_p : U_p \to \mathbb{R}$ is defined by the formula

$$\Phi_p = \Theta_q \circ \psi_p.$$

It follows from the definition of a canonical diffeomorphism that the level lines of local energy functions intersect every saddle separatrices at most one point.

Step 2. Confluece of local level lines in the neighborhoods of sinks and saddles.

Denote by Φ_q a function composed by the functions $\Phi_p, p \in \Omega_q$. Let $U_q = \bigcup\limits_{p \in \Omega_q} U_p$ and $L_0 = \bigcup\limits_{p \in \Omega_0} L_p$. We choose $\varepsilon_0 \in (0, 1/2)$ so that $\Phi_0^{-1}([0, 2\varepsilon_0]) \subset U_0$. Let

$$S_r = \Phi_0^{-1}(r),\ r \in [0, 2\varepsilon_0].$$

We choose $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0/4)$ so that $\Phi_0^{-1}([1-\varepsilon_1, 2\varepsilon_1]) \cap U_1 \neq \emptyset$. Let

$$\Sigma_r = \Phi_1^{-1}(1 + r),\ r \in [-\varepsilon_1, \varepsilon_1].$$

By construction, every connected component of the set S_{ε_0} transversally intersects the set L_0, and for each separatrix $l \subset L_0$ the intersection $l \cap S_{\varepsilon_0}$ is either empty or consists of exactly one point. According to λ-lemma [13], there exists $k \in \mathbb{N}$, such that $\Sigma_{-\varepsilon_1} \subset g^{-k}(\Phi_0^{-1}([0, \varepsilon_0/2])$, the intersection $g^{-k}(S_{\varepsilon_0}) \cap \Sigma_0$ is transversal and each connected component of the set $\Sigma_0 \setminus \Omega_1$ contains exactly one point of this intersection. Since Φ_1 is an energy function for the diffeomorphism g with the set Ω_1 of critical points, then $\Phi_1(g^{-1}(\Sigma_0 \setminus \Omega_1)) > \Phi_1(\Sigma_0) = 1$. According to this inequality and the transversality of the intersection $g^{-k}(S_{\varepsilon_0}) \cap \Sigma_0$, there is $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ such that:

(1) the intersection $g^{-k}(S_{\varepsilon_0 + r}) \cap \Sigma_r$, $r \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ is transversal, and each connected component of the set $\Sigma_0 \setminus \Omega_1$ contains exactly one point of this intersection and each connected component of the set $\Sigma_r \setminus \Omega_1$, $r \neq 0$ contains exactly two points of this intersection;

(2) for $K_\varepsilon = \bigcup\limits_{r \in [-\varepsilon, \varepsilon]} g^{-k}(S_{\varepsilon_0 + r})$, $T_\varepsilon = \bigcup\limits_{r \in [-\varepsilon, \varepsilon]} \Sigma_r$, $E_\varepsilon = K_\varepsilon \cap T_\varepsilon$ the inequality $\Phi_1(g^{-1}(E_\varepsilon)) > 1 + \varepsilon$ holds.

Let $P_r = g^{-k}(\Phi_0^{-1}([0, \varepsilon_0 + r]))$, $H_r = \Phi_1^{-1}([1 - \varepsilon_1, 1 + r])$, $Q_r = P_r \cup H_r$, $r \in [-\varepsilon; \varepsilon]$. Without loss of generality we assume Q_r smooth, since one always makes it so by an arbitrarily small smoothing of the corners.

Step 3. Construction of energy functions on the set $Q_{-\varepsilon}$.

By construction $P_\varepsilon \subset Q_{-\varepsilon}$ and each connected component of the set L_0 intersects ∂P_ε and $\partial Q_{-\varepsilon}$ at exactly one point. According to annulus hypothesis $K = Q_{-\varepsilon} \setminus int\, P_\varepsilon$

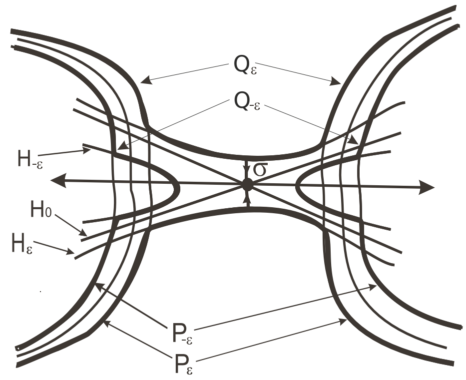


Fig. 3. Illustration for step 2

is diffeomorphic to $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$. Let us construct for g an energy function $\Phi_{Q_{-\varepsilon}} : Q_{-\varepsilon} \to [0, 1-\varepsilon]$, the level lines of which intersect the saddle separatrices at most one point. Consider two possibilities:

1) $\partial Q_{-\varepsilon} \cap g^{-n}\partial(P_\varepsilon) = \emptyset$ for any $n \in \mathbb{N}$;

2) there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $\partial Q_{-\varepsilon} \cap g^{-n}\partial(P_\varepsilon) \neq \emptyset$.

In the case 1), denote by m the smallest of the natural number for which $g^m(Q_{-\varepsilon}) \subset int\, P_\varepsilon$. If $m = 1$ (Fig. 4), then we define a diffeomorphism $\nu_K : K \to \mathbb{S}^1 \times [0,1]$ so that $\nu_K(\partial P_\varepsilon) = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$, $\nu_K(\partial Q_{-\varepsilon}) = \mathbb{S}^1 \times \{1\}$ and each connected component of the intersection $\nu_K(K \cap L_0)$ has the form $\{s_i\} \times [0,1]$. Define the function $\Theta_{\mathbb{S}^1\times[0,1]} : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to [0,1]$ by the formula $\Theta_{\mathbb{S}^1\times[0,1]}(s,x) = x$ and the function $\rho : [0,1] \to [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ by the formula $\rho(x) = (1-2\varepsilon)x + \varepsilon$. Let $\Phi_K = \rho \circ \Theta_{\mathbb{S}^1\times[0,1]} \circ \nu_K : K \to [\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Then the required function $\Phi_{Q_{-\varepsilon}}$ has a form

$$\Phi_{Q_{-\varepsilon}}(x) = \begin{cases} \Phi_0, x \in P_\varepsilon; \\ \Phi_K, x \in K. \end{cases}$$

Since $g(Q_{-\varepsilon}) \subset int\, P_\varepsilon$, the constructed function is energy.

If $m > 1$ (Fig. 5), then the required function $\Phi_{Q_{-\varepsilon}}$ is constructed on the set $g^{1-m}(P_\varepsilon)$ as $\Phi_0 g^{m-1}$ and is defined similarly to the case $m = 1$ on the annulus $Q_{-\varepsilon} \setminus int\, g^{1-m}(P_\varepsilon)$.

In the case 2), without loss of generality we assume $\partial Q_{-\varepsilon}$ is transversal to the set $\bigcup\limits_{n>0} g^{-n}(\partial P_\varepsilon)$. Then the set $J = \partial Q_{-\varepsilon} \cap \bigcup\limits_{n>0} g^{-n}(\partial P_\varepsilon)$ is finite. We now show the way to decrease the number of the points in the intersection by an isotopic modification of P_ε while providing that it remains the energy function on it. From the condition of intersection transversality and homotopy of curves $\partial P_\varepsilon, \partial Q_{-\varepsilon}$ в $W^s_{\Omega_0} \setminus \Omega_0$, the sum of the intersection indices of points in the set J is zero. Thus, the set J contains an even number of points. Then, since the set J is finite, among them there is a pair of points

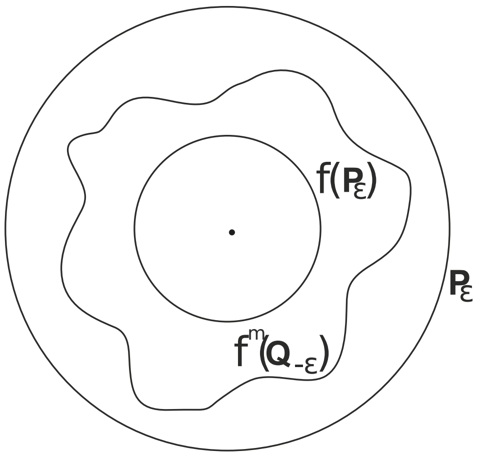


Fig. 4. m=1.

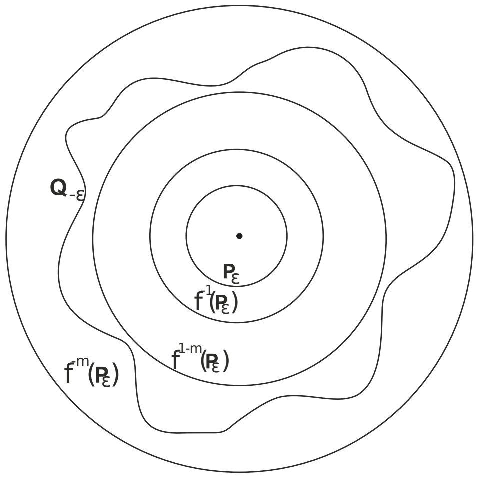


Fig. 5. m>1.

$j_1, j_2 \in g^{-n}(\partial P_\varepsilon)$ for some n such that they bound the arc $\delta \subset \partial Q_{-\varepsilon}$, the interior of which does not contain points of the set J. Denote by $d \subset g^{-n}(\partial P_\varepsilon)$ an arc bounded by the points j_1, j_2 such that the closed curve $\delta \cup d$ bounds a 2-disc $D \subset (W^s_{\Omega_0} \setminus \Omega_0)$.

There are two possibilities for the disk D: (a) $g^n(D) \subset P_\varepsilon$ (Fig. 6) and (b) $g^n(D) \subset g^{-1}(P_\varepsilon)$ (Fig. 7). Define P'_ε to be $cl(P_\varepsilon \setminus g^n(D))$ in the case (a) and define it to be $cl(P_\varepsilon \cup g^n(D))$ in the case (b). Then $g(P_\varepsilon) \subset P'_\varepsilon \subset P_\varepsilon$ in the case (a) and $P_\varepsilon \subset P'_\varepsilon \subset g^{-1}(P_\varepsilon)$ in the case (b). In both cases there is a smoothing $\tilde{P}_\varepsilon$ of the set P'_ε such that $g(P_\varepsilon) \subset int\,\tilde{P}_\varepsilon \subset P_\varepsilon$ in the case (a) and we have $P_\varepsilon \subset int\,\tilde{P}_\varepsilon \subset g^{-1}(P_\varepsilon)$ in the case (b) and the cardinality of the set $\tilde{J} = \partial Q_{-\varepsilon} \cap \bigcup\limits_{n>0} g^{-n}(\partial \tilde{P}_\varepsilon)$ is less than the cardinality of the set J.

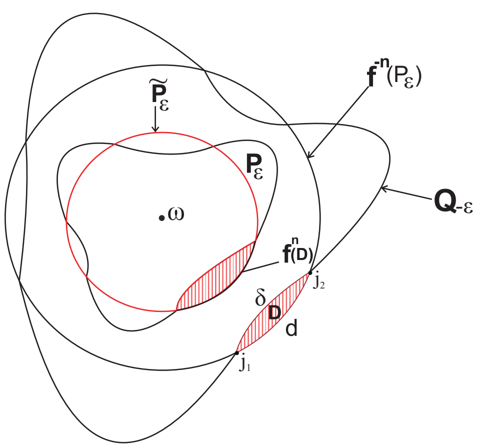


Fig. 6.

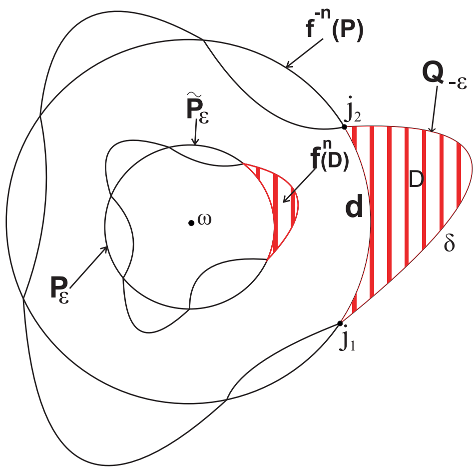


Fig. 7.

Let us show how to construct for g an energy function $\Phi_{\tilde{P}_\varepsilon}$ with the level line $\partial\tilde{P}_\varepsilon$. In the case (a), on the set $g(P_\varepsilon)$ energy function Φ_0 is defined, to the annulus $\tilde{P}_\varepsilon \setminus g(P_\varepsilon)$ this function is continued similarly to the case 1). In the case (b), on the set P_ε energy function Φ_0 is defined, to the annulus $g^{-1}(P_\varepsilon) \setminus \tilde{P}_\varepsilon$ this function is continued similarly to the case 1). We will repeat the described process until the set J becomes empty, after which we construct the desired function according to the algorithm of the case 1).

Step 4.Construction of energy functions on the set Q_ε.

On the set $Q_{-\varepsilon}$ there exists an energy function $\Phi_{Q_{-\varepsilon}}$ such that $\Phi_{Q_{-\varepsilon}}(\partial Q_{-\varepsilon}) = 1-\varepsilon$. Define on the set Q_ε a function $\Phi_{Q_\varepsilon} : Q_\varepsilon \to \mathbb{R}$ by the formula:

$$\Phi_{Q_\varepsilon}(x) = \begin{cases} \Phi_{Q_{-\varepsilon}}(x), \text{ if } x \in Q_{-\varepsilon}; \\ 1+r, \text{ if } x \in \partial Q_r. \end{cases}$$

We now check that Φ_{Q_ε} is an energy function for g. Represent the set Q_ε as the union of subsets with mutually disjoint interiors: $Q_\varepsilon = A \cup B \cup C$, where $A = Q_{-\varepsilon}$, $B = K_\varepsilon \setminus Q_{-\varepsilon}$ and $C = Q_\varepsilon \setminus (P_\varepsilon \cup Q_{-\varepsilon})$. By construction $\Phi_{Q_\varepsilon}|_A = \Phi_{Q_{-\varepsilon}}|_A$, the function $\Phi_{Q_\varepsilon}|_B$ has no critical points and $\Phi_{Q_\varepsilon}|_C = \Phi_1|_C$. We now check that the function Φ_{Q_ε} decreases along the trajectories. If $x \in A$ then $g(x) \in A$ and $\Phi_{Q_\varepsilon}(g(x)) < \Phi_{Q_\varepsilon}(x)$ because $\Phi_{Q_{-\varepsilon}}$ is an energy function for g. If $x \in B$ then $\Phi_{Q_\varepsilon}(x) \geq 1-\varepsilon$. Due to the choice of ε, $g(x) \in A$ and, therefore, $\Phi_{Q_\varepsilon}(g(x)) < 1-\varepsilon$, whence $\Phi_{Q_\varepsilon}(g(x)) < \Phi_{Q_\varepsilon}(x)$. If $x \in C$ then from the condition (2) of the choice of ε either $g(x) \in A$ and the decrease can be proved similarly to the case $x \in B$, or $g(x) \in C$ and the decrease follows from the fact that Φ_1 is a Lyapunov function.

Step 5. Construction of energy functions on M^2

The set of sources Ω_2 is an attractor for the diffeomorphism g^{-1}. Then the energy function on the set $M^2 \setminus Q_\varepsilon$ is constructed similarly to Step 3. $\square$

4. Construction of the arc $\Gamma_{f,t}$

In this section we construct an arc without bifurcations $\Gamma_{f,t}$, which joins the diffeomorphism $f \in G(M^2)$ with a diffeomorphism $\phi_f \in G(M^2)$, which is the one-time shift of a generic gradient flow ϕ_f^τ of some Morse function.

Proof. According to [11] there is an arc ψ_t without bifurcations connecting $ff \in G(M^2)$ with some diffeomorphism $g \in G_0$. By theorem 2 for the diffeomorphism $g \in G_0$ there exists an energy function Φ, whose inverse gradient vector field generates a gradient-like flow ϕ_f^τ. Consider $\phi_f = \phi_f^1$ and construct an arc without bifurcations connecting g with ϕ_f. Throughout what follows we will use the notation of section 3. Recall that $L_0 = \bigcup\limits_{p \in \Omega_0} L_p$ is the set of the unstable separatrices of the diffeomorphism g. Denote by

L_ϕ the set of the unstable separatrices of the diffeomorphism ϕ_f. By construction, the sets L_0 and L_ϕ coincide outside the set $Q_{1-\varepsilon}$. Define the diffeomorphism $\zeta_0 : Q_{1-\varepsilon} \to Q_{1-\varepsilon}$ such that:

– $\zeta_0 = id$ on $\partial Q_{1-\varepsilon}$;

– $\zeta_0(L_0 \cap \partial Q_r) = L_\phi \cap \partial Q_r$ for $r \in [0; 1-\varepsilon]$.

By construction, the diffeomorphism ζ_0 is isotopic to the identity by means of some isotopy $\zeta_{0,t}$, which is identity on $\partial Q_{1-\varepsilon}$. Moreover, ζ_0 sends the unstable separatrices of the diffeomorphism g into the unstable separatrices of the diffeomorphism ϕ_f. The isotopy $\zeta_{2,t} : M^2 \setminus Q_{1+\varepsilon} \to M^2 \setminus Q_{1+\varepsilon}$ is constructed in a similar way, it transforms the stable separatrices of the diffeomorphism g into the stable separatrices of the diffeomorphism ϕ_f. Thus, on the manifold M^2 it is correctly defined an isotopy

$$\Xi_t(x) = \begin{cases} \zeta_{0,t}(x), \text{ if } x \in Q_{1-\varepsilon}; \\ x, \text{ if } x \in Q_{1+\varepsilon} \setminus Q_{1-\varepsilon}; \\ \zeta_{2,t}(x), \text{ if } x \in M^2 \setminus Q_{1+\varepsilon}. \end{cases}$$

Then the arc $\chi_t = \Xi_t g \Xi_t^{-1}$ connects the diffeomorphism g with some diffeomorphism $g_f \in G_0$, the closures of the invariant saddle manifolds of which coincide with the analogous manifolds of the diffeomorphism ϕ_f. According to [12, Lemmas 6.2, 6.3], the diffeomorphism g_f is connected by an arc ξ_t without bifurcations with the diffeomorphism ϕ_f. Then the required arc $\Gamma_{f,t}$ has a form:

$$\Gamma_{f,t} = \psi_t * \chi_t * \xi_t.$$

$\square$

Acknowledgments. The author thanks professor O. V. Pochinka for careful reading the manuscript.

References

1. *Blanchard P.* (1980). Invariants of the NPT isotopy classes of Morse-Smale diffeomorphisms of surfaces, Duke Mathematical Journal 47, No. 1, 33-46.
2. *Grines V. Z., Laudenbach F., Pochinka O. V.*(2012). Dynamically ordered energy function for Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 278, 27–40.
3. *Fleitas G.* (1977). Replacing tangencies by saddle-nodes, Bol. Soc. Brasil. Mat. 8, No. 1, 47-51.
4. *Grines V., Medvedev T., Pochinka O.*(2016). Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds, Springer International Publishing Switzerland.

5. *Hirsh M. W., Pugh C.C., Shub M.* (1977). Invariant manifolds, Springer Lecture Notes in Math. 583.
6. *Matsumoto S.* (1979). There are two isotopic Morse-Smale diffeomorphisms which cannot be joined by simple arcs, Inventiones mathematical 51, 1-7.
7. *Newhouse S., Palis J., Takens F.* (1976). Stable arcs of diffeomorphisms, Bull. Amer. Math. Soc. 82, No.3, 499-502.
8. *Newhouse S.E., Palis J., Takens F.* (1983). Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms, Publications mathematiques de l' I.H.E.S. 57, 5-71.
9. *Newhouse S., Peixoto M.* (1976).There is a simple arc joining any two Morse-Smale fows, Asterisque 31, 15-41.
10. *Nozdrinova E.* (2018). Rotation number as a complete topological invariant of a simple isotopic class of rough transformations of a circle, Russian Journal of Nonlinear Dynamics 14, No. 4, 543-551.
11. *Nozdrinova E., Pochinka O.* (2020). Solution of the 33rd Palis-Pugh problem for gradient-like diffeomorphisms of a two-dimensional sphere, Discrete Continuous Dynamical Systems - A doi: 10.3934/dcds.2020311
12. *Nozdrinova E., Pochinka O.* (2020). Stable arcs connecting polar cascades on a torus, Cornell University Series arxive "math". arXiv:2012.01140 [math.DS]
13. *Palis J., de Melo W.* (1982). Geometric theory of dynamical systems: An introduction, New York: Springer 198.
14. *Palis J., Pugh C.* (1975). Fifty problems in dynamical systems, Lecture Notes in Math. 468, 345-353.
15. *Pixton D.* (1977). Wild unstable manifolds, Topology 16, No.2, 167-172.

Получена 01.06.2020

Динамические системы, 2020, том 10(38), №2, 151–165

УДК 519.86

Локальные бифуркации и глобальный аттрактор периодической краевой задачи для вариационного уравнения Гинзбурга-Ландау[1]

А. Н. Куликов, Д. А. Куликов

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,

Ярославль 150003. *E-mail: anat_kulikov@mail.ru, kulikov_d_a@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается периодическая краевая задача для двух версий нелинейного эволюционного уравнения, известного под названием “вариационное уравнение Гинзбурга-Ландау”. Для классической версии этого уравнения изучены вопросы о существовании и свойствах локальных аттракторов. Приведены достаточные условия существования одномодовых состояний равновесия, а также дан ответ об их устойчивости и локальных бифуркациях. Анализ этих вопросов использует такие методы теории динамических систем как метод интегральных многообразий и нормальных форм. Рассмотрена также периодическая краевая задача для нелокального варианта вариационного уравнения Гинзбурга-Ландау. Доказаны теоремы о существовании гладких глобальных решений и глобального аттрактора, у которого определена его структура и размерность. Обоснование этих теорем основано на следующем результате: получены явные (точные) формулы для всех решений начально-краевой задачи в виде сходящихся функциональных рядов от двух переменных.

Ключевые слова: вариационное уравнение Гинзбурга-Ландау, нелокальное уравнение, устойчивость, локальные бифуркации, глобальный аттрактор.

Local Bifurcations and Global Attractor of a Periodic Boundary Value Problem for the Ginzburg-Landau Variational Equation

A. N. Kulikov, D. A Kulikov

P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl 150003.

Abstract. An periodic boundary value problem is considered for two versions of a nonlinear evolutionary equation known as the “Ginzburg-Landau variational equation”. For the classical version of this equation, questions about the existence and properties of local attractors are studied. Sufficient

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-01-00672).

conditions for the existence of single-mode equilibrium states are given, and an answer is given about their stability and local bifurcations. In the analysis of these questions such methods of the theory of dynamical systems as the method of integral manifolds and normal forms are used. A periodic boundary value problem for a nonlocal version of the Ginzburg-Landau variational equation is also considered. A theorem on the existence of global smooth solutions is proved, as well as a theorem on the existence of a global attractor, for which their structure and dimension are determined. Justification of these theorems is based on the following result: explicit (exact) formulas are obtained for all solutions of the initial-boundary value problem in the form of converging functional series in two variables.
Keywords: Ginzburg-Landau variational equation, stability, local bifurcations, global attractor.
MSC 2010: 37L10, 37L25

1. Введение

Уравнение для комплекснозначной функции $u(t,x) = u_1(t,x) + iu_2(t,x)$ вида

$$u_t = u - (1+ic)u|u|^2 + (d+ib)u_{xx}, \tag{1}$$

известно под названием *комплексное уравнение Гинзбурга-Ландау* [6], [7], [8], [9], [12], [14], [16], [20]. Это уравнение, его обобщения и модификации играют значительную роль в нелинейной физике. В обзоре [6] приведен широкий спектр приложений, где используется это уравнение. Среди них можно назвать гидродинамику, теорию сверхпроводимости, нелинейную оптику и многие другие. Здесь $b, d, c \in \mathbb{R}, d \geq 0, b^2 + d^2 \neq 0$.

Если $c = b = 0, d > 0$, то этот вариант уравнения (1), т. е. дифференциальное уравнение

$$u_t = u - u|u|^2 + du_{xx} \tag{2}$$

известно под названием *вариационное комплексное уравнение Гинзбурга-Ландау* [3], [6], [13]. Это название отражает в некоторой степени метод вывода этого уравнения (см. [6]) как необходимого условия экстремума функционала “энергии” . Уравнение (2) своим появлением обязано теории конденсированных сред. В этом разделе физики для него используют иногда другое название: “ψ^4 — модель” теории конденсированных сред. Уравнение (2) в физике чаще всего рассматривают вместе с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x+2\pi) = u(t,x). \tag{3}$$

Равенство периода величине 2π достигается перенормировкой $x \to \gamma x$. В первой части работы будет описана динамика решений краевой задачи (2), (3).

Среди модифицированных вариантов вариационного комплексного уравнения Гинзбурга-Ландау можно отметить следующее уравнение:

$$u_t = u + du_{xx} - uV, \tag{4}$$

где $V = V(u) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |u|^2 dx \, (u = u(t,x))$. Оно появилось в работах [10],[11],[15],[19] в связи с изучением такого явления как ферромагнетизм. Несколько иная версия нелокального уравнения была предложена в [17]. Безусловно, существуют и иные обобщения и модификации уравнения (2), но в данной работе будут изучены краевые задачи (2), (3) и (4), (3), которые, как уже отмечалось, используются во многих разделах физики. Подчеркнем, что $d > 0$.

2. Традиционный вариант вариационного уравнения Гинзбурга-Ландау

В данном разделе изучим краевую задачу (2), (3). Напомним хорошо известный факт. Если краевую задачу (2), (3) дополнить начальным условием

$$u(0,x) = f(x), \tag{5}$$

то при соответствующем выборе пространства начальных условий можно утверждать, что начально-краевая задача (2), (3), (5) корректно разрешима, если $t \in [0, t_0]$, где t_0 – некоторая положительная постоянная величина [7],[8], но эти работы не гарантируют, конечно, глобальную разрешимость при всех положительных t и любых $f(x)$.

Вместе с уравнением (2) рассмотрим ему сопряженное уравнение

$$\overline{u}_t = \overline{u} - \overline{u}|u|^2 + d\overline{u}_{xx},$$

где $u(t,x)$ по переменной x имеет период 2π. Если теперь домножить уравнение (2) на $\overline{u}$, а сопряженное — на u и проинтегрировать обе части получившихся равенств по переменной x от 0 до 2π, а затем их сложить, то получим

$$\int\limits_0^{2\pi} u_t\overline{u}dx + \int\limits_0^{2\pi} \overline{u}_t u dx = 2\int\limits_0^{2\pi} u\overline{u}dx - 2\int\limits_0^{2\pi} u\overline{u}|u|^2dx + d\int\limits_0^{2\pi}(u_{xx}\overline{u} + \overline{u}_{xx}u)dx =$$
$$= 2\left[\int\limits_0^{2\pi}|u|^2dx - \int\limits_0^{2\pi}|u|^4dx\right] - 2d\int\limits_0^{2\pi} u_x\overline{u}_x dx.$$

Отметим, что $\int\limits_0^{2\pi} u_x\overline{u}_x dx = \int\limits_0^{2\pi}|u_x|^2dx \geq 0$, а $(\int\limits_0^{2\pi}|u|^2dx)^2 \leq 2\pi\int\limits_0^{2\pi}|u|^4dx$ (неравенство Коши-Буняковского). Поэтому

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^{2\pi}|u|^2dx \leq 2\left[\int\limits_0^{2\pi}|u|^2dx - \frac{1}{2\pi}\Big(\int\limits_0^{2\pi}|u|^2dx\Big)^2\right] \leq 0,$$

если $\int\limits_0^{2\pi} |u|^2 dx \ \geq \ 2\pi$. Итак, решения краевой задачи (2), (3) убывают при $||u||^2_{\mathbb{L}_2(0,2\pi)} > 2\pi$. В иных терминах получаем, что краевая задача (2), (3) диссипативна в смысле нормы пространства $\mathbb{H}_0$, т. е. пространства периодических функций, принадлежащих пространству $\mathbb{L}_2(0, 2\pi)$, если $x \in (0, 2\pi)$.

Непосредственной подстановкой можно проверить, что краевая задача (2), (3) имеет одномерные семейства ненулевых состояний равновесия

$$S_m(\varphi_m) : u_m(x, \varphi_m) = \eta_m \exp(imx + i\varphi_m), \tag{6}$$

где $\eta_m > 0$, а φ_m — произвольная действительная постоянная. В фазовом пространстве решений формула (6) задает окружность радиуса η_m с центром в нуле.

Величина η_m определяется из уравнения

$$1 - dm^2 - \eta_m^2 = 0$$

т.е. $\eta_m = \sqrt{1 - dm^2}$, если, конечно, $1 - dm^2 > 0$. В результате получаем, что $m^2 < 1/d$, и, следовательно, $m = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$, где $n = [\sqrt{1/d}]$, если $\sqrt{1/d} \notin \mathbb{N}$ (множеству натуральных чисел) или $n = [\sqrt{1/d}] - 1$, если $\sqrt{1/d} \in \mathbb{N}$ (подчеркнем, что $n = 0$, если $\sqrt{1/d} < 1$). Через $[b]$ обозначена целая часть $b \in \mathbb{R}$.

Для анализа устойчивости состояний равновесия семейства $S_m(\varphi_m)$ удобно и целесообразно положить

$$u(t, x) = \eta_m \exp(imx + i\varphi_m)[1 + w(t, x)]. \tag{7}$$

В результате замены (7) после преобразований получаем краевую задачу для функции $w(t, x)$

$$w_t = -\eta_m^2(w + \overline{w}) - \eta_m^2[2w\overline{w} + w^2 + w|w|^2] + dw_{xx} + 2dimw_x, \tag{8}$$

$$w(t, x + 2\pi) = w(t, x), \tag{9}$$

у которой следует изучить устойчивость нулевого решения. Для этого, как обычно, рассмотрим линеаризованный вариант краевой задачи (8), (9):

$$w_t = -\eta_m^2(w + \overline{w}) + dw_{xx} + 2dimw_x, \tag{10}$$

$$w(t, x + 2\pi) = w(t, x). \tag{11}$$

В работе [3] было доказано утверждение о том, что решение (6) с номером m устойчиво, если справедливо неравенство

$$d < d_m = \frac{2}{6m^2 - 1},$$

где $m = \pm 1, \ldots, \pm n$, а решение с номером $m = 0$ устойчиво при всех значениях параметров. В этой же статье было доказано утверждение.

Теорема 1. *Краевая задача (2), (3) имеет* $2n+1$ *семейств одномодовых состояний равновесия*

$$S_m(\varphi_m): u_m(x,\varphi_m) = \eta_m \exp(imx + i\varphi_m),\ \varphi_m \in \mathbb{R},\ m = 0, \pm 1, \dots, \pm n,$$

где величина n *была определена ранее, а* $\eta_m = \sqrt{1 - dm^2}$.

Каждое решение из семейства $S_m(\varphi_m)$ *устойчиво, если справедливо неравенство* $d < d_m$ $(d_m = 2/(6m^2 - 1))$ *и неустойчиво, если* $d > d_m$.

Отметим, что при $d = d_m$ реализуется критический случай трехкратного нулевого собственного значения спектра устойчивости. Подчеркнем, что при $d = d_m$ линейный дифференциальный оператор

$$Av = -\eta_m^2(v + \overline{v}) + dv_{xx} + 2\dim v_x,$$

где $v = v(x)$ удовлетворяет периодическим краевым условиям $v(x + 2\pi) = v(x)$, имеет трехкратное нулевое собственное значение, отвечающее собственным функциям (см. [3])

$$e_0(x) = i,\ e_1(x) = \cos x - 2im \sin x,\ e_2(x) = \sin x + 2im \cos x.$$

Там же было показано, что при

$$d = d_m(1 + \varepsilon\gamma/2),\ \gamma \in \mathbb{R}, m = \pm 1, \dots, \pm n$$

из состояний равновесия семейства $S_m(\varphi_m)$ краевой задачи (2), (3) при $\gamma < 0$ рождается двумерное инвариантное многообразие $M_2(\varepsilon, \varphi_m)$, заполненное состояниями равновесия. Все эти состояния равновесия неустойчивы. Для них получены асимптотические формулы

$$u_m(t,x,\varepsilon) = u_m(x,\varepsilon) = \eta_m \exp(imx + i\varphi_m)\Big[1 + \varepsilon^{1/2} a_m[\cos(x + \psi_m) - 2im \sin(x + \psi_m)] +$$
$$+ \varepsilon a_m^2[q_0 + q_1 \cos(2x + 2\psi_m) + iq_2 \sin(2x + 2\psi_m)] + o(\varepsilon)\Big],$$

где $a_m = \sqrt{\dfrac{6m^2 - 1}{3(16m^4 - 1)}}$, $q_0 = -\dfrac{4m^2 + 3}{4}$, $q_1 = \dfrac{1 - 4m^2}{4}$, $q_2 = \dfrac{m(4m^2 - 1)}{2}$, $\varphi_m, \psi_m \in \mathbb{R}$.

В работе [3] найдены состояния равновесия, отличные от уже указанных выше, которые будем называть состояниями равновесия третьего типа:

$$u = u(x) = p_m sn(\delta_m x, k),$$

где $k \in (0,1)$ — параметр эллиптического синуса $sn(y,k)$,

$$p_m = \frac{\sqrt{2}k_m}{\sqrt{1+k_m^2}},\ \delta_m = \frac{1}{\sqrt{d}\sqrt{1+k_m^2}}.$$

Величину k_m выбираем как принадлежащий интервалу $(0,1)$ корень уравнения

$$\frac{1}{m\sqrt{d}} = \frac{2}{\pi}(1+k^2)^{1/2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dy}{\sqrt{1-k^2\sin^2 y}},$$

у которого существует только одно решение $k = k_m = k_m(d)$ при $dm^2 < 1$.

Все состояния равновесия третьего типа неустойчивы.

3. Периодическая краевая задача для нелокального уравнения Гинзбурга-Ландау

В данном разделе будет рассмотрена краевая задача (4), (3). Этот вариант краевой задачи, в отличие от краевой задачи (2), (3), ранее не изучался. Краевая задача (4), (3) имеет нулевое решение, которое, конечно, неустойчиво, так как спектр устойчивости линеаризованной краевой задачи (4), (3):

$$u_t = u + du_{xx},\ u(t, x+2\pi) = u(t,x)$$

содержит собственное значение $\lambda_0 = 1 > 0$.

Решение краевой задачи (4), (3) можно представить в виде ряда Фурье

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t)\exp(inx),\ u_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(t,x)\exp(-inx)dx, n = 0, \pm1, ...$$

В результате для $u_n(t)$ получим систему из счетного числа обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$u_n' = (1-dn^2)u_n - u_nV(u), \tag{12}$$

где $u_n = u_n(t)$, $V(u) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|u_k|^2$. Последняя формула вытекает из равенства Парсеваля. Систему дифференциальных уравнений (12) можно дополнить начальными условиями

$$u_n(0) = f_n, n \in \mathbb{Z}, \tag{13}$$

где $f_n = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\exp(-inx)dx.$

В этом разделе будем считать, что $f(x) \in \mathbb{H}_k$. Через $\mathbb{H}_k$ обозначим, как обычно, пространство 2π периодических функций, для которых справедливо включение $f(x) \in \mathbb{W}_2^k[0, 2\pi]$, если $x \in [0, 2\pi]$ ($\mathbb{W}_2^k[0, 2\pi]$ — пространство Соболева). Следовательно, последовательность $\{f_k\}$ принадлежит $\mathbb{H}_{k,d}$ — дискретному аналогу пространства $\mathbb{H}_k$. В частности, сходятся ряды

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{2p}|f_n|^2,\ p = 0, 1, \dots k.$$

Замечание 1. Если $k = 0$ (рассматривается $\mathbb{H}_0$), тогда речь идет о пространстве периодических функций при $x \in (0, 2\pi)$, принадлежащих $\mathbb{L}_2(0, 2\pi)$. Наконец, $\mathbb{H}_{0,d} = l_2$ — пространство последовательностей $\{a_k\}, k = 0, \pm 1, \pm 2...$ для которых сходится ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$.

Положим

$$u_n = u_n(t) = r_n(t) \exp(i\varphi_n(t)) = r_n \exp(i\varphi_n), \tag{14}$$

$$f_n = \rho_n \exp(i\psi_n), \rho_n, \psi_n \in \mathbb{R},$$

где значения функций $\varphi_n(t), r_n(t) \in \mathbb{R}$, и, кроме того, $r_n \geq 0$.

В результате замен (14) вместо задачи Коши (12), (13) получим две новые задачи Коши

$$r_n' = a_n r_n - r_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k^2,\ a_n = 1 - dn^2, \tag{15}$$

$$r_n(0) = \rho_n, n = 0, \pm 1, \dots \tag{16}$$

$$\varphi_n' = 0, \varphi_n(0) = \psi_n, n = 0, \pm 1, ... \tag{17}$$

Задача Коши (17) имеет решение $\varphi_n(t) = \psi_n$. Следовательно, содержательным моментов является только анализ краевой задачи (15), (16).

Будем предполагать сначала, что $a_s \neq 0\,(d \neq 1/s^2)$. Рассмотрим два уравнения из системы (15). Одно из них с произвольным номером $s \neq 0$, а второе с номером $n = 0$, т.е. уравнения

$$r_s' = a_s r_s - r_s V(r),\ r_0' = a_0 r_0 - r_0 V(r).$$

Если теперь первое из них домножить на r_0, а второе на r_s и вычесть почленно, то получим равенство $r_s' r_0 - r_0' r_s = (a_s - a_0) r_s r_0$ и после преобразований

$$\left(\frac{r_s}{r_0}\right)' = (a_s - a_0)\frac{r_s}{r_0},\ a_s - a_0 = -ds^2,$$

где $r_s(0) = \rho_s,\ r_0(0) = \rho_0$. Откуда находим, что

$$r_s(t) = \beta_s r_0(t) \exp(-ds^2 t),\ \beta_s = \frac{\rho_s}{\rho_0}.$$

Следовательно,

$$V(r) = \frac{r_0^2(t)}{\rho_0^2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \rho_s^2 \exp(-2ds^2 t) = \frac{r_0^2(t)}{\rho_0^2} W(t),\ W(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \rho_s^2 \exp(-2ds^2 t),$$

где $W(t)$ — известная функция переменного t. Подчеркнем, что ряд в правой части последней формулы сходится при всех неотрицательных t, если, конечно, последовательность $\{\rho_s\} \in l_2$. Более того, функция $W(t)$ при всех $t > 0$ имеет производные любого порядка, т.к. ряды для $W(t)$ и $W^{(m)}(t)$:

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} \rho_s^2 \exp(-2ds^2 t),\ \sum_{s=-\infty}^{\infty} \rho_s^2 (-2ds^2)^m \exp(-2ds^2 t)$$

при всех натуральных m и $t \geq t_0$ сходятся равномерно (t_0 - любая положительная постоянная).

В результате получаем, что функция $r_0(t)$ может быть определена как решение следующей задачи Коши:

$$r_0' = r_0 - r_0^3 W_0(t), r_0(0) = \rho_0,$$

где $W_0(t) = \dfrac{1}{\rho_0^2} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_n^2 \exp(-2dn^2 t)$.

Уравнение для $r_0(t)$ — это уравнение Бернулли, что позволяет найти r_0 в явном виде:

$$r_0(t) = \rho_0 \frac{\exp(t)}{\sqrt{1 + S(t)}},\ S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\rho_n^2}{a_n} (\exp{(2a_n t)} - 1).$$

Следовательно,

$$r_n(t) = \rho_n \frac{\exp(a_n t)}{\sqrt{1 + S(t)}}.$$

Функция $S(t)$ обладает следующими свойствами:

1. $S(t) \geq 0$ при всех $t,\ S(0) = 0, S(t) > 0$, если $t > 0$;

2. При $t > 0$ функция $S(t)$ имеет производные любого порядка ($S(t) \in \mathbb{C}^\infty(0, \infty)$). Проверка достаточно стандартна. Во-первых, при $t > 0$ справедливо неравенство $(\exp(2a_n t) - 1)/a_n > 0$. Во-вторых,

$$S'(t) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_n^2 \exp(2a_n t),\ S''(t) = 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_n^2 a_n \exp(2a_n t)$$

и при $t \geq t_0 > 0$, где t_0 — любая положительная постоянная, ряды в правой части последних формул равномерно сходятся. Аналогично доказываем, что существуют производные $S(t)$ любого порядка.

Был разобран общий случай, когда предполагалось, что $\rho_k \neq 0, a_k \neq 0$ при любых целых k. Два особых случая следует разобрать отдельно.

Пусть $\rho_s = 0$ при каком-то $s \in \mathbb{Z}$, то $r_s(t) \equiv 0$, а в формуле для $S(t)$ отсутствует слагаемое с этим номером. Перейдем ко второму особому случаю.

Если d — такая постоянная, что $a_p = 0$ при некотором p : $(a_{-p} = 0)$, т.е. $d = 1/p^2$, то меняется формула для $S(t)$. В последнем случае получаем, что

$$S(t) = \sum_{n=-\infty, n\neq p,-p}^{\infty} \frac{p_n^2}{a_n}(\exp(2a_n t) - 1) + 2(\rho_p^2 + \rho_{-p}^2)t.$$

Возвратимся к комплексной форме записи, т.е. к задаче Коши (12), (13). Получаем, что

$$u_k(t) = \rho_k \exp(i\psi_k)\frac{\exp(a_k t)}{\sqrt{1+S(t)}} = f_k \frac{\exp(a_k t)}{\sqrt{1+S(t)}}. \tag{18}$$

.

Наконец, решение краевой задачи (4), (3)

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1+S(t)}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k \exp(i\psi_k)\exp(a_k t)\exp(ikx)$$

или

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1+S(t)}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \exp(a_k t)\exp(ikx), \tag{19}$$

если вспомнить, что $f_k = \rho_k \exp(i\psi_k)$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $f(x) \in \mathbb{H}_k$ $(k = 0, 1, 2...)$.

1. Тогда функция $u(t,x) \in \mathbb{C}^\infty$, *если* $t > 0$ $(t \geq t_0 > 0)$.

2. Формула (19) определяет решение $u(t,x)$ *начально-краевой задачи (4), (3), (5), для которого* $\lim\limits_{t\to 0+} u(t,x) = f(x)$. *Этот предел следует понимать в смысле нормы пространства* $\mathbb{H}_k$.

Замечание 2. Краевая задача (4), (3) демонстрирует все свойства, характерные для параболических уравнений (см. определения из [2],[4]).

Возвратимся теперь к анализу краевой задачи (4), (3), для которой мы только что показали существование решения при всех $t > 0$, т.е. существование глобального решения начально-краевой задачи (4), (3), (5).

Перейдем к следующему вопросу при анализе краевой задачи (4), (3): это вопрос о поведении ее решений при $t \to \infty$.

Теорема 3. *Краевая задача (4), (3) имеет однопараметрическое семейство состояний равновесия A_0 :*

$$u(t,x) = u_0(x) = \exp(i\varphi_0), \varphi_0 \in \mathbb{R},$$

а также n трехпараметрических семейств состояний равновесия A_m :

$$u(t,x) = u_m(x) = \eta_m \exp(imx + i\varphi_m) + \eta_{-m} \exp(-imx + i\varphi_{-m}),$$

где φ_m, φ_{-m} — произвольные действительные постоянные, η_m, η_{-m} — неотрицательные постоянные, для которых справедливо равенство

$$\eta_m^2 + \eta_{-m}^2 = a_m.$$

Они существуют при тех номерах $m, -m$, для которых $a_m = 1 - dm^2 > 0$, т.е. $m = 1, \ldots, n$, где $n = [\sqrt{1/d}]$, если $\sqrt{1/d} \notin \mathbb{N}$ и $n = [\sqrt{1/d}]-1$, если $\sqrt{1/d} \in \mathbb{N}$.

Пусть $\{0\}$ — нулевое состояние равновесия. Положим $A = \{0\} \bigcup A_0 \bigcup\limits_{m=1}^{n} A_m$, где n было определено ранее (сумма $\bigcup\limits_{m=1}^{n} A_m$ отсутствует, если $n = 0$). Справедливо утверждение.

Теорема 4. *Инвариантное множество A — глобальный аттрактор для решений краевой задачи (4), (3).*

Напомним, что инвариантное множество A является глобальным аттрактором, если все решения краевой задачи с начальными условиями, которые не принадлежат инвариантному множеству A с течением времени приближаются к нему.

Справедливость теоремы 2 проверяется подстановкой указанных решений в краевую задачу (4), (3) (см. формулу (19)) и аналогично проверяется справедливость теоремы 3.

Для доказательства теоремы 4 необходимо доказать, что решение краевой задачи (4), (3) с течением времени приближаются к A. В свою очередь, множество A состоит $n+2$ несвязанных компонент: $\{0\}$ и $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Следовательно, необходимо показать, что любое решение $u(t,x) \notin A$ с течением времени приближается к одной из указанных компонент и проверка данного свойства краевой задачи (4), (3) может быть сведена к доказательству трех утверждений.

Рассмотрим вспомогательную систему дифференциальных уравнений (12) и пусть $f_0 \neq 0\,(\rho_0 \neq 0)$, где f_0 — коэффициент ряда Фурье функции $f(x)$, а $\rho_0 = |f_0|$.

Тогда справедливо утверждение.

Лемма 1. $\lim\limits_{t\to\infty} |u_m(t)| = 0$, *если $m = \pm 1, \ldots,$ а* $\lim\limits_{t\to\infty} |u_0(t)| = 1$.

Утверждение $\lim\limits_{t\to\infty}|u_0(t)| = 1$ сводится к проверке предельного равенства

$$\lim_{t\to\infty}\rho_0\frac{\exp(t)}{\sqrt{1+S(t)}} = 1,$$

т.к. $|u_0(t)| = r_0(t)$, а $r_0(t) = \rho_0\dfrac{\exp(t)}{\sqrt{1+S(t)}}$. С другой стороны

$$\rho_0\frac{\exp(t)}{\sqrt{1+S(t)}} = \frac{\rho_0}{\sqrt{K(t)}},$$

где $K(t) = \exp(-2t) + \dfrac{\rho_0^2}{a_0}(1-\exp(-2t)) + \sum\limits_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\dfrac{\rho_m^2}{a_m}(\exp(-2dm^2t)-\exp(-2t))$. Ясно, что $\lim\limits_{t\to\infty}K(t) = \rho_0^2/a_0 = \rho_0^2$ $(a_0 = 1)$. Отметим, что каждый член равномерно сходящегося ряда стремится к нулю при $t\to\infty$.

Кроме того, при $m\neq 0$ функция

$$|u_m(t)| = r_m(t) = \frac{\rho_m}{\rho_0}\exp(-dm^2t)r_0(t)$$

и, следовательно, при $t\to\infty$ имеет нулевой предел. Из леммы 1, естественно, вытекает, что таким образом выбранные решения краевой задачи (4), (3)

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}u_k(t)\exp(ikx),\ u_k(t) = f_k\frac{\exp(a_kt)}{\sqrt{1+S(t)}}$$

приближаются к циклу A_0.

Рассмотрим теперь второй вариант выбора начальных условий. Пусть

$$f_0 = 0,\ldots,f_{\pm(l-1)} = 0,$$

но $|f_l|^2+|f_{-l}|^2\neq 0$, где натуральное число $l\leq n$. Итак, справедливо утверждение.

Лемма 2. $\lim\limits_{t\to\infty}|u_l(t)|^2 = \dfrac{\rho_l^2}{\rho_l^2+\rho_{-l}^2}a_l, \lim\limits_{t\to\infty}|u_{-l}(t)|^2 = \dfrac{\rho_{-l}^2}{\rho_l^2+\rho_{-l}^2}a_{-l},\quad a_l = a_{-l} = 1-dl^2$ *и* $\lim\limits_{t\to\infty}|u_k(t)| = 0$, *где* $|k|>l$.

Доказательство леммы 2 использует то обстоятельство, что условие $f_0 = 0,\ldots,f_{\pm(l-1)} = 0$ влечет тождества $u_0(t) = 0,\ldots,u_{\pm(l-1)} = 0$. После чего вычисляются соответствующие пределы практически тем же способом, который был использован при доказательстве леммы 1.

Лемма 3. *Пусть* $k>n$. *Тогда*

$$\lim_{t\to\infty}u_{\pm k}(t) = 0.$$

Действительно,

$$|u_k(t)| = \rho_k \frac{\exp(a_k t)}{\sqrt{1+S(t)}} \le \rho_k \exp(a_k t),$$

но при этих k справедливо неравенство $a_k < 0$. Лемма доказана.

Из леммы 2 вытекает, что все решения краевой задачи (4), (3), если выполнены условия леммы 2 приближаются к инвариантному многообразию A_l.

Из леммы 3, в частности, вытекает следующее. Пусть $f_0 = 0, f_{\pm 1} = 0, \ldots, f_{\pm(k-1)} = 0\,(k > n)$. Тогда $u_0(t) \equiv 0, u_{\pm 1}(t) \equiv 0, \ldots, u_{\pm(k-1)} \equiv 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} u_m(t) = 0$ при всех m. Последнее означает, что соответствующие решения краевой задачи (4), (3) стремятся к нулю, если $t \to \infty$.

Непосредственным следствием теоремы 3 будет утверждение о том, что A_0 – локальный аттрактор, а оставшиеся компоненты глобального аттрактора A, т.е. $A_1, A_2, \ldots, A_n, \{0\}$ седловые инвариантные многообразия в смысле классического определения устойчивости инвариантных многообразий.

Действительно, пусть $u(0,x) = f(x)$, где функция $f(x)$ близка к циклу A_0. Тогда, $|f_0| \neq 0$, т.е. $\rho_0 \neq 0$. Из теоремы 4 и леммы 1 вытекает, что такое решение приближается к циклу A_0 и он устойчив.

Пусть теперь $u(0,x) = f_l(x)$, где функция $f_l(x)$ близка к трехмерному инвариантному многообразию A_l. При этом среди функций $f_l(x)$ можно взять такую, что $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_l(x)dx = \delta$, где $\delta \neq 0$, но тем не менее δ — достаточно малая положительная постоянная. Но опять же, из теоремы 4 и леммы 1 вытекает, что функция $u_l(t,x)$ соответствующая $f_l(x)$, также приближается к A_0, но не к A_l и не к $\{0\}$.

Если взять подпространство пространства начальных условий, выделенное равенствами

$$f_0 = 0, f_{\pm 1} = 0, \ldots, f_{\pm(l-1)} = 0,\ l \le n,$$

то решения краевой задачи (4), (3) с начальными условиями, для которых $|f_l|^2 + |f_{-l}|^2 \neq 0$ с течением времени приближаются к A_l. Можно сказать, что трехмерное инвариантное многообразие A_l “условно” устойчиво. Напомним, что неустойчивость $\{0\}$ вытекает из линейного анализа краевой задачи (4), (3).

4. Заключение

В статье рассмотрены две версии вариационного уравнения Гинзбурга-Ландау с периодическими краевыми условиями.

Результаты анализа традиционного варианта вариационного уравнения Гинзбурга-Ландау показали, что краевая задача (2), (3) при достаточно малом

d имеет некоторое количество одномодовых состояний равновесия, часть которых асимптотически устойчива. Анализ возникающих бифуркационных задач показал, что для краевой задачи (2), (3) характерны жесткие докритические бифуркации. Они приводят к образованию в окрестности одномодовых состояний равновесия двумерных седловых инвариантных многообразий, сформированных пространственно неоднородными решениями, неустойчивыми паттернами.

В работах [7], [8] был изучен вопрос о существовании глобального аттрактора для краевой задачи (2), (3). Из результатов этих работ вытекает, что глобальный аттрактор существует, но при существенных ограничениях. Он существует для решений с начальными условиями, принадлежащими $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$. Кроме того, в этих работах использован метод, который не позволяет определить структуру глобального аттрактора и его размерность. Возможна лишь оценка размерности глобального аттрактора.

Иная ситуация реализована при анализе краевой задачи (4), (3) для нелокального варианта вариационного уравнения Гинзбурга-Ландау. В этом случае глобальный аттрактор и глобальные решения существуют при любом выборе периодических функций $f(x) \in \mathbb{L}_2(0, 2\pi)$. Структура глобального аттрактора достаточна проста — это совокупность состояний равновесия, в том числе, неоднородных. При этом глобальный аттрактор разбивается на $n+2$ компоненты, где $n = [\sqrt{1/d}]$ или $n = [\sqrt{1/d}] - 1$ и размерность их равна 1 или 3, если не считать нулевое состояние равновесия. Напомним, что

$$\dim(A_0) = 1,\ \dim(A_k) = 3,\ k = 1, \ldots, n,$$

где $n = [\sqrt{1/d}]$, если $\sqrt{1/d} \notin \mathbb{N}$ или $n = [\sqrt{1/d}] - 1$, если $\sqrt{1/d} \in \mathbb{N}$.

Уместно отметить, что в большинстве работ, где изучался вопрос о существовании глобальных аттракторов для известных эволюционных уравнений или систем, как правило, приводилась лишь оценка его размерности (см, например, [1], [5],[18], а также литературные ссылки в этих работах).

Список цитируемых источников

1. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1988.

   Babin A. V., Vishik M. I. Attractors of evolutionary equations. M.: Nauka, 1988.

2. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1977.

   Krein S. G. Linear Equations in Banach Spaces. M.: Nauka, 1977.

3. *Куликов А. Н., Куликов Д. А.* Состояния равновесия вариационного уравнения Гинзбурга-Ландау. Вестник МИФИ. 6, No.6, 496-502 (2017).

Kulikov A. N., Kulikov D. A. Equilibrium states of the variational Ginzburg-Landau equation. Vestnik MIFI. 6, No.6, 496-502 (2017).

4. *Соболевский П. Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве. Труды ММО. 10, 297-350 (1961).

   Sobolevskii P. E. Equations of a parabolic type in a Banach space. Moscov. Mat. Obsc. 10, 297–350 (1961).

5. *Чуешов И. Д.* Глобальные аттракторы в нелинейных задачах математической физики. УМН. 48, No.3, 135-162 (1993).

   Chueshov I. D. Global attractors for non-linear problems of mathematical physics. Uspekhi Mat. Nauk. 48, No.3, 135-162 (1993).

6. *Aronson I. S., Kramer L.* The world of the complex Ginzburg-Landau equation. Reviews of modern physics. 74, 99-143 (2002).

7. *Bartucelli M., Constantin P., Doerling C. R., Gibbon J. D., Gisselfalt M.* On the possibility of soft and hard turbulence in the complex Ginzburg–Landau equation. Physica D. V. 44, 421-444 (1990).

8. *Doering Ch. R., Gibbon J. D., Levermore C. D.* Weak and strong solutions of the complex Ginzburg-Landau equation. Physica D. 71, 285-318 (1994).

9. *Drazin P. G.* Introduction to hydrodynamic stability. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002.

10. *Duan J., Hung V. L., Titi E. S.* The effect of nonlocal interactions on the dynamics of the Ginzburg–Landau equation. ZAMP. 47, 432-455 (1996).

11. *Elmer F. J.* Nonlinear and nonlocal dynamics of spatially extended systems: stationary states, bifurcations and stability. Physica D. 30, 321-341 (1988).

12. *Kulikov A. N., Kulikov D. A.* Local bifurcations of plane running waves for the generalized cubic Schrodinger equation. Differential Equation. 46, 1299–1308 (2010).

13. *Kulikov A. N., Rudy A. S.* States of equilibrium of condensed matter within Ginzburg-Landau ψ^4 — model. Chaos, Solitons and Fractals. 15, 75-85 (2003).

14. *Kuramoto Y.* Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin.: Springer, 1984.

15. *Matkowsky B. J., Volpert V. A.* Coupled nonlocal complex Ginzburg–Landau equations in gasless combustion. Physica D. 54, 203-219 (1992).

16. *Scheuer J., Malomed B. A.* Stable and chaotic solutions of the Ginzburg–Landau equation with periodic boundary conditions. Physica D. 161, 102-115 (2002).

17. *Tanaka D., Kuramoto Y.* Complex Ginzburg–Landau equation with nonlocal coupling. Phys. Review E. E68, 026219-1-026219-8 (2003).

18. *Temam R.* Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. New York: Springer-Verlag, 1997.

19. *Volpert V. A., Nepomnyaschchy A., Stanton L., Golovin A. A.* Bounded Solutions of Nonlocal Complex Ginzburg–Landau Equations for a Subcritical Bifurcation. SIAM. 7, 265-283 (2008).

20. *Whitham G. B.* Linear and Nonlinear Waves. New-York: John Wiley and Sons Inc, 1974.

Получена 15.05.2020

Динамические системы, 2020, том 10(38), №2, 166–178

УДК 517.929

Об асимптотической устойчивости перевёрнутого маятника с трением и двукратным запаздыванием в механизме обратной связи. I[1]

М. В. Мулюков

Пермский государственный национальный исследовательский университет,

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь 614990. *E-mail: Mulykoff@gmail.com*

Аннотация. Рассмотрена линейная автономная модель перевёрнутого плоского маятника с двойным запаздыванием в механизме обратной связи и демпфирующей силой. Величины запаздываний соотносятся как один к двум. На коэффициенты модели наложены некоторые ограничения, при условии соблюдения которых получены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости модели. Критерий устойчивости дан в геометрической и аналитической формах.

Ключевые слова: перевёрнутый маятник, дифференциальные уравнения с запаздыванием, асимптотическая устойчивость.

On asymptotic stability of inverted pendulum with friction and with double delay in feedback. I

M. V. Mulyukov

Perm State National Research University, Perm 614990,

Perm National Research Polytechnic Unversity, Perm 614990.

Abstract. The linear autonomous model of inverted pendulum with delayed feedback and friction force is considered. There are two terms with delay: the magnitude of the largest delay is twice as large as the least one. The model is considered under some condition on its coefficients. The necessary and sufficient conditions of asymptotic stability of this model are obtained under this coefficient condition. The investigation is based on development of D-subdivision for two-parametric differential equations. The stability domain is described analytically and represented geometrically. The results obtained can be useful for investigations of local asymptotic stability of non-linear models of inverted pendulum with double delay in feedback and with friction force.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-01-00928

Keywords: inverted pendulum, differential equations with delay, asymptotic stability.
MSC 2010: 34K06, 34K20

Введение

Стабилизации перевёрнутого маятника — задача, естественно возникающая во многих прикладных науках, интересна и с теоретической точки зрения.

Наиболее известным решением этой задачи служит метод стабилизации посредством вертикальных колебаний основания. Впервые этот метод был строго обоснован Н. Н. Боголбовым [2] (по-видимому, ещё в 1942) и наглядно продемонстрирован П. Л. Капицей [3] в 1951.

Другой способ стабилизировать колебания перевёрнутого маятника вблизи вертикального положения равновесия состоит в управлении в виде обратной связи. Управляющая сила может реагировать на изменения в угле отклонения и угловой скорости как мгновенно [10], так и с некоторым запаздыванием.

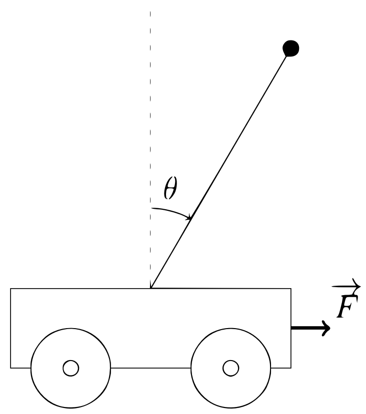


Рис. 1. Схема обратного маятника

По-видимому, G. Stepan первым предложил и исследовал на устойчивость модель, учитывающую запаздывание в механизме обратной связи перевёрнутого маятника [19]. Линеаризация этой модели приводит к дифференциальному уравнению второго порядка с одним постоянным сосредоточенным запаздыванием. В настоящий момент наиболее активно эта идея развивается в нескольких направлениях: либо изучение эффекта нелинейности (как правило, имеет место управление с переключением) [15, 16, 17], либо усложнение и подробное изучение линейных моделей [4, 5, 6, 11, 13, 18].

На рисунке 1 изображён перевёрнутый маятник на тележке, к которой приложена сила $\overrightarrow{F}$. Вообще говоря, величина этой силы может представлять собой функционал как от угла наклона θ, так и от угловой скорости $\dot{\theta}$.

Настоящая работа продолжает исследование [6], в которой рассматривается случай, когда линеаризация функционала $\overrightarrow{F}$ вблизи нулевого положения равновесия имеет вид:

$$\overrightarrow{F}(t) = -k_1\theta(t-h) - k_2\theta(t-2h),$$

где $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ и $h > 0$.

В отличии от указанной статьи в настоящей работе учитывается сила трения в шарнире, пропорциональная угловой скорости $\dot{\theta}$. Обозначим через $\sigma > 0$ коэффициент пропорциональности этой силы.

Обозначим частоту собственных колебаний маятника через $\omega > 0$.

Основная задача — найти критерий асимптотической устойчивости модели маятника, линеаризованной вблизи вертикального положения равновесия, в терминах параметров задачи: $\omega, \sigma, h, k_1, k_2$.

Знак величины $\omega^2 + k_2$ оказывает влияние на структуру области устойчивости и на доказательство теоремы об устойчивости модели, поэтому исследование модели разбито на две части в зависимости от знака этой величины. В настоящей статье рассмотрен случай, когда данный параметр не отрицателен.

1. Модель

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{\theta}(t) - \omega^2\theta(t) + \sigma\dot{\theta}(t) + k_1\theta(t-h) + k_2\theta(t-2h) = 0, \tag{1}$$

где $\omega, \sigma, h > 0$ и $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Для корректной постановки задачи требуется ввести суммируемую начальную функцию ψ так, что $\theta(\xi) = \psi(\xi)$ при $\xi \in (-h, 0)$. Тогда решение уравнения (1) существует и единственно в пространстве функций с локально абсолютно непрерывными производными.

Под асимптотической устойчивостью уравнения (1) будем понимать стремление к нулю его решения вместе с производной при любой суммируемой начальной функции ψ и любых начальных данных $x(0), \dot{x}(0) \in \mathbb{R}$. Как известно, асимптотическая устойчивость эквивалентна экспоненциальной и, следовательно, эквивалентна расположению в отрицательной полуплоскости всех корней *характеристической функции* Φ, которая в данном случае имеет вид:

$$\Phi(z) = z^2 - \omega^2 + \sigma z + k_1 e^{-zh} + k_2 e^{-2zh}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Рассмотрим *характеристическое уравнение* в виде

$$z^2 e^z + \chi \operatorname{ch} z + \beta + \zeta \operatorname{sh} z + \mu z e^z = 0, \tag{3}$$

Уравнения (3) и $\Phi(z/h) = 0$ имеет одинаковый набор корней в комплексной плоскости, если положить

$$\chi = h^2(k_2 - \omega^2), \quad \zeta = -h^2(\omega^2 + k_2), \quad \beta = h^2 k_1, \quad \mu = h\sigma.$$

Далее будем исследовать уравнение (3) в предположении независимости его коэффициентов. Однако, в общем случае построить область устойчивости в пространстве четырёх параметров — достаточно сложная задача, поэтому ниже будут наложены три ограничения.

Во-первых, будем считать, что $\mu > 0$. Во-вторых, $\chi + \zeta < 0$. В третьих, $\zeta \leqslant 0$.

Первые два условия эквивалентны неравенствам $h\sigma > 0$ и $\omega^2 > 0$. Очевидно, эти условия не ограничивают общность задачи.

Третье условие эквивалентно неравенству $\omega^2 + k_2 \geqslant 0$. Данное неравенство не вытекает из постановки задачи. Таким образом, данное неравенство является существенным ограничением общности задачи. Случай $\omega^2 + k_2 < 0$ должен быть рассмотрен отдельно.

Теорема. *Пусть* $\chi + \zeta < 0 < \mu$ *и* $\zeta \leqslant 0$. *Тогда все корни уравнения* (3) *имеют отрицательные вещественные части в том и только том случае, если выполняются неравенства:*

$$\chi + \beta > 0, \tag{4}$$

$$\zeta + \mu > 0, \tag{5}$$

$$\chi \cos\eta + \beta < \eta^2 \cos\eta + \mu\eta \sin\eta, \tag{6}$$

где η — *единственный корень уравнения*

$$\mu\eta \operatorname{ctg}\eta = \eta^2 - \zeta \tag{7}$$

из интервала $(0, \pi)$.

Доказательство. При фиксированных значениях параметров ζ и μ уравнение (3) имеет вид:

$$\chi f_1(z) + \beta f_2(z) + f_0(z) = 0, \tag{8}$$

где $f_1(z) = \operatorname{ch} z$, $f_2(z) = 1$ и $f_0(z) = z^2 e^z + \zeta \operatorname{sh} z + \mu z e^z$.

Уравнение вида

$$r_1 f_1(z) + r_2 f_2(z) + f_0(z) = 0, \tag{9}$$

где $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ называется *двупараметрическим характеристическим уравнением.* Проведём исследование уравнения (8) в соответствии с методикой, изложенной в работе [7].

Обозначим $F(z, r_1, r_2) = r_1 f_1(z) + r_2 f_2(z) + f_0(z)$. Для краткости, функцию $F(\cdot, r_1, r_2)$ будем называть *устойчивой*, если все её корни лежат слева от мнимой оси.

Будем искать в пространстве параметров r_1, r_2 множество точек, называемое *областью устойчивости*, которым соответствуют устойчивые функции $F(\cdot, r_1, r_2)$. Принадлежность точки $\{\chi, \beta\}$ этой области эквивалентна тому, что при заданных значениях ζ и μ все корни уравнения (8) лежат слева от мнимой оси.

Введём обозначения:

$$\Delta(\varphi) = Im f_1(-i\varphi) f_2(i\varphi), \quad u_1(\varphi) = Im f_0(i\varphi) f_2(-i\varphi),$$

$$u_2(\varphi) = Im f_0(-i\varphi) f_1(i\varphi), \quad \mathbf{u} = \{u_1, u_2\}.$$

Тогда

$$\mathbf{u}(\varphi) = \big((\zeta - \varphi^2)\sin\varphi + \mu\varphi\cos\varphi\big)\{1, -\cos\varphi\}.$$

Неотрицательные корни системы уравнений $\mathbf{u}(\varphi) = \mathbf{0}$ называются *частотами.* Обозначим упорядоченное по возрастанию множество частот через $\{\theta_n\}$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Каждой частоте θ_n соответствует прямая L_n, которая описывается уравнением $F(i\theta_n, r_1, r_2) = 0$.

Легко видеть, что $\Delta(\varphi) \equiv 0$ и $\mathbf{u}(\varphi) \not\equiv \mathbf{0}$, следовательно, уравнение (8) представляет собой *двупараметрическое характеристическое уравнение третьего рода* [7, с. 97]. Для уравнений этого типа число корней с положительной вещественной частью в плоскости параметров меняется только при переходе через прямые L_n, поэтому области D-разбиения представляют собой выпуклые многоугольники (ограниченные или неограниченны). Этот факт существенно упрощает анализ изменения области устойчивости при изменении параметров μ и ζ.

Легко видеть, что при любых ζ и μ имеем $\theta_0 = 0$, следовательно, прямая L_0 описывается уравнением $r_1 + r_2 = 0$.

Если $n \geqslant 1$, то уравнение прямой L_n имеет вид:

$$r_1 \cos\theta_n + r_2 = \mu\theta_n \sin\theta_n + \theta_n^2 \cos\theta_n.$$

Далее будем полагать, что $\mu > 0$.

В рассматриваемом случае уравнение $\mathbf{u}(\varphi) = \mathbf{0}$ эквивалентно уравнению

$$\mu\varphi \operatorname{ctg}\varphi = \varphi^2 - \zeta. \tag{10}$$

Пусть $n \geqslant 1$. Тогда θ_n — корень уравнения (10) из интервала

$$\begin{cases} \bigl(\pi(n-1), \pi n\bigr), & \text{если } \zeta+\mu>0, \\ \bigl(\pi n, \pi(n+1)\bigr), & \text{если } \zeta+\mu \leqslant 0. \end{cases}$$

Если $\mathbf{u}'(\theta_n) \neq \mathbf{0}$, то обозначим через $\mathcal{H}_n$ полуплоскость, удовлетворяющая неравенству

$$F(i\theta_n, r_1, r_2) f_2(-i\theta_n) u_1'(\theta_n) > 0. \tag{11}$$

Прямая L_n делит плоскость на две полуплоскости. Заметим, что $\mathcal{H}_n$ — эта та из этих полуплоскостей, для которой при переходе через прямую L_n, количество корней с неотрицательной вещественной частью уменьшается.

Имеем

$$f_2(-i\varphi) u_1'(\varphi) = -(2+\mu)\varphi \sin\varphi + (\zeta+\mu-\varphi^2)\cos\varphi.$$

В силу уравнения (10) имеем:

$$f_2(-i\theta_n) u_1'(\theta_n) = -\frac{2\theta_n \sin^2\theta_n + \mu(\theta_n - \sin\varphi\cos\theta_n)}{\sin\theta_n}. \tag{12}$$

Заметим, что при любом натуральном n числитель в выражении (12) положителен, поэтому полуплоскость $\mathcal{H}_n$ определена и описывается неравенством:

$$(r_1\cos\theta_n + r_2 - \theta_n^2\cos\theta_n - \mu\theta_n\sin\theta_n)\sin\theta_n < 0. \tag{13}$$

Если $\zeta+\mu \neq 0$, то полуплоскость $\mathcal{H}_0$ определена и задаётся неравенством

$$(\zeta+\mu)(r_1+r_2) > 0.$$

Обозначим $\mathcal{D}_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} \mathcal{H}_n$.

Известно [7, с. 101, Следствие 4.1], что если $\mathcal{D}_0 \neq \emptyset$, то либо $\mathcal{D}_0$ является областью устойчивости, либо область устойчивости пуста.

Далее будем полагать, что $\zeta \leqslant 0$.

Покажем, что при $\zeta+\mu \leqslant 0$ область устойчивости пуста.

В работе [8, с. 2060, Теорема 4] рассматривается частный случай уравнения (3) при $\chi = 0$. В частности, показано, что условие $\zeta+\mu>0$ является необходимым для того, чтобы все корни уравнения

$$z^2 e^z + \beta + \zeta \operatorname{sh} z + \mu z e^z = 0$$

лежали слева от мнимой оси. Следовательно, функция $F(\cdot, 0, \beta)$ неустойчива при любом $\beta \in \mathbb{R}$ и $\zeta + \mu \leqslant 0$. Точки, сответствующие этому уравнению, принадлежат вертикальной оси.

В силу $\zeta \leqslant 0$ имеем $\operatorname{ctg}\theta_n > 0$ (при $n \geqslant 1$), следовательно, $\mu\theta_n \operatorname{tg}\theta_n + \theta_n^2 > 0$, то есть начало координат O принадлежит $\mathcal{D}_1$.

Кроме того, точка O принадлежит прямой L_0, поэтому можем воспользоваться вторым пунктом следствия 4.3 работы [7, с. 101], согласно которому область устойчивости пуста, если существует прямая, проходящая через точку O, но не совпадающая с L_0 такая, что в любой точке этой прямой функция $F(\cdot, r_1, r_2)$ не является устойчивой. Этим условиям удовлетворяет вертикальная ось. Таким образом, при $\zeta + \mu \leqslant 0$ область устойчивости уравнения (3) пуста.

Далее будем полагать, что $\zeta + \mu > 0$.

Во-первых, отметим, что согласно работе [8, с. 2068, Теорема 5] область устойчивости не пуста (найдутся значения χ такие, что уравнение $F(\chi, 0, \cdot)$ будет устойчивым).

При $r_1 = r_2 = 0$ и $n > 0$ неравенство (13) примет вид: $0 < \mu\theta_n \operatorname{tg}\theta_n + \theta_n^2$, которое, очевидно, справедливо. Следовательно, начало координат принадлежит полуплоскости $\mathcal{H}_n$ при любом $n > 1$. В то же самое время начало координат принадлежит прямой L_0, таким образом, $\mathcal{D}_0$ не пуста и, следовательно, является областью устойчивости.

Обозначим через L^* прямую $r_1 = -\zeta$, а через $\mathcal{H}^*$ — полуплоскость, расположенную левее данной прямой.

Обозначим точку пересечения прямых L_0 и L_1 через A; точку пересечения L_0 и L^* — через B; точку пересечения L_1 и L^* — через C. Найдём координаты этих точек.

Имеем $A\bigl(-g_\mu(\theta_1), g_\mu(\theta_1)\bigr)$, где

$$g_\mu(\varphi) = \varphi\frac{\mu\sin\varphi + \varphi\cos\varphi}{(1 - \cos\varphi)}$$

,

$$B(-\zeta, \zeta), \quad C\bigl(-\zeta, \mu\theta_1\sin\theta_1 + (\zeta + \theta_1^2)\cos\theta_1\bigr).$$

На рисунке 2 обозначен треугольник ABC. Вертикальная прямая L^* ограничивает рассматриваемую полуплоскость (слева).

При $\zeta \to -\mu$ точка B стремится к точке C, поэтому в плоскости $\zeta + \mu = 0$ треугольник ABC вырождается в отрезок, но при $\zeta + \mu > 0$ данный треугольник имеет непустую внутренность, которая, как мы покажем ниже, совпадает с областью $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{H}^*$.

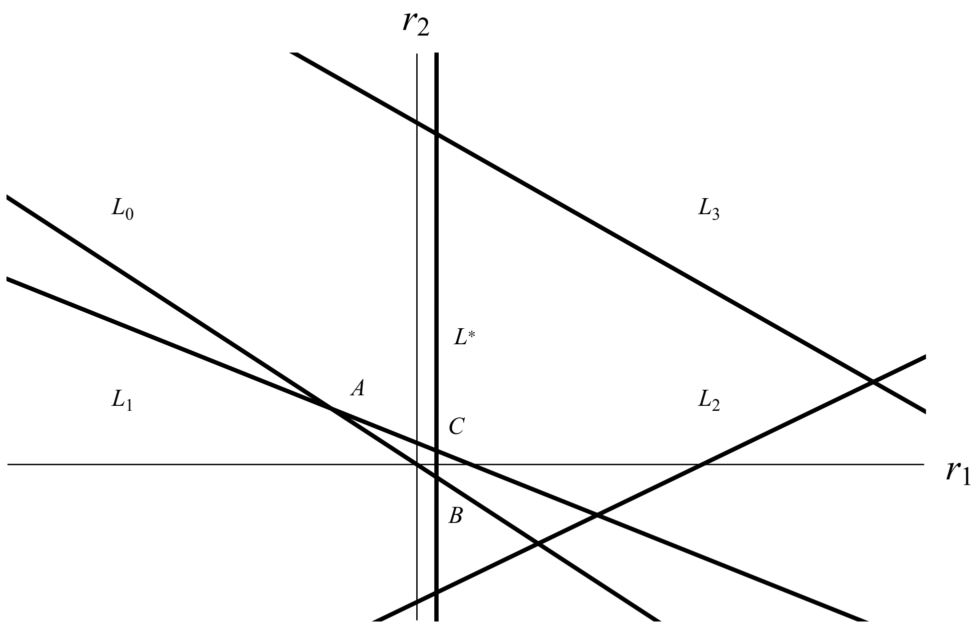


Рис. 2. Сечение область устойчивости уравнения (3) при $\zeta = -2$ и $\mu = 4$

Фактически, утверждение теоремы свелось к тому, чтобы доказать, что вершины треугольника ABC принадлежит $\mathcal{H}_n$ при любом $n > 1$.

Покажем, что точка A принадлежит $\mathcal{H}_n$ при любом $n \geqslant 1$. По определению это эквивалентно неравенству:

$$-g_\mu(\theta_1) + \frac{g_\mu(\theta_1)}{\cos\theta_n} < \theta_n^2 + \mu\theta_n \operatorname{tg}\theta_n. \tag{14}$$

Преобразуем неравенство (14):

$$\big(-g_\mu(\theta_1) - \zeta\big) + \left(\frac{g_\mu(\theta_1)}{\cos\theta_n} - \frac{\mu\theta_n}{\sin\theta_n\cos\theta_n}\right) < -\zeta + \theta_n^2 - \mu\theta_n \operatorname{ctg}\theta_n. \tag{15}$$

В силу того, что θ_n — корень уравнения (7), правая часть неравенства (15) равна нулю.

Воспользовавшись тем, что θ_1 — корень уравнения (7), получим

$$-g_\mu(\theta_1) - \zeta = -\frac{\theta_1}{1-\cos\theta_1}\left(\theta_1(1+\cos\theta_1) + \mu\frac{1-\cos\theta_1}{\sin\theta_1}\right) < 0.$$

Далее,

$$\frac{\theta_n}{|\sin\theta_n|} > \frac{2+2\mu}{\mu} = \frac{1}{\mu}\max_{\varphi\in[0,\pi]} g_\mu(\varphi),$$

следовательно, $\mu\theta_n > g_\mu(\theta_1)\sin\theta_n$. Домножив левую и правую часть неравенства на $\operatorname{ctg}\theta_n$, получаем

$$\frac{g_\mu(\theta_1)}{\cos\theta_n} - \frac{\mu\theta_n}{\sin\theta_n\cos\theta_n} < 0.$$

Итак, выражение, стоящее слева в неравенстве (14), отрицательно, следовательно, неравенство верно. Таким образом, точка A принадлежит $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$.

Покажем, что точка B принадлежит $\mathcal{H}_n$ при любом $n \geqslant 1$. Для этого необходимо и достаточно показать выполнения неравенства:

$$\theta_n^2 + \mu\theta_n \operatorname{tg}\theta_n > \zeta\left(\frac{1}{\cos\theta_n} - 1\right).$$

Воспользуемся (7):

$$\frac{\mu\theta_n}{\cos\theta_n \sin\theta_n} > |\zeta|\left(2 - \frac{1}{\cos\theta_n}\right).$$

Усилим данное неравенство, воспользовавшись тем, что $\mu > |\zeta|$:

$$\frac{\theta_n}{\cos\theta_n \sin\theta_n} > 2 - \frac{1}{\cos\theta_n}.$$

Справедливость последнего неравенства вытекает из оценки

$$\varphi > \left|\sin\varphi(1 - 2\cos\varphi)\right|,$$

справедливой для $\varphi > \pi$.

Покажем, что точка C принадлежит $\mathcal{H}_n$ при любом $n \geqslant 1$.

Заметим, что если бы точка C не принадлежала $\mathcal{H}_n$ при некотором чётном n, то и точка B не принадлежала этой полуплоскости. Следовательно, остаётся рассмотреть случай, когда n — нечётное число, большее единицы.

Точка пересечения прямой L_n с осью ординат имеет координату:

$$r_2 = \sqrt{\theta_n^4 + \mu^2\theta_n^2 - \zeta^2}.$$

Эти значения монотонно растут с возрастанием n.

Точка пересечения L_n с прямой L_0 имеет абсциссу:

$$r_1 = \frac{\theta_n^2 \cos\theta_n + \mu\theta_n \sin\theta_n}{\cos\theta_n - 1} < 0.$$

Следовательно, прямые L_n и L_1 пересекаются в четвёртом квадранте, а точка C принадлежит первому или второму квадранту. Таким образом, теорема полностью доказана. □

Обозначив $\xi = \eta/h$ и проведя обратную замену, получим следующее утверждение:

Следствие. *Пусть* $\omega^2 + k_2 \geqslant 0$.

Тогда для того, чтобы уравнение (1) *было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства:*

$$\omega^2 < k_1 + k_2,$$

$$\sigma > h(\omega^2 + k_2),$$

$$k_1 < \frac{\xi^2(\xi^2 + \sigma^2) + \omega^4 - k_2^2}{\sqrt{\sigma^2\xi^2 + (\xi^2 + \omega^2 + k_2)^2}},$$

где ξ *— единственный корень уравнения*

$$h\xi = \operatorname{arcctg} \frac{\xi^2 + \omega^2 + k_2^2}{\sigma\xi}.$$

Заключение

В настоящей статье проведено частичное исследование устойчивости модели перевёрнутого плоского маятника с трением в случае, когда в механизме обратной связи имеется двукратное сосредоточенное постоянное запаздывание.

Для случая, когда коэффициенты уравнения (3) удовлетворяют неравенству $\omega^2 + k_2 \geqslant 0$, построен критерий асимптотической устойчивости. Критерий дан в наглядной геометрической и аналитической формах.

Автор выражает благодарность рецензенту за внимательное прочтение рукописи и замечания, способствовавшие улучшению изложения. Кроме того, автор признателен рецензенту за интересное освещение исторический части вопроса.

Список цитируемых источников

1. *Демиденко, Г. В., Дулепова, А. В.* Об устойчивости движения перевернутого маятника с вибрирующей точкой подвеса. Сиб. журн. индустр. матем. 21, № 4, 39–50 (2018). DOI: https://doi.org/10.17377/sibjim.2018.21.404

   Demidenko, G. V., Dulepova, A. V. On stability of the inverted pendulum motion with a vibrating suspension point. Journal of Applied and Industrial Mathematics, 12, № 4, 607–618 (2018). DOI: https://doi.org/10.17377/sibjim.2018.21.404

2. *Боголюбов, Н. Н.* Теория возмущений в нелинейной механике. Сб. тр. Ин-та строительной механики АН УССР. 44, 9-34 (1950).

   Bogolyubov, N. N. Teoriya vozmushchenij v nelinejnoj mekhanike. Sb. tr. In-ta stroitel'noj mekhaniki AN USSR. 44, 9-34 (1950). (in Russian)

3. *Капица, П. Л.* Маятник с вибрирующим подвесом. Успехи физических наук. 44, 7-20 (1951).

   Kapitza, P. L. Pendulum with a vibrating suspension. Usp. Fiz. Nauk, 44, 7–20 (1951). (in Russian)

4. *Мулюков, М. В.* Устойчивость одной линейной модели осциллятора с запаздывающей обратной связью. Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. № 4(27), 62–67 (2014).

   Mulyukov, M. V. Ustoichivost' odnoi lineinoi modeli ostsilliatora s zapazdyvaiushchei obratnoi sviaz'iu. Vestnik Permskogo universiteta. Seriia: Matematika. Mekhanika. Informatika, № 4(27), 62-67 (2014). (in Russian)

5. *Мулюков, М. В.* Устойчивость линейного автономного осциллятора с запаздывающей обратной связью. Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. № 3(30), 5–11 (2015).

   Mulyukov M.V. Ustoichivost' lineinogo avtonomnogo ostsilliatora s zapazdyvaiushchei obratnoi sviaz'iu. Vestnik Permskogo universiteta. Seriia: Matematika. Mekhanika. Informatika, № 3(30), 5-11 (2015). (in Russian)

6. *Мулюков, М. В.* Устойчивость перевернутого маятника с запаздывающей обратной связью. Прикладная математика и вопросы управления. № 4, 73-86 (2017).

   Mulyukov, M. V. Stability of inverted pendulum with delayed feedback, Applied Mathematics and Control Sciences, No.4, 73-86 (2017). (in Russian)

7. *Мулюков, М. В.* Устойчивость двупараметрических систем линейных автономных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием, Изв. ИМИ УдГУ. 51, 79–122 (2018). DOI: https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-51-04

   Mulyukov, M. V. Stability of two-parameter systems of linear autonomous differential equations with bounded delay, Izv. IMI UdGU, 51, 79–122 (2018). DOI: https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-51-04 (in Russian)

8. *Мулюков, М. В.* Устойчивость трехпараметрических систем двух линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Часть II. Сиб. электрон. матем. изв. 16, 2055–2079 (2019). DOI:https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.146

   Mulyukov, M. V., Stability of three-parameter systems of two linear differential equations with delay. Part II. Sib. elektron. Mat. Izv., 16, 2019–2054 (2019). DOI:https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.146 (in Russian)

9. *Поляков, А. Е.* О практической стабилизации систем с релейным запаздывающим управлением. Автомат. и телемех. №11, 81–95 (2010)

   Polyakov, A E. On practical stabilization of systems with delayed relay control. Autom. Remote Control, 71, No. 11, 2331-2344 (2010).

10. *Ряжских, А. В., Семенов, М. Е., Рукавицын, А. Г., Канищева, О. И., Демчук, А. А., Мелешенко, П. А.,* Стабилизация обратного маятника на двухколесном транспортном средстве, Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ., 9, №3, 41–50 (2017). DOI: https://doi.org/10.14529/mmph170306

    Ryazhskikh, V. I., Semenov, M. E., Rukavitsyn A. G., Kanishcheva O. I., Demchuk A. A., Meleshenko, P. A. Stabilization of inverted pendulum on a two-wheeled vehicle. Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz., 9, №3, 41–50 (2017). DOI: https://doi.org/10.14529/mmph170306 (in Russian)

11. *Севостьянов, Р. А., Шаяхметова, Л. В.* Стабилизация обратного маятника с учетом запаздывания, Труды II Международной научной конференции «Конвергентные когнитивно-информационные технологии» (стр. 318-324) (Convergent'2017). Москва, 24-26 ноября, 2017.

    Sevostyanov, R. A., Shayakhmetova L. V., Stabilization of the inverted pendulum considering delay, Proceedings of the II International scientific conference «Convergent cognitive information technologies» (Convergent'2017) (pp. 318-324). Moscow, Russia, November 24-26, 2017. (in Russian)

12. *Юрьева, О. Д., Баунина, А. В.* Об управлении и стабилизации перевернутого математического маятника вертикальными силами. Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. № 1, 123-130 (2018).

    Yurjeva, O. D., Baunina, A. V. On control and stabilization of the inverted pendulum by vertical forces. The Scientific Notes of Ulyanovsk State University, № 1, 123-130 (2018). (in Russian)

13. *Фишман, Л. З.* Исследование одного уравнения маятникового типа с запаздыванием, Дифференц. уравнения. 42, №6, 850–851 (2006).

    Fishman. L. Z. Investigation of a pendulum-type equation with delay. Differ. Uravn., 42, No. 6, 850–851, 864 (2006). (in Russian)

14. *Cruise, D. R., Chagdes, J. R., Liddy, J. J., Rietdyk, S., Haddad, J. M., Zelaznik, H. N., Raman, A.* An active balance board system with real-time control of stiffness and time-delay to assess mechanisms of postural stability. J Biomech (2017). DOI: 10.1016/j.jbiomech.2017.06.018

15. *Insperger, T., Milton, J., Stepan G.* Acceleration feedback improves balancing against reflex delay. J.R.Soc.Interface, 10, No. 79 (2013), DOI: http://dx.doi.org/10.1098/rsif.2012.0763.

16. *Konishi, K., Kokame, H., Hara, N.* Delayed feedback control based on the act-and-wait concept. Nonlinear Dynamics, 63. No. 3. 513-519 (2011).

17. *Kowalczyk, P., Glendinning, P., Brown, M., Medrano-Cerda, G., Dallali, H., Shapiro, J.* Modelling human balance using switched systems with linear feedback control, Journal of the Royal Society, Interface, 9, No. 67, (2012), DOI: 10.1098/rsif.2011.0212

18. *Malakhovski E., Mirkin L.* On stability of second-order quasipolynomials with a single delay. Automatica, 42, 1041-1047 (2006).
19. *Stepan, G.* Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions. New York: Longman Scientific & Technical, 1989.

Получена 21.05.2020   Переработана 20.06.2020

Динамические системы, 2020, том 10(38), №2, 179–196

УДК 517.9+532

Задача о нормальных колебаниях тела, частично заполненного идеальной однородной жидкостью, под действием упругодемпфирующего устройства

К. В. Фордук

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: forduk_kv@mail.ru*

Аннотация. В работе изучается задача о свободных колебаниях тела, частично заполненного идеальной однородной жидкостью, под действием упругодемпфирующего устройства. Доказано, что исследуемая задача имеет дискретный спектр, локализованный в вертикальной полосе, исследована асимптотика спектра. Доказана теорема о базисности по Абелю-Лидскому системы корневых элементов задачи.

Ключевые слова: идеальная жидкость, упругодемпфирующее устройство, спектр, базис Абеля-Лидского.

A Problem on the Normal Oscillations of a Body Partially Filled with an Ideal Homogeneous Fluid under the Action of an Elastic Damping Device

K. V. Forduk

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. We investigate a problem on normal oscillations of a body partially filled with an ideal homogeneous fluid under the action of an elastic damping device. We prove that the problem has a discrete spectrum localized in a vertical strip. The asymptotic behavior of the spectrum is investigated. The theorem on the Abel-Lidsky basis property of root elements of the problem is proven.

Keywords: ideal fluid, elastic damping device, spectrum, basis of Abel-Lidsky.

MSC 2010: 35Q35, 34L20

Введение

В работе исследуется задача о нормальных колебаниях тела, частично заполненного идеальной однородной жидкостью под действием упругодемпфирующего устройства. Эта задача поставлена профессором Н. Д. Копачевским, полученные ранее результаты о сильной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи опубликованы в работах [7, 8].

1. Постановка начально-краевой задачи

Рассмотрим открытый сосуд, частично заполненный однородной идеальной жидкостью плотности $\rho > 0$, которая в состоянии покоя занимает область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ со свободной границей Γ и твердой стенкой S. В состоянии покоя границу Γ считаем горизонтальной прямой. За счет наличия двух пружин, прикрепленных к твердой стенке сосуда, как показано на рис. 1, и неподвижной горизонтальной твердой поверхности, взаимодействующей со дном сосудам, на тело действуют упругие и демпфирующие силы.

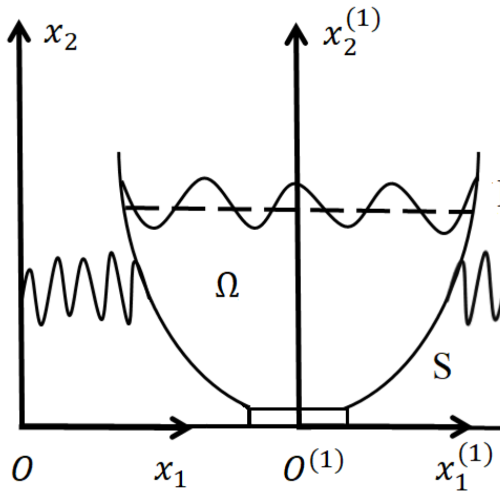


Рис. 1. Схема гидромеханической системы

Для описания малых движений системы введем неподвижную систему координат Ox_1x_2 с ортами $\mathbf{e}_j$, $j = 1, 2$, так, чтобы тело совершало движения вдоль оси Ox_1. Кроме того, введем подвижную систему координат $O^{(1)}x_1^{(1)}x_2^{(1)}$, жестко связанную с телом. Орты подвижной системы обозначим через $\mathbf{e}_j^{(1)}$, $j = 1, 2$. При этом $\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j^{(1)}$. Будем исследовать малые колебания указанной гидромеханической системы под действием внешней силы $\mathbf{f}_b$ и гравитационного поля $-g\mathbf{e}_2$, где g — ускорение свободного падения.

В процессе малых движений тела рассмотрим $x(t)\mathbf{e}_1$ — вектор перемещения тела, $\dot{x}(t)\mathbf{e}_1$ — вектор скорости тела, $\ddot{x}(t)\mathbf{e}_1$ — вектор ускорения тела.

Обозначим через $\mathbf{u}(t, x^{(1)})$ — поле относительных скоростей частиц жидкости. Тогда абсолютная скорость жидкости будет определяться выражением

$\mathbf{u}(t, x^{(1)}) + \dot{x}(t)\mathbf{e}_1$.

Пусть $\zeta(t, x_1^{(1)})$ $(x_1^{(1)} \in \Gamma)$ — функция, описывающая малые отклонения свободной границы $\Gamma(t)$ вдоль $\mathbf{e}_2^{(1)}$ относительно равновесной прямой Γ, описываемой уравнением $x_2^{(1)} = b$, по формуле:

$$b + \zeta(t, x_1^{(1)}) = x_2^{(1)}, \qquad |\zeta| \ll 1.$$

Используя второй закон Ньютона, запишем уравнение движения тела с жидкостью:

$$m\ddot{x}\mathbf{e}_1 + \rho \int\limits_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\, d\Omega + (k_0^2 + k_1^2)x\mathbf{e}_1 + \alpha\dot{x}\mathbf{e}_1 = k_0^2 x_0 \mathbf{e}_1 + k_1^2 x_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{f}_b + N(t)\mathbf{e}_2 - gm\mathbf{e}_2, \quad (1.1)$$

где $m = m_b + m_f$ — масса тела с жидкостью (m_b — масса тела, m_f — масса жидкости), $N(t)\mathbf{e}_2$ — реакция опоры, действующая на систему, k_0^2 — коэффициент жесткости левой пружины, k_1^2 — коэффициент жесткости правой пружины, x_0 — заданный закон движения левой стенки, x_1 — заданный закон движения правой стенки, $\alpha > 0$ — коэффициент трения дна сосуда о горизонтальную опору.

Малые движения идеальной однородной жидкости описываются линеаризованным уравнением Эйлера:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \ddot{x}\mathbf{e}_1^{(1)}\right) + \nabla p = \rho \mathbf{f}_f, \qquad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad (1.2)$$

где $p = p(t, x^{(1)})$ — отклонение давления в жидкости в процессе движения от равновесного давления, а $\mathbf{f}_f = \mathbf{f}_f(t, x^{(1)})$ — сила, действующая на жидкость.

Граничными условиями в рассматриваемой задаче являются условие непротекания идеальной жидкости на твердой стенке S, а также динамические, кинематические условия на границе Γ и условие сохранения объема жидкости соответственно:

$$\begin{gathered} u_n = \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0 \quad (\text{на } S), \qquad p = \rho g \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_2^{(1)} \quad (\text{на } \Gamma), \qquad \int\limits_{\Gamma} \zeta\, d\Gamma = 0, \end{gathered} \quad (1.3)$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к границе $\partial\Omega := S \cup \Gamma$. На границе Γ, очевидно, будет выполнено соотношение $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2^{(1)}$.

Начальные условия имеют вид

$$x(0) = x^0, \quad \dot{x}(0) = x^1, \quad \mathbf{u}(0, x^{(1)}) = \mathbf{u}^0(x^{(1)}), \quad \zeta(0, x_1^{(1)}) = \zeta^0. \quad (1.4)$$

Таким образом, полная постановка исследуемой начально-краевой задачи состоит в решении уравнений (1.1)-(1.2) с краевыми и начальными условиями (1.3)-(1.4).

Теорема 1. *Будем считать, что поставленная задача* (1.1)-(1.4) *имеет классическое решение — когда все функции в уравнениях, граничных и начальных условиях непрерывны относительно своих переменных. Тогда тождество*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{m_b(\dot{x})^2+\rho\int\limits_{\Omega}\left|\mathbf{u}+\dot{x}\mathbf{e}_1^{(1)}\right|^2 d\Omega+(k_0^2+k_1^2)x^2+\rho g\int\limits_{\Gamma}|\zeta|^2 d\Gamma\right\}=$$
$$=-\alpha\dot{x}^2+(\mathbf{f}_b\cdot\mathbf{e}_1)\dot{x}+\rho\int\limits_{\Omega}\mathbf{f}_f\cdot\mathbf{u}\,d\Omega+k_0^2x_0\dot{x}+k_1^2x_1\dot{x} \tag{1.5}$$

представляет собой закон баланса полной энергии исследуемой гидромеханической системы, записанный в дифференциальной форме.

Замечание 1. В соотношении (1.5) слева в фигурных скобках стоят удвоенные кинетическая и потенциальная энергии системы, а справа — мощность силы трения и мощность внешних сил, действующих на систему.

2. Выбор функциональных пространств. Проектирование уравнения движения жидкости

Из закона (1.5) следует, что для описания движения гидросистемы следует привлечь к рассмотрению такие функциональные пространства, для которых поле скоростей и давление приведут в любой момент времени к конечной кинетической и потенциальной энергиям системы. Перейдем к подробному рассмотрению этого вопроса и введем соответствующие пространства и их подпространства.

Введем гильбертово пространство $\mathbf{L}_2(\Omega)$ векторных полей со скалярным произведением и квадратом нормы

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega)}=\int\limits_{\Omega}\mathbf{u}(x^{(1)})\cdot\overline{\mathbf{v}(x^{(1)})}\,d\Omega,\quad \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}:=\int\limits_{\Omega}|\mathbf{u}(x^{(1)})|^2\,d\Omega.$$

Как известно, применительно к данной задаче, пространство $\mathbf{L}_2(\Omega)$ имеет ортогональное разложение (см., например, [6, стр. 106])

$$\mathbf{L}_2(\Omega)=\mathbf{J}_0(\Omega)\oplus\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)\oplus\mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega), \tag{2.1}$$

где

$$\mathbf{J}_0(\Omega):=\left\{\mathbf{v}\in\mathbf{L}_2(\Omega):\ \operatorname{div}\mathbf{v}=0\quad(\text{в }\Omega),\quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0\quad(\text{на }\ \partial\Omega)\right\}$$

— подпространство соленоидальных полей с нулевой нормальной составляющей на границе $\partial\Omega$,

$$\mathbf{G}_{h,S}(\Omega):=\left\{\mathbf{u}=\nabla\Phi\in\mathbf{L}_2(\Omega):\ \Delta\Phi=0\quad(\text{в }\Omega),\quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}=0\quad(\text{на }S),\ \int\limits_{\Gamma}\Phi\,d\Gamma=0\right\}$$

— подпространство потенциальных гармонических полей, для которых нормальная производная потенциала обращается в ноль на S,

$$\mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega) := \big\{\mathbf{w} = \nabla\Psi \in \mathbf{L}_2(\Omega) : \Psi = 0 \quad (\text{на } \Gamma)\big\}$$

— подпространство потенциальных полей, у которых потенциалы обращаются в ноль на границе Γ.

Далее, для обеспечения конечности потенциальной энергии системы, отвечающей отклонению ζ движущейся границы, введем пространство

$$L_{2,\Gamma} := \Big\{\zeta \in L_2(\Gamma) : \int\limits_{\Gamma} \zeta \, d\Gamma = 0\Big\},$$

которое является подпространством $L_2(\Gamma)$, ортогональным единичной функции $1_\Gamma := 1|_\Gamma$.

Таким образом, далее в исследуемой проблеме векторные и скалярные поля будем считать функциями переменной t со значениями в соответствующих введенных выше пространствах и подпространствах.

В силу постановки задачи поле скорости $\mathbf{u}(t)$ должно принадлежать при любом $t \geq 0$ подпространству $\mathbf{J}_0(\Omega) \oplus \mathbf{G}_{h,S}(\Omega)$, а поле градиентов давлений — подпространству $\mathbf{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$.

Введем согласно разложению (2.1) ортопроекторы P_0, $P_{h,S}$, $P_{0,\Gamma}$ пространства $\mathbf{L}_2(\Omega)$ на его подпространства $\mathbf{J}_0(\Omega)$, $\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)$, $\mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$:

$$P_0 : \mathbf{L}_2(\Omega) \to \mathbf{J}_0(\Omega), \quad P_{h,S} : \mathbf{L}_2(\Omega) \to \mathbf{G}_{h,S}(\Omega), \quad P_{0,\Gamma} : \mathbf{L}_2(\Omega) \to \mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega).$$

Будем разыскивать поле скоростей жидкости в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \nabla\Phi, \qquad \mathbf{v} \in \mathbf{J}_0(\Omega), \quad \nabla\Phi \in \mathbf{G}_{h,S}(\Omega),$$

а градиент поля давлений в следующем виде:

$$\nabla p = \nabla\tilde{p} + \nabla\Psi, \qquad \nabla\tilde{p} \in \mathbf{G}_{h,S}(\Omega), \quad \nabla\Psi \in \mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega). \tag{2.2}$$

Потенциал $\tilde{p}$, в силу (2.2) и динамического соотношения из (1.3), является решением задачи Зарембы для уравнения Лапласа:

$$\Delta\tilde{p} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial\tilde{p}}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad \tilde{p} = \rho g\zeta \quad (\text{на } \Gamma).$$

Будем считать, что граница области Ω липшицева. Тогда известно (см. [6, стр. 45-46]), что такая задача имеет единственное слабое решение

$\nabla\tilde{p} = \rho g Q\zeta \in \mathbf{G}_{h,S}(\Omega)$, если выполнено условие $\zeta \in H^{1/2}_{\Gamma} := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}$, где $H^{1/2}(\Gamma)$ — пространство Соболева-Слободецкого с дробным индексом (см. [3, стр. 71-79]).

Применим ортопроекторы $P_0, P_{h,S}, P_{0,\Gamma}$ к левой и правой частям уравнения движения жидкости (1.2). Получим три соотношения

$$\rho\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \ddot{x}P_0\mathbf{e}_1^{(1)}\right) = \rho P_0\mathbf{f}_f, \tag{2.3}$$

$$\rho\left(\frac{d\nabla\Phi}{dt} + \ddot{x}P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\right) + \rho g Q\zeta = \rho P_{h,S}\mathbf{f}_f, \tag{2.4}$$

$$\rho\ddot{x}P_{0,\Gamma}\mathbf{e}_1^{(1)} + \nabla\Psi = \rho P_{0,\Gamma}\mathbf{f}_f. \tag{2.5}$$

Из соотношений (2.3) и (2.5) найдем вихревую составляющую поля скорости $\mathbf{v}$ и часть динамического давления Ψ, если будет известно смещение x. Поэтому далее будем рассматривать только соотношение (2.4).

Спроектируем уравнение движения тела с жидкостью (1.1) на орты $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, получим следующие связи

$$m\ddot{x} + \rho\int\limits_{\Omega}\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot\mathbf{e}_1\right)d\Omega + (k_0^2 + k_1^2)x + \alpha\dot{x} = k_0^2 x_0 + k_1^2 x_1 + \mathbf{f}_b\cdot\mathbf{e}_1, \tag{2.6}$$

$$\rho\int\limits_{\Omega}\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot\mathbf{e}_2\right)d\Omega = \mathbf{f}_b\cdot\mathbf{e}_2 + N(t) - gm. \tag{2.7}$$

Связь (2.7) дает формулу для нахождения $N(t)$, если будет известно поле скоростей жидкости $\mathbf{u}$. Преобразуем интегральное слагаемое в (2.6). С учетом рассуждений, использованных при выводе соотношения (1.5), найдем, что

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}\frac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot\mathbf{e}_1\,d\Omega &= \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\nabla\Phi\cdot\mathbf{e}_1^{(1)}\,d\Omega + \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1^{(1)}\,d\Omega = \\ &= \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\nabla\Phi\cdot\mathbf{e}_1^{(1)}\,d\Omega + \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\mathbf{v}\cdot\nabla x_1^{(1)}\,d\Omega = \\ &= \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\nabla\Phi\cdot\mathbf{e}_1^{(1)}\,d\Omega + \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\left(\operatorname{div}(x_1^{(1)}\mathbf{v}) - x_1^{(1)}\operatorname{div}\mathbf{v}\right)d\Omega = \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\nabla\Phi\cdot\mathbf{e}_1^{(1)}\,d\Omega.\end{aligned}$$

Отсюда и из (2.6) теперь найдем, что

$$m\ddot{x} + \frac{d}{dt}P_\rho\nabla\Phi + (k_0^2 + k_1^2)x + \alpha\dot{x} = k_0^2 x_0 + k_1^2 x_1 + \mathbf{f}_b\cdot\mathbf{e}_1. \tag{2.8}$$

Здесь оператор P_ρ определен по формуле

$$P_\rho\nabla\Phi := \rho\int\limits_{\Omega}\nabla\Phi\cdot\mathbf{e}_1^{(1)}d\Omega, \quad P_\rho:\ \mathbf{G}_{h,S}(\Omega) \to \mathbb{C}.$$

Введем оператор следа γ_n на границе Γ следующим образом:

$$\gamma_n \nabla\Phi := \nabla\Phi \cdot \mathbf{e}_2^{(1)} = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{\Gamma}, \quad \gamma_n : \mathbf{G}_{h,S}(\Omega) \to L_{2,\Gamma}.$$

Рассмотрим систему уравнений (2.4) и (2.8):

$$\begin{cases} \rho \dfrac{d}{dt}\nabla\Phi + \rho \ddot{x} P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)} + \rho g Q \zeta = \rho P_{h,S}\mathbf{f}_f, \\ m\ddot{x} + \dfrac{d}{dt} P_\rho \nabla\Phi + (k_0^2 + k_1^2)x + \alpha\dot{x} = k_0^2 x_0 + k_1^2 x_1 + \mathbf{f}_b \cdot \mathbf{e}_1. \end{cases} \tag{2.9}$$

Систему (2.9) запишем в виде дифференциально-операторного уравнения первого порядка

$$\begin{pmatrix} \rho I & \rho P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)} \\ P_\rho & mI \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nabla\Phi \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla\Phi \\ \dot{x} \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} \rho g Q & 0 \\ 0 & (k_0^2 + k_1^2)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho P_{h,S}\mathbf{f}_f \\ \mathbf{f}_b \cdot \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k_0^2 x_0 + k_1^2 x_1 \end{pmatrix},$$

которое с учетом обозначений:

$$B_{12} := \begin{pmatrix} \rho g Q & 0 \\ 0 & (k_0^2 + k_1^2)I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(B_{12}) = \mathcal{D}(Q) \oplus \mathbb{C},$$
$$C_1 := \begin{pmatrix} \rho I & \rho P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)} \\ P_\rho & mI \end{pmatrix}, \quad P_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$
$$f_1 := \begin{pmatrix} \rho P_{h,S}\mathbf{f}_f \\ \mathbf{f}_b \cdot \mathbf{e}_1 \end{pmatrix}, \quad f_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ k_0^2 x_0 + k_1^2 x_1 \end{pmatrix},$$
$$z_1 := \begin{pmatrix} \nabla\Phi \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad z_2 := \begin{pmatrix} \zeta \\ x \end{pmatrix},$$

примет вид

$$C_1 \frac{dz_1}{dt} + \alpha P_1 z_1 + B_{12} z_2 = f_1 + f_2. \tag{2.10}$$

Рассмотрим систему из двух очевидных связей

$$\begin{cases} \rho g \dfrac{d\zeta}{dt} = \rho g \gamma_n \nabla\Phi, \\ (k_0^2 + k_1^2)\dfrac{dx}{dt} = (k_0^2 + k_1^2)\dot{x}. \end{cases} \tag{2.11}$$

Систему (2.11) запишем в виде дифференциально-операторного уравнения первого порядка

$$\begin{pmatrix} \rho g I & 0 \\ 0 & (k_0^2 + k_1^2)I \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \zeta \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\rho g \gamma_n & 0 \\ 0 & -(k_0^2 + k_1^2)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla\Phi \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которое с учетом введенных выше обозначений и обозначений

$$C_2 := \begin{pmatrix} \rho g I & 0 \\ 0 & (k_0^2 + k_1^2)I \end{pmatrix},$$

$$B_{21} := \begin{pmatrix} -\rho g \gamma_n & 0 \\ 0 & -(k_0^2 + k_1^2)I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(B_{21}) = \mathcal{D}(\gamma_n) \oplus \mathbb{C},$$

примет вид

$$C_2 \frac{dz_2}{dt} + B_{21} z_1 = 0. \tag{2.12}$$

Таким образом, исходная начально-краевая задача о малых движениях тела, частично заполненного идеальной жидкостью, под действием упругих и демпфирующих сил, приводится к дифференциально-операторным уравнениям (2.10), (2.12) с соответствующими начальными условиями. Итак, имеем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} C_1 \dfrac{dz_1}{dt} + \alpha P_1 z_1 + B_{12} z_2 = f_1 + f_2, \\ C_2 \dfrac{dz_2}{dt} + B_{21} z_1 = 0, \end{cases} \tag{2.13}$$

$$z_1(0) = (P_{h,S}\mathbf{u}^0; x^1)^\tau, \quad z_2(0) = (\zeta^0; x^0)^\tau, \tag{2.14}$$

где символом τ обозначена операция транспонирования.

Систему дифференциальных уравнений (2.13) и начальные условия (2.14) можно коротко записать в виде задачи Коши для дифференциального-операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{C} \frac{dz}{dt} + (\alpha \mathcal{P} + i\mathcal{B})z = f, \quad z(0) = (z_1(0), z_2(0))^\tau, \tag{2.15}$$

где

$$z := (z_1; z_2)^\tau \in \mathcal{H} := \big(\mathbf{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \mathbb{C}\big) \oplus \big(L_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}\big), \quad f := (f_1 + f_2; 0)^\tau,$$

$$\mathcal{C} := \operatorname{diag}\big(C_1, C_2\big), \quad \mathcal{B} := \begin{pmatrix} 0 & -iB_{12} \\ -iB_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P} := \operatorname{diag}\big(P_1, 0\big).$$

Без доказательства приведем лемму о свойствах операторных коэффициентов в (2.15).

Лемма 1. *Имеют место следующие свойства операторных коэффициентов:*
1. Оператор $\mathcal{B}$ является самосопряженным на $\mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{D}(B_{21}) \oplus \mathcal{D}(B_{12})$.
2. Оператор $\mathcal{P}$ ограничен и неотрицателен в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.
3. Операторная матрица $\mathcal{C}$ является ограниченным положительно определенным оператором в $\mathcal{H}$.

В работе [7] приводится теорема о сильной разрешимости начально-краевой задачи. Сформулируем определение сильного решения задачи (1.1)-(1.4) и приведем теоремы о разрешимости операторного уравнения и исходной начально-краевой задачи.

Определение 1. *Сильным решением* начально-краевой задачи (1.1)-(1.4) назовем такое поле $\mathbf{u}(t)$ и функции $p(t)$, $\zeta(t)$, для которых функция $z(t) = (\nabla\Phi; \dot{x}; \zeta; x)^\tau$ является решением задачи Коши (2.15).

Будем говорить, что задача Коши (2.15) имеет решение $z(t)$ на полуоси $\mathbb{R}_+ := [0; +\infty)$, если все слагаемые в уравнении из (2.15) являются непрерывными функциями t со значениями в $\mathcal{H}$, выполнено уравнение из (2.15) при любом $t \in \mathbb{R}_+$ и начальное условие $z(0) = z^0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия*

$$z(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{B}), \quad f \in C^1\big(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}\big).$$

Тогда задача (2.15) *имеет единственное решение.*

Опираясь на теорему 2, получено утверждение об однозначной разрешимости исходной начально-краевой задачи (1.1)-(1.4) на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия*

$$P_{h,S}\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(\gamma_n), \quad \zeta^0 \in \mathcal{D}(Q) = H_\Gamma^{1/2},$$
$$\mathbf{f}_b \in C^1\big(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2\big), \quad \mathbf{f}_f \in C^1\big(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega)\big).$$

Тогда задача (1.1)-(1.4) *имеет единственное сильное решение.*

3. Задача о нормальных колебаниях, основные свойства спектра

Будем искать решение однородной задачи о нормальных колебаниях тела, частично заполненного однородной жидкостью под действием упругодемпфирующего устройства (2.15) в виде $z(t) = ze^{-\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. В результате придем к следующей спектральной задаче

$$-\lambda\mathcal{C}z + (\alpha\mathcal{P} + i\mathcal{B})z = 0, \quad z = (z_1; z_2)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{H}. \tag{3.1}$$

Запишем спектральную задачу (3.1), с учетом введенных выше обозначений, в виде системы двух уравнений в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, где $\mathcal{H}_1 := \mathbf{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \mathbb{C}$ и $\mathcal{H}_2 := L_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} -\lambda C_1 z_1 + \alpha P_1 z_1 + B_{12} z_2 = 0, \\ -\lambda C_2 z_2 + B_{21} z_1 = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Лемма 2. *Число $\lambda = 0$ не является собственным значением спектральной задачи* (3.2).

Доказательство. Подставим значение $\lambda = 0$ в систему (3.2). Из второго уравнения системы получим, что $B_{21}z_1 = 0$. Тогда

$$\begin{cases} \rho g \gamma_n \nabla\Phi = 0, \\ (k_0^2 + k_1^2)\dot{x} = 0, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \nabla\Phi = 0, \\ \dot{x} = 0, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad z_1 = (\nabla\Phi; \dot{x})^\tau = 0. \tag{3.3}$$

С учетом (3.3) из первого уравнения системы (3.2) получим $B_{12}z_2 = 0$, откуда следует, что

$$\begin{cases} \rho g Q\zeta = 0, \\ (k_0^2 + k_1^2)x = 0, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \zeta = 0, \\ x = 0, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad z_2 = (\zeta; x)^\tau = 0.$$

Таким образом, при $\lambda = 0$ задача (3.2) имеет только тривиальное решение $z = (z_1; z_2)^\tau = 0$. Следовательно, $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (3.2). $\square$

Из второго уравнения системы (3.2) выразим элемент z_2 и подставим его в первое уравнение системы, будем иметь

$$\lambda^2 C_1 z_1 - \lambda\alpha P_1 z_1 - B_{12}C_2^{-1}B_{21}z_1 = 0. \tag{3.4}$$

Определим оператор C_B по формуле

$$C_B := -B_{12}C_2^{-1}B_{21}, \quad \mathcal{D}(C_B) = \big\{z_1 \in \mathcal{D}(B_{21}) :\ C_2^{-1}B_{21}z_1 \in \mathcal{D}(B_{12})\big\}.$$

Осуществим в спектральной задаче (3.4) замену $C_B^{1/2}z_1 =: u$ и применим к (3.4) слева оператор $C_B^{-1/2}$, в результате придем к следующей основной спектральной задаче в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_1$:

$$L(\lambda)u := (I - \lambda\alpha V_1 + \lambda^2 V_2)u = 0, \tag{3.5}$$

где $V_1 := C_B^{-1/2}P_1C_B^{-1/2}$, $V_2 := C_B^{-1/2}C_1C_B^{-1/2}$.

Лемма 3. *Оператор C_B самосопряжен и положительно определен в $\mathcal{H}_1$, а оператор C_B^{-1} компактен.*

Справедлива следующая теорема о локализации и дискретности спектра задачи (3.5).

Теорема 4. *Имеют место следующие утверждения:*
1. Спектр задачи (3.5) *симметричен относительно вещественной оси.*
2. Задача (3.5) *имеет дискретный спектр с возможной предельной точкой в бесконечности.*
3. Спектр задачи (3.5) *лежит в полосе*

$$0 \le \operatorname{Re}\lambda \le \frac{\alpha}{c},$$

где $c > 0$ — верхняя грань всех констант, которые могу стоять в неравенстве положительной определенности оператора C_1.

Доказательство. Доказательство проведем в несколько шагов.

1. Для доказательства первого утверждения достаточно доказать (см. [10, стр. 174]), что пучок $L(\lambda)$ самосопряжен, то есть

$$\big(L(\bar{\lambda})\big)^* = L(\lambda).$$

В силу самосопряженности операторов $C_1, C_B^{-1/2}, P_1$ имеем

$$\big(L(\bar{\lambda})\big)^* = I - \lambda\alpha V_1^* + \lambda^2 V_2^* = I - \lambda\alpha V_1 + \lambda^2 V_2 = L(\lambda).$$

2. Для доказательства дискретности спектра достаточно проверить, что фредгольмов пучок (3.5) является непрерывно обратимым хотя бы в одной точке (см. [6, стр. 74]). Действительно, при $\lambda = -1$ оператор

$$L(-1) = I + \alpha V_1 + V_2$$

является положительно определенным и, следовательно, имеет ограниченный обратный. Поскольку фредгольмова оператор-функция $L(\lambda)$ имеет особенность только в бесконечно удаленной точке, то ее спектр дискретен с возможной предельной точкой накопления в бесконечности.

3. Докажем, что спектр задачи (3.5) лежит в указанной полосе. Поскольку спектр задачи дискретен, доказываемое свойство нужно проверить для собственных значений задачи (3.5). Пусть λ, u — собственное значение и отвечающий ему собственный элемент. Умножим пучок (3.5) скалярно на u в пространстве $\mathcal{H}_1$, будем иметь

$$(L(\lambda)u, u)_{\mathcal{H}_1} = (u, u)_{\mathcal{H}_1} - \lambda\alpha(V_1 u, u)_{\mathcal{H}_1} + \lambda^2(V_2 u, u)_{\mathcal{H}_1} = 0.$$

Полученное выражение разделим на λ, получим

$$\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} \cdot \frac{\|u\|^2_{\mathcal{H}_1}}{\lambda} - \alpha\|V_1^{1/2}u\|^2_{\mathcal{H}_1} + \lambda\|V_2^{1/2}u\|^2_{\mathcal{H}_1} = 0. \tag{3.6}$$

Выделяя в (3.6) вещественную часть, найдем, что

$$\operatorname{Re}\lambda\cdot\left[\frac{\|u\|^2_{\mathcal{H}_1}}{|\lambda|^2}+\|V_2^{1/2}u\|^2_{\mathcal{H}_1}\right]=\alpha\|V_1^{1/2}u\|^2_{\mathcal{H}_1}.$$

Отсюда следует оценка

$$0\le\operatorname{Re}\lambda=\frac{\alpha\|V_1^{1/2}u\|^2_{\mathcal{H}_1}}{\dfrac{\|u\|^2_{\mathcal{H}_1}}{|\lambda|^2}+\|V_2^{1/2}u\|^2_{\mathcal{H}_1}}\le\frac{\alpha\|V_1^{1/2}u\|^2_{\mathcal{H}_1}}{\|V_2^{1/2}u\|^2_{\mathcal{H}_1}}=$$

$$=\frac{\alpha(P_1C_B^{-1/2}u,C_B^{-1/2}u)_{\mathcal{H}_1}}{(C_1C_B^{-1/2}u,C_B^{-1/2}u)_{\mathcal{H}_1}}\le\frac{\alpha\|C_B^{-1/2}u\|^2_{\mathcal{H}_1}}{c\|C_B^{-1/2}u\|^2_{\mathcal{H}_1}}=\frac{\alpha}{c},$$

где $c>0$ — точная нижняя грань оператора C_1. □

4. Об асимптотике спектра и базисности по Абелю-Лидскому системы корневых элементов

Теорема 5. *Спектральная задача* (3.5) *имеет в области* $\{0\le\operatorname{Re}\lambda\le\alpha c^{-1}\}$ *две ветви собственных значений с асимптотикой*

$$\lambda_k^{(\pm i)}=\pm i\left(\frac{|\Gamma|}{g\pi}\right)^{-1/2}k^{1/2}(1+o(1))\quad(k\to\infty).$$

Доказательство. Перепишем задачу (3.5) в виде

$$L(\lambda)u:=\left[\begin{pmatrix}I&0\\0&I\end{pmatrix}-\frac{\lambda\alpha}{k_0^2+k_1^2}\begin{pmatrix}0&0\\0&I\end{pmatrix}+\lambda^2\begin{pmatrix}g^{-1}A&A^{1/2}C_{12}\\C_{21}A^{1/2}&\dfrac{m}{k_0^2+k_1^2}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\tag{4.1}$$

где

$$A:=(Q\gamma_n)^{-1},\ C_{12}:=\rho^{1/2}g^{-1/2}(k_0^2+k_1^2)^{-1/2}P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)},\ C_{21}:=\rho^{-1/2}g^{-1/2}(k_0^2+k_1^2)^{-1/2}P_\rho.$$

Запишем спектральную задачу (4.1) в виде системы:

$$\begin{cases}u_1+\lambda^2g^{-1}Au_1+\lambda^2A^{1/2}C_{12}u_2=0,\\ u_2-\dfrac{\lambda\alpha}{k_0^2+k_1^2}u_2+\lambda^2C_{21}A^{1/2}u_1+\dfrac{\lambda^2m}{k_0^2+k_1^2}u_2=0,\end{cases}\tag{4.2}$$

из второго уравнения системы (4.2) найдем u_2:

$$u_2=-\frac{\lambda^2(k_0^2+k_1^2)}{\lambda^2m-\lambda\alpha+k_0^2+k_1^2}C_{21}A^{1/2}u_1.\tag{4.3}$$

Подставляя выражение (4.3) в первое уравнение системы (4.2), получим задачу для элемента u_1:

$$\left\{I + \lambda^2 g^{-1} A - \frac{\lambda^4(k_0^2+k_1^2)}{\lambda^2 m - \lambda\alpha + k_0^2 + k_1^2}\, A^{1/2} C_{12} C_{21} A^{1/2}\right\} u_1 = 0,$$

которая после выделения из соответствующей дроби целой части, примет вид

$$\begin{gathered}\left\{I + \left(\frac{(k_0^2+k_1^2)^2}{m^2} - \frac{\alpha^2(k_0^2+k_1^2)}{m^3} - \frac{\lambda\alpha(k_0^2+k_1^2)}{m^2} - \right.\right.\\ \left. - \frac{\lambda\alpha(k_0^2+k_1^2)(\alpha^2 - 2m(k_0^2+k_1^2)) - \alpha^2(k_0^2+k_1^2)^2 + m(k_0^2+k_1^2)^3}{m^3(\lambda^2 m - \lambda\alpha + k_0^2 + k_1^2)}\right) A^{1/2} C_{12} C_{21} A^{1/2} + \\ \left. + \lambda^2\left(g^{-1}A - \frac{k_0^2+k_1^2}{m} A^{1/2} C_{12} C_{21} A^{1/2}\right)\right\} u_1 = 0. \qquad (4.4)\end{gathered}$$

С учетом определения оператора P_ρ, вычислим оператор

$$\begin{aligned} C_{12}C_{21} &= \frac{1}{g(k_0^2+k_1^2)} P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)} P_\rho = \frac{\rho}{g(k_0^2+k_1^2)} \big(\cdot, \mathbf{e}_1^{(1)}\big)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)} = \\ &= \frac{\rho \|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|^2_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}}{g(k_0^2+k_1^2)} \left(\cdot, \frac{P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}}{\|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}}\right)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} \frac{P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}}{\|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}} =: \\ &=: \frac{\rho \|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|^2_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}}{g(k_0^2+k_1^2)} P, \end{aligned}$$

где оператор P определяется формулой:

$$P := \left(\cdot, \frac{P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}}{\|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}}\right)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} \frac{P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}}{\|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}}. \qquad (4.5)$$

Определим оператор

$$K := I - \frac{g(k_0^2+k_1^2)}{m} C_{12} C_{21} = I - \frac{\rho \|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|^2_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}}{m} P. \qquad (4.6)$$

Докажем, что оператор K из (4.6) положительно определен. Заметим, что имеет место оценка

$$\|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|^2_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} < \|\mathbf{e}_1^{(1)}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega |\mathbf{e}_1^{(1)}|^2\, d\Omega = |\Omega|.$$

С учетом этой оценки теперь найдем, что для любого $\nabla\Phi \in \mathbf{G}_{h,S}(\Omega)$

$$(K\nabla\Phi, \nabla\Phi)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} = (\nabla\Phi, \nabla\Phi)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} - \frac{\rho}{m}\|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|^2_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}(P\nabla\Phi, \nabla\Phi)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} =$$
$$= \left(1 - \frac{\rho}{m}\|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|^2_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}\right)(P\nabla\Phi, \nabla\Phi)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} + ((I-P)\nabla\Phi, \nabla\Phi)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} \geq$$
$$\geq \left(1 - \frac{\rho}{m}|\Omega|\right)(P\nabla\Phi, \nabla\Phi)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} + ((I-P)\nabla\Phi, \nabla\Phi)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} \geq$$
$$\geq \left(1 - \frac{m_f}{m}\right)\{(P\nabla\Phi, \nabla\Phi)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} + ((I-P)\nabla\Phi, \nabla\Phi)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}\} =$$
$$= \left(1 - \frac{m_f}{m}\right)(\nabla\Phi, \nabla\Phi)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}.$$

С учетом введенных в (4.5), (4.6) операторов, спектральная задача (4.4) примет вид

$$\Bigg\{I + \frac{\lambda^2}{g}A^{1/2}KA^{1/2} + \frac{\rho\|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|^2_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}}{m^2 g}\Bigg(k_0^2 + k_1^2 - \frac{\alpha^2}{m} - \lambda\alpha -$$
$$- \frac{\lambda\alpha(\alpha^2 - 2m(k_0^2+k_1^2)) - \alpha^2(k_0^2+k_1^2) + m(k_0^2+k_1^2)^2}{m(\lambda^2 m - \lambda\alpha + k_0^2 + k_1^2)}\Bigg)A^{1/2}PA^{1/2}\Bigg\}u_1 = 0. \quad (4.7)$$

Определим оператор B по следующей формуле:

$$B := g^{-1}A^{1/2}KA^{1/2} = (g^{-1/2}K^{1/2}A^{1/2})^*(g^{-1/2}K^{1/2}A^{1/2}).$$

По теореме о полярном разложении (см. [5, стр. 419-420]) существует частично изометричный оператор U такой, что

$$g^{-1/2}K^{1/2}A^{1/2} = UB^{1/2}, \quad g^{-1/2}A^{1/2}K^{1/2} = B^{1/2}U^*.$$

Тогда

$$A^{1/2} = g^{1/2}B^{1/2}U^*K^{-1/2} = g^{1/2}K^{-1/2}UB^{1/2}. \quad (4.8)$$

Перепишем задачу (4.7) в виде

$$l(\lambda)u_1 = 0, \quad l(\lambda) := I + \lambda^2 B + G(\lambda), \quad (4.9)$$

где

$$G(\lambda) := \lambda\mu(\lambda)A^{1/2}PA^{1/2},$$
$$\mu(\lambda) := \frac{\rho\|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|^2_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}}{m^2 g}\Bigg(\frac{k_0^2+k_1^2}{\lambda} - \frac{\alpha^2}{\lambda m} - \alpha -$$
$$- \frac{\alpha^3 - 2m\alpha(k_0^2+k_1^2)}{m(\lambda^2 m - \lambda\alpha + k_0^2 + k_1^2)} - \frac{m(k_0^2+k_1^2)^2 - \alpha^2(k_0^2+k_1^2)}{m\lambda(\lambda^2 m - \lambda\alpha + k_0^2 + k_1^2)}\Bigg).$$

Для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ определим секторы $\Lambda_\varepsilon^\pm := \{\lambda : |\arg\lambda \pm \pi/2| < \varepsilon, \quad -\pi < \arg\lambda < \pi\}$. Для задачи (4.9) проверим выполнение условий леммы М. Б. Оразова (см. [11, стр. 412, лемма 3]). Докажем, что если $\lambda \in \Lambda_\varepsilon^\pm$ и $\lambda \neq \bigl(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4m(k_0^2 + k_1^2)}\bigr)/(2m)$, то

$$T(\lambda) := (I - \lambda B^{1/2})^{-1} G(\lambda)(I + \lambda B^{1/2})^{-1} \longrightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \to \infty. \tag{4.10}$$

С использованием формулы (4.8) и леммы 3.3 из статьи А. С. Маркуса, В. И. Мацаева (см. [9, стр. 399]) найдем, что

$$\begin{aligned}
&\|T(\lambda)\| = \|\lambda\mu(\lambda)(I - \lambda B^{1/2})^{-1} A^{1/2} P A^{1/2} (I + \lambda B^{1/2})^{-1}\| = \\
&= \|\lambda\mu(\lambda) g (I - \lambda B^{1/2})^{-1} B^{1/2} U^* K^{-1/2} P K^{-1/2} U (I + \lambda B^{1/2})^{-1} B^{1/2}\| \leq \\
&\leq g|\lambda||\mu(\lambda)| \|(I - \lambda B^{1/2})^{-1} B^{1/2}\| \cdot \|U^* K^{-1/2} P K^{-1/2} U\| \cdot \|(I + \lambda B^{1/2})^{-1} B^{1/2}\| \leq \\
&\qquad\qquad \leq 4g|\mu(\lambda)||\lambda|^{-1} \max\bigl\{1; \bigl\|(I + \lambda B^{1/2})^{-1}\bigr\|\bigr\} \cdot \max\bigl\{1; \bigl\|(I - \lambda B^{1/2})^{-1}\bigr\|\bigr\} \times \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times \bigl\|U^* K^{-1/2} P K^{-1/2} U\bigr\| = O(|\lambda|^{-1}),
\end{aligned}$$

откуда следует (4.10).

Для применения указанной леммы М. Б. Оразова осталось показать, что оператор B имеет степенную асимптотику собственных значений. Запишем оператор B в виде разности двух операторов:

$$B = \frac{(Q\gamma_n)^{-1}}{g} - \frac{\rho\|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|^2_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}}{gm} (Q\gamma_n)^{-1/2} P (Q\gamma_n)^{-1/2}.$$

Асимптотика собственных значений оператора $g^{-1}(Q\gamma_n)^{-1}$ следует из обзора М. Ш. Бирмана, М. З. Соломяка (см. [4, стр. 28]) и имеет вид

$$\lambda_k\left(\frac{(Q\gamma_n)^{-1}}{g}\right) = \frac{|\Gamma|}{g\pi}\, k^{-1}(1 + o(1)) \quad (k \to \infty).$$

Введем операторы

$$T_1 := \frac{(Q\gamma_n)^{-1}}{g}, \quad T_2 := \frac{\rho\|P_{h,S}\mathbf{e}_1^{(1)}\|^2_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}}{gm} (Q\gamma_n)^{-1/2} P (Q\gamma_n)^{-1/2}.$$

Эти операторы неотрицательны, поэтому их s-числа совпадают с их собственными значениями. Оператор T_2 является одномерным, поэтому все его собственные значения, за исключением одного, равны нулю. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
&s_k(T_1) = \lambda_k(T_1) = \frac{|\Gamma|}{g\pi}\, k^{-1}(1 + o(1)) \quad (k \to \infty), \\
&s_k(T_2) = \lambda_k(T_2) = o(k^{-1}) \quad (k \to \infty).
\end{aligned}$$

Тогда из теоремы Ки Фань (см. [1, лекция 8, следствие 4]) следует, что

$$\lambda_k(B) = \lambda_k(T_1 - T_2) = \frac{|\Gamma|}{g\pi}\, k^{-1}(1 + o(1)) \quad (k \to \infty). \tag{4.11}$$

Таким образом, по лемме М. Б. Оразова и утверждению 3 в теореме 4 получаем, что исследуемая спектральная задача (3.5) имеет в полосе $\{0 \le \operatorname{Re}\lambda \le \alpha c^{-1}\}$ две ветви собственных значений со следующим асимптотическим поведением:

$$\lambda_k^{(\pm i)} = \pm i \lambda_k^{-1/2}(B)(1 + o(1)) \quad (k \to \infty).$$

Отсюда и из (4.11) следует формула из формулировки теоремы. □

Теорема 6. *Система корневых элементов задачи* (3.1) *образует базис Абеля-Лидского со скобками в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ порядка $\beta > 1$.*

Доказательство. Преобразуем спектральную задачу (3.1) к виду

$$\big(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{B} - \alpha i \mathcal{C}^{-1}\mathcal{P} - (-i\lambda) I\big) z = 0.$$

Осуществим замену спектрального параметра $-i\lambda =: \mu$, получим задачу

$$\big(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{B} - \alpha i \mathcal{C}^{-1}\mathcal{P} - \mu I\big) z = 0.$$

Обозначим операторы

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1, \quad \mathcal{A}_0 := \mathcal{C}^{-1}\mathcal{B}, \quad \mathcal{A}_1 := -\alpha i \mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}. \tag{4.12}$$

Укажем свойства введенных в (4.12) операторов в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ оператора $\mathcal{C}$. Оператор $\mathcal{A}_0$ является самосопряженным оператором в $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ с дискретным спектром с асимптотикой

$$\mu_k^{\pm}(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{B}) = \pm \left(\frac{|\Gamma|}{g\pi}\right)^{-1/2} k^{1/2}(1 + o(1)) \quad (k \to \infty). \tag{4.13}$$

Оператор $\mathcal{A}_1$ является ограниченным оператором в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$. Отсюда следует, что оператор $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_0^{-q}$ ограничен в $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ при $q = 0$:

$$\|\mathcal{A}_1\mathcal{A}_0^{-q}\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{C}}} = \|\mathcal{A}_1\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{C}}} < \infty.$$

Из (4.13) и теоремы 6.2.4 (см. [2, стр. 106]), которая распространяется на случай, когда собственные значения оператора $\mathcal{A}_0$ имеют две точки накопления $\pm\infty$, получаем, что система корневых элементов спектральной задачи (3.1) образует базис Абеля-Лидского со скобками порядка β, где

$$\beta > \beta_0 = \frac{1}{p} - (1 - q) = 2 - (1 - 0) = 1.$$

Определение понятия базиса Абеля-Лидского весьма громоздко и здесь не приводится. С этим методом суммирования по корневым элементам можно подробно ознакомиться, например, в [2, стр. 106]. □

Заключение

В работе исследуется задача о нормальных колебаниях тела, частично заполненного идеальной однородной жидкостью под действием упругодемпфирующего устройства. Доказано, что спектр изучаемой задачи расположен в некоторой вертикальной полосе, дискретен, и симметричен относительно действительной оси. Найдена формула асимптотического распределения собственных значений. Доказано, что система корневых элементов рассматриваемой задачи образует базис Абеля-Лидского со скобками порядка $\beta > 1$.

Автор благодарен рецензенту за ценные замечания, позволившие улучшить качество статьи.

Список цитируемых источников

1. *А*гранович, М. С. Операторы с дискретным спектром. 2005. https://mccme.ru/ium/f04/spectrum.html, 21.05.2020.

   Agranovich, M. S. Operators with discrete spectrum. 2005. https://mccme.ru/ium/f04/spectrum.html, 21.05.2020.

2. *Агранович, М. С.* Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях. Дифференциальные уравнения с частными производными – 6, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. №63, 5–129 (1990).

   Agranovich, M. S. Elliptic operators on closed manifolds. Partial differential equations – 6, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr. №63, 5–129 (1990). (in Russian)

3. *Агранович, М. С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. М.: МЦМНО, 2013.

   Agranovich, M. S. Sobolev Spaces, Their Generalizations and Elliptic Problems in Smooth and Lipschitz Domains. Moscow: MCCME, 2013. (in Russian)

4. *Бирман, М. Ш., Соломяк, М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений. Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. №14, 5-58 (1977).

   Birman, M. SH., Solomyak, M. Z. Asymptotic properties of the spectrum of differential equations. Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal. №14, 5-58 (1977). (in Russian)

5. *Като, Т.* Теория возмущений линейных операторов: Пер. с англ. М.: Мир, 1972.

   Kato, T. Perturbation theory for linear operators. New York: Springer Science + Business Media, 1966.

6. *Копачевский, Н. Д., Крейн, С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. М.: Наука, 1989.

   Kopachevsky, N. D., Krein, S. G., Ngo Zuy Kan. Operator methods in linear hydrodynamics: evolution and spectral problems. M.: Nauka, 1989. (in Russian)

7. *Копачевский, Н. Д., Плохая, Е. В., Фордук, К. В.* О колебаниях тела, частично заполненного жидкостью, под действием упругодемпфирующего устройства. Математика, информатика, компьютерные науки, математическое моделирование, образование 1, 35-39 (2019).

   Kopachevsky, N. D., Syomkina, E. V., Forduk, K. V. On oscillations of a body partially filled with a fluid under the action of an elastic damping device. Matematika, informatika, komp'yuternye nauki, matematicheskoe modelirovanie, obrazovanie. 1, 35-39 (2019). (in Russian)

8. *Копачевский, Н. Д., Плохая, Е. В., Фордук, К. В.* Малые движения и нормальные колебания тела, частично заполненного идеальной жидкостью, под действием упругодемпфирующего устройства. XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. 1, 176-179 (2019).

   Kopachevsky, N. D., Plohaya, E. V., Forduk, K. V. On oscillations of a body partially filled with a fluid under the action of an elastic damping device. XXX Krymskaya Osennyaya Matematicheskaya Shkola-simpozium po spektral'nym i evolyucionnym zadacham. 1, 176-179 (2019). (in Russian)

9. *Маркус, А. С., Мацаев, В. И.* Теорема о сравнении спектров и спектральная асимптотика для пучка М. В. Келдыша. Математический сборник 3, №123(165), 391-406 (1984).

   Markus, A. S., Matsaev, V. I. A theorem on comparison of spectra, and a spectral asymptotics for a Keldysh pencil. Mat. Sb. (N.S.) 3, №123(165), 391-406 (1984). (in Russian)

10. *Маркус, А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. Кишенев: Штиинца, 1986.

    Markus, A. S. Introduction to the spectral theory of polynomial operator pencils. Kishinev: Stiinza, 1986. (in Russian)

11. *Оразов, М. Б.* О локализации спектра в задаче о нормальных колебаниях упругой оболочки, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., №25(3), 403–412 (1985).

    Orazov, M. B. Localization of the spectrum in the problem of normal oscillations of an elastic shell filled with a viscous incompressible fluid. Zh. Vychisl. Mat. Mat.-Fiz., №25(3), 403–412 (1985). (in Russian)

Получена 12.05.2020 Переработана 01.06.2020

Динамические системы, 2020, том 10(38), №2, 197–204

УДК 531.36+536.381

Применение алгоритма Ковачича для исследования случая Гесса в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой[1]

Б. С. Бардин*, **А. С. Кулешов****

*Московский авиационный институт (технический университет),
Москва 125080. *E-mail: bardin@yandex.ru*
**Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Москва 119234. *E-mail: kuleshov@mech.math.msu.su*

Аннотация. В 1890 году немецкий математик и механик В. Гесс указал новый частный случай интегрируемости уравнений Эйлера – Пуассона движения тяжёлого твердого тела с неподвижной точкой. В 1892 году П. А. Некрасов показал, что решение задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой при условиях Гесса сводится к интегрированию линейного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. В работе дан вывод соответствующего уравнения второго порядка и показано, как привести коэффициенты этого уравнения к виду рациональных функций. Затем при помощи алгоритма Ковачича исследуется вопрос о существовании лиувиллевых решений у соответствующего линейного уравнения второго порядка. Показано, что лиувиллевы решения могут существовать лишь в двух случаях: в случае, соответствующем случаю Лагранжа движения твердого тела с неподвижной точкой и в случае, когда постоянная интеграла площадей равна нулю.

Ключевые слова: тяжелое твердое тело с неподвижной точкой; случай Гесса; лиувиллевы решения; алгоритм Ковачича.

Application of the Kovacic Algorithm for the Investigation of Motion of a Heavy Rigid Body with a Fixed Point in the Hess Case

B. S. Bardin, A. S. Kuleshov
Moscow Aviation Institute, Moscow 125080,
M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант No. 19-01-00140 и No. 20-01-00637

Abstract. In 1890 German mathematician and physicist W. Hess found new special case of integrability of Euler – Poisson equations of motion of a heavy rigid body with a fixed point. In 1892 P. A. Nekrasov proved that the solution of the problem of motion of a heavy rigid body with a fixed point under Hess conditions reduces to integrating the second order linear differential equation. In this paper the corresponding linear differential equation is derived and its coefficients are presented in the rational form. Using the Kovacic algorithm, we proved that the liouvillian solutions of the corresponding second order linear differential equation exists only in the case, when the moving rigid body is the Lagrange top, or in the case when the constant of the area integral is zero.
Keywords: rigid body with a fixed point, Hess case, Liouvillian solutions, Kovacic algorithm.
MSC 2010: 70E17; 70E40; 34A30

1. Уравнения Эйлера – Пуассона. Случай Гесса.

Рассмотрим движение твердого тела с одной закрепленной точкой O в однородном поле сил тяжести. Введем подвижную систему координат $Ox_1x_2x_3$, оси которой совпадают с главными осями эллипсоида инерции тела для точки O. Пусть M – масса тела, g – ускорение свободного падения, A_1, A_2, A_3 – моменты инерции тела относительно осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 соответственно; ω_1, ω_2, ω_3, γ_1, γ_2, γ_3 и x_1, x_2, x_3 – проекции на оси Ox_1, Ox_2 и Ox_3 вектора мгновенной угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}$, единичного вектора $\boldsymbol{\gamma}$, направленного по вертикали вверх, и радиуса – вектора $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OG}$ центра масс тела.

Уравнения движения тела получим из теоремы об изменении кинетического момента. В системе координат $Ox_1x_2x_3$ эти уравнения записываются в виде:

$$\begin{gathered}
A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\,\omega_2\omega_3 = Mg\,(x_3\gamma_2 - x_2\gamma_3)\,, \\
A_2\dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3)\,\omega_1\omega_3 = Mg\,(x_1\gamma_3 - x_3\gamma_1)\,, \\
A_3\dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1)\,\omega_1\omega_2 = Mg\,(x_2\gamma_1 - x_1\gamma_2)\,; \\
\\
\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \\
\dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \\
\dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2.
\end{gathered} \tag{1.1}$$

Известно, что для решения уравнений Эйлера – Пуассона достаточно найти четыре независимых первых интеграла системы (1.1). При любых значениях параметров A_1, A_2, A_3, x_1, x_2, x_3 известны три независимых первых интегралов системы (1.1) – интеграл энергии

$$H = \frac{1}{2}\left(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2\right) + Mg\,(x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3) = E,$$

интеграл площадей

$$K = A_1\omega_1\gamma_1 + A_2\omega_2\gamma_2 + A_3\omega_3\gamma_3 = k$$

и геометрический интеграл

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

В 1890 году В. Гесс показал [1], что при выполнении условий

$$x_3 = 0, \quad A_2 \left(A_3 - A_1\right) x_2^2 = A_1 \left(A_2 - A_3\right) x_1^2, \quad A_2 \geq A_3 \geq A_1, \tag{1.2}$$

уравнения (1.1) допускают частный четвертый интеграл, имеющий вид:

$$A_1 \omega_1 x_1 + A_2 \omega_2 x_2 = 0.$$

Детальное аналитическое исследование решения Гесса было выполнено П. А. Некрасовым [2, 3]. Он привел задачу к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка с двоякопериодическими комплексными коэффициентами и показал, что решения в случае Гесса являются, вообще говоря, неоднозначными. П. А. Некрасов изучил аналитические свойства полученного линейного дифференциального уравнения и выявил основные свойства траекторий на сфере Пуассона. Также П. А. Некрасовым [2, 3] было показано, что при выполнении условий Гесса и при дополнительном условии равенства нулю постоянной интеграла площадей уравнения Эйлера – Пуассона интегрируются в эллиптических функциях.

Поскольку решение задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка, то можно поставить задачу о существовании у соответствующего линейного дифференциального уравнения решений, имеющих аналитическое представление в виде лиувиллевых функций. Как известно, лиувиллевы функции строятся последовательно из рациональных функций с использованием алгебраических операций, неопределённого интегрирования и взятия экспоненты заданного выражения [4]. Решение линейного дифференциального уравнения второго порядка, выражающееся через лиувиллевы функции, наиболее точно соответствует понятию "решение в замкнутой форме" или "решение в квадратурах". Для нахождения лиувиллевых решений у линейного дифференциального уравнения второго порядка можно воспользоваться так называемым алгоритмом Ковачича [4], позволяющим находить в явном виде соответствующие решения или доказать их отсутствие. Для того, чтобы воспользоваться этим алгоритмом, необходимо, чтобы коэффициенты линейного дифференциального уравнения второго порядка были рациональными функциями независимой переменной.

Ниже показано, как получить линейное дифференциальное уравнение второго порядка в случае Гесса и как привести его к уравнению с рациональными коэффициентами.

2. Приведение к одному линейному уравнению второго порядка. Основной результат.

Введем новые обозначения

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$$

и новые переменные

$$L_1 = A_1\omega_1\cos\alpha + A_2\omega_2\sin\alpha, \quad L_2 = A_2\omega_2\cos\alpha - A_1\omega_1\sin\alpha, \quad L_3 = A_3\omega_3,$$

$$\nu_1 = \gamma_1\cos\alpha + \gamma_2\sin\alpha, \quad \nu_2 = \gamma_2\cos\alpha - \gamma_1\sin\alpha, \quad \nu_3 = \gamma_3.$$

В переменных L_1, L_2, L_3, ν_1, ν_2, ν_3 система уравнений Эйлера – Пуассона (1.1) примет вид:

$$\begin{aligned}
&\dot{L}_1 = -bL_1L_3,\\
&\dot{L}_2 = (a-c)\,L_1L_2 + bL_2L_3 + \nu_3\Gamma,\\
&\dot{L}_3 = -\,(a-c)\,L_1L_2 + bL_1^2 - bL_2^2 - \nu_2\Gamma,\\
\\
&\dot{\nu}_1 = cL_3\nu_2 - (cL_2 + bL_1)\,\nu_3,\\
&\dot{\nu}_2 = -cL_3\nu_1 + (aL_1 + bL_2)\,\nu_3,\\
&\dot{\nu}_3 = (bL_1 + cL_2)\,\nu_1 - (aL_1 + bL_2)\,\nu_2.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь обозначено

$$a = \frac{A_2x_1^2 + A_1x_2^2}{A_1A_2\left(x_1^2 + x_2^2\right)}, \quad b = \frac{(A_1 - A_2)\,x_1x_2}{A_1A_2\left(x_1^2 + x_2^2\right)}, \quad c = \frac{1}{A_3}, \quad \Gamma = Mg\sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Чтобы обнаружить дополнительный первый интеграл, существующий в случае Гесса, достаточно рассмотреть только первое уравнение полученной системы (2.1). В этом уравнении правая часть равна самой переменной L_1, умноженный на ограниченный по модулю коэффициент $-bL_3$. В связи с этим, если в начальный момент времени величина $L_1 = 0$, то и в любой момент времени окажется, что

$$L_1 \equiv 0. \tag{2.2}$$

Инвариантное многообразие (2.2) вместе с условиями (1.2) и определяет случай Гесса. При выполнении всех этих условий уравнения (2.1) заметно упрощаются и принимают вид:

$$\begin{aligned}
&\dot{L}_2 = bL_2L_3 + \nu_3\Gamma, \quad \dot{L}_3 = -bL_2^2 - \nu_2\Gamma,\\
\\
&\dot{\nu}_1 = cL_3\nu_2 - cL_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = bL_2\nu_3 - cL_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = cL_2\nu_1 - bL_2\nu_2.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Система уравнений (2.3) допускает следующие первые интегралы:

$$\frac{c}{2}\left(L_2^2+L_3^2\right)+\Gamma\nu_1=E; \quad L_2\nu_2+L_3\nu_3=k; \quad \nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1. \tag{2.4}$$

Заметим, что случай $b=0$ соответствует интегрируемому случаю Лагранжа. Вводя безразмерные переменные и параметры

$$L_2=\sqrt{\frac{\Gamma}{c}}y, \quad L_3=\sqrt{\frac{\Gamma}{c}}z, \quad t=\frac{\tau}{\sqrt{\Gamma c}},$$

$$d_1=\frac{b}{c}, \quad h=\frac{E}{\Gamma}, \quad k_1=k\sqrt{\frac{c}{\Gamma}}.$$

запишем систему уравнений (2.3) и первые интегралы (2.4) в безразмерной форме

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{d\tau}=d_1yz-\nu_3, \quad \frac{dz}{d\tau}=-d_1y^2+\nu_2,\\
&\frac{d\nu_1}{d\tau}=z\nu_2-y\nu_3, \quad \frac{d\nu_2}{d\tau}=d_1y\nu_3-z\nu_1, \quad \frac{d\nu_3}{d\tau}=y\nu_1-d_1y\nu_2,\\
&\frac{y^2+z^2}{2}+\nu_1=h, \qquad y\nu_2+z\nu_3=k_1.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Из системы уравнений (2.5) можно получить следующие уравнения

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)=-\sqrt{(y^2+z^2)\left[1-\left(\frac{y^2+z^2}{2}-h\right)^2\right]-k_1^2},$$

$$y\frac{dz}{d\tau}-z\frac{dy}{d\tau}=-d_1y\left(y^2+z^2\right)-k_1.$$

Введем теперь полярные координаты x и φ по формулам:

$$y=x\cos\varphi, \quad z=x\sin\varphi.$$

Тогда для определения величин x и φ мы получаем следующую систему двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&x\frac{dx}{d\tau}=-\sqrt{x^2\left[1-\left(\frac{x^2}{2}-h\right)^2\right]-k_1^2},\\
&x^2\frac{d\varphi}{d\tau}=-d_1x^3\cos\varphi-k_1.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Из этой системы находим зависимость $\varphi = \varphi(x)$, которая определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d_1 x^3 \cos\varphi + k_1}{x\sqrt{x^2\left[1-\left(\dfrac{x^2}{2}-h\right)^2\right]-k_1^2}}. \tag{2.7}$$

Заметим, что при переходе от системы (2.6) к уравнению (2.7) мы исключаем из рассмотрения случай $x = \mathrm{const}$, то есть $y^2 + z^2 = \mathrm{const}$ или $\nu_1 = \mathrm{const}$. Между тем, у тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса существуют стационарные движения, для которых $\nu_1 = \nu_1^0 = \mathrm{const}$ (см., например, [5]).

При помощи замены

$$w = \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}$$

уравнение (2.7) приводится к уравнению Риккати:

$$\frac{dw}{dx} = f_2 w^2 + f_0, \tag{2.8}$$

$$f_2 = -\frac{d_1 x^3 - k_1}{2x\sqrt{x^2\left[1-\left(\dfrac{x^2}{2}-h\right)^2\right]-k_1^2}} \qquad f_0 = \frac{d_1 x^3 + k_1}{2x\sqrt{x^2\left[1-\left(\dfrac{x^2}{2}-h\right)^2\right]-k_1^2}}.$$

Из общей теории дифференциальных уравнений известно (см. [6]), что если общее уравнение Риккати имеет вид (2.8), то заменой переменных вида

$$u(x) = \exp\left(-\int f_2(x)\, w(x)\, dx\right)$$

данное уравнение приводится к линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$f_2\frac{d^2u}{dx^2} - \left(\frac{df_2}{dx} + f_1 f_2\right)\frac{du}{dx} + f_0 f_2^2 u = 0, \tag{2.9}$$

или, если разделить на f_2:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \left(\frac{1}{f_2}\frac{df_2}{dx} + f_1\right)\frac{du}{dx} + f_0 f_2 u = 0. \tag{2.10}$$

Заметим, что переход от уравнения (2.9) к уравнению (2.10) возможен только в том случае, когда $f_2 \neq 0$. Условие $f_2 = 0$ с учётом того, что $x \neq \mathrm{const}$, равносильно одновременному выполнению условий

$$d_1 = 0, \quad k_1 = 0.$$

В дальнейшем будем считать, что $f_2 \neq 0$. Окончательно, дифференциальное уравнение второго порядка, к решению которого сводится решение задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса, имеет вид:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + a\left(x\right)\frac{du}{dx} + b\left(x\right)u = 0, \tag{2.11}$$

$$a\left(x\right) = \frac{d_1x^9 - 4k_1x^6 - 4d_1\left(h^2-1\right)x^5 + 12k_1hx^4 - 8k_1^2d_1x^3 - 8k_1\left(h^2-1\right)x^2 - 4k_1^3}{x\left(x^6 - 4hx^4 + 4\left(h^2-1\right)x^2 + 4k_1^2\right)\left(d_1x^3 - k_1\right)},$$

$$b\left(x\right) = \frac{\left(d_1x^3 + k_1\right)\left(d_1x^3 - k_1\right)}{x^2\left(x^6 - 4hx^4 + 4\left(h^2-1\right)x^2 + 4k_1^2\right)}.$$

Применение дифференциальному уравнению (2.11) алгоритма Ковачича [4] приводит к следующему результату.

Теорема 1. *Лиувиллевы решения в задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса существуют только если* $d_1 = 0$ *(случай Лагранжа) или если* $k_1 = 0$ *(постоянная интеграла площадей равна нулю).*

Список цитируемых источников

1. *Hess, W.* Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikulare Lösung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt. Mathematische Annalen. 37, No. 2, 153–181 (1890).
2. *Некрасов, П. А.* К задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Математический сборник. 16, No. 2, 508–517 (1892).

   Nekrasov, P. A. On the problem of motion of a heavy rigid body about a fixed point. Mathem. Sb. 16, No. 2, 508–517 (1892) (in Russian)
3. *Некрасов, П. А.* Аналитическое исследование одного случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Математический сборник. 18, No. 2, 161–274 (1896)

   Nekrasov, P. A. Recherches analytiques sur un cas de rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe. Mathematische Annalen. 47, 445–530 (1896).
4. *Kovacic, J.* An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations. J. Symb. Comput. 2, 3–43 (1986).
5. *Новиков, М. А.* О стационарных движениях твердого тела при существовании частного интеграла Гесса. Известия РАН. Механика твердого тела. No. 3. 28–37 (2018)

   Novikov, M. A. On Stationary Motions of a Rigid Body under the Partial Hess Integral Existence. Mechanics of Solids. 53, No. 3. 262–270 (2018)

6. *Зайцев, В. Ф., Полянин, А. Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит. (2001)

Polyanin, A. D. Zaitsev, V. F. Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations. CRC Press, Boca Raton–New York. (2003)

Получена 09.05.2020

Динамические системы, 2020, том 10(38), №2, 205–215

УДК 539.3

Достаточный признак единственности тривиального решения однородной квазирегулярной бесконечной системы линейных уравнений[1]

С. О. Папков

Севастопольский государственный университет,

E-mail: stanislav.papkov@gmail.com

Аннотация. Формулируется и доказывается достаточный признак единственности нулевого решения однородной квазирегулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Проверка данного признака включает в себя аналитическое суммирование рядов в условиях регулярности системы и обращение одного из главных миноров бесконечной матрицы. Приводятся примеры использования признака для вычисления собственных значений кравевых задач теории упругости.

Ключевые слова: бесконечная система линейных алгебраических уравнений, квазирегулярность, единственность, собственные значения, колебания и устойчивость пластин.

A Sufficient Criterion for the Uniqueness of the Trivial Solution of the Homogeneous Quasi-regular Infinite System of Linear Equations

S. O. Papkov

Sevastopol State University, Sevastopol 299053.

Abstract. A sufficient criterion for the uniqueness of the zero solution of the homogeneous quasi-regular infinite system of linear algebraic equations is formulated and proved. Verifying this criterion includes an analytical summation of the series in the regularity conditions of the system and the inversion of one of the main minors of the infinite matrix. Examples are presented for calculation of the eigenvalues of boundary value problems of the theory of elasticity.

Keywords: infinite system of linear algebraic equations, quasiregularity, uniqueness, eigenvalues, vibrations and stability of the plates.

MSC 2010: 15A06, 47A50, 74K20

---

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и города Севастополь в рамках научного проекта №18-41-920001.

1. Введение

Вопросы, связанные с единственностью решений бесконечных систем линейных уравнений, как правило, представляют интерес с математической точки зрения. Если в теории конечных матриц и конечных систем линейных алгебраических уравнений основную роль играют определители, то в теории бесконечных матриц и систем их роль в значительной степени теряется [4]. В связи с этим, исследование существования и единственности ограниченного решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений основывается на исследовании сходимости метода последовательных приближений в некотором функциональном пространстве последовательностей [2], [3].

В частности, вполне регулярные бесконечные системы

$$z_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} z_n + B_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

для которых по определению верна оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty} |M_{mn}| \leq 1 - \rho$$

при $\rho > 0$ и любого номера m, можно рассматривать как функциональные уравнения в пространстве ограниченных последовательностей ℓ^{∞}. В [2] доказано существование единственного ограниченного решения для вполне регулярных бесконечных систем при условии ограниченности свободных членов. Очевидно, что однородная вполне регулярная система будет иметь лишь нулевое (тривиальное) решение. Если условия регулярности выполняются, начиная с некоторого номера N_R, то бесконечную систему называют квазирегулярной. Вопрос о существовании ограниченного решения у квазирегулярной бесконечной системы сводится [3] к исследованию конечной линейной системы с коэффициентами, выраженными через решения вспомогательных регулярных бесконечных систем с одинаковой матрицей и различными свободными членами. Таким образом, исследование существования ограниченного решения у квазирегулярной бесконечной системы согласно подходу [3] сводится к исследованию совокупности регулярных бесконечных систем и одной конечной системы линейных уравнений.

Многие задачи математической физики на собственные значения, в частности задачи теории упругости на определение собственных частот колебаний и критических сил, могут быть приведены к однородным бесконечным системам с коэффициентами $M_{mn}(\lambda)$, которые нелинейно зависят от параметра. Такие системы, очевидно, не могут быть вполне регулярными на всем диапазоне изменения параметра λ, так как на собственных значениях краевой задачи имеется нетривиальное решение однородной бесконечной системы. Как правило, вопрос об единственности решения бесконечных систем в практических приложениях отдельно не исследуется (например [6]), данный вывод зачастую делается на основании некоторых априорных соображений, относящихся к форме решения исследуемой краевой задачи. Далее система обычно редуцируется в конечную, определитель которой и дает дисперсионное уравнение для приближенного определения собственных чисел краевой задачи.

В статье развивается подход, ранее представленный в работах [7], [8] об определении собственных частот колебаний упругих тел на основе анализа соответствующих краевым задачам бесконечных систем. В частности, было замечено, что возникающие в краевых задачах теории упругости однородные бесконечные системы являются таковыми, что $\rho > 0$ для всех номеров $m > N_R$. С учетом этого факта формулируется и доказывается достаточный признак существования единственного ограниченного решения у квазирегулярной системы. На практике данный признак позволяет найти малые интервалы изменения λ, где возможно нетривиальное решение бесконечной системы, и как следствие, присутствует собственная частота. Таким образом, представленные ниже достаточные условия единственности однородной квазирегулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, предлагается, главным образом, использовать как эффективный инструмент решения краевых задач математической физики.

2. Основной результат

Рассмотрим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений вида

$$z_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} z_n, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$

которая удовлетворяет условиям квазирегулярности при некоторых $\rho > 0$ и N_R:

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} |M_{mn}| < \infty, \quad m = 1, 2, \ldots, N_R \tag{2.2}$$

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} |M_{mn}| \leq 1 - \rho, \quad m = N_R + 1, N_R + 2, \ldots \tag{2.3}$$

Предлагается следующая теорема.

Теорема 1. *Бесконечная система линейных алгебраических уравнений (2.1), удовлетворяющая условиям квазирегулярности (2.2)-(2.3), будет иметь единственное тривиальное решение, если при некотором номере* N *существует обратная матрица* $\{c_{mi}\}_{m,i=1}^{N}$ *к матрице* $\{\delta_{mn} - M_{mn}\}_{m,n=1}^{N}$ *(δ_{mn} — символы Кронекера) и справедлива оценка*

$$T_N = 1 - \max_{j=1,2,\ldots,N} \sum_{i=1}^{N} |c_{ji}| \left(S_i - \sum_{n=1}^{N} |M_{in}| \right) + \inf_{m>N} \frac{1 - \theta - S_m}{\sum\limits_{n=1}^{N} |M_{mn}|} > 0 \qquad (2.4)$$

где $0 < \theta < \rho$.

Доказательство. Рассмотрим первые N уравнений бесконечной системы (2.1)

$$Z_m - \sum_{n=1}^{N} M_{mn} Z_n = \sum_{n=N+1}^{\infty} M_{mn} Z_n, \quad m = 1, 2, \ldots, N \qquad (2.5)$$

которые, согласно условию теоремы, позволяют явно выразить первые неизвестные в виде

$$Z_m = \sum_{i=1}^{N} c_{mi} \sum_{n=N+1}^{\infty} M_{in} Z_n, \quad m = 1, 2, \ldots, N \qquad (2.6)$$

Подстановка (2.6) в уравнения (2.1) при $m > N$ дает возможность исключить первые неизвестные из системы и записать систему относительно оставшихся неизвестных $Z_{N+1}, Z_{N+2}, \ldots$

$$Z_m = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(M_{mn} + \sum_{i,j=1}^{N} M_{mj} c_{ji} M_{in} \right) Z_n, \quad m = N+1, N+2, \ldots \qquad (2.7)$$

Используя равенство

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |M_{mn}| = S_m - \sum_{n=1}^{N} |M_{mn}| \qquad (2.8)$$

оценим регулярность бесконечной системы (2.7) следующим образом

$$S_m^N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| M_{mn} + \sum_{i,j=1}^{N} M_{mj} c_{ji} M_{in} \right| \le$$

$$\le \sum_{n=N+1}^{\infty} |M_{mn}| + \sum_{j=1}^{N} |M_{mj}| \sum_{i=1}^{N} |c_{ji}| \sum_{n=N+1}^{\infty} |M_{in}| \qquad (2.9)$$

$$= S_m - \sum_{n=1}^{N} |M_{mn}| + \sum_{j=1}^{N} |M_{mj}| \sum_{i=1}^{N} |c_{ji}| \left(S_i - \sum_{n=1}^{N} |M_{in}| \right), \quad m = N+1, N+2, \ldots$$

Обозначив для краткости

$$\xi_N = \max_{1\leq j\leq N} \sum_{i=1}^{N} |c_{ji}| \left(S_i - \sum_{n=1}^{N} |M_{in}| \right) \tag{2.10}$$

можно записать оценку регулярности системы в виде

$$S_m^N \leq S_m - (1 - \xi_N) \sum_{n=1}^{N} |M_{mn}| \tag{2.11}$$

Далее, алгебраически преобразуем (2.11) таким образом, чтобы условие теоремы (2.4) обеспечивало вполне регулярность бесконечной системы (2.7)

$$S_m - (1 - \xi_N) \sum_{n=1}^{N} |M_{mn}| = 1 - \theta - \left(1 - \xi_N + \frac{1 - \theta - S_m}{\sum\limits_{n=1}^{N} |M_{mn}|} \right) \sum_{n=1}^{N} |M_{mn}| \tag{2.12}$$

Действительно, обозначив

$$\vartheta_N = \inf_{m>N} \frac{1 - \theta - S_m}{\sum\limits_{n=1}^{N} |M_{mn}|}, \tag{2.13}$$

получаем, что условие (2.4) гарантирует вполне регулярность данной системы

$$S_m^N \leq 1 - \theta - (1 - \xi_N + \vartheta_N) \sum_{n=1}^{N} |M_{mn}| \leq 1 - \theta \tag{2.14}$$

Следовательно, бесконечная система (2.7) имеет единственное ограниченное решение, которое является тривиальным в силу однородности системы. Очевидно, из равенства (2.6) следует равенство нулю первых неизвестных. □

3. Приложение к нахождению собственных частот колебаний пластины

Уравнение Жермен-Лагранжа, описывающее малые поперечные колебания упругой изотропной пластины $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ постоянной толщины h имеет вид

$$D\Delta\Delta w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0\,, \tag{3.1}$$

где $w(x, y, t)$ — поперечный прогиб срединной плоскости пластины, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — двумерный оператор Лапласа; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — изгибная (цилиндрическая) жесткость пластины, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, ρ — удельная плотность на единицу площади пластины, t — время.

Задача об определении собственных частот и форм колебаний пластины со свободными краями сводится к определению прогиба $W(x, y)$ (гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и далее опущен) и собственной частоты $\Omega^4 = \rho h\omega^2/D$ из однородной краевой задачи

$$\Delta\Delta W - \Omega^4 W = 0 \tag{3.2}$$

с граничными условиями:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial x} = 0\,, \quad x = \pm a\,, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial y \partial x^2} = 0\,, \quad y = \pm b\,. \tag{3.6}$$

Общее решение дифференциального уравнения (3.2) можно построить в виде суммы решений для полос $|x| \le a$ и $|y| \le b$ в форме тригонометрических рядов при помощи разделения переменных. При этом выбираем решение таким образом, чтобы тождественно удовлетворить граничные условия (3.3),(3.5) и иметь достаточный произвол для выполнения оставшихся двух граничных условий. В частности, для симметричных колебаний по обеим координатным осям, функция прогиба имеет вид

$$W = \frac{bx_0}{\Omega}\left(\frac{\cos\Omega y}{\sin\Omega b} - \frac{\operatorname{ch}\Omega y}{\operatorname{sh}\Omega b}\right) + \frac{ay_0}{\Omega}\left(\frac{\cos\Omega x}{\sin\Omega a} - \frac{\operatorname{ch}\Omega x}{\operatorname{sh}\Omega a}\right) \tag{3.7}$$

$$+b\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n A(y, b, \alpha_n)\cos\alpha_n x + a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}y_n A(x, a, \beta_n)\cos\beta_n y;$$

где обозначено $\alpha_n = \pi n/a$, $\beta_n = \pi n/b$;

$$A(z,h,\xi) = \frac{\xi^2+\Omega^2-(2-\nu)\xi^2}{\sqrt{\xi^2-\Omega^2}}\cdot\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\xi^2-\Omega^2}z}{\operatorname{sh}\sqrt{\xi^2-\Omega^2}h} - \frac{\xi^2-\Omega^2-(2-\nu)\xi^2}{\sqrt{\xi^2+\Omega^2}}\cdot\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\xi^2+\Omega^2}z}{\operatorname{sh}\sqrt{\xi^2+\Omega^2}h};$$

$$B(z,h,\xi) = \frac{\xi^2+\Omega^2-(2-\nu)\xi^2}{\sqrt{\xi^2-\Omega^2}}\cdot\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\xi^2-\Omega^2}z}{\operatorname{ch}\sqrt{\xi^2-\Omega^2}h} - \frac{\xi^2-\Omega^2-(2-\nu)\xi^2}{\sqrt{\xi^2+\Omega^2}}\cdot\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\xi^2+\Omega^2}z}{\operatorname{ch}\sqrt{\xi^2+\Omega^2}h}.$$

Подстановка (3.7) в граничные условия (3.4), (3.6) с последующим разложением входящих функций в тригонометрические ряды позволяет из равенства при базисных функциях получить однородную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов.

$$2\nu\, x_0 + a\Omega(\operatorname{ctg} a\Omega + \operatorname{cth} a\Omega)y_0 = 2\nu\Omega^6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{p_{1n}^2 p_{2n}^2}; \tag{3.8}$$

$$b\Omega(\operatorname{ctg} b\Omega + \operatorname{cth} b\Omega)x_0 + 2\nu y_0 = 2\nu\Omega^6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{q_{1n}^2 q_{2n}^2}; \tag{3.9}$$

$$y_m \Delta_s(\beta_m, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\Omega^2((1-\nu)^2\alpha_n^2\beta_m^2 + \nu\Omega^4)}{(\alpha_n^2 + q_{1m}^2)(\alpha_n^2 + q_{2m}^2)} x_n + \frac{4\nu\Omega^4 x_0}{q_{1m}^2 q_{2m}^2}; \tag{3.10}$$

$$x_m \Delta_s(\alpha_m, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\Omega^2((1-\nu)^2\alpha_m^2\beta_n^2 + \nu\Omega^4)}{(\beta_n^2 + p_{1m}^2)(\beta_n^2 + p_{2m}^2)} y_n + \frac{4\nu\Omega^4 y_0}{p_{1m}^2 p_{2m}^2} \tag{3.11}$$

$$(m = 1, 2, \dots)$$

где $p_{1n}^2 = \alpha_n^2 - \Omega^2; p_{2n}^2 = \alpha_n^2 + \Omega^2;\ q_{1n}^2 = \beta_n^2 - \Omega^2; q_{2n}^2 = \beta_n^2 + \Omega^2;$

$$\Delta_s(z, h) = h\left(\frac{((1-\nu)z^2 + \Omega^2)^2}{\sqrt{z^2 + \Omega^2}} \operatorname{cth} \sqrt{z^2 + \Omega^2}h - \frac{((1-\nu)z^2 - \Omega^2)^2}{\sqrt{z^2 - \Omega^2}} \operatorname{cth} \sqrt{z^2 - \Omega^2}h\right).$$

Для исследования регулярности (квазирегулярности) системы (3.8) - (3.11) используем значения известных рядов [5], которые позволяют аналитически просуммировать ряды

$$S_1 = \frac{b\Omega}{2\nu}\left|\mathrm{ctg}\Omega b + \mathrm{cth}\Omega b\right| + \frac{\Omega^2}{2} + \Omega^6 \sum_{n=1}^{N_1} \frac{1}{q_{2n}^2}\left(\frac{1}{|q_{1n}^2|} - \frac{1}{q_{1n}^2}\right) - \frac{\Omega^3 b}{4}\left(\mathrm{ctg}\Omega b + \mathrm{cth}\Omega b\right)$$

где $N_1 = [\Omega b/\pi] + 1;$

$$S_2 = \frac{a\Omega}{2\nu}\left|\mathrm{ctg}\Omega a + \mathrm{cth}\Omega a\right| + \frac{\Omega^2}{2} + \Omega^6 \sum_{n=1}^{N_2} \frac{1}{p_{2n}^2}\left(\frac{1}{|p_{1n}^2|} - \frac{1}{p_{1n}^2}\right) - \frac{\Omega^3 a}{4}\left(\mathrm{ctg}\Omega a + \mathrm{cth}\Omega a\right)$$

где $N_2 = [\Omega a/\pi] + 1;$

$$S_{2m+1} = \frac{1}{|\Delta_s(\beta_m, a)|}\left(4\Omega^2 \sum_{n=1}^{N_3} \frac{(1-\nu)^2\alpha_n^2\beta_m^2 + \nu\Omega^4}{(\alpha_n^2 + q_{2m}^2)}\left(\frac{1}{|\alpha_n^2 + q_{1m}^2|} - \frac{1}{\alpha_n^2 + q_{1m}^2}\right) + \frac{4\nu\Omega^4}{|q_{1m}^2| q_{2m}^2}\right.$$

$$\left. + (\Omega^4\nu - (1-\nu)^2 q_{1m}^2\beta_m^2)\left(\frac{a\mathrm{cth} q_{1m} a}{q_{1m}} - \frac{1}{q_{1m}^2}\right) - (\Omega^4\nu - (1-\nu)^2 q_{2m}^2\beta_m^2)\left(\frac{a\mathrm{cth} q_{2m} a}{q_{2m}} - \frac{1}{q_{2m}^2}\right)\right);$$

$$S_{2m+2} = \frac{1}{|\Delta_s(\alpha_m, b)|}\left(4\Omega^2 \sum_{n=1}^{N_3} \frac{(1-\nu)^2\alpha_m^2\beta_n^2 + \nu\Omega^4}{(\beta_n^2 + p_{2m}^2)}\left(\frac{1}{|\beta_n^2 + p_{1m}^2|} - \frac{1}{\beta_n^2 + p_{1m}^2}\right) + \frac{4\nu\Omega^4}{|p_{1m}^2| p_{2m}^2}\right.$$

Таблица 1. Локализация собственных значений пластины Ω_n

N	2	4	8	[8]
Ω_1	2,254 − 2,261	2,256 − 2,259	2,257 − 2,258	2,257
Ω_2	2,438 − 2,448	2,441 − 2,446	2,442 − 2,444	2,443
Ω_3	4,046 − 4,057	4,047 − 4,055	4,049 − 4,053	4,051

$$+(\Omega^4\nu-(1-\nu)^2p_{1m}^2\alpha_m^2)\left(\frac{b\mathrm{cth}p_{1m}b}{p_{1m}}-\frac{1}{p_{1m}^2}\right)-(\Omega^4\nu-(1-\nu)^2p_{2m}^2\alpha_m^2)\left(\frac{b\mathrm{cth}p_{2m}b}{p_{2m}}-\frac{1}{p_{2m}^2}\right)\Bigg)$$

где

$$N_3=\left[\sqrt{\max\left(0,\left(\frac{a\Omega}{\pi}\right)^2-\left(\frac{a}{b}\right)^2,\left(\frac{b\Omega}{\pi}\right)^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)}\right]+1.$$

Выражения S_m допускают одинаковую асимптотическую оценку для четных и нечетных номеров

$$S_m(\Omega)=\sum_{n=1}^{\infty}|M_{mn}(\Omega)|=\frac{1-\nu}{3+\nu}+O\left(1/m\right),\quad m\to\infty \tag{3.12}$$

Поскольку коэффициент Пуассона может принимать значения $\nu\leq 0,5$, то из оценок (3.12) следует, что всегда найдется некоторый номер N_R, что при $m>N_R$ бесконечная система удовлетворяет условию (2.3), то есть является квазирегулярной. Проверяя далее условие предложенной теоремы (2.4) на диапазоне частот, можно найти интервал расположения собственной частоты. Увеличением N удается сузить интервал настолько, что с некоторой точностью получаем значение собственной частоты. Таблица 1 демонстрирует локализацию первой собственной частоты для квадратной пластины при $\nu=0,225$. Заметим, что уже при $N=2$ удается найти значение первых собственных частот с удовлетворительной для практических целей точностью. В последнем столбце таблицы представлены значения собственных частот, найденные согласно методу Ритца [9].

4. Приложение к нахождению критических сил устойчивости пластины

Аналогично проблеме собственных колебаний тонкой пластины, предложенная теорема может быть использована для другой задачи на собственные значения теории пластин. Рассмотрим задачу о статической устойчивости защемленной тонкой пластины $|x|\leq a$, $|y|\leq b$ постоянной толщины h, равномерно сжатой усилиями

N_x и N_y в плоскости пластины. Согласно [1] функция прогиба $w(x,y)$ должна удовлетворять линеаризованному уравнению устойчивости:

$$D\Delta\Delta w + N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \tag{4.1}$$

На границе пластины Г заданы условия жесткого защемления:

$$w|_\Gamma = 0; \quad \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_\Gamma = 0, \tag{4.2}$$

где D — цилиндрическая жесткость пластины.

Решение дифференциального уравнения (4.1) можно получить, аналогично предыдущему разделу, методом разделения переменных. С учетом симметрии решения по обеим координатам получаем:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{ch} p_{1,n} b \left(\frac{\mathrm{ch} p_{1,n} y}{\mathrm{ch} p_{1,n} b} - \frac{\mathrm{ch} p_{2,n} y}{\mathrm{ch} p_{2,n} b}\right)\cos\alpha_n x + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \mathrm{ch} q_{1,n} a \left(\frac{\mathrm{ch} q_{1,n} x}{\mathrm{ch} q_{1,n} a} - \frac{\mathrm{ch} q_{2,n} x}{\mathrm{ch} q_{2,n} a}\right)\cos\beta_n y. \tag{4.3}$$

где $\alpha_n = (n-1/2)\pi/a$, $\beta_n = (n-1/2)\pi/b$; $p_{1,n}, p_{2,n}, q_{1,n}, q_{2,n}$ — корни характеристических уравнений ($Q = N_x/D;\ P = N_y/D$):

$$p_{1,n} = \sqrt{\alpha_n^2 - \tfrac{P}{2} + \sqrt{(Q-P)\alpha_n^2 + \tfrac{P^2}{4}}}, \quad q_{1,n} = \sqrt{\beta_n^2 - \tfrac{Q}{2} + \sqrt{(P-Q)\beta_n^2 + \tfrac{Q^2}{4}}},$$
$$p_{2,n} = \sqrt{\alpha_n^2 - \tfrac{P}{2} - \sqrt{(Q-P)\alpha_n^2 + \tfrac{P^2}{4}}}, \quad q_{2,n} = \sqrt{\beta_n^2 - \tfrac{Q}{2} - \sqrt{(P-Q)\beta_n^2 + \tfrac{Q^2}{4}}}.$$

Подставляя решение (4.3) в краевые условия (4.2) получаем однородную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_n, B_n:

$$X_m\Delta_m^x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha_n}{(\alpha_n^2 + q_{1,m}^2)(\alpha_n^2 + q_{2,m}^2)}Y_n \tag{4.4}$$

$$Y_m\Delta_m^y = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\beta_n}{(\beta_n^2 + p_{1,m}^2)(\beta_n^2 + p_{2,m}^2)}X_n \tag{4.5}$$

$$(m = 1, 2, \dots)$$

где $X_n = B_n\frac{(-1)^n}{a}(q_{1,n}^2 - q_{2,n}^2)\mathrm{ch} q_{1,n} a$, $Y_n = A_n\frac{(-1)^{n+1}}{b}(p_{1,n}^2 - p_{2,n}^2)\mathrm{ch} p_{1,n} b$,

$$\frac{\Delta_m^x}{a} = \frac{q_{1,m}\mathrm{th} q_{1,m} a - q_{2,m}\mathrm{th} q_{2,m} a}{\beta_m(q_{1,m}^2 - q_{2,m}^2)}; \quad \frac{\Delta_m^y}{b} = \frac{p_{1,m}\mathrm{th} p_{1,m} b - p_{2,m}\mathrm{th} p_{2,m} b}{\alpha_m(p_{1,m}^2 - p_{2,m}^2)}.$$

Таблица 2. Локализация критических сил пластины

N	4	10	20	30	50
Интервал для $(b/\pi)^2 Q$	2,456 – 2,586	2,507 – 2,530	2,515 – 2,522	2,517 – 2,520	2,518 – 2,518

Запишем систему (4.4)-(4.5) в канонической форме

$$z_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn}(P,Q) z_n \quad m = 1, 2, \ldots \tag{4.6}$$

обозначив $z_{2m-1} = X_m, z_{2m} = Y_m$.

Оценим регулярность (2.3) данной системы при помощи дигамма функции $\psi(z)$:

$$S_{2m-1} = \frac{a\left(\psi\left(\frac{1}{2} + \frac{iaq_{1m}}{\pi}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{iaq_{2m}}{\pi}\right) + \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{iaq_{1m}}{\pi}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{iaq_{2m}}{\pi}\right)\right)}{|\Delta_m^x|\pi(q_{1m}^2 - q_{2m}^2)}$$

$$S_{2m} = \frac{b\left(\psi\left(\frac{1}{2} + \frac{ibp_{1m}}{\pi}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{ibp_{2m}}{\pi}\right) + \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{ibp_{1m}}{\pi}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{ibp_{2m}}{\pi}\right)\right)}{|\Delta_m^y|\pi(p_{1m}^2 - p_{2m}^2)}$$

Далее, переходя к пределу, получаем для любых значений P и Q:

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \frac{2}{\pi}.$$

Откуда следует, что система (4.6) удовлетворяет условиям (2.3), начиная с некоторого $m > N_R$, то есть является квазирегулярной.

Проверим условие (2.4) предложенной теоремы для данной системы. В таблице 2 представлены интервалы для критической силы Q в случае одноосного сжатия квадратной пластины $P = 0$ $(a = b)$ при различных значениях параметра теоремы N.

Из данных таблицы следует, что критическое значение $Q_C = 2,518(\pi/b)^2$. В [1] дается значение $Q_1 = 2,517\,(\pi/b)^2$, которое отлично согласуется с найденным значением.

5. Заключение

В статье формулируется и доказывается теорема единственности тривиального решения однородной квазирегулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Представленные примеры показывают, что проверка условия

$T_N > 0$ позволяет с высокой точностью найти собственное значение (собственную частоту или величину критической силы) краевой задачи без численного решения бесконечной системы, опираясь лишь на аналитическое суммирование рядов в условиях регулярности и проверку условия предложенной теоремы.

Автор благодарит рецензента за полезные замечания, способствовавшие улучшению изложения.

Список цитируемых источников

1. *Биргер И. А., Пановко Я. Г. (ред.)* Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. М.: Машиностроение, 1968.

   Birger I. A., Panovko Ya. G. (ed.) Strength, stability, vibrations. Handbook in three volumes. Vol. 3. M.: Mechanical Engineering, 1968. (in Russian)
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.

   Kantorovich L. V., Akilov G. P. Functional analysis. M: Nauka, 1984.
3. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.-Л.: Гос. изд. тех.-теор. лит., 1952. 695 с.

   Kantorovich, L. V.,; Krylov, V. I. Approximate methods of higher analysis. Reprint of the 1958 edition published by P. Noordhoff Ltd. Mineola, NY: Dover Publications, xii, 681 p. (2018).
4. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1960.

   Cooke R. G. Infinite matrices and sequence spaces. London: Macmillan, 1950.
5. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Том 1. Элементарные функции. М.: Наука, 1981.

   Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. Integrals and series. Vol. 1. Elementary functions. M .: Nauka, 1981. (in Russian)
6. *Gorman D.J.* Accurate free vibration analysis of clamped orthotropic plate by the method of superposition // Journal of Sound and Vibration. 1993. 165 (3), P. 409–420.
7. *Papkov S. O., Chekhov V. N.* Limiting Limitants in Dynamic Problems for a Rectangular Prism // International Applied Mechanics 49, No.5, 2013. P. 555-569.
8. *Papkov S.O.* A new method for analytical solution of inplane free vibration of rectangular orthotropic plates based on the analysis of infinite systems // Journal of Sound and Vibration. 2016. 369, P. 228–245.
9. *Leissa A.W.* The free vibration of rectangular plate // Journal of Sound and Vibration. 1973. 31, P. 257–293.

Получена 25.10.2019 Переработана 18.02.2020

Динамические системы, 2020, том 10(38), №2, 216–224

УДК 517.926

О нулевых спектрах характеристик колеблемости Сергеева уравнения Эйлера

А. Х. Сташ, А. А. Аллахвердян, А. Е. Артисевич, Н. А. Лобода

Кавказский математический центр,
Адыгейский государственный университет, Майкоп 385000,
E-mail: aidamir.stash@gmail.com, alinaallakhverdyan@mail.ru, cokolovangela@rambler.ru, n-loboda@yandex.ru

Аннотация. В данной работе исследуются различные разновидности показателей колеблемости (верхние или нижние, сильные или слабые) и частот Сергеева знаков, нулей и корней ненулевых решений линейных однородных дифференциальных уравнений с непрерывными и ограниченными на положительной полуоси коэффициентами. Известно, что спектры всех перечисленных характеристик колеблемости Сергеева (т.е. их множества значений на ненулевых решениях) уравнений до второго порядка состоят из одного значения, а спектры частот Сергеева уравнений выше второго порядка принадлежат классу суслинских множеств неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой. В автономном случае изучаемые спектры тесно связаны с множеством корней соответсвующего характеристического уравнения, а некоторые из них даже могут достигать мощность континуума. В настоящей статье доказано, что спектры характеристик колеблемости Сергеева уравнения Эйлера состоят из одного нулевого значения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, колеблемость, число нулей, частота Сергеева, показатель колеблемости.

On zero spectra of Sergeyev oscillation characteristic of the Euler's equation

A. Kh. Stash, A. A. Allahverdyan, A. E Artisevich, N. A. Loboda

Caucasus Mathematical Center, Adyghe State University, Maikop 385000.

Abstract. In this paper, we study various types of exponents of oscillation (upper or lower, strong or weak) and Sergeyev's frequencies of signs, zeros and roots of non-zero solutions of linear homogeneous differential equations with continuous coefficients bounded on the positive semi-axis. It is known that the spectra of all the listed Sergeyev oscillation characteristic (i.e their number of values for non-zero solutions) of the equations up to the second order consist of one value, and the spectra Sergeyev's frequencies equations of order greater than two belong to the class of Suslin sets on the nonnegative half-line of the extended real line. In the autonomous case, the spectra under study are closely related to the set of roots of the corresponding characteristic polynomial, and some of them can reach the

cardinality of the continuum. In this article, it is proved that the spectra of Sergeyev oscillation characteristic of the Euler's equation consist of one zero value.
Keywords: differential equations, oscillation, number of zeros, exponents of oscillation, Sergeev's frequencies.

MSC 2010: 34A35

Введение

В работах И. Н. Сергеева [6, 7, 8] на полупрямой вводились и исследовались различные характеристики ляпуновского типа ненулевых решений линейных дифференциальных уравнений и систем. Эти характеристики отвечают за колеблемость и блуждаемость решения. В 2015 году в статье [9] были систематизированы все введенные И. Н. Сергеевым характеристики ляпуновского типа, что привело к изменению названий некоторых из них. В частности, полные и векторные частоты переименованы соответственно в сильные и слабые показатели колеблемости. В работах [1, 2, 3] характеристические частоты [6] были названы *частотами Сергеева.*

Данная работа посвящена изучению спектров характеристик колеблемости Сергеева уравнения Эйлера. Решения линейных однородных уравнений первого порядка на $\mathbb{R}_+$ не имеют нулей (в силу теоремы существования и единственности), поэтому значения всех характеристик колеблемости равны нулю. Спектр каждой из характеристик колеблемости уравнения второго порядка состоит из одного значения [8], а спектры частот Сергеева уравнений выше второго порядка принадлежат классу суслинских множеств неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой [3].

Из общего курса дифференциальных уравнений известно, что уравнение Эйлера сводится к автономному уравнению [14]. Спектры показателей колеблемости автономного уравнения n-го порядка состоят не более чем из n различных значений [8, 10, 11, 12, 13], а спектры частот Сергеева устроены сложнее и полностью не исследованы: для уравнений третьего порядка они всегда конечны [6], а для уравнений четвертого порядка могут иметь мощность континуума [4].

В настоящей работе установлено, что на множестве решений уравнения Эйлера все характеристики колеблемости Сергеева равны нулю.

1. Основные обозначения и определения

Для заданного натурального n рассмотрим множество $\mathcal{E}^n$ линейных однородных уравнений n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty),$$

задаваемых ограниченными непрерывными функциями

$$a \equiv (a_1, \ldots, a_n) \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n,$$

с которыми в дальнейшем и будем отождествлять сами уравнения. Через $\mathcal{L}^n$ обозначим подмножество множества $\mathcal{E}^n$, состоящее из уравнений Эйлера:

$$(pt+q)^n y^{(n)} + a_1(pt+q)^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(pt+q)\dot{y} + a_n y = 0, \quad p, q > 0.$$

Множество всех ненулевых решений уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(a)$. Далее, звездочкой снизу будем помечать любое линейное пространство, в котором выколот нуль. Положим

$$\mathcal{S}_*^n = \bigcup_{a \in \mathcal{E}^n} \mathcal{S}_*(a).$$

Определение 1 ([6]). Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая смена знака* функции $y \in \mathcal{S}_*^n$, если в любой окрестности этой точки функция y принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Определение 2 ([6]). Для момента $t > 0$ и функции $y \in \mathcal{S}_*^n$ введем следующие обозначения:

$\nu^-(y,t)$ — число точек ее *строгой смены знака* на промежутке $(0,t]$;

$\nu^0(y,t)$ — число ее *нулей* на промежутке $(0,t]$;

$\nu^+(y,t)$ — число ее *корней* (т. е. нулей с учетом их *кратности*) на промежутке $(0,t]$.

Далее, для вектора $m \in \mathbb{R}_*^n$ и вектор-функции $\psi y = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$ введем обозначение $\nu^\gamma(y,m,t) \equiv \nu^\gamma(\langle \psi y, m\rangle, t)$, где $\gamma \in \{-,0,+\}$, $\langle \psi y(\cdot), m\rangle$ — скалярное произведение.

Определение 3 ([1, 2, 6]). *Верхние* (*нижние*) *частоты Сергеева знаков, нулей* и *корней* любого решения $y \in \mathcal{S}_*^n$ при $\gamma \in \{-,0,+\}$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}^\gamma(y) \equiv \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^\gamma(y,t) \quad \left(\check{\nu}^\gamma(y) \equiv \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^\gamma(y,t)\right).$$

В случае совпадения какой-либо верхней частоты Сергеева решения y с одноименной нижней будем называть ее *точной* и обозначать $\nu^\gamma(y)$. Если дополнительно еще выполняется равенство $\nu^-(y) = \nu^0(y) = \nu^+(y)$, то частоты Сергеева – *абсолютными*.

Определение 4 ([7, 8, 9])**.** *Верхние* (*нижние*) *сильный* и *слабый показатели колеблемости знаков, нулей* и *корней* функции $y \in \mathcal{S}^n_*$ при $\gamma \in \{-, 0, +\}$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}^\gamma_\bullet(y) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\gamma(y,m,t) \quad \left(\check{\nu}^\gamma_\bullet(y) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \varliminf_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\gamma(y,m,t)\right),$$
$$\hat{\nu}^\gamma_\circ(y) \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\gamma(y,m,t) \quad \left(\check{\nu}^\gamma_\circ(y) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\gamma(y,m,t)\right).$$

В случае совпадения сильного или слабого верхнего показателя колеблемости решения y с одноименным нижним будем называть его *точным* и обозначать $\nu^\gamma_\bullet(y)$ или $\nu^\gamma_\circ(y)$.

2. Вспомогательные факты

Из сформулированных определений вытекают

Замечание 1. Для любого $y \in \mathcal{S}^n_*$ имеют место следующие соотношения

$$\hat{\nu}^-_\circ(y) \le \hat{\nu}^0_\circ(y) \le \hat{\nu}^+_\circ(y), \quad \check{\nu}^-_\circ(y) \le \check{\nu}^0_\circ(y) \le \check{\nu}^+_\circ(y),$$
$$\hat{\nu}^-_\bullet(y) \le \hat{\nu}^0_\bullet(y) \le \hat{\nu}^+_\bullet(y), \quad \check{\nu}^-_\bullet(y) \le \check{\nu}^0_\bullet(y) \le \check{\nu}^+_\bullet(y),$$
$$\hat{\nu}^-(y) \le \hat{\nu}^0(y) \le \hat{\nu}^+(y), \quad \check{\nu}^-(y) \le \check{\nu}^0(y) \le \check{\nu}^+(y).$$

Замечание 2. Для любых $y \in \mathcal{S}^n_*$ и $\gamma \in \{-, 0, +\}$ справедливы неравенства

$$\hat{\nu}^\gamma_\circ(y) \le \hat{\nu}^\gamma_\bullet(y) \le \hat{\nu}^\gamma(y), \quad \check{\nu}^\gamma_\circ(y) \le \check{\nu}^\gamma_\bullet(y) \le \check{\nu}^\gamma(y).$$

Из доказательства леммы 6 [6] следует справедливость

Лемма 1. *Для любой функции* $y \in \mathcal{S}^n_*$ *справедливо неравенство* $\hat{\nu}^+(\dot{y}) \ge \hat{\nu}^+(y)$.

Определение 5 ([5])**.** Для заданных множеств M и $F = \{f : \mathbb{R}_+ \to M\}$ назовем функцию $\lambda : F \to \mathbb{R}$ *остаточной*, если для любых функций $f, g \in F$, удовлетворяющих хотя бы для одного $t_0 \in \mathbb{R}_+$ условию $f(t) = g(t)$ при всех $t \ge t_0$, имеет место равенство $\lambda(f) = \lambda(g)$.

Из доказательства леммы 8 [6] следует

Лемма 2. *Функция* $\hat{\nu}^+ : \mathcal{S}^n_* \to \mathbb{R}_+$ *является остаточной.*

Замечание 3. Свойство остаточности функционала $\hat{\nu}^+$ позволяет производить подсчет количества корней не на $\mathbb{R}_+$, а на любом его подмножестве $[t_0, +\infty)$.

3. Формулировка и доказательство основного результата

Теорема. *Для любого решения* $y \in \mathcal{S}_*(a)$ *любого уравнения* $a \in \mathcal{L}^n$ *выполнена цепочка равненств*

$$\nu^-(y) = \nu^0(y) = \nu^+(y) = \nu^-_\bullet(y) = \nu^0_\bullet(y) = \nu^+_\bullet(y) = \nu^-_\circ(y) = \nu^0_\circ(y) = \nu^+_\circ(y) = 0$$

Доказательство. 1. Фиксируем произвольное уравнение $a \in \mathcal{L}^n$ и приведем его к уравнению $b \in \mathcal{E}^n$ с постоянными коэффициентами с помощью замены $pt + q = e^x$.

Выпишем все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характеристического многочлена, соответствующего данному уравнению b, упорядочив их по нестрогому возрастанию модулей их мнимых частей, а в каждой группе корней с равными мнимыми частями — еще и по нестрогому возрастанию их действительных частей.

В соответствии с полученным списком корней выпишем стандартную фундаментальную систему решений [14] следующим образом: каждому действительному корню λ, встречающемуся в списке ровно k раз, поставим в соответствие набор функций в старых переменных

$$(pt+q)^\lambda,\ (pt+q)^\lambda \ln(pt+q), \ldots,\ (pt+q)^\lambda \ln^{k-1}(pt+q),$$

а каждой паре комплексно сопряженных корней $\lambda = \alpha \pm i\beta$ $(\beta > 0)$, встречающейся в списке корней ровно k раз, поставим в соответствие набор функций

$$(pt+q)^\alpha \cos(\beta \ln(pt+q)), (pt+q)^\alpha \sin(\beta \ln(pt+q)), \ldots,$$
$$\ldots, (pt+q)^\alpha \cos(\beta \ln(pt+q)) \ln^{k-1}(pt+q), (pt+q)^\alpha \sin(\beta \ln(pt+q)) \ln^{k-1}(pt+q).$$

В итоге получим упорядоченный список $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{S}_*(a)$ бесконечно-дифференцируемых функций. Следовательно, общее решение уравнения $a \in \mathcal{L}^n$ имеет вид $y = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$, где $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные.

Выберем произвольное решение

$$y = c_ry_r + c_{r+1}y_{r+1} + \cdots + c_jy_j, \quad 1 \le r \le j \le n. \tag{3.1}$$

2. Пусть $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Тогда, начиная с достаточно большого момента времени, функция y не имеет нулей и, следовательно, имеет лишь конечное число нулей на полуоси $\mathbb{R}_+$ и потому $\nu^+(y) = 0$.

3. Теперь предположим, что $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Тогда в решении (3.1) выделим главную часть, представив его в виде

$$y(t) = (pt+q)^\alpha \ln^k(pt+q)(A_1 \cos(\beta_1 \ln(pt+q) + \gamma_1) + \ldots$$
$$\cdots + A_l \cos(\beta_l \ln(pt+q) + \gamma_l)) + \varphi(t)$$

где

$$k \geq 0, \quad A_1, \dots, A_l \neq 0, \quad \alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_l \in \mathbb{R}, \quad \beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_l,$$

(если $\beta_l = 0$, то и $\gamma_l = 0$), а остаток φ содержит те слагаемые линейной комбинации, у которых показатель степени $(pt+q)$ либо строго меньше числа α, либо равен α. В последнем случае показатель степени $\ln(pt+q)$ строго меньше k.

А. Если $l = 1$ и $\beta_1 = 0$, то главная часть имеет вид $A_1(pt+q)^\alpha \ln^k(pt+q)$, следовательно, функция (3.1) при достаточно больших t отделена от нуля, а значит, выполнено равенство $\nu^+(y) = 0$.

Б. При $\beta_1 > 0$ введем в рассмотрение функцию

$$z(t) \equiv \frac{y(t)}{(pt+q)^\alpha \ln^k(pt+q)} = A_1 \cos(\beta_1 \ln(pt+q) + \gamma_1) + \dots$$
$$\dots + A_l \cos(\beta_l \ln(pt+q) + \gamma_l) + \frac{\varphi(t)}{(pt+q)^\alpha \ln^k(pt+q)}.$$

Производную функции z s-го порядка представим в виде

$$z^{(s)}(t) = p^s (pt+q)^{-s} (\beta_1^s B_1 \cos(\beta_1 \ln(pt+q) + \gamma_{1,s}) + \dots$$
$$\dots + \beta_l^s B_l \cos(\beta_l \ln(pt+q) + \gamma_{l,s})) + \left(\frac{\varphi(t)}{(pt+q)^\alpha \ln^k(pt+q)} \right)^{(s)}.$$

Функции $\nu^+(u,t)$ и $\nu^+(v,t)$ эквивалентны при $t \to +\infty$ и достаточно большом значении s, каковым и будем его в дальнейшем считать, где

$$v(t) = \cos(\beta_1 \ln(pt+q) + \gamma_{1,s}),$$

$$u(t) \equiv \frac{(pt+q)^s z^{(s)}(t)}{p^s \beta_1^s B_1} = \cos(\beta_1 \ln(pt+q) + \gamma_{1,s}) + \dots$$
$$\dots + \frac{\beta_l^s B_l}{\beta_1^s B_1} \cos(\beta_l \ln(pt+q) + \gamma_{l,s}) + \frac{(pt+q)^s}{p^s \beta_1^s B_1} \left(\frac{\varphi(t)}{(pt+q)^\alpha \ln^k(pt+q)} \right)^{(s)}.$$

Действительно, для достаточно больших значений аргумента все нули функции u являются точками смены знака, поскольку в последней сумме все слагаемые со второго по l-ое малы по модулю при всех $t > 0$ из-за малости величины $(\beta_i/\beta_1)^s$, а последнее слагаемое стремится к нулю при $t \to +\infty$.

4. Собирая полученные данные и учитывая вспомогательные факты настоящей работы, будем иметь цепочку соотношений

$$\hat{\nu}^+(y) = \hat{\nu}^+(z_0) = \hat{\nu}^+(u) \leq \hat{\nu}^+(u^{(s)}) = \hat{\nu}^+(z_s) = \hat{\nu}^+(v) =$$

$$= \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\left[\frac{\beta_1 \ln(pt+q)+\gamma_{1,s}+\pi/2}{\pi}\right] =$$
$$= \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\left(\frac{\beta_1 \ln(pt+q)+\gamma_{1,s}+\pi/2}{\pi}\right) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\beta_1 \ln(pt+q)}{t} = 0,$$

где $[d]$ — целая часть числа d. Отсюда следует заключение теоремы. □

Авторы выражают глубокую благодарность профессору И. Н. Сергееву за обсуждение результатов данной работы.

Список цитируемых источников

1. *Барабанов Е. А., Войделевич А. С.* К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I. Дифференциальные уравнения. 52, №10, 1302-1320 (2016).

   Barabanov E. A., Voidelevich A. S. Remark on the theory of Sergeev frequencies of zeros, signs and roots for solution of linear differential equation.I. Differential equation, 52. no 10, 1249-1267 (2016).

2. *Быков В. В.* О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения. 52, № 4, 419-425 (2016).

   Bykov V. V. On the Baire classification of Sergeev frequencies of zeros and roots of solution of linear differential equation. Differential equation, 52. no 4, 413-420 (2016).

3. *Войделевич А. С.* О спектрах частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений. Журнал Белорусского гос. ун-та. Математика. Информатика. № 1, 28-32 (2019).

   Voidelevich A. S. On spectra of upper Sergeev frequencies of linear differential equation. Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics, no 1, 28-32 (2019).

4. *Горицкий А. Ю., Фисенко Т. Н.* Характеристические частоты нулей суммы двух гармонических колебаний. Дифференциальные уравнения. 48, № 4, 479-485 (2012).

   Goritskii A. Y., Fisenko T. N. Characteristic frequencies of zero of a sum of two harmonik oscillations. Differential equation, 48. no 4, 486-493 (2012).

5. *Сергеев И. Н.* К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений. Труды семинара им. И. Г. Петровского. 9, 111-166 (1983).

   Sergeev I. N. A contribution to the theory of Lyapunov exponents for linear systems of differential equations. Journal of Mathematical Sciences, 33, no. 6, 1245–1292 (1986).

6. *Сергеев И. Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения. Труды Семинара им. И. Г. Петровского. 25, 249-294 (2006).

   Sergeev I. N. Definition and properties of characteristic frequencies of a linear equation. Journal of Mathematical Sciences, 135, no.1, 2764-2793 (2006).

7. *Сергеев И. Н.* Определение полных частот решений линейного уравнения. Дифференциальные уравнения. 44, № 11. 1577 (2008).

Sergeev I. N. Definition of full frequencies of solutions of the linear equation. Differentsial'nye uravneniya, 44, no. 11. 1577 (2008) (in Russian).

8. *Сергеев И. Н.* Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы. Известия РАН. Серия математическая. 76, № 1, 149-172 (2012).

Sergeev I. N. Oscillation and wandering characteristics of solutions of a linear differential systems.Izvestiya: Mathematics, 76, no. 1, 139-162 (2012).

9. *Сергеев И. Н.* Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем. Известия Института математики и информатики УдГУ. 2 (46), 171-183 (2015).

Sergeev I. N. The complete set of relations between the oscillation, rotation and wandering indicators of solutions of differential systems. Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta, 2 (46), 171-183 (2015) (in Russian).

10. *Бурлаков Д. С., Цой С. В.* Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы. Труды Семинара им. И. Г. Петровского. 30, 75-93 (2014).

Burlakov D. S., Tsoii S. V. Coincidence of complete and vector frequencies of solutions of a linear autonomous system. Journal of Mathematical Sciences, 210, no. 2, 155-167 (2015).

11. *Сташ А. Х.* Свойства полных и векторных частот знака решений линейных автономных дифференциальных уравнений. Дифференц. уравнения. 50, № 10. 1418-1422 (2014).

Stash A. Kh. Properties of complete and vector sign frequencies of solutions of linear autonomous differential equations. Differential Equations, 50, no. 10, 1418-1422 (2014).

12. *Сташ А. Х.* Свойства полных и векторных частот нестрогих знаков и корней решений линейных однородных автономных дифференциальных уравнений. Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно–математические и технические науки. 3 (166), 18-22 (2015).

Stash A. Kh. Properties of full and vector frequencies of lax signs and roots of solutions of linear homogenous autonomous differential equations.Vestnik Adygeiskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 4: Estestvenno–matematicheskie i tekhnicheskie nauki, 3 (166), 18-22 (2015) (in Russian).

13. *Сташ А. Х.* Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т.29. Вып. 4. С. 558–568.

Stash A. Kh. Properties of exponents of oscillation of linear autonomous differential system solutions. Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki, vol. 29, issue 4, 558-568 (2019)(in Russian).

14. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004.

Filippov A. F. Vvedenie v teoriyu differentsial'nyh uravnenii. Moscow: Editorial URS, 2004. (in Russian)

Получена 20.06.2020

Подписано в печать 03.06.2020. Формат 60x84/8.
Усл. печ. л. 11,16. Тираж 25 экз. Заказ № НП/*** Бесплатно.
Дата выхода в свет **.**.2021.
Отпечатано в Издательском доме
ФГАОУ ВО «КФУ им. В. И. Вернадского»
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7

Dinamicheskie sistemy
(Dynamical Systems)

Volume 10(38) no.2 2020

Table of Contents

Динамические системы

Том 10(38) №2 2020

Содержание