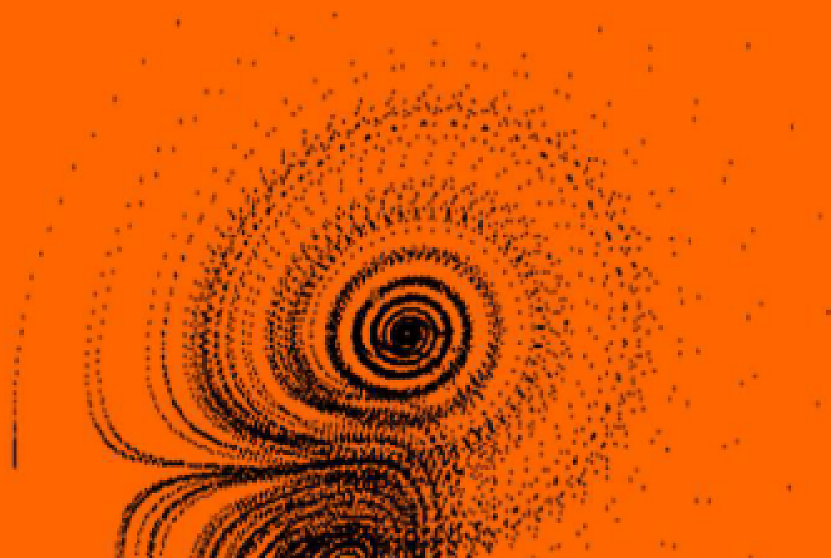
ISSN 0203-3755

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Том 10 (38), №1



2020

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Министерство образования и науки Российской Федерации
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского

Математический журнал

Том 10(38), №1, 1–126.
Печатается по решению Научно-технического Совета КФУ протокол № 2 от 03.06.2020.

ISSN 0203–3755

Адрес редакционной коллегии: Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, к. 203В, пр-т Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Россия.
Тел.: +7 978 7715582. E-mail: dynsys2011@yandex.ru

Свидетельство о регистрации средства массовой информации — ПИ №ФС77-61810, выдано 18.05.15.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий выпуск журнала «Динамические системы» является тематическим: его составляют работы по теории функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) и ее приложениям. Начало этой теории было положено в середине XX века классическими работами выдающихся российских математиков А. Д. Мышкиса и Н. Н. Красовского, посвященными дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом. Интерес к таким уравнениям был обусловлен естественными причинами: в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), они учитывают не только настоящее состояние системы, но и ее состояния в прошлом; при этом исследования в областях автоматического регулирования, биологии, химии, иммунологии, экономики показали, что учет эволюции объекта необходим для получения достаточно точного описания его динамики.

В настоящее время теория ФДУ является самостоятельным и интенсивно развивающимся разделом общей теории дифференциальных уравнений. Заметим, однако, что и область применения термина ФДУ за последние годы существенно расширилась и приобрела довольно размытые очертания. Поэтому здесь уместно уточнить, что в рамках данного сборника мы включаем в эту область ОДУ, уравнения с последействием и интегро-дифференциальные уравнения, но не касаемся уравнений в частных производных.

Представленные в выпуске статьи, авторами которых являются активно работающие представители Уральской и Сибирской научных школ, иллюстрируют разнообразие идей и методов современной теории ФДУ и возможностей ее приложения.

Работа А. С. Баландина представляет новую область исследований, открытую в работах последних лет самим автором: получение эффективных признаков устойчивости для ФДУ нейтрального типа за счет сопоставления с запаздывающими ФДУ.

Е. И. Бравый известен как специалист по эффективным условиям разрешимости краевых задач, последовательно развивающий классическую тему школы профессора Н. В. Азбелева. В настоящий сборник им предложена новая работа об условиях однозначной разрешимости ФДУ первого порядка при интегральных краевых условиях.

Г. В. Демиденко и И. А. Уварова представляют новую работу по теме, развиваемой в последние годы Новосибирскими математиками в связи с открытым ими удивительным фактом: решения ФДУ могут с любой точностью аппроксимировать решения классических динамических систем большой размерности.

В работе В. В. Малыгиной и А. С. Баландина описывается класс уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами, для которых задача получения признаков устойчивости сводится к аналогичной задаче для автономных уравнений.

В работе известного специалиста по математическим моделям Н. В. Перцева исследуется асимптотическое поведение решения задачи Коши для нелинейных систем ФДУ. Полученные теоретические результаты реализуются на двух моделях: динамики изолированной популяций и кроветворения.

Т. Л. Сабатулина представляет работу, в которой получены новые легко проверяемые эффективные признаки устойчивости линейных ФДУ. Результаты достигнуты на основе использования положительности фундаментального решения уравнения сравнения.

В работе М. А. Скворцовой исследуются асимптотические свойства моделей биохимических реакций, описываемых нелинейными системами ФДУ. Наряду с признаками устойчивости, в работе приведены оценки, характеризующие скорость стабилизации решений, и найдены множества притяжений положений равновесия.

Наконец, работа К. М. Чудинова посвящена задаче, специфической именно для уравнений с последействием: условиям осцилляции решений уравнений первого порядка. Исследования этой задачи были начаты еще в середине XX века А. Д. Мышкисом. В работе описаны несколько актуальных идей и сопоставлены результаты их применения.

Остается выразить надежду, что представленные работы найдут своего читателя и повысят интерес специалистов по динамическим системам к современным исследованиям в области функционально-дифференциальных уравнений.

Составители выпуска

PREFACE

This issue of Dynamical Systems is a thematic one: it consists of works on the theory of functional differential equations (FDE) and its applications. The beginning of this theory was laid by the classical works of outstanding Russian mathematicians A. D. Myshkis and N. N. Krasovsky in the middle of the 20th century. These works were devoted to differential equations with retarded argument. The interest in such equations was due to the following two natural causes: first, unlike ordinary differential equations (ODE), they take into account not only the present state of the system, but also its state in the past; second, by that time, research in the field of automatic regulation, biology, chemistry, immunology, economics had shown that in order to obtain a sufficiently accurate description of the dynamics of an object, its evolution must be taken into account.

Currently, the theory of FDEs is an independent and rapidly developing section of the general theory of differential equations. However, we note that the scope of the FDE term has also expanded significantly and has taken on a rather vague outline in recent years. Therefore, it is appropriate to clarify that, in this collection of articles, we include in this scope ODEs, equations with aftereffect and integro-differential equations, but we do not touch on partial differential equations.

The issue presents a wide range of topics of modern research on FDEs. This illustrates the diversity of ideas and methods of the FDE theory and the possibility of its application. The authors of the presented works are actively working mathematicians of the Ural and Siberian scientific schools.

The work of A. S. Balandin represents a new field of research, discovered by the author himself in recent years, which consists in obtaining effective stability tests for FDEs of neutral type by comparing them with delayed FDEs.

E. I. Bravyi, which is known as a specialist in effective conditions for the solvability of boundary value problems, consistently develops this classical topic of the school of prof. N. V. Azbelev. In the issue, he presents his new work on conditions for solvability of first-order FDEs with integral boundary conditions.

G. V. Demidenko and I. A. Uvarova present a new work on a topic that has been developing by Novosibirsk mathematicians in recent years in connection with a surprising fact that they discovered: solutions of FDE can approximate solutions of classical dynamical systems of large dimension with any accuracy.

The work of V. V. Malygina and A. S. Balandin describes such a class of equations of neutral type with periodic coefficients that the problem of obtaining stability tests for them reduces to an analogous problem for autonomous equations.

In the work of N. V. Pertsev, well-known specialist in mathematical modeling, the asymptotic behavior of the solution of the Cauchy problem for nonlinear FDE systems is studied. The obtained theoretical results are applied in two models, which are those of the dynamics of an isolated population and the blood cells production process.

T. L. Sabatulina presents a work containing new effective easily verifiable stability tests for linear FDEs. The results are achieved by using the positiveness of the fundamental solution of a comparison equation.

In the work of M. A. Skvortsova, the asymptotic properties of the models of biochemical reactions described by nonlinear systems of FDE are studied. Along with the stability test, estimates are obtained that characterize the rate of stabilization of solutions, and the attraction sets of equilibrium are found.

At last, the work of K. M. Chudinov is devoted to a problem specific to equations with aftereffect, which is that of oscillation conditions for solutions of first-order equations. Research on this problem was started in the middle of 20th century by A. D. Myshkis. The paper describes several relevant ideas and compares the results of their application.

It remains to express our hope that the presented papers will find their readers and increase the interest of specialists in the field of dynamical systems in modern studies of functional differential equations.

Compilers of the Issue

Динамические системы, 2020, том 10(38), №1, 7–22

УДК 517.929

Редукция дифференциальных уравнений нейтрального типа к уравнениям запаздывающего типа[1]

А. С. Баландин

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь 614990. *E-mail: balandin-anton@yandex.ru*

Аннотация. В работе рассматривается линейное автономное функционально-дифференциальное уравнение нейтрального типа. Показано, что исследование экспоненциальной устойчивости таких уравнений можно свести к изучению экспоненциальной устойчивости уравнения запаздывающего типа. Это сведение достигается на основе преобразований характеристической функции рассматриваемого уравнения. С помощью известных условий экспоненциальной устойчивости для уравнений запаздывающего типа получены новые эффективные условия (в т. ч. необходимые и достаточные) устойчивости для уравнений нейтрального типа.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, уравнения нейтрального типа, последействие, экспоненциальная устойчивость, функция Коши, эффективные признаки.

Reduction of differential equations of neutral type to equations of retarded type

A. S. Balandin

Perm National Research Polytechnic University, Perm 614990.

Abstract. In this paper, we consider linear autonomous functional differential equations of neutral type. We show that the study of exponential stability for these equations is reduced to the study of exponential stability for linear autonomous differential equations of retarded type. The reduction is established on the basis of the integral transformations for the characteristic functions of given equations. Using known conditions of exponential stability for differential equations of retarded type we obtain new effective conditions (including necessary and sufficient ones) of exponential stability for some classes of linear autonomous functional differential equations of neutral type with concentrated and distributed delays.

Keywords: functional differential equations, equations of neutral type, aftereffect, exponential stability, the Cauchy function, effective conditions.

MSC 2010: 34K20, 34K40

1. Постановка задачи

Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{C}$ — пространство комплексных чисел, I — тождественный оператор.

[1]Работа выполнена в рамках госзадания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (задание FSNM-2020-0028) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-01-00928).

Рассмотрим уравнение

$$(I - aS)\dot{x}(t) = (Tx)(t) + f(t), \tag{1}$$

в следующих предположениях и обозначениях:

$$(S_h y)(t) = \begin{cases} y(t-h), & t \geqslant h, \\ 0, & t < h, \end{cases} \quad (Ty)(t) = \int_0^\omega (S_\xi y)(t)\, dr(\xi),$$

$S = S_1$, $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in [0, 1]$, функция $r\colon [0, \omega] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию, $r(0) = 0$, интеграл понимается в смысле Римана–Стилтьеса, функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ суммируема на каждом конечном отрезке.

Под *решением* уравнения (1) будем понимать абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке функцию $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую (1) почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Как известно (см. [1, с. 84, теорема 1.1], [2], [3]), уравнение (1) с заданными начальными условиями однозначно разрешимо и его решение представимо в виде *формулы Коши*:

$$x(t) = X(t)x(0) + \int\limits_0^t Y(t-s)f(s)\, ds, \tag{2}$$

где $X : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ называется *фундаментальным решением*, а $Y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — *функцией Коши* уравнения (1). Удобно доопределить нулём фундаментальное решение и функцию Коши на отрицательной полуоси.

Теорема 1 ([2, 3])**.** *Функция Коши и фундаментальное решение уравнения* (1) *связаны соотношением*

$$X(t) = (I - aS)Y(t). \tag{3}$$

Обозначим через $g(p)$ характеристическую функцию уравнения (1):

$$g(p) = p\left(1 - ae^{-p}\right) - g_T(p), \quad g_T(p) = \int_0^\omega e^{-p\xi}\, dr(\xi), \quad p \in \mathbb{C}.$$

В работах [2, 3] показано, что к уравнению (1) применимо преобразование Лапласа, а для фундаментального решения и функции Коши установлен следующий результат.

Лемма 1 ([2, 3])**.** *При некотором $\alpha \in \mathbb{R}$ Лаплас-образы функций X и Y являются аналитическими в полуплоскости $\{p \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} p \geqslant \alpha\}$, причём*

$$L_X(p) = \frac{1 - ae^{-p}}{g(p)}, \quad L_Y(p) = \frac{1}{g(p)}.$$

Определение 1. Уравнение (1) будем называть *экспоненциально устойчивым*, если при некоторых положительных M и γ для всех $t \geqslant 0$ справедлива оценка

$$|Y(t)| \leqslant Me^{-\gamma t}. \tag{4}$$

Очевидно, что в силу равенства (3) из оценки (4) вытекает аналогичная оценка на фундаментальное решение, а на основе формулы (2) можно получать точные оценки решения уравнения (1) при любых начальных условиях и внешних возмущениях.

В данной работе мы получим ряд эффективных признаков экспоненциальной устойчивости уравнения (1), сводя задачу к исследованию экспоненциальной устойчивости уравнения запаздывающего типа. Это сведение будет достигаться на основе преобразований характеристической функции уравнения (1).

2. Основные результаты

Лемма 2. *Пусть p_0 — корень уравнения $1 - ae^{-p} = 0$. Тогда при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ найдётся корень q_0 того же уравнения, такой, что $\operatorname{Re} p_0 = \operatorname{Re} q_0 = \ln|a|$, а в круге $|q_0 - p| < \varepsilon$ функция $g(p)$ имеет нуль.*

Доказательство. При $a > 0$ корни уравнения $1 - ae^{-p} = 0$ имеют вид $p_k = \ln a + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Если $a < 0$, то $p_k = \ln|a| + (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Можно выбрать $\varepsilon < \pi$ так, что в круге $|z| < \varepsilon$ функция $1 - ae^{-(p_0+z)}$ имеет единственный нуль, а на окружности $|z| = \varepsilon$ выполняется неравенство $|1 - ae^{-(p_0+z)}| \geqslant \mu > 0$.

Пусть $\zeta(z) = 1 - ae^{-(p_0+z)}$, $\xi_k(z) = ae^{-(p_0+z)} - ae^{-(p_k+z)} - \frac{g_T(p_k+z)}{p_k+z}$. Имеем

$$|\xi_k(z)| = \left|\frac{g_T(p_k+z)}{p_k+z}\right| \leqslant \frac{A}{|p_k| - \varepsilon},$$

где A — некоторое вещественное число. Заметим, что найдётся k_0 такое, что $\frac{A}{|p_{k_0}|-\varepsilon} < \mu$. Обозначим $q_0 = p_{k_0}$. Итак, при $|z| = \varepsilon$ выполняется $|\zeta(z)| > \mu > |\xi_{k_0}(z)|$. Значит, по теореме Руше функции $\zeta(z)$ и $\zeta(z) + \xi_{k_0}(z)$ при $|z| < \varepsilon$ имеют одинаковое количество нулей. Следовательно, в круге $|q_0 - p| < \varepsilon$ существует точка, где $1 - ae^{-p} + \frac{g_T(p)}{p} = 0$. □

Теорема 2. *Уравнение (1) экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда $|a| < 1$ и все нули функции g лежат слева от мнимой оси.*

Доказательство. При $a = 0$ теорема, очевидно, справедлива.

Необходимость. Из оценки (4) следует, что функция L_Y аналитична при $\alpha = -\gamma < 0$. Поэтому все нули функции g лежат в полуплоскости $P_1 = \{p \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} p \leqslant -\gamma\}$.

Допустим, что функция $1 - ae^{-p}$ имеет хотя бы один нуль в полуплоскости $P_2 = \{p \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} p > -\gamma\}$. Тогда, в силу леммы 2 и открытости полуплоскости P_2, в P_2 найдутся нули функции g. Таким образом, все нули функции $1 - ae^{-p}$ лежат в полуплоскости P_1. Следовательно, $|a| < 1$.

Достаточность. Так как $|a| < 1$, для сколь угодно малого $\delta > 0$ в полуплоскости $P = \{p \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} p \geqslant \ln|a| + \delta\}$ выполняется $|1 - ae^{-p}| \geqslant 1 - e^{-\delta} > 0$. Значит, при $p \in P$ и достаточно большом $|\operatorname{Im} p|$ справедлива оценка

$$|g(p)| \geqslant |p||1 - ae^{-p}| - |g_T(p)| > 0.$$

Следовательно, в полуплоскости P лежит не более чем конечное число нулей функции g. Таким образом, все нули функции g лежат слева от мнимой оси и отделены от неё. Значит, среди них есть корень с наибольшей (отрицательной, в силу условий теоремы) вещественной частью. Тогда существует такое число γ: $0 < \gamma < -\ln|a|$, что в полуплоскости $\{p \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} p > -\gamma\}$ функция g не обращается в нуль. В силу леммы 1, при $\operatorname{Re} p > -\gamma$ функция $X(p)$ является аналитической. По формуле обратного преобразования Лапласа имеем:

$$X(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} \frac{(1-ae^{-p})e^{pt}\,dp}{g(p)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} e^{pt}\left(\frac{1-ae^{-p}}{g(p)} - \frac{1}{p}\right)dp =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} e^{pt}\,\frac{g_T(p)}{pg(p)}\,dp = e^{-\gamma t}\int_{-\infty}^{\infty} O\left(\frac{1}{\gamma^2+\zeta^2}\right)d\zeta,$$

откуда следует $|X(t)| \leqslant Ne^{-\gamma t}$, $N > 0$.

Для оценки Y применим формулу (3). Так как $|a| < 1$, то [4, с. 230] оператор $I - aS$ обратим в пространстве функций, ограниченных на полуоси, причём

$$(I - aS)^{-1} = I + aS + \ldots + a^n S^n + \ldots$$

Следовательно,

$$Y(t) = (I + aS + \ldots + a^n S^n + \ldots)\,X(t) = X(t) + aX(t-1) + \ldots + a^n X(t-n) + \ldots,$$

и, с учётом установленной выше оценки на X, а также следующего из определения γ неравенства $|a|e^{\gamma} < 1$, получаем оценку (4):

$$|Y(t)| \leqslant Ne^{-\gamma t}\,(1 + |a|e^{\gamma} + \ldots + |a|^n e^{n\gamma} + \ldots) \leqslant \frac{Ne^{-\gamma t}}{1-|a|\gamma} = Me^{-\gamma t}.$$

$\square$

В силу теоремы 2 необходимым условием экспоненциальной устойчивости уравнения (1) является выполнение неравенства $|a| < 1$. Далее мы всюду считаем, что оно выполнено.

По коэффициентам уравнения (1) построим ещё одну функцию

$$g_r(p) = p + \frac{a}{1-a^2}\int_0^{\omega} e^{-p(1-\xi)}\,dr(\xi) - \frac{1}{1-a^2}\int_0^{\omega} e^{-p\xi}\,dr(\xi),$$

с которой будем сопоставлять нули функции g.

Лемма 3. *Пусть $|a| < 1$. Функции g и g_r имеют одинаковый набор нулей на мнимой оси.*

Доказательство. Непосредственным подсчётом убеждаемся, что

$$g_r(i\varphi) = \alpha g(i\varphi) + \beta \overline{g(i\varphi)}, \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

где $\alpha = \frac{1}{1-a^2}$, $\beta = -\frac{a}{1-a^2} e^{-i\varphi}$.

Если $g(i\varphi_0) = 0$, то $\overline{g(i\varphi_0)} = 0$, значит, $g_r(i\varphi_0) = 0$. Теперь пусть $g_r(i\varphi_0) = 0$. Отсюда вытекает, что

$$\begin{cases} \alpha g(i\varphi_0) + \beta \overline{g(i\varphi_0)} = 0, \\ \overline{\alpha}\, \overline{g(i\varphi_0)} + \overline{\beta} g(i\varphi_0) = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $\alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta} \neq 0$. Поэтому данная система относительно $g(i\varphi_0)$ и $\overline{g(i\varphi_0)}$ имеет только тривиальное решение. Значит, $g(i\varphi_0) = 0$. □

Обозначим $\psi(p,\tau) = (1-\tau)g(p) + \tau g_r(p)$, $p \in \mathbb{C}$, где $\tau \in [0,1]$.

Лемма 4. *Пусть $|a| < 1$. Если при некотором τ функция $\psi(\cdot,\tau)$ имеет нули на мнимой оси, то и функция g имеет те же нули на мнимой оси. Если функция g имеет нули на мнимой оси, то при любом τ функция $\psi(\cdot,\tau)$ имеет те же нули на мнимой оси.*

Доказательство. Очевидно, что $\psi(i\varphi,\tau) = (1-\tau+\alpha\tau)g(i\varphi) + \tau\beta\overline{g(i\varphi)}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Если при некотором φ функция $g(i\varphi) = 0$, то при любом τ справедливо $\psi(i\varphi,\tau) = 0$.

Теперь пусть $\psi(i\varphi,\tau) = 0$ при некотором $\tau \in [0,1]$. Отсюда вытекает, что

$$\begin{cases} (1-\tau+\alpha\tau)g(i\varphi) + \tau\beta\overline{g(i\varphi)} = 0, \\ (1-\tau+\overline{\alpha}\tau)\overline{g(i\varphi)} + \tau\overline{\beta} g(i\varphi) = 0. \end{cases}$$

Легко убедиться, что $(1-\tau+\alpha\tau)(1-\tau+\overline{\alpha}\tau) - \tau^2\beta\overline{\beta} = = (1-\tau)^2 + (\alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta})\tau^2 + \tau(1-\tau)(\alpha+\overline{\alpha}) > 0$. Поэтому указанная система относительно $g(i\varphi)$ и $\overline{g(i\varphi)}$ имеет только тривиальное решение. Значит, если при некоторых τ и ϕ $\psi(i\varphi,\tau) = 0$, то $g(i\varphi) = 0$. □

Приведём отдельно простое следствие теоремы о логарифмическом вычете.

Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область в комплексной плоскости, ограниченная простым замкнутым контуром ∂G, функция $\psi(\cdot,\tau)$ аналитична в G при каждом $\tau \in [\tau_1,\tau_2]$.

Лемма 5. *Если ни при каком значении $\tau \in [\tau_1,\tau_2]$ функция $\psi(p,\tau)$ не имеет нулей на контуре ∂G, то функции $\psi(p,\tau_1)$ и $\psi(p,\tau_2)$ имеют в G одинаковое число нулей.*

Доказательство. При каждом фиксированном $\tau \in [\tau_1,\tau_2]$ заменой переменных $w = \psi(p,\tau)$ преобразуем границу ∂G в некоторый замкнутый контур $l(\tau)$. Пусть

$N(\tau_k)$ — число нулей функции $\psi(p,\tau_k)$ $(k=1,2)$ в области G. По теореме о логарифмическом вычете [11, с. 82]

$$N(\tau_k)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{\frac{\partial}{\partial p}\psi(p,\tau_k)}{\psi(p,\tau_k)}\,dp=\frac{1}{2\pi i}\int_{l(\tau_k)}\frac{dw}{w},\quad k=1,2.$$

Так как при непрерывном изменении τ на отрезке $[\tau_1,\tau_2]$ контур $l(\tau_1)$ непрерывно деформируется на плоскости w в контур $l(\tau_2)$, «не задевая», по условию леммы, единственную особую точку $w=0$ подынтегральной функции $1/w$, то $N(\tau_1)=N(\tau_2)$. □

Лемма 6. *Пусть* $|a|<1$. *Все нули функции* g_r *лежат слева от мнимой оси тогда и только тогда, когда все нули функции* g *лежат слева от мнимой оси.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\phi(p,\tau)=(1-\tau)\left(1-ae^{-p}\right)+\tau=1-(1-\tau)ae^{-p},\quad p\in\mathbb{C},\quad \tau\in[0,1].$$

В силу $|a|<1$ и $1-\tau\in[0,1]$, при любом $\tau\in[0,1]$ все нули функции $\phi(p,\tau)$ лежат слева от мнимой оси. Значит, существует такое $\delta>0$, что $|\phi(p,\tau)|>\delta$.

Пусть $\operatorname{Re}p>0$. Тогда при любом $\tau\in[0,1]$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}\left|\frac{a\tau}{1-a^2}\int_0^\omega e^{-p(1-\xi)}\,dr(\xi)-\frac{\tau}{1-a^2}\int_0^\omega e^{-p\xi}\,dr(\xi)-(1-\tau)\int_0^\omega e^{-p\xi}\,dr(\xi)\right|\leqslant\\ \leqslant\frac{|a|\tau}{1-a^2}\int_0^\omega e^{-\operatorname{Re}p(1-\xi)}\,d|r(\xi)|+\left(\frac{\tau}{1-a^2}+(1-\tau)\right)\int_0^\omega e^{-\operatorname{Re}p\xi}\,d|r(\xi)|\leqslant\\ \leqslant\left(\frac{\tau}{1-|a|}+(1-\tau)\right)\int_0^\omega d|r(\xi)|\leqslant A.\end{aligned}$$

Обозначим $\Gamma_1=\{p=iy\colon y\in[-R,R]\}$, $\Gamma_2=\{p\colon |p|=R,\operatorname{Re}p>0\}$, $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, $G_1=\{p\in\mathbb{C}\colon \operatorname{Re}p>0,|p|<R\}$, $G_2=\{p\in\mathbb{C}\colon \operatorname{Re}p\geqslant 0,|p|\geqslant R\}$, $R\in\mathbb{R}$. Выберем R так, чтобы $|\psi(p,\tau)|>\Delta>0$ при всех $p\in G_2$. Это возможно, так как

$$\begin{aligned}|\psi(p,\tau)|=\Bigg|p\left(1-(1-\tau)ae^{-p}\right)-(1-\tau)\int_0^\omega e^{-p\xi}\,dr(\xi)+\\ +\frac{a\tau}{1-a^2}\int_0^\omega e^{-p(1-\xi)}\,dr(\xi)-\frac{\tau}{1-a^2}\int_0^\omega e^{-p\xi}\,dr(\xi)\Bigg|>|p|\delta-A>0.\end{aligned}$$

Если при некотором τ функция $\psi(\cdot,\tau)$ имеет нуль на Γ_1, то по леммам 3 и 4 функции g и g_r имеют нули на Γ_1, что противоречит условию леммы. Значит, при любом τ функция $\psi(p,\tau)$ не имеет нулей при всех $p\in G_2$, а также при $p\in\Gamma_1$. Тогда вследствие леммы 5 функции $g(p)=\psi(p,0)$ и $g_r(p)=\psi(p,1)$ имеют одинаковое число нулей при $p\in G_1$. Таким образом, все нули функции g_r лежат слева от мнимой оси тогда и только тогда, когда все нули функции g лежат слева от мнимой оси. □

Заметим, что функция g_r является характеристической функцией следующего уравнения

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{1-a^2}\int_0^\omega x(t-s)\,dr(s) - \frac{a}{1-a^2}\int_0^\omega x(t-(1-s))\,dr(s), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (5)$$

Из леммы 6 вытекает

Теорема 3. *Пусть* $|a| < 1$, $\omega \in [0,1]$. *Уравнение* (1) *экспоненциально устойчиво в том и только в том случае, когда уравнение* (5) *экспоненциально устойчиво.*

3. Эффективные признаки

Подчеркнём, что уравнение (5) принадлежит к классу уравнений запаздывающего типа, для которых известно много признаков устойчивости. Используя любой из них, можно, на основе теоремы 3, получать новые признаки устойчивости для уравнения (1).

1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) = b_0 x(t) + b_1 x(t-1/2) + b_2 x(t-1), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (6)$$

Исследование экспоненциальной устойчивости уравнения (6) сводится к исследованию расположения нулей на комплексной плоскости относительно мнимой оси следующей функции

$$g_r(p) = p + \frac{ab_2 - b_0}{1-a^2} - \frac{b_1}{1+a}e^{-p/2} + \frac{ab_0 - b_2}{1-a^2}e^{-p}, \quad p \in \mathbb{C}.$$

В работе [7, теорема 4.7, с. 134] (также см. [6]) был получен критерий того, что все нули функции g_r лежат в левой полуплоскости. Используя данный критерий, получим необходимый и достаточный признак экспоненциальной устойчивости уравнения (6).

Зададим область D в пространстве $\mathbb{R}^3$, состоящую из точек $\{r_1, r_2, r_3\}$, удовлетворяющих условиям:

- $r_3 = 0$, $r_1 + r_2 > 0$ и $r_2 \in (-3\pi/2, \pi/2)$,
- $r_3 \in (-1, 0)$, $r_1 + r_2 > 0$ и $r_2 \in (\eta_1 \sin\eta_1 - r_1\cos\eta_1, \eta_2\sin\eta_2 - r_1\cos\eta_2)$,
- $r_3 > 0$, $r_1 > (\xi\sin\xi - r_2)/\cos\xi$,

где η_n — корень уравнения $r_3 = -\zeta \operatorname{ctg} \zeta$ из интервала $(\pi(n-1), \pi n)$, $n \in \mathbb{N}$, и

$$\xi = \begin{cases} 0, & \text{если } r_2 \in \left[-\sqrt{\eta_2^2 + r_3^2} - r_3, \sqrt{\eta_1^2 + r_3^2} - r_3\right], \\ \eta_1, & \text{если } r_2 \in \left[\sqrt{\eta_1^2 + r_3^2} - r_3, \sqrt{\eta_1^2 + r_3^2} + \sqrt{\eta_3^2 + r_3^2}\right], \\ \eta_2, & \text{если } r_2 \in \left[-\sqrt{\eta_2^2 + r_3^2} - \sqrt{\eta_4^2 + r_3^2}, -\sqrt{\eta_2^2 + r_3^2} - r_3\right], \\ \eta_m, & \text{если выполнено неравенство (7), где } m \geqslant 2, \end{cases}$$

$$\sqrt{\eta_{m-2}^2 + r_3^2} + \sqrt{\eta_m^2 + r_3^2} \leqslant r_2(-1)^{m-1} \leqslant \sqrt{\eta_m^2 + r_3^2} + \sqrt{\eta_{m+2}^2 + r_3^2}. \qquad (7)$$

На рис. 1 изображена область D.

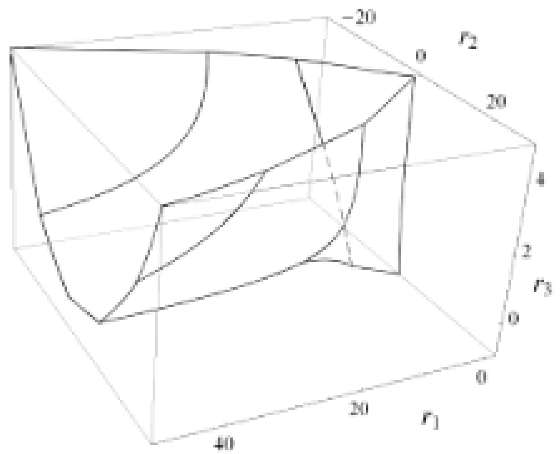


Рис. 1. Область D.

Признак 1. *Уравнение* (6) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда* $|a| < 1$ *и* $\left(-\frac{b_0+b_2}{2(1+a)}, -\frac{b_1}{2(1+a)}, \frac{b_2-b_0}{2(1-a)}\right) \in D$.

Получим несколько следствий из признака 1.

Зададим функцию $u = \phi_1(v)$ в параметрическом виде:

$$\left\{ u = \frac{\theta}{\sin\theta}, \quad v = -\theta \operatorname{ctg} \theta, \quad \theta \in (0, \pi) \right\}.$$

Пусть $G = \{(u, v)\colon -v < u < \phi_1(v), \quad v > -1\}$. На рис. 2 область G закрашена. Заметим, что G есть так называемый «угол Андронова–Майера» [8].

Следствие 1. *Пусть* $b_1 = 0$. *Уравнение* (6) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда* $|a| < 1$ *и* $\left(\frac{ab_0-b_2}{1-a^2}, \frac{ab_2-b_0}{1-a^2}\right) \in G$.

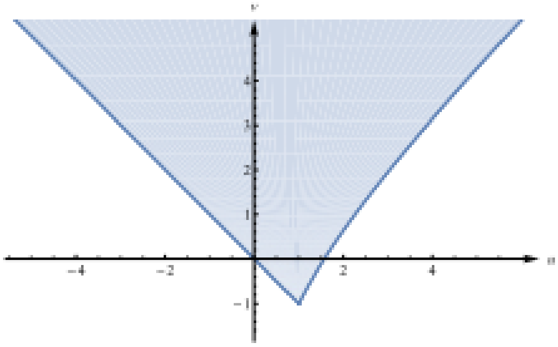


Рис. 2. Область G.

Следствие 2. *Пусть $b_0 = b_2 = 0$. Уравнение* (6) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда $|a| < 1$ и $-\pi < \frac{b_1}{a+1} < 0$.*

2. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) = bx(t-h) + cx(t-1+h), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $h \in (0, 0.5)$, $\frac{1-h}{h} \in (1, 3]$. Исследование экспоненциальной устойчивости уравнения (8) сводится к исследованию расположения нулей на комплексной плоскости относительно мнимой оси следующей функции

$$g_r(p) = p + \frac{ac-b}{1-a^2}e^{-ph} + \frac{ab-c}{1-a^2}e^{-p(1-h)}, \quad p \in \mathbb{C}.$$

Обозначим $n = \frac{1-h}{h}$. Зададим функцию $u = \phi_2(v)$ в параметрическом виде:

$$\{u = \theta\csc(\theta(n-1))\cos(\theta n), v = -\theta\csc(\theta(n-1))\cos\theta, \theta \in (0, 2\pi/(n+1))\}.$$

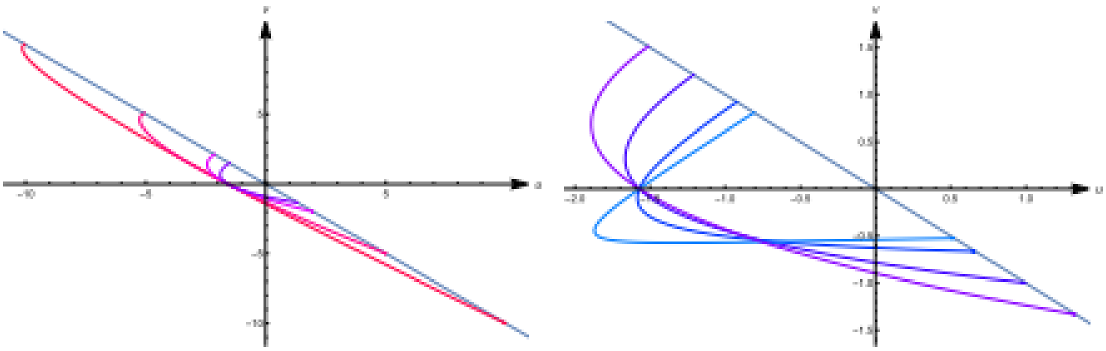
Пусть $H_n = \{(u, v)\colon \phi_2(v) < u < -v\}$. На рис. 3 изображено несколько областей H_n.

Легко убедиться, что при $n \in (1, 3)$ и $\left(\frac{ac-b}{1-a^2}h, \frac{ab-c}{1-a^2}h\right) \in H_n$ все нули функции g_r лежат слева от мнимой оси. Поэтому имеет место следующий достаточный признак устойчивости.

Признак 2. *Пусть $|a| < 1$, $n \in (1, 3)$ и $\left(\frac{ac-b}{1-a^2}h, \frac{ab-c}{1-a^2}h\right) \in H_n$. Уравнение* (8) *экспоненциально устойчиво.*

В работе [7, теорема 4.7, с. 134] был получен критерий того, что все нули функции g_r лежат в левой полуплоскости в случае $h = 1/3$. Используя данный критерий получим необходимый и достаточный признак экспоненциальной устойчивости уравнения (8) при $h = 1/3$.

Признак 3. *Пусть $h = 1/3$. Уравнение* (8) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда $|a| < 1$ и $\left(\frac{ac-b}{3(1-a^2)}, \frac{ab-c}{3(1-a^2)}\right) \in H_2$.*



$n = 1.1, 1.2, 1.5, 1.75$ $n = 1.75, 2, 2.5, 2.9$

Рис. 3. Области H_n.

3. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) = b\int_0^1 s^\alpha x(t-s)\,ds + ab\int_0^1 (1-s)^\alpha x(t-s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad (9)$$

где $\alpha > -1$.

Исследование экспоненциальной устойчивости уравнения (9) сводится к исследованию расположения нулей на комплексной плоскости относительно мнимой оси следующей функции

$$g_r(p) = p - b\int_0^1 \xi^\alpha e^{-p\xi}\,d\xi.$$

Функция g_r изучалась в работе [9]. Применим результаты этого исследования.

Пусть $C_\varepsilon(t) = \int_0^t \frac{\cos s}{s^\varepsilon} ds$. Заметим, что при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \approx 0.308$ функции C_ε имеют нули.

Признак 4. *Пусть $-1 < \alpha < -\varepsilon_0$. Тогда уравнение* (9) *экспоненциально устойчиво, если и только если $|a| < 1$ и $b < 0$.*

Признак 5. *Пусть $\alpha > -\varepsilon_0$. Уравнение* (9) *экспоненциально устойчиво, если и только если $|a| < 1$ и*

$$0 < -b < \frac{\zeta_1}{\int_0^1 \xi^\alpha \sin \zeta_1 \xi\,d\xi},$$

где ζ_1 — наименьший положительный корень уравнения $\int_0^1 \xi^\alpha \cos \zeta\xi\,d\xi = 0$.

Признак 6. *Пусть $\alpha = -\varepsilon_0$. Уравнение* (9) *экспоненциально устойчиво, если и только если $|a| < 1$, $b < 0$ и $-b \neq \frac{\zeta_1}{\int_0^1 \xi^\alpha \sin \zeta_1 \xi\,d\xi}$.*

4. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) = ab\int_0^1 s^\alpha x(t-s)\,ds + b\int_0^1 (1-s)^\alpha x(t-s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad (10)$$

где $\alpha > -1$.

Исследование экспоненциальной устойчивости уравнения (10) сводится к исследованию расположения нулей на комплексной плоскости относительно мнимой оси следующей функции

$$g_r(p) = p - b \int_0^1 (1-\xi)^\alpha e^{-p\xi}\, d\xi.$$

В работе [9] изучалась функция g_r. Применим результаты этого исследования.

Признак 7. *Пусть* $\alpha > 1$. *Уравнение* (10) *экспоненциально устойчиво, если и только если* $|a| < 1$ *и* $b < 0$.

Признак 8. *Пусть* $-1 < \alpha < 1$. *Уравнение* (10) *экспоненциально устойчиво, если и только если* $|a| < 1$ *и*

$$0 < -b < \frac{\zeta_2}{\int_0^1 (1-\xi)^\alpha \sin \zeta_2 \xi\, d\xi},$$

где ζ_2 *— наименьший положительный корень уравнения* $\int_0^1 (1-\xi)^\alpha \cos \zeta\xi\, d\xi = 0$.

Признак 9. *Пусть* $\alpha = 1$. *Уравнение* (10) *экспоненциально устойчиво, если и только если* $|a| < 1$, $b < 0$ *и* $-\frac{b}{1+\alpha} \neq 2\pi^2 n$, *где* $n \in \mathbb{N}$.

В работе [10] также найден простой достаточный признак устойчивости, общий для уравнений (9) и (10). Применяя его, получаем

Признак 10. *Пусть* $|a| < 1$, $\alpha > -1$, $0 < -\frac{b}{1+\alpha} < \frac{\pi}{2}$. *Тогда уравнения* (9) *и* (10) *экспоненциально устойчивы.*

5. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) = b \int_0^1 x(t-s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Исследование экспоненциальной устойчивости уравнения (11) сводится к исследованию расположения нулей на комплексной плоскости относительно мнимой оси следующей функции

$$g_r(p) = p - \frac{b}{1+a} \int_0^1 e^{-p\xi}\, d\xi.$$

Функция такого вида изучалась в работах [12, 13]. Применяя результаты этих исследований, получаем

Признак 11. *Уравнение* (11) *экспоненциально устойчиво, если и только если* $|a| < 1$ *и* $-\frac{\pi^2}{2} < \frac{b}{1+a} < 0$.

6. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) = \sum_{m=1}^{M} b_m x(t-h_m), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Исследование экспоненциальной устойчивости уравнения (11) сводится к исследованию расположения нулей на комплексной плоскости относительно мнимой оси функции

$$g_r(p) = p + \sum_{m=1}^{M} \frac{b_m a}{1-a^2} e^{-p(1-h_m)} - \sum_{m=1}^{M} \frac{b_m}{1-a^2} e^{-ph_m}.$$

Далее, воспользовавшись [14], получаем

Признак 12. *Пусть $a \in (-1, 0)$, $b_m < 0$ и $h_m \in [0, 1]$ при всех m, $\sum_{m=0}^{M} \frac{b_m a(1-h_m)}{1-a^2} - \sum_{m=1}^{M} \frac{b_m h_m}{1-a^2} < \frac{\pi}{2}$. Тогда уравнение* (12) *экспоненциально устойчиво.*

Замечание. В случае, когда для некоторого m справедливо $h_m > 1$, уравнение (1) будет содержать функцию x с опережающим аргументом. Таким образом, уравнению (1) по вышеприведённой схеме мы поставим в соответствие уравнение *опережающего типа* [15]. Изучение уравнений опережающего типа на положительной полуоси эквивалентно исследованию уравнений запаздывающего типа, но на отрицательной полуоси или на всей вещественной оси, которые изучались в работах [16, 17, 18]. Оказалось, что структура пространства решений таких уравнений существенно сложнее; в частности, в этих работах было установлено, что уравнение с запаздывающим аргументом на отрицательной полуоси может иметь решение, которое при $t \to \infty$ растёт быстрее любой экспоненты. Поэтому свойства характеристической функции таких уравнений не являются определяющими при изучении асимптотического поведения решений.

Среди исследователей функционально-дифференциальных уравнений нет полного единства в постановке начальной задачи и в вопросе определения решения. Во многих работах начальная задача для уравнения (1) ставится в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) = \int_0^{\omega} x(t-s)\, dr(s), & t \in \mathbb{R}_+, \\ x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \dot{x}(\xi) = \psi(\xi), & \xi \in [-\tau, 0), \end{cases} \tag{13}$$

где $\tau = \max\{h_1, \ldots, h_J, \omega\}$, а φ, ψ — начальные функции, которыми решение и его производная доопределяются при отрицательных значениях аргументов. При такой постановке задачи начальные функции естественным образом включаются в определения устойчивости.

Обозначим $\eta(t) = a\left(\tilde{S}_1\psi\right)(t) + \int_t^\omega \left(\tilde{S}_\xi\varphi\right)(t)\, dr(\xi)$,

$$\left(\tilde{S}_h y\right)(t) = \begin{cases} y(t-h), & t-h < 0, \\ 0, & t-h \geqslant 0. \end{cases}$$

Пусть $\mathbb{X}$ — произвольное нормированное пространство измеримых на множестве $[0,\tau]$ функций.

Определение 2. Будем говорить, что уравнение (13) $\mathbb{X}$*–экспоненциально устойчиво*, если существуют такие $K, \gamma > 0$, что при любом $\eta \in \mathbb{X}$ и любом $x(0) \in \mathbb{R}$ решение уравнения (13) имеет оценку:

$$|x(t)| \leqslant Ke^{-\gamma t}\left(|x(0)| + \|\eta\|_{\mathbb{X}}\right), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Между постановками задач в виде (1) и (13) нет противоречия. Следующая теорема связывает экспоненциальную устойчивость уравнения (13) с экспоненциальной оценкой на функцию Коши.

Теорема 4. *Уравнение* (13) L_1*–экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда выполняется оценка* (4).

Доказательство. Необходимость следует схеме доказательства леммы из работы [19].

Достаточность вытекает из формулы (2) и того, что из (4) следует аналогичная экспоненциальная оценка на X:

$$|x(t)| \leqslant |X(t)||x(0)| + \int_0^\tau |Y(t-s)||\eta(s)|\, ds \leqslant \\ \leqslant N_1 e^{-\gamma t}|x(0)| + N_2 e^{-\gamma(t-\tau)}\|\eta\|_1 \leqslant Ne^{-\gamma t}\left(|x(0)| + \|\eta\|_1\right). \quad \square$$

Заключение

В данной работе найден класс функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа, для которых можно построить уравнение запаздывающего типа так, что, если одно уравнение экспоненциально устойчиво, то и другое уравнение также будет экспоненциально устойчиво (см. теорему 3). Для уравнений запаздывающего типа известно большое число эффективных условий устойчивости. За счёт этого существенно расширен класс уравнений нейтрального типа, для которых установлены эффективные (в т.ч. необходимые и достаточные) условия экспоненциальной устойчивости (см. признаки 1–12 и следствия из них). В дальнейшем представляет интерес рассмотреть случаи, когда при нейтральности стоит больше одного слагаемого или запаздывание в правой части уравнения (1) превосходит 1. Кроме того, по-прежнему остаётся актуальной задачей поиск признаков устойчивости для уравнений высших порядков и систем.

Список цитируемых источников

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина, Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

   Azbelev, N. V., Maksimov, V. P., Rakhmatullina, L. F. Introduction to the Theory of Linear Functional Differential Equations. Atlanta: World Federation Publ., 1995.

2. *Баландин А. С.* Об асимптотическом поведении фундаментального решения и функции Коши дифференциальных уравнений нейтрального типа. Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки, 23, № 122, 187–199 (2018).

   Balandin, A. S. On asymptotic behavior of the fundamental solution and the Cauchy function for neutral differential equations. Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki, 23, No. 122, 187–199 (2018). (in Russian)

3. *Баландин А. С.* О связи между фундаментальным решением и функцией Коши для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа. Прикладная математика и вопросы управления, № 1, 13-25 (2018).

   Balandin, A. S. On relationship between the fundamental soluiton and the Cauchy function for neutral functional differential equations. Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya, No. 1, 13-25 (2018). (in Russian)

4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.

   Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V. Elements of theory of functions and functional analysis. Moscow: Nauka, 1981. (in Russian)

5. *Баландин А. С., Малыгина В. В.* Об устойчивости вместе с производной одного класса дифференциальных уравнений нейтрального типа. Прикладная математика и вопросы управления, № 1. 22-50 (2019).

   Balandin, A. S., Malygina, V. V. On stability with derivative of a class of differential equations of neutral type. Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya, No. 1. 22-50 (2019). (in Russian)

6. *Мулюков М. В.* Структура областей D-разбиения для двупараметрических характеристических уравнений систем с запаздыванием. Материалы конференции «Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения», посвященной 95-летию со дня рождения профессора Н.В. Азбелева (стр. 180–200). Пермь: Издательство ПНИПУ, 2018.

   Mulyukov, M. V. Structure of the D-subdivision domains for the two-parameter characteristic equations of systems with delay. Proc. of the conference "Functional-differential equiations: theory and applications" dedicated to the 95th anniversary of the professor N.V. Azbelev (pp. 180–200). Perm: Izdatel'stvo PNIPU, 2018. (in Russian)

7. *Мулюков М.В.* Устойчивость систем линейных автономных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием: Дис. …канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Пермь, 2017.

8. *Андронов А. А., Майер А. Г.* Простейшие линейные системы с запаздыванием. Автоматика и телемеханика. 7, No. 2, 3, 95–106 (1946).

   Andronov, A. A., Maier, A. G. Simplest linear systems with delay. Avtomat. i Telemekh., 7, No. 2-3, 95–106 (1946). (in Russian)

9. *Малыгина В.В.* Структура областей устойчивости дифференциальных уравнений с распределённым запаздыванием. Тез. докл. международной конференции «Динамические системы в науке и технологиях (DSST-2018)» (стр. 17–18). Симферополь: ИП Корниенко А.А., 2018.

Malygina, V. V. The structure of stability domains of differential equations with distributed delay. In Proc. Int. conf. "Dynamical systems in science and technologies" (pp. 17–18). Simferopol: IP Kornienko A. A., 2018. (in Russian)

10. *Малыгина В. В.* Признаки абсолютной устойчивости дифференциальных уравнений с распределённым запаздыванием // Прикладная математика и вопросы управления, № 4, 53-69 (2018).

Malygina, V. V. Absolute stability conditions for differential equations with distributed delay. Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya, No. 4, 53-69 (2018). (in Russian)

11. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1987.

Lavrent'ev, M. A., Shabat, B. V. Methods of the theory of functions in a complex variable. Moscow: Nauka, 1987. (in Russian)

12. *Вагина М. Ю.* Логистическая модель с запаздывающим усреднением. Автоматика и телемеханика, № 4, 167-173 (2003).

Vagina, M. Yu. A Delay-Averaged Logistic Model. Avtomat. i Telemekh., № 4, 167-173 (2003). (in Russian)

13. *Сабатулина Т. Л., Малыгина В. В.* Некоторые признаки устойчивости линейного автономного дифференциального уравнения с распределённым запаздыванием. Известия вузов. Математика. № 6, 55-63 (2007).

Sabatulina, T. L., Malygina, V. V. Several stability tests for linear autonomous differential equations with distributed delay. Russian Mathematics (Iz. VUZ), 51, No. 6, 52-60 (2007).

14. *Баландин А. С.* Об асимптотической устойчивости одного класса дифференциально-разностных уравнений. Вестник ПГТУ, № 1, 122-129 (2009).

Balandin A. S. On asymptotic stability fot a class of differential–difference equations. Vestnik PGTU, No. 1, 122-129 (2009). (in Russian)

15. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

El'sgol'ts, L. E., Norkin, S. B. Introduction to the theory of differential equations with deviating argument. Moscow: Nauka, 1971. (in Russian)

16. *Баландин А. С., Сабатулина Т. Л.* Разрешимость автономного дифференциального уравнения с ограниченным последействием на отрицательной полуоси. Известия вузов. Математика. № 10, 26-37 (2017).

Balandin, A. S., Sabatulina, T. L. Solvability of an autonomous differential equation with aftereffect on the negative semi-axis. Russian Mathematics, 61, No. 10, 26-37 (2017).

17. *Баландин А. С., Сабатулина Т. Л.* Разрешимость неоднородного автономного дифференциального уравнения с последействием на отрицательной полуоси. Известия вузов. Математика. № 3, 3-18 (2019).

Balandin, A. S., Sabatulina, T. L. Solvability of inhomogeneous autonomous differential equation with aftereffect on the negative semi-axis. Russian Mathematics, 63, No. 3, 3-18 (2019).

18. *Малыгина В.В., Баландин А.С.* О разрешимости на оси автономных дифференциальных уравнений с последействием. Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. Вып. 2(33), 7-13 (2016).

Malygina V. V., Balandin A. S. On solvability of autonomous delay differential equations on the real axis. Vestnik Permskogo Universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika. Vol. 2(33), 7-13 (2016). (in Russian)

19. *Симонов П. М., Чистяков А. В.* Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных систем. Известия вузов. Математика. №6, 37-49 (1997).

Simonov, P. M., Chistyakov, A. V. On exponential stability of linear difference-differential systems. Russian Mathematics, 41, No. 6, 34-45 (1997).

Получена 20.02.2020

Динамические системы, 2020, том 10(38), №1, 23–36

УДК 517.929.7

О неулучшаемых условиях разрешимости краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений первого порядка[1]

Е. И. Бравый

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь 614990. *E-mail: bravyi@perm.ru*

Аннотация. Для линейных функционально-дифференциальных уравнений первого порядка получены неулучшаемые условия однозначной разрешимости общей краевой задачи при интегральных ограничениях на функциональные операторы. Если эти условия не выполнены, то найдется функциональный оператор, удовлетворяющий заданным интегральным ограничениям, для которого краевая задача не является однозначно разрешимой. Проверка этих необходимых и достаточных условий заключается в проверке отсутствия нулей известной функции, заданной на множестве размерности 8.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, краевые задачи, однозначная разрешимость, неулучшаемые условия.

On unimprovable conditions of the solvability of boundary value problems for first order functional differential equations

E. I. Bravyi

Perm National Research Polytechnic University, Perm 614990.

Abstract. For linear functional differential equations of the first order, unimprovable conditions are obtained for the unique solvability of a general boundary value problem under integral constraints on positive and negative parts of functional operators. If these conditions are not fulfilled, then there is a functional operator satisfying the given integral constraints for which the boundary value problem is not uniquely solvable. Verification of these necessary and sufficient conditions consists in verifying the absence of zeros of a known function defined on a set of dimension 8. The necessary and sufficient conditions for the unique solvability of boundary value problems of a periodic type under integral constraints are also obtained.

Keywords: functional differential equations, boundary value problems, unique solvability, unimprovable conditions.

MSC 2010: 34K06, 34K10

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание FSNM-2020-0028) и при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-01-00332).

1. Введение

Для функционально-дифференциальных уравнений первого порядка будут получены неулучшаемые условия разрешимости краевых задач при интегральных ограничениях на функциональные операторы.

Рассматривается краевая задача для линейного функционально-дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (Tx)(t) + f(t), \quad t \in [a, b], \\ \ell x = \alpha, \end{cases} \tag{1}$$

где функция $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ принадлежит пространству абсолютно непрерывных на отрезке $[a, b]$ вещественных функций $\mathbf{AC}$; линейный ограниченный оператор $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ действует из пространства ограниченных вещественных функций $\mathbf{C}$ в пространство суммируемых вещественных функций $\mathbf{L}$, ограничен и регулярен, то есть представим в виде разности двух линейных положительных операторов (отображающих неотрицательные функции из $\mathbf{C}$ в почти всюду неотрицательные из $\mathbf{L}$); функция f суммируема: $f \in \mathbf{L}$; $\alpha \in \mathbb{R}$; $\ell : \mathbf{AC} \to \mathbb{R}$ — линейный ограниченный функционал; в пространствах $\mathbf{C}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{AC}$ используются стандартные нормы.

Известно, что краевая задача (1) фредгольмова (см., например, [3]). Таким образом, краевая задача (1) имеет единственное решение при всех парах $f \in \mathbf{L}$, $c \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда однородная задача (при $f \equiv 0$, $\alpha = 0$) задача имеет только тривиальное решение.

Условия разрешимости краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений первого порядка достаточно хорошо разработаны в монографии [13], статьях [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16] и других работах. При изучении конкретных краевых задач, как правило, используется техника построения априорных оценок. Однако для сколько-нибудь общих краевых задач неулучшаемые условия разрешимости в терминах ограничений на функциональные операторы, по-видимому, неизвестны. Здесь с помощью метода, описанного, например, в работах [1, 2], будут получены общие необходимые и достаточные условия разрешимости краевой задачи для всех уравнений из рассматриваемого семейства уравнений при интегральных ограничениях на функциональные операторы положительной и отрицательной частей оператора T в задаче (1). Эти условия однозначной разрешимости оказываются неулучшаемыми (в заданном семействе уравнений) в том смысле, что если эти условия не выполнены, то в семействе найдется уравнение, для которого краевая задача не является однозначно разрешимой.

В параграфе 2 доказаны основные общие утверждения: о связи разрешимости задачи для семейств уравнений и разрешимостью задачи для уравнений с двумя постоянными аргументами (теорема 1) и о необходимых и достаточных условиях разрешимости краевой задачи при интегральных ограничениях (теорема 2). В § 3 получены необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач периодического типа (теорема 3).

2. Общие утверждения для уравнения первого порядка

В следующей (основной) лемме показывается, что решение однородной краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения первого порядка с регулярным функциональным оператором является решением задачи с теми же краевыми условиями для однородного уравнения с двумя постоянными значениями аргумента.

Лемма 1. *Пусть однородная краевая задача*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (T^{+}x)(t) - (T^{-}x)(t), \quad t \in [a,b], \\ \ell x = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $T^{+}, T^{-} : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ *— линейные положительные операторы,* $\ell : \mathbf{AC} \to \mathbb{R}$ *— линейный ограниченный функционал, имеет нетривиальное решение* $u \in \mathbf{AC}$. *Тогда функция* u *является решением краевой задачи для некоторого функционально-дифференциального уравнения с двумя постоянными аргументами:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = p_*(t)x(\tau_*) + p^*(t)x(\tau^*), \quad t \in [a,b], \\ \ell x = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $\tau_*,\ \tau^* \in [a,b]$, $p_*,\ p^* \in \mathbf{L}$, *и выполнены соотношения*

$$p_* + p^* = T^{+}\mathbf{1} - T^{-}\mathbf{1}, \tag{4}$$

$$p_*(t), p^*(t) \in [-(T^{-}\mathbf{1})(t), (T^{+}\mathbf{1})(t)], \quad t \in [a,b]. \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим через τ_* и τ^* любые точки, в которых решение u на отрезке $[a,b]$ принимает минимальное и максимальное значения соответственно. Таким образом, выполнены неравенства $u(\tau_*) \le u(t) \le u(\tau^*)$, $t \in [a,b]$. Тогда для положительных операторов T^{-} и T^{+} выполнены неравенства

$$(T^{+}\mathbf{1})(t)u(\tau_*) \le (T^{+}u)(t) \le (T^{+}\mathbf{1})(t)u(\tau^*),\ t \in [a,b],$$
$$(T^{-}\mathbf{1})(t)u(\tau_*) \le (T^{-}u)(t) \le (T^{-}\mathbf{1})(t)u(\tau^*),\ t \in [a,b].$$

Следовательно, существуют такие измеримые функции $\zeta, \xi : [a,b] \to [0,1]$, что

$$(T^{+}u)(t) = (T^{+}\mathbf{1})(t)(1-\zeta(t))u(\tau_*) + (T^{+}\mathbf{1})(t)\zeta(t)u(\tau^*),\ t \in [a,b],$$
$$(T^{-}u)(t) = (T^{-}\mathbf{1})(t)(1-\xi(t))u(\tau_*) + (T^{-}\mathbf{1})(t)\xi(t)u(\tau^*),\ t \in [a,b].$$

Поэтому функция u удовлетворяет задаче (3) при p_*, p^*, определенных равенствами

$$p_*(t) = (T^{+}\mathbf{1})(t)(1-\zeta(t)) - (T^{-}\mathbf{1})(t)(1-\xi(t)),\ t \in [a,b],$$
$$p^*(t) = (T^{+}\mathbf{1})(t)\zeta(t) - (T^{-}\mathbf{1})(t)\xi(t),\ t \in [a,b].$$

Очевидно, что при этом выполнено равенство (4) и неравенства (5). □

Верно и обратное утверждение.

Лемма 2. *Пусть заданы неотрицательные функции* p^+, $p^- \in \mathbf{L}$. *Пусть все задачи* (2) *при всех таких линейных положительных операторах* T^+, $T^- : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$, *что* $T^+\mathbf{1} = p^+$, $T^-\mathbf{1} = p^-$, *имеют только тривиальное решение.*

Тогда все краевые задачи (3) *имеют только тривиальное решение при всех* τ_*, $\tau^* \in [a,b]$ *и всех функциях* p_*, $p^* \in \mathbf{L}$, *удовлетворяющих условиям* (4), (5).

Доказательство. Пусть краевая задача (3) при некоторых τ_*, $\tau^* \in [a,b]$ и при некоторых функциях p_*, $p^* \in \mathbf{L}$, удовлетворяющих условиям (4),(5), имеет нетривиальное решение u. Определим линейные операторы T^+, T^- равенствами

$$T^+x = p_1^+x(\tau_1) + (p^+ - p_1^+)x(\tau_2), \quad T^-x = p_1^-x(\tau_1) + (p^- - p_1^-)x(\tau_2),$$

где p_1^+, p_1^- — положительная и отрицательная части функции p_1 ($p_1^+ = (|p_1|+p_1)/2$, $p_1^- = (|p_1| - p_1)/2$). Операторы T^+, $T^- : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ положительны и выполнены равенства $T^+\mathbf{1} = p^+$, $T^-\mathbf{1} = p^-$. Тогда функция u — нетривиальное решение задачи однородной задачи (2), которая поэтому не является однозначно разрешимой. Противоречие доказывает утверждение. □

Из лемм 1 и 2 и фредгольмовости задачи

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t) + f(t), \quad t \in [a,b], \\ \ell x = \alpha, \end{cases} \tag{6}$$

следует необходимое и достаточное условие разрешимости для всего семейства.

Теорема 1. *Пусть заданы неотрицательные функции* p^+, $p^- \in \mathbf{L}$. *Задача* (6) *однозначно разрешима при всех таких линейных положительных операторах* T^+, $T^- : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$, *что* $T^+\mathbf{1} = p^+$, $T^-\mathbf{1} = p^-$, *в том и только том случае, когда все задачи* (3) *имеют только тривиальное решение при всех* τ_*, $\tau^* \in [a,b]$ *и всех функциях* p_*, $p^* \in \mathbf{L}$, *удовлетворяющих условиям* (4), (5).

Замечание 1. В утверждении теоремы 1 можно полагать $\tau_* < \tau^*$, причем τ_* — точка минимума, τ^* — точка максимума некоторого нетривиального решения.

2.1. Условия разрешимости краевых задач с двумя постоянными аргументами

Лемма 3. *Краевая задача*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = p_*(t)x(\tau_*) + p^*(t)x(\tau^*), \quad t \in [a,b], \\ \ell x = 0, \end{cases} \tag{7}$$

где p_*, $p^* \in \mathbf{L}$, τ_*, $\tau^* \in [a,b]$,

$$\ell x \equiv \psi x(a) + \int_a^b \phi(s)\dot{x}(s)\,ds, \ \psi \in \mathbb{R}, \ \phi \in \mathbf{L}_\infty, \tag{8}$$

имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$\triangle \equiv \begin{vmatrix} -1 & 1-\int_a^{\tau_*} p_*(s)\,ds & -\int_a^{\tau_*} p^*(s)\,ds \\ -1 & -\int_a^{\tau^*} p_*(s)\,ds & 1-\int_a^{\tau^*} p^*(s)\,ds \\ \psi & \int_a^b \phi(s)p_*(s)\,ds & \int_a^b \phi(s)p^*(s)\,ds \end{vmatrix} \neq 0. \tag{9}$$

Доказательство. Решение задачи (7) представимо в виде

$$x(t) = x(a) + \int_a^t p_*(s)\,ds\,x(\tau_*) + \int_a^t p^*(s)\,ds\,x(\tau^*), \quad t \in [a,b],$$

где значения $x(a)$, $x(\tau_*)$, $x(\tau^*)$ удовлетворяют равенствам

$$x(\tau_*) = x(a) + \int_a^{\tau_*} p_*(s)\,ds\,x(\tau_*) + \int_a^{\tau_*} p^*(s)\,ds\,x(\tau^*),$$

$$x(\tau^*) = x(a) + \int_a^{\tau^*} p_*(s)\,ds\,x(\tau_*) + \int_a^{\tau^*} p^*(s)\,ds\,x(\tau^*)$$

и краевому условию

$$\psi x(a) + \int_a^b \phi(s)p_*(s)\,ds\,x(\tau_*) + \int_a^b p^*(s)\,ds\,x(\tau^*) = 0.$$

Краевая задача (7) имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда система трех последних уравнений относительно неизвестных $x(a)$, $x(\tau_*)$ и $x(\tau^*)$ имеет только тривиальное решение, то есть, когда выполнено условие (9). □

Запишем в более удобном виде условие однозначной разрешимости задачи (6).

Теорема 2. *Пусть заданы неотрицательные числа* A, B, ψ, $\overline{\gamma}$ *и* $\underline{\gamma} \in (0, \overline{\gamma}]$. *Тогда задача* (6) *с функционалом* ℓ, *определенным равенством* (8), *однозначно разрешима при всех таких линейных положительных операторах* T^+, $T^- : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$, *что* $\|T^+\| = A$, $\|T^-\| = B$, *и при всех таких измеримых функциях* ϕ, *что* $\underline{\gamma} \le \phi(t) \le \overline{\gamma}$, $t \in [a,b]$, *тогда и только тогда, когда*

$$\triangle \equiv \begin{vmatrix} -1 & 1-c_1 & -c_4 \\ 0 & -1-c_2 & 1-c_5 \\ \psi & D_1 & D_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{10}$$

при всех

$$c_5 \in [-M_2, M_1],\ c_4 \in \begin{cases} [-M_2, M_1 - c_5],\ c_5 \ge 0, \\ [-M_2 - c_5, M_1],\ c_5 < 0, \end{cases}$$

$$c_2 \in [-B + M_2, A - M_1],\ c_1 \in \begin{cases} [-B + M_2, A - M_1 - c_2],\ c_2 \ge 0, \\ [-B + M_2 - c_2, A - M_1],\ c_2 < 0, \end{cases}$$

$$M_1 \in [0, A],\ M_2 \in [0, B],\ D_1 \in \left[\underline{\gamma}(A - M_1) - \overline{\gamma}(A - M_2), \overline{\gamma}(A - M_1) - \underline{\gamma}(A - M_2)\right],$$

$$D_2 \in \left[\underline{\gamma}M_1 - \overline{\gamma}M_2, \overline{\gamma}M_1 - \underline{\gamma}M_2\right].$$

Доказательство. Условие (9) имеет следующий вид:

$$\triangle \equiv \begin{vmatrix} -1 & 1-c_1 & -c_4 \\ -1 & -c_1-c_2 & 1-c_4-c_5 \\ \psi & D_1 & D_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1-c_1 & -c_4 \\ 0 & -1-c_2 & 1-c_5 \\ \psi & D_1 & D_2 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (11)$$

где

$$c_1 = \int_a^{\tau_*} p_*(s)\,ds,\ c_2 = \int_{\tau_*}^{\tau^*} p_*(s)\,ds,\ c_4 = \int_a^{\tau_*} p^*(s)\,ds,\ c_5 = \int_{\tau_*}^{\tau^*} p^*(s)\,ds,$$
$$D_1 = \int_a^b \phi(s)p_*(s)\,ds,\ D_2 = \int_a^b \phi(s)p^*(s)\,ds.$$

Пусть $\underline{\gamma} \le \phi(t) \le \overline{\gamma}$, $t \in [a,b]$, где $0 < \underline{\gamma} \le \overline{\gamma}$. При некоторых $\zeta, \xi : [0,1] \to [0,1]$ имеем

$$D_1 =$$
$$= \int_a^b \phi(s)\left((T^+\mathbf{1})(t)(1-\zeta(t)) - (T^-\mathbf{1})(t)(1-\xi(t))\right)dt \in \left[\underline{\gamma}N_1 - \overline{\gamma}N_2, \overline{\gamma}N_1 - \underline{\gamma}N_2\right],$$

$$D_2 = \int_a^b \phi(s)\left((T^+\mathbf{1})(t)\zeta(t) - (T^-\mathbf{1})(t)\xi(t)\right)\,dt \in \left[\underline{\gamma}M_1 - \overline{\gamma}M_2, \overline{\gamma}M_1 - \underline{\gamma}M_2\right],$$

где

$$N_1 = \int_a^b (T^+\mathbf{1})(t)(1-\zeta(t))\,dt,\ N_2 = \int_a^b (T^-\mathbf{1})(t)(1-\xi(t))\,dt,$$
$$M_1 = \int_a^b (T^+\mathbf{1})(t)\,\zeta(t)\,dt,\ M_2 = \int_a^b (T^-\mathbf{1})(t)\xi(t)\,dt,$$
$$N_1 + M_1 = \|T^+\| \equiv A,\ N_2 + M_2 = \|T^-\| \equiv B, \quad N_1, M_1, N_2, M_2 \ge 0.$$

Далее имеем $c_1 = \int_a^{\tau_*}(T^+\mathbf{1})(t)(1-\zeta(t))\,dt - \int_a^{\tau_*}(T^-\mathbf{1})(t)(1-\xi(t))\,dt$, $c_4 = \int_a^{\tau_*}(T^+\mathbf{1})(t)\zeta(t)\,dt - \int_a^{\tau_*}(T^-\mathbf{1})(t)\xi(t)\,dt$, $c_2 = \int_{\tau_*}^{\tau^*}(T^+\mathbf{1})(t)(1-\zeta(t))\,dt - \int_{\tau_*}^{\tau^*}(T^-\mathbf{1})(t)(1-\xi(t))\,dt$, $c_5 = \int_{\tau_*}^{\tau^*}(T^+\mathbf{1})(t)\zeta(t)\,dt - \int_{\tau_*}^{\tau^*}(T^-\mathbf{1})(t)\xi(t)\,dt$. Таким образом,

$$c_1 = K_1 - K_2,\ c_4 = L_1 - L_2,\ c_2 = P_1 - P_2,\ c_5 = Q_1 - Q_2,$$
$$K_1 + P_1 \le N_1 = A - M_1,\ K_2 + P_2 \le N_2 = B - M_2,$$
$$L_1 + Q_1 \le M_1,\ L_2 + Q_2 \le M_2,\ N_1 + M_1 = \|T^+\| \equiv A,\ N_2 + M_2 = \|T^-\| \equiv B,$$
$$K_1, K_2, L_1, L_2, P_1, P_2, Q_1, Q_2, N_1, M_1, N_2, M_2 \ge 0.$$

Поэтому при фиксированных $M_1 \in [0,A]$ и $M_2 \in [0,B]$ имеем:

$$K_1 \in [0, A-M_1],\ P_1 \in [0, A-M_1-K_1],\ K_2 \in [0, B-M_2],\ P_2 \in [0, B-M_2-K_2],$$
$$L_1 \in [0, M_1],\ Q_1 \in [0, M_1-L_1],\ L_2 \in [0, M_2],\ Q_2 \in [0, M_2-L_2].$$

И для c_1, c_2, c_4, c_5 получаем:

$$c_1 = K_1 - K_2,\ c_2 \in [M_2 - B + K_2, A - M_1 - K_1],\ c_4 = L_1 - L_2,\ c_5 \in [L_2 - M_2, M_1 - L_1],$$

где

$$K_1 \in [0, A - M_1],\ K_2 \in [0, B - M_2],\ L_1 \in [0, M_1],\ L_2 \in [0, M_2],\ M_1 \in [0, A],\ M_2 \in [0, B].$$

Пусть $c_2 \in [-B + M_2, A - M_1]$. Если $c_2 > 0$, то $K_1 \in [0, A - M_1 - c_2]$, $K_2 \in [0, B - M_2]$. Поэтому

$$c_1 = K_1 - K_2 \in [-B + M_2, A - M_1 - c_2].$$

Если $c_2 \leq 0$, то $K_1 \in [0, A - M_1]$, $K_2 \in [0, c_2 + B - M_2]$. Поэтому

$$c_1 = K_1 - K_2 \in [-c_2 - B + M_2, A - M_1].$$

Пусть $c_5 \in [-M_2, M_1]$. Если $c_5 > 0$, то $L_1 \in [0, M_1 - c_5]$, $L_2 \in [0, M_2]$. Поэтому

$$c_4 = L_1 - L_2 \in [-M_2, M_1 - c_5].$$

Если $c_5 \leq 0$, то $L_1 \in [0, M_1]$, $L_2 \in [0, c_5 + M_2]$. Поэтому

$$c_4 = L_1 - L_2 \in [-M_2 - c_5, M_1].$$

Итак, при заданных неотрицательных числах $A = \|T^+\|$ и $B = \|T^-\|$ функция $\triangle$ из неравенства (11) определена на только что описанном восьмимерном множестве. Отсутствие нулей $\triangle$ по лемме (3) эквивалентно однозначной разрешимости задачи (6) при всех таких линейных положительных операторах $T^+, T^- : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$, что $\|T^+\| = A$, $\|T^-\| = B$, и при всех таких измеримых функциях ϕ в записи функционала краевых условий ℓ, что $\underline{\gamma} \leq \phi(t) \leq \overline{\gamma}$, $t \in [a, b]$. $\square$

Замечание 2. Многомерность множества, на котором надо проверить неравенство (11), определяет трудности при получении конечных условий разрешимости.

3. Краевые задачи периодического типа

Основной результат параграфа — теорема 3, в которой получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости одного класса задач, включающего периодическую краевую задачу (утверждение теоремы обобщает известные результаты о периодических задачах).

Рассмотрим общую краевую задачу для уравнения первого порядка (6) с функционалом краевого условия (8), в котором положим $\psi = 0$. В этом случае в условиях разрешимости (10) этой задачи определитель $\triangle$ не зависит от переменных c_1 и c_4, поэтому размерность множества, на котором решается задача минимизации при применении леммы 3, снижается на 2. При $\phi(s) \equiv 1$ и $\alpha = 0$ краевая задача становится периодической.

Теорема 3. *Пусть заданы числа $A \geq 0$, $B \geq 0$, $\gamma \geq 1$. Для того чтобы краевая задача*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t) + f(t), \quad t \in [a,b], \\ \displaystyle\int_a^b \phi(s)\dot{x}(s)\,ds = \alpha, \end{cases}$$

была однозначно разрешима при всех линейных положительных операторах T^+, $T^- : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ и всех измеримых функциях ϕ, удовлетворяющих условиям

$$\|\,T^+\| = A,\ \|\,T^-\| = B,\ \phi(s) \in [\underline{\gamma}, \overline{\gamma}],\ s \in [a,b],\ 0 < \underline{\gamma} \leq \overline{\gamma},\ \frac{\overline{\gamma}}{\underline{\gamma}} = \gamma,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{B}{1/\gamma - B} < A < 1 + 1/\gamma + 2\sqrt{1/\gamma - B},$$

или

$$\frac{A}{1/\gamma - A} < B < 1 + 1/\gamma + 2\sqrt{1/\gamma - A}.$$

Замечание 3. При $\gamma = 1$ из теоремы 3 получаем утверждение теоремы 4.1 книги [13] о разрешимости периодической задачи.

Доказательство теоремы 3. Будем искать условия, при которых задача

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = p_*(t)x(\tau_*) + p^*(t)x(\tau^*), \quad t \in [a,b], \\ \displaystyle\int_a^b \phi(s)\dot{x}(s)\,ds = 0, \end{cases}$$

не имеет нетривиальных решений для всех $\tau_*, \tau^* \in [a,b]$, всех таких функций p_*, $p^* \in \mathbf{L}$, что выполнены соотношения

$$p_* + p^* = T^+\mathbf{1} - T^-\mathbf{1}\,, \quad p_*(t),\ p^*(t) \in [-(T^-\mathbf{1})(t), (T^+\mathbf{1})(t)], \quad t \in [a,b],$$

всех линейных положительных операторах $T^+, T^- : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ с заданными нормами ($\|\,T^+\| = A$, $\|\,T^-\| = B$), всех измеримых функций ϕ, удовлетворяющих неравенствам

$$\underline{\gamma} \leq \phi(t) \leq \overline{\gamma}, \quad t \in [a,b],$$

где $0 < \underline{\gamma} \leq \overline{\gamma}$. В этот класс задач входит и периодическая задача, для которой функция ϕ постоянна.

В этом случае функция $\triangle$ из неравенства (11) имеет вид

$$\triangle = (1 + c_2)D_2 + (1 - c_5)D_1,$$

$$D_1 \in \left[\underline{\gamma} N_1 - \overline{\gamma} N_2, \overline{\gamma} N_1 - \underline{\gamma} N_2\right] = \tag{12}$$
$$= \left[\underline{\gamma}(A - M_1) - \overline{\gamma}(B - M_2), \overline{\gamma}(A - M_1) - \underline{\gamma}(B - M_2)\right],$$
$$D_2 \in \left[\underline{\gamma} M_1 - \overline{\gamma} M_2, \overline{\gamma} M_1 - \underline{\gamma} M_2\right], \quad c_5 \in [-M_2, M_1]$$
$$c_2 \in [M_2 - B, A - M_1]\,. \tag{13}$$

Удобнее перейти к новым переменным:

$$\triangle' \equiv \frac{\triangle}{\underline{\gamma}} = (1 + c_2) D_2' + (1 - c_5) D_1',$$

где

$$D_1' \in [N_1 - \gamma N_2, \gamma N_1 - N_2] = [A - M_1 - \gamma(B - M_2), \gamma(A - M_1) - (B - M_2)]\,,$$
$$D_2' \in [M_1 - \gamma M_2, \gamma M_1 - M_2]\,,$$
$$\gamma \equiv \frac{\overline{\gamma}}{\underline{\gamma}}, \quad M_1 \in [0, A]\,, \quad M_2 \in [0, B]\,. \tag{14}$$

Задача (7) не может иметь нетривиальных решений, если при всех параметрах, удовлетворяющих условиям (13)–(14), будет выполнено неравенство $\triangle' \neq 0$.

При $M_1 = M_2 = 0$ имеем $D_2, = 0$, $c_5 = 0$ и $\triangle' = D_1' \in [A - \gamma B, \gamma A - B]$. Если $A \geq B$, то $\gamma A - B > 0$, то есть, правый конец промежутка для $\triangle'$ положителен, и поэтому левый конец этого промежутка для того, чтобы он не содержал нуля, также должен быть положителен: $A - \gamma B > 0$ (в случае $A \leq B$ выполнено неравенство $A - \gamma B < 0$ и поэтому правый конец не содержащего нуля промежутка также должен быть отрицателен: $A < \frac{1}{\gamma} B$).

Рассмотрим сначала случай $A \geq B$. Нас интересуют условия, при которых

$$\triangle' = (1 + c_2) D_2' + (1 - c_5) D_1' > 0,$$

для всех c_2, c_5, D_1', D_2', M_1, M_2, удовлетворяющих (13)–(14) где параметры

$$A = \|\, T^+\|, \; B = \|\, T^-\|, \; \gamma = \frac{\overline{\gamma}}{\underline{\gamma}} \geq 1$$

определяются исходной краевой задачей.

Минимум $\triangle'$ может принимать только на границах всех ограничений по c_2, c_5, D_1', D_2'. Необходимо рассмотреть все возможные случаи с учетом очевидного сокращения перебора: если $c_2 = A - M_1$, то $\triangle'$ будет принимать минимальное значение при $D_2' = M_1 - \gamma M_2$. Аналогично получаем, что
если $c_2 = M_2 - B > -1$, то $D_2' = M_1 - \gamma M_2$;
если $c_2 = M_2 - B \leq -1$, то $D_2' = \gamma M_1 - M_2$;
если $c_5 = M_1 > 1$, то $D_1' = \gamma(A - M_1) - (B - M_2)$;
если $c_5 = M_1 \leq 1$, то $D_1' = (A - M_1) - \gamma(B - M_2)$;
если $c_5 = -M_2$, то $D_1' = (A - M_1) - \gamma(B - M_2)$.

Случай 1: $c_2 = M_2,\ B > -1,\ D_2' = M_1-\gamma M_2,\ c_5 = M_1 > 1,\ D_1' = \gamma(a-M_1)-(B-M_2)$. В этом случае $\triangle' = (1+M_2-B)(M_1-\gamma M_2)+(1-M_1)(\gamma(A-M_1)-(B-M_2)) = -\gamma M_2^2 + (B\gamma + 1-\gamma)M_2 + M_1 - \gamma M_1 - B + \gamma A + \gamma M_1^2 - M_1\gamma A$.

Коэффициент при M_2 отрицателен, поэтому минимальное значение выражения $\triangle'$ будет приниматься на одном из концов отрезка $M_2 \in [B-1, B]$. Левый конец в данном случае проверять не обязательно, так как он не является границей множества ограничений. При $M_2 = B$ имеем

$$\triangle' = \gamma M_1^2 + (1-\gamma-\gamma A)M_1 - B\gamma + \gamma A.$$

Это выражение принимает минимальное значение либо при $M_1 = 0$ ($\triangle' = \gamma(A-B) > 0$ при $A > B$), либо при $M_1 = A$ ($\triangle' = A - \gamma B > 0$), либо при $M_1 = M_{1,min} = -\frac{1}{2}\frac{1-\gamma\gamma A}{\gamma}$, если $M_{1,min} \in [1, A]$, то есть, при $a > 1 + 1/\gamma$. Тогда

$$\triangle' = -\gamma^2 A^2 + 2\gamma(\gamma+1) - (1-\gamma)^2 - 4\gamma^2 B,$$

и $\triangle' > 0$ тогда и только тогда, когда величина A принадлежит интервалу

$$\left(1 + 1/\gamma - 2\sqrt{1/\gamma - B}, 1 + 1/\gamma + 2\sqrt{1/\gamma - B}\right).$$

Таким образом, $\triangle' > 0$, если при $B \le 1/\gamma$ и при $A > 1+1/\gamma$ выполнено неравенство

$$A < 1 + 1/\gamma + 2\sqrt{1/\gamma - B}.$$

Случай 2: $c_2 = a-M_1,\ D_2' = M_1-\gamma M_2,\ c_5 = M_1 > 1,\ D_1' = \gamma(a-M_1)-(B-M_2)$.

Тогда $\triangle' = (1-M_1+\gamma(M_1-1)-\gamma A)M_2 + M_1 + AM_1 - \gamma M_1 - M_1^2 + gA + \gamma M_1^2 - B - M_1\gamma A + BM_1$.

Коэффициент при M_2 отрицателен: $(M_1-1)(\gamma-1) < A\gamma$, поэтому минимальное значение выражения $\triangle'$ будет приниматься при максимально возможном $M_2 = B$. Тогда $\triangle'_{M_2=b} = (\gamma-1)M_1^2 + (1-\gamma A+\gamma BA-\gamma)M_1 - \gamma B + \gamma A - \gamma AB$. Минимальное значение это выражение принимает либо при $M_1 = 1$ ($\triangle' = A(1-\gamma B) > 0$, если $B < 1/\gamma$), либо при $M_1 = A$ ($\triangle' = A - B\gamma > 0$ так как $A \ge 1$ и $B < 1/\gamma$), либо внутри отрезка $[1, A]$ при $M_{1,min} = -\frac{1}{2}\frac{1-\gamma A+\gamma B+A-\gamma}{\gamma-1}$, если $\gamma > 1$. Имеем $M_{1,min} \ge 1$ при $A \ge \frac{\gamma B+\gamma-1}{\gamma-1}$; $M_{1,min} \le A$ при $A \ge \frac{-\gamma B+\gamma-1}{\gamma-1}$. Если оба эти неравенства выполнены, то $A \ge \frac{\gamma B+\gamma-1}{\gamma-1}$ и $\min\triangle' = \frac{1}{4(\gamma-1)}\left(-(\gamma-1)^2A^2 - 2(\gamma-1)(-1+\gamma B-\gamma)A - \gamma^2B^2 + (2\gamma-2\gamma^2)B + 2\gamma - 1\right)$. Теперь $\min\triangle' > 0$ тогда и только тогда, когда

$$A \in \left(\frac{\gamma+1-\gamma B-2\gamma\sqrt{1/\gamma-B}}{\gamma-1}; \frac{\gamma+1-\gamma B+2\gamma\sqrt{1/\gamma-B}}{\gamma-1}\right).$$

Но уже полученная при рассмотрении случая 1 оценка для A является более сильной. Действительно,

$$1 + \gamma + 2\sqrt{1/\gamma - B} < \frac{\gamma+1-\gamma B+2\gamma\sqrt{1/\gamma-B}}{\gamma-1},$$

так как
$$\frac{\gamma^2-1}{\gamma}+2(\gamma-1)\sqrt{1/\gamma-B}<\gamma+1-\gamma B+2\gamma\sqrt{1/\gamma-B},$$
$$\frac{\gamma^2-1}{\gamma}-\gamma-1+\gamma B<2\sqrt{1/\gamma-B},\quad \frac{-1-\gamma+\gamma^2 B}{\gamma}<2\sqrt{\gamma-\gamma B},$$
и при $\gamma B<1$ левая часть последнего неравенства отрицательна. При этом границы применимости этого неравенства лежат внутри границ применения неравенства из пункта 1, так как $A\geq\frac{\gamma B+\gamma-1}{\gamma-1}>1+1/\gamma$.

Случай 3: $c_2=M_2-B>-1$, $D_2'=M_1-\gamma M_2$, $c_5=M_1\leq 1$, $D_1'=a-M_1-\gamma(B-M_2)$.

Тогда $\triangle'=(1+M_2-B)(M_1-\gamma M_2)+(1-M_1)(A-M_1-\gamma(B-M_2))=-\gamma M_2^2+(-\gamma M_1+B\gamma+M_1)M_2+A-B\gamma-BM_1+M_1^2+M_1\gamma B-AM_1$.

Коэффициент при M_2^2 отрицателен, поэтому минимальное значение $\triangle'$ может принимать только на концах отрезка изменения величины M_2: $M_2=B-1$ или $M_2=B$. Случай $M_2=B-1$ можно не рассматривать, так как эта точка не будет лежать на границе всех ограничений. При $M_2=B$ имеем $\triangle'=M_1^2-AM_1+A-B\gamma$. При $M_1=1$ $\triangle'=1-\gamma B>0$, если $B\gamma<1$. При $M_1=0$ $\triangle'=A-\gamma B>0$, если $A>B\gamma$. Минимальное значение $\triangle'$ принимает при $M_1=A/2$. Тогда $\triangle'=-\frac{A^2}{4}+A-\gamma B>0$, если $A\in\big[0,2+2\sqrt{1+B\gamma}\big)$. Очевидно, что условия, полученные при рассмотрении случая 1, более ограничительны.

Случай 4: $c_2=A-M_1$, $D_2'=M_1-\gamma M_2$, $c_5=M_1\leq 1$, $D_1'=a-M_1-\gamma(B-M_2)$.

Тогда $\triangle'=(1+A-M_1)(M_1-\gamma M_2)+(1-M_1)(A-M_1-\gamma(B-M_2))=-A\gamma M_2+A-\gamma B+B\gamma M_1$. Минимальное значение достигается при $M_1=0$ и $M_2=B$. Тогда $\triangle'=-A\gamma B+A-B\gamma>0$ при
$$A>\frac{B}{1/\gamma-B}.$$

Случай 5: $c_2=M_2-B>-1$, $D_2'=M_1-\gamma M_2$, $c_5=-M_2$, $D_1'=a-M_1-\gamma(B-M_2)$.

Тогда $\triangle'=(1+M_2-B)(M_1-\gamma M_2)+(1+M_2)(A-M_1-\gamma(B-M_2))=-BM_1+A-B\gamma+M_2A$.

Минимальное значение $\triangle'$ будет принимать при $M_2=0$ и $M_1=A$. Тогда $\triangle'=-BA+A-B\gamma>0$ при $A>\frac{B\gamma}{1-B}$. Но так как должны быть выполнены условия из предыдущих пунктов, то
$$A>\frac{B\gamma}{1-B\gamma}\geq\frac{B\gamma}{1-B},\tag{15}$$
и условия этого пункта выполнены.

Случай 6: $c_2=A-M_1$, $D_2'=M_1-\gamma M_2$, $c_5=-M_2\leq 1$, $D_1'=a-M_1-\gamma(B-M_2)$.

Тогда $\triangle'=(1+A-M_1)(M_1-\gamma M_2)+(1+M_2)(A-M_1-\gamma(B-M_2))=\gamma M_2^2+(\gamma M_1-\gamma A+A-M_1-B\gamma)M_2+AM_1-B\gamma-M_1^2+A$.

Минимальное значение $\triangle'$ будет достигаться на границах отрезка изменения величины M_1. Рассмотрим сначала случай $M_1=0$.

Тогда $\triangle' = \gamma M_2^2 + M_2(A - \gamma A - \gamma B) - B\gamma) - B\gamma + A$. Минимальное значение будет приниматься при $M_2 = M_{2,min} = \frac{\gamma(A+B)-A}{2\gamma}$. $M_{2,min} \le B$ при $A(\gamma - 1) < 1B$ и $M_{2,min}\gamma 0$ при $A(\gamma - 1) < \gamma B$. Тогда $\triangle' = \frac{2\gamma-\gamma^2-1}{4\gamma}A^2 + \frac{2-B\gamma+B}{2}A - \frac{B^2\gamma+4B\gamma}{4} = -\frac{(1-\gamma)^2}{4\gamma}A^2 + \frac{2-B(\gamma-1)}{2}A - \frac{B\gamma(B+4)}{4} > 0$, если

$$\begin{gathered} \frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\left((2 - B(\gamma-1) - 2\sqrt{1 - B\gamma(\gamma-1)}\right) < \\ < A < \frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\left((2 - B(\gamma-1) + 2\sqrt{1 - B\gamma(\gamma-1)}\right). \end{gathered} \tag{16}$$

Неравенство $A < \frac{\gamma B}{\gamma-1}$, при котором следует проверять неравенство (16), совместно с неравенством $A > \frac{\gamma B}{1-B\gamma}$ (неравенство (15) из предыдущего пункта) тогда и только тогда, когда

$$\gamma \in (1, 2), \quad B \in [0, \frac{2-\gamma}{\gamma}]. \tag{17}$$

Тогда $\frac{\gamma B}{1-B\gamma} < A < \frac{\gamma B}{\gamma-1}$. Поэтому если выполнено условие (17), то и неравенство (16) выполнено, так как

$$\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\left((2 - B(\gamma-1) - 2\sqrt{1 - B\gamma(\gamma-1)}\right) < \frac{B\gamma}{1 - B\gamma}$$

и

$$\frac{\gamma B}{\gamma - 1} < \frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\left((2 - B(\gamma-1) + 2\sqrt{1 - B\gamma(\gamma-1)}\right).$$

При $M_1 = A$ выполнено неравенство $\triangle' = \gamma M_2^2 - B\gamma M_2 + A - B\gamma \ge \triangle'_{M_1=0}$. Таким образом, при $M_1 = A$ выполнено неравенство $\triangle' > 0$, если $\triangle' > 0$ при $M_1 = 0$, что было рассмотрено выше.

Итак, показано, что для того чтобы задача

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t), \quad t \in [a, b], \\ \int_a^b \phi(s)\dot{x}(s)\, ds = 0, \end{cases}$$

не имела нетривиальных решений при всех операторах T^+, T^- и функциях ϕ, таких что

$$\| T^+ \| = A, \quad \| T^- \| = B, \quad 0 < \underline{\gamma} \le \phi \le \overline{\gamma}, \quad \overline{\gamma}/\underline{\gamma} = \gamma \ge 1,$$

при $A \ge B$ необходимо и достаточно выполнения условий

$$\frac{B}{1/\gamma - B} < A < 1 + 1/\gamma + 2\sqrt{1/\gamma - B}, \quad 0 \le B < 1/\gamma.$$

Отметим, что кривые $A(B) = 1 + 1/\gamma + 2\sqrt{1/\gamma - B}$ и $A(B) = \frac{B}{1/\gamma - B}$ пересекаются при

$$B_{max} = \frac{4\gamma - 1 + \sqrt{1 + 8\gamma}}{8\gamma^2} < 1/\gamma.$$

Рассмотрение при $B \geq A$ аналогично, его можно упростить с помощью следующего утверждения из книги [13]:

Пусть x — решение задачи

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t), \ t \in [a,b], \\ \ell x \equiv \psi x(a) + \displaystyle\int_a^b \phi(s)\dot{x}(s)\,ds = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Тогда

$$y(t) = x(a+b-t), \quad t \in [a,b], \tag{19}$$

является решением задачи

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = (T^-y)(t) - (T^+y)(t), \ t \in [a,b], \\ \widetilde{\ell} y \equiv \psi y(b) - \displaystyle\int_a^b \phi(a+b-s)\dot{y}(s)\,ds = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Более того, между множествами решений задач (18) и (20) равенство (19) устанавливает взаимно однозначное соответствие.

Таким образом, мы получаем утверждение о разрешимости задачи при $\| T^+\| < \| T^-\|$ с помощью уже доказанного утверждения для $\| T^+\| \geq \| T^-\|$. Следовательно, полностью доказана теорема о разрешимости обобщенной периодической задачи для скалярного уравнения. $\square$

4. Заключение

Мы получили необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости линейной краевой задачи для всех уравнений из заданного множества функционально-дифференциальных уравнений. В общем случае проверка этих условий сводится к проверке отсутствия нулей явно заданной вещественной функции, определённой на множестве конечной размерности. Во всех случаях проверка эффективно осуществляется с помощью компьютерных процедур. Примененный метод может использоваться для различных краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений высших порядков и систем таких уравнений. Кроме того, метод может использоваться и для построения неулучшаемых (для данного множества уравнений) оценок решений.

Список цитируемых источников

1. *Бравый, Е. И.* О разрешимости задачи Коши для линейных функционально-дифференциальных уравнений высших порядков. Дифференц. уравнения 48, № 4, 459–470 (2012).

Bravyi, E. I. Solvability of the Cauchy problem for higher-order linear functional differential equations. Differential Equations 48, No.4, 465–476 (2012).

2. *Бравый, Е. И.* О наилучших константах в условиях разрешимости периодической краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений высших порядков. Дифференц. уравнения 48, № 6, 773–780 (2012).

Bravyi, E. I. On the best constants in the solvability conditions for the periodic boundary value problem for higher-order functional differential equations. Differential Equations 48, No.6, 779–786 (2012).

3. *Azbelev, N. V., Maksimov, V. P., Rakhmatullina, L. F.* Introduction to the theory of functional differential equations: Methods and applications. Hindawi Publishing Corporation, 2007.
4. *Dilnaya, N., Ronto, A.* Multistage iterations and solvability of linear Cauchy problems. Miskolc Mathematical Notes 4, No.2, 89-–102 (2003).
5. *Hakl, R., Lomtatidze, A.* On the Cauchy problem for first order linear differential equations with a deviating argument. Archivum Mathematicum 38, 61–71 (2002).
6. *Hakl, R., Lomtatidze, A., Puza, B.* On nonnegative solutions of first order scalar functional differential equations. Mem. Differ. Equ. Math. Phys. 23, 51–84 (2001).
7. *Hakl, R., Lomtatidze, A., Puza, B.* On periodical solutions of first order nonlinear functional differential equations of non-volterra's type. Mem. Differ. Equ. Math. Phys. 24, 83–105 (2001).
8. *Hakl, R., Lomtatidze, A., Puza, B.* New optimal conditions for unique solvability of the Cauchy problem for first order linear functional differential equations. Mathematica Bohemica 127, No.4, 509–524 (2002).
9. *Hakl, R., Lomtatidze, A., Puza, B.* On periodical solutions of first order linear functional differential equations. Nonlinear Anal.-Theor. 49, 929–945 (2002).
10. *Hakl, R., Lomtatidze, A., Sremr, J.* On a periodic type boundary value problem for first order linear functional differential equations. Nelinijni Kolyvannya 5, No.3, 416–432 (2002).
11. *Hakl, R., Lomtatidze, A., Sremr, J.* On an antiperiodic type boundary value problem for first order linear functional differential equations. Archivum Mathematicum 38, 149–160 (2002).
12. *Hakl, R., Lomtatidze, A., Sremr, J.* On constant sign solutions of a periodic type boundary problems for first order functional differential equations. Mem. Differ. Equ. Math. Phys. 26, 66–90 (2002).
13. *Hakl, R., Lomtatidze, A., Sremr, J.* Some Boundary Value Problems For First Order Scalar Functional Differential Equations. Brno : Masaryk University, 2002.
14. *Hakl, R., Lomtatidze, A., Sremr, J.* On nonnegative solutions of a periodic type boundary value problem for first-order scalar functional differential equations. Functional Differential Equations 11, No.3-4, 363-394 (2004).
15. *Lomtatidze, A., Oplustil, Z., Sremr, J.* Solvability conditions for a nonlocal boundary value problem for linear functional differential equations. Fasc. Math. 41, 81–96 (2009).
16. *Sremr, J., Sremr, P.* On a two point boundary problem for first order functional differential equations with deviating argument. Mem. Differ. Equ. Math. Phys. 29, 75—124 (2003).

Получена 12.02.2020

Динамические системы, 2020, том 10(38), №1, 37–50

УДК 517.925.5+517.929

Об аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом[1]

Г. В. Демиденко, И. А. Уварова
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
Новосибирск 630090. *E-mail: demidenk@math.nsc.ru, sibirochka@ngs.ru*

Аннотация. Изучены связи между решениями системы дифференциальных уравнений большой размерности, моделирующей многостадийный синтез вещества, и уравнения с запаздывающим аргументом. Предложен новый метод аппроксимации решений уравнения с запаздывающим аргументом на полуоси. Установлены оценки аппроксимации.

Ключевые слова: системы обыкновенных дифференциальных большой размерности, уравнения с запаздывающим аргументом, глобальные предельные теоремы, функция Хаара.

On approximation of solutions to delay differential equations

G. V. Demidenko, I. A. Uvarova
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Novosibirsk State University,
Novosibirsk 630090.

Abstract. Connections between solutions to a system of differential equations of high dimension modeling multi-stage substance synthesis and delay differential equation are studied. A new method of approximation of solutions to the delay equation on the half-axis is proposed. Estimates of approximation are established.

Keywords: systems of ordinary differential equations of high dimension, delay differential equations, global limit theorems, Haar function.
MSC 2010: 34K05, 34A12, 34A34, 34A45

1. Введение

В настоящей работе мы продолжаем изучение взаимосвязей между решениями дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \tag{1.1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10086).

и системы обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности вида

$$\frac{dx}{dt} = A_n x + F(t, x), \quad t > 0, \tag{1.2}$$

где

$$A_n = \begin{pmatrix} -\frac{n-1}{\tau} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{n-1}{\tau} & -\frac{n-1}{\tau} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{n-1}{\tau} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{n-1}{\tau} & -\theta \end{pmatrix}, \quad \theta > 0, \quad \tau > 0, \quad n \gg 1,$$

$$F(t, x) = (g(t, x_n), 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, \quad x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^{\mathrm{T}}.$$

Напомним, что системы вида (1.2) возникают при моделировании многостадийного синтеза вещества [4, 11]. Количество дифференциальных уравнений в (1.2) соответствует числу стадий синтеза, τ — суммарное время протекания стадий из первого состояния в n-е. Компоненты $x_i(t)$ искомой вектор-функции $x(t)$ определяют концентрацию вещества на i-й стадии процесса.

Отметим, что процесс синтеза может иметь очень большое число промежуточных стадий (например, $n \approx 10^{30}$), поэтому при определении концентрации конечного продукта $x_n(t)$ исследователь может столкнуться с *"проблемой большой размерности"*. Как отмечалось в [2, 9, 10], решение этой проблемы было предложено в 2002 г. в результате совместной деятельности биологов и математиков [4, 11]. Метод ее решения основан на доказанных предельных теоремах, устанавливающих связи между решениями системы (1.2) и решениями уравнения с запаздывающим аргументом (1.1). В частности, рассматривая задачу Коши для системы (1.2) в автономном случае с нулевыми начальными данными, в работе [11] была доказана оценка

$$\max_{t \in [0,T]} |x_n(t) - y(t)| \leq \frac{c}{n^{1/4}}, \quad n \geq n_0, \tag{1.3}$$

где $y(t)$ — решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям

$$y(t) \equiv 0, \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad y(\tau + 0) = 0, \tag{1.4}$$

константа $c > 0$ зависит от функции $g(z)$, величины T и параметров τ, θ. Из этого результата вытекает, что, если число стадий n достаточно велико, то для приближенного нахождения концентрации конечного продукта $x_n(t)$ достаточно найти решение $y(t)$ начальной задачи (1.1), (1.4). А неравенство (1.3) будет характеризовать теоретическую оценку точности полученного результата $x_n(n) \approx y(t)$, $n \gg 1$.

В дальнейшем был доказан ряд предельных теорем [2, 3, 5, 6, 7, 8, 12, 14], обобщающих и усиливающих первый результат [11]. Что позволило находить приближенные решения более общих систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности, в частности, существенно нелинейных дифференциальных уравнений (см., например, [2, 12]), а также обосновать эквивалентность двух различных подходов к моделированию многостадийного синтеза вещества, основанных на использовании систем дифференциальных уравнений большой размерности или уравнений с запаздывающим аргументом. На основе доказанных предельных теорем был также предложен новый способ аппроксимации на конечном отрезке $[0, T]$ решений уравнения с запаздывающим аргументом (1.1) [7].

В настоящей работе мы дадим аналогичный способ аппроксимации решений уравнения (1.1) на всей полуоси $(0, \infty)$. Как и ранее, будем предполагать, что нелинейная функция $g(t, z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу

$$|g(t,z)| \leq G < \infty, \quad |g(t,z^1) - g(t,z^2)| \leq L|z^1 - z^2|, \quad t \geq 0, \quad z^1, z^2 \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Однако в отличие от [7] дополнительно потребуем, чтобы

$$g(t, 0) \equiv 0, \quad 0 < L < \theta. \tag{1.6}$$

Именно при таких дополнительных условиях нам впервые удалось доказать предельные теоремы в пространстве Лебега $L_1(0, \infty)$ (см. [9]). В работе [10] доказаны глобальные предельные теоремы в пространстве $L_2(0, \infty)$. В работах [9, 10], как и на конечном отрезке $[0, T]$, установлены аналогичные связи между решениями системы уравнений большой размерности (1.2) и уравнения с запаздывающим аргументом (1.1) при всех достаточно больших $n \gg 1$ на всей полуоси $(0, \infty)$.

Глобальные предельные теоремы в формулировке [10] позволят нам доказать обратную глобальную предельную теорему, являющуюся аналогом теоремы из [7], которая дает способ аппроксимации решений уравнения (1.1) решениями системы (1.2) при $n \gg 1$ на всей полуоси $(0, \infty)$.

2. Предварительные сведения

В этом параграфе мы приведем формулировки некоторых предельных теорем, полученных в работах [9, 10], которые мы будем использовать при доказательстве основного результата.

Отметим, что из условий на функцию $g(t, z)$ следует, что задача Коши для системы (1.2) однозначно разрешима, при этом решение существует на всей полуоси $[0, \infty)$. Более того, как показано в работе [9], нулевое решение системы (1.2) асимптотически устойчиво. Приведем соответствующую формулировку теоремы, при этом в дальнейшем, чтобы подчеркивать размерность системы (1.2), для ее решения будем использовать обозначение

$$x^n(t) = (x_1^n(t), x_2^n(t), \ldots, x_n^n(t))^{\mathrm{T}}.$$

(Верхний индекс соответствует числу уравнений в системе, нижний — номеру компоненты решения).

Теорема 1. *Пусть функция $g(t,z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$ удовлетворяет условиям (1.5), (1.6). Тогда нулевое решение системы (1.2) асимптотически устойчиво. Более того, для решения задачи Коши для этой системы с начальными данными $x|_{t=0} = x^{n,0}$ при всех достаточно больших $n \gg 1$ имеют место следующие оценки*

$$|x_j^n(t)| \le c\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k^{n,0}|\right) e^{-\delta t}, \quad j = 1, \dots, n,$$

где

$$\delta = \min\left\{\frac{\theta - L}{2}, \frac{1}{\tau}\ln\frac{\theta + L}{2L}\right\},$$

и константа c не зависит от $n > n_0$.

Рассмотрим последовательность задач Коши для систем вида (1.2)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A_n x + F(t,x), \quad t > 0, \\ x|_{t=0} = x^{n,0}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Увеличивая неограниченно число уравнений в (2.1) и рассматривая только последнюю компоненту решения каждой из задач Коши, получаем последовательность функций $\{x_n^n(t)\}$. Сейчас мы приведем некоторые глобальные предельные теоремы для этой последовательности, доказанные в [9, 10].

Рассмотрим последовательность задач Коши вида (2.1), предполагая, что начальные векторы имеют вид

$$x^{n,0} = (0, \dots, 0, a)^{\mathrm{T}}, \quad |a| \ge 0. \tag{2.2}$$

В работе [9] была доказана следующая глобальная предельная теорема.

Теорема 2. *Пусть функция $g(t,z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$ удовлетворяет условиям (1.5), (1.6), и начальные данные имеют вид (2.2). Тогда последовательность $\{x_n^n(t)\}$ равномерно сходится на любом отрезке $[0,T]$:*

$$x_n^n(t) \to y(t), \quad n \to \infty.$$

Предельная функция $y(t)$ является решением следующей начальной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = ae^{-\theta t}, \quad t \in [0,\tau], \\ y(\tau + 0) = ae^{-\theta\tau}, \end{cases} \tag{2.3}$$

при этом существует $n_0 = n_0(\theta, \tau, L)$ такое, что при $n > n_0$ имеет место оценка

$$\sup_{t\in[0,\infty)} |x_n^n(t) - y(t)| \leq \frac{c|a|}{\sqrt{n}},$$

где константа $c > 0$ не зависит от n.

В работе [10] был доказан аналог теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для последовательности $\{x_n^n(t)\}$ имеет место сходимость к решению задачи (2.3)*

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_2(0, \infty)\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

при этом существует $n_1 = n_1(\theta, \tau, L)$ такое, что при $n > n_1$ имеет место оценка

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_2(0, \infty)\| \leq \frac{c|a|}{\sqrt{n}},$$

где константа $c > 0$ не зависит от n.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда решение начальной задачи (2.3) принадлежит соболевскому пространству $W_2^1(\tau, \infty)$.*

Рассмотрим последовательность задач Коши вида (2.1), предполагая, что $n = 2l + 1$ и вектор начальных данных имеет вид

$$x^{n,0} = (x_1^{n,0}, \ldots, x_n^{n,0})^{\mathrm{T}}, \quad x_{l+1}^{n,0} = a, \quad x_j^{n,0} = 0 \ \text{ при } \ j \neq l + 1. \tag{2.4}$$

Как мы знаем [7], при таких начальных условиях на любом конечном интервале $(0, T)$ последовательность $\{x_n^n(t)\}$ сходится в $L_p(0, T)$, $1 \leq p < \infty$:

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_p(0, T)\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

при этом предельная функция $y(t) \in W_p^1(\tau, T)$ является обобщенным решением начальной задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), & t > \tau, \\ y(t) = 0, & t \in [0, \tau/2), \\ y(t) = ae^{-\theta(t-\tau/2)}, & t \in (\tau/2, \tau], \\ y(\tau + 0) = ae^{-\theta\tau/2}. \end{cases} \tag{2.5}$$

В работе [10] были доказаны аналоги этого результата в пространстве $L_2(0, \infty)$.

Теорема 4. *Пусть функция* $g(t,z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$ *удовлетворяет условиям (1.5), (1.6), и начальные данные имеют вид (2.4). Тогда обобщенное решение* $y(t)$ *начальной задачи (2.5) принадлежит соболевскому пространству* $W_2^1(\tau,\infty)$*, и выполняются оценки*

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_2(0,\infty)\| \le \frac{c|a|}{n^{1/6}}, \quad n = 2l+1 > n_0(\theta,\tau,L),$$

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_2(\tau+\varepsilon,\infty)\| \le \frac{c(\varepsilon)|a|}{\sqrt{n}}, \quad \varepsilon > 0, \quad n = 2l+1 > n_0(\theta,\tau,L),$$

где константы $c, c(\varepsilon) > 0$ *не зависят от* n.

Теорема 5. *Пусть функция* $g(t,z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$ *удовлетворяет условиям (1.5), (1.6),* $n = ml+1$, $0 \le s < m$ *— целое и начальные условия в (2.1) имеют вид*

$$x^{n,0} = (x_1^{n,0}, \dots, x_n^{n,0})^{\mathrm{T}}, \quad x_{sl+1}^{n,0} = a, \quad x_j^{n,0} = 0 \text{ при } j \ne sl+1.$$

Тогда последовательность $\{x_n^n(t)\}$ *сходится в* $L_2(0,\infty)$. *Предельная функция* $y(t)$ *принадлежит соболевскому пространству* $W_2^1(\tau,\infty)$ *и является обобщенным решением начальной задачи*

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = 0, \quad t \in \left[0, \frac{m-s}{m}\tau\right), \\ y(t) = ae^{-\theta\left(t - \frac{m-s}{m}\tau\right)}, \quad t \in \left(\frac{m-s}{m}\tau, \tau\right], \\ y(\tau+0) = ae^{-\theta\frac{s}{m}\tau}. \end{cases}$$

Теорема 6. *Пусть функция* $g(t,z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$ *удовлетворяет условиям (1.5), (1.6),* $i \in \mathbb{N}$ *— фиксировано и начальные данные в задаче Коши (2.1) имеют вид*

$$x^{n,0} = (a_1, \dots, a_i, 0, \dots, 0)^{\mathrm{T}}.$$

Тогда последовательность $\{x_n^n(t)\}$ *сходится в* $L_2(0,\infty)$. *Предельная функция* $y(t)$ *принадлежит соболевскому пространству* $W_2^1(\tau,\infty)$ *и является обобщенным решением начальной задачи*

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = 0, \quad t \in [0,\tau), \\ y(\tau+0) = a_1 + \dots + a_i. \end{cases}$$

Используя теоремы 3–6, можно доказать аналогичные глобальные предельные теоремы в пространстве $L_2(0,\infty)$ в случае, когда предельная функция $y(t)$ будет обобщенным решением начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = e^{-\theta t}\varphi_{m,k}(t/\tau), \quad t \in [0,\tau), \\ y(\tau+0) = a, \end{cases} \tag{2.6}$$

где $\varphi_{m,k}(s)$ — функции Хаара

$$\varphi_{m,k}(s) = \begin{cases} 2^{m/2}, & s \in [(k-1)2^{-m}, (k-1/2)2^{-m}), \\ -2^{m/2}, & s \in [(k-1/2)2^{-m}, k2^{-m}), \\ 0, & s \notin [(k-1)2^{-m}, k2^{-m}), \end{cases}$$

$$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k = 1, 2, \ldots, 2^m.$$

Сформулируем предельную теорему [10], положив для определенности $m = 1$, $k = 1$.

Теорема 7. *Пусть функция $g(t,z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$ удовлетворяет условиям (1.5), (1.6), $n = 4l+1$, компоненты начального вектора $x^{n,0} = (x_1^{n,0}, \ldots, x_n^{n,0})^{\mathrm{T}}$ в задаче Коши (2.1) имеют вид*

$$x_1^{n,0} = ae^{-\theta\tau}, \qquad x_{2l+1}^{n,0} = \sqrt{2}e^{-\theta\tau/2},$$

$$x_{3l+1}^{n,0} = -2\sqrt{2}e^{-\theta\tau/4}, \qquad x_{4l+1}^{n,0} = \sqrt{2},$$

остальные компоненты равны нулю. Тогда последовательность $\{x_n^n(t)\}$ сходится в $L_2(0,\infty)$, предельная функция $y(t)$ принадлежит пространству $W_2^1(\tau,\infty)$ и является обобщенным решением задачи (2.6), где $m = k = 1$.

Приведем теперь формулировку глобальной предельной теоремы в пространстве $L_2(0,\infty)$ с указанием скорости сходимости.

Теорема 8. *Пусть функция $g(t,z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$ удовлетворяет условиям (1.5), (1.6), и последовательность начальных векторов $\{x^{n,0}\}$ в (2.1) такая, что последовательность $\{x_n^n(t)\}$ сходится в пространстве $L_2(0,\infty)$ к обобщенному решению $y(t) \in W_2^1(\tau,\infty)$ начальной задачи*

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = \varphi(t), \quad 0 \le t \le \tau, \\ y(\tau+0) = a, \end{cases} \tag{2.7}$$

с некоторой кусочно-непрерывной функцией $\varphi(t)$, имеющей разрывы первого рода. Тогда существует $n_0 = n_0(\theta,\tau,L)$ такое, что при $n > n_0$ справедлива оценка

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_2(0,\infty)\| \le \frac{c\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k^{n,0}|}{n^{1/6}},$$

где константа $c > 0$ не зависит от n и начального вектора $x^{n,0}$.

3. Непрерывная зависимость решений начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом

В этом параграфе мы будем рассматривать начальную задачу (2.7) для дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом, предполагая, что начальная функция $\varphi(t)$ кусочно-непрерывна на $[0,\tau]$ и имеет конечное число точек разрыва $\{t_j\}$ первого рода

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = \tau.$$

Используя метод шагов (см., например, [13]), можно показать, что при этих условиях на любом отрезке $[\tau, T]$, $T > 2\tau$ задача (2.7) имеет единственное кусочно-гладкое решение

$$y(t) \in C[\tau, T] \bigcap_{j=0}^{k-1} C^1(\tau + t_j, \tau + t_{j+1}) \cap C^1(2\tau, T].$$

Ясно, что $y(t)$ принадлежит соболевскому пространству $W_p^1(\tau, T)$, $p \geq 1$. В следующей теореме мы докажем непрерывную зависимость решения задачи (2.7) от начальных условий.

Теорема 9. *Пусть функция $g(t,z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$ удовлетворяет условиям (1.5), (1.6). Предположим, что $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — кусочно-непрерывные функции на отрезке $[0,\tau]$ с конечным числом точек разрыва, причем все разрывы первого рода. Тогда для обобщенных решений $y_1(t)$, $y_2(t)$ начальных задач*

$$\begin{cases} \dfrac{dy_j(t)}{dt} = -\theta y_j(t) + g(t-\tau, y_j(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y_j(t) = \varphi_j(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \\ y_j(\tau + 0) = a_j, \end{cases}$$

где $j = 1, 2$, имеет место оценка

$$\|y_1(t) - y_2(t), W_p^1(\tau, \infty)\| \leq c\big(|a_1 - a_2| + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t), L_p(0,\tau)\|\big), \quad 1 < p < \infty, \tag{3.1}$$

где $c > 0$ — константа, не зависящая от начальных данных $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и a_1, a_2.

Доказательство. По определению нормы в пространстве Соболева W_p^1, имеем

$$\|y_1(t) - y_2(t), W_p^1(\tau, T)\| = \|y_1(t) - y_2(t), L_p(\tau, T)\| + \|D_t y_1(t) - D_t y_2(t), L_p(\tau, T)\|.$$

Учитывая, что $y_1(t)$, $y_2(t)$ являются обобщенными решениями начальных задач вида (2.7), получаем

$$\|y_1(t) - y_2(t), W_p^1(\tau, T)\| \leq (1 + \theta)\|y_1(t) - y_2(t), L_p(\tau, T)\|$$

$$+\|g(t-\tau, y_1(t-\tau)) - g(t-\tau, y_2(t-\tau)), L_p(\tau, T)\|.$$

Так как функция $g(t,z)$ удовлетворяет условию Липшица, то будем иметь

$$\|y_1(t) - y_2(t), W_p^1(\tau, T)\|$$

$$\leq (1+\theta)\|y_1(t) - y_2(t), L_p(\tau, T)\| + L\|y_1(t-\tau) - y_2(t-\tau), L_p(\tau, T)\|$$
$$= (1+\theta)\|y_1(t) - y_2(t), L_p(\tau, T)\| + L\|y_1(t) - y_2(t), L_p(0, T-\tau)\|.$$

А поскольку на начальном отрезке $[0,\tau]$ функции $y_1(t)$, $y_2(t)$ принимают значения $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ соответственно, то

$$\|y_1(t) - y_2(t), W_p^1(\tau, T)\|$$

$$\leq L\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t), L_p(0,\tau)\| + (1+\theta+L)\|y_1(t) - y_2(t), L_p(\tau, T)\|. \qquad (3.2)$$

Оценим теперь L_p-норму разности решений.

Учитывая, что для решения задачи (2.7) справедливо соотношение

$$y(t) = ae^{-\theta(t-\tau)} + \int_0^{t-\tau} e^{-\theta(t-\tau-s)} g(s, y(s))ds, \quad t > \tau,$$

имеем

$$y_1(t) - y_2(t) = (a_1 - a_2)e^{-\theta(t-\tau)} + \int_0^{t-\tau} e^{-\theta(t-\tau-s)} (g(s, y_1(s)) - g(s, y_2(s)))\, ds.$$

Тогда

$$\|y_1(t) - y_2(t), L_p(\tau, T)\| \leq |a_1 - a_2|\|e^{-\theta(t-\tau)}, L_p(\tau, T)\|$$
$$+\left\| \int_0^{t-\tau} e^{-\theta(t-s-\tau)} |g(s, y_1(s)) - g(s, y_2(s))| ds, L_p(\tau, T) \right\|.$$

Используя неравенство Юнга и то, что функция $g(t,z)$ удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу, получаем

$$\|y_1(t) - y_2(t), L_p(\tau, T)\| \leq \frac{|a_1 - a_2|}{(p\theta)^{1/p}} + L\int_0^{\infty} e^{-\theta t} dt \|y_1(s) - y_2(s), L_p(0, T)\|$$

$$= \frac{|a_1 - a_2|}{(p\theta)^{1/p}} + \frac{L}{\theta}\|y_1(s) - y_2(s), L_p(0, T)\|.$$

В силу условий теоремы разность $1 - L/\theta$ положительна, следовательно

$$\|y_1(t) - y_2(t), L_p(\tau, T)\|$$

$$\leq (\theta - L)^{-1} \left(\theta \frac{|a_1 - a_2|}{(p\theta)^{1/p}} + L \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s), L_p(0,\tau)\| \right).$$

Тогда, учитывая (3.2), получаем

$$\|y_1(t) - y_2(t), W_p^1(\tau, T)\| \leq \frac{\theta^{1-1/p}(1 + \theta + L)}{(\theta - L)p^{1/p}} |a_1 - a_2|$$

$$+ \frac{L(1 + 2\theta)}{\theta - L} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t), L_p(0,\tau)\|. \tag{3.3}$$

Так как правая часть неравенства не зависит от T, то в оценке (3.3) можно перейти к пределу при $T \to \infty$. Отсюда следует оценка (3.1) с константой

$$c = \max \left\{ \frac{\theta^{1-1/p}(1 + \theta + L)}{(\theta - L)p^{1/p}}, \frac{L(1 + 2\theta)}{\theta - L} \right\}.$$

Теорема доказана. □

Замечание. По теореме вложения пространство Соболева $W_p^1(\tau, \infty)$ вложено в пространство непрерывных функций $C[\tau, \infty)$, убывающих на бесконечности. Таким образом, из оценки (3.1) следует, что выполнено неравенство

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq \hat{c}(|a_1 - a_2| + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t), L_p(0,\tau)\|), \quad t \geq \tau,$$

где константа $\hat{c} > 0$ не зависит от $y_j(t)$, $\varphi_j(t)$, a_j, $j = 1, 2$, при этом

$$|y_1(t) - y_2(t)| \to 0, \quad t \to \infty.$$

4. Обратная предельная теорема на полуоси

В этом параграфе мы докажем, что решение задачи (2.7) для любой кусочно-непрерывной начальной функции $\varphi(t)$ с конечным числом точек разрыва первого рода можно сколь угодно точно аппроксимировать последовательностью $\{x_n^n(t)\}$, полученной в результате специального выбора начальных данных в серии задач Коши вида (2.1) для систем дифференциальных уравнений большой размерности.

Для этого мы будем использовать функции Хаара $\varphi_{m,k}(s)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k = 1, 2, \ldots, 2^m$. Напомним, что набор функций $\{\varphi_{m,k}(s)\} \cup \{1\}$ образует ортонормированный базис в пространстве $L_2(0,1)$ (см., например, [1]).

Опираясь на предельные теоремы из [7, 9, 10], приведенные в параграфе 2, и свойства функций Хаара, мы докажем следующую теорему.

Теорема 10. *Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (2.7) с кусочно-непрерывной начальной функцией $\varphi(t)$, которая имеет конечное число точек разрыва первого рода. Тогда функция $y(t)$ может быть сколь угодно точно аппроксимирована решениями задачи Коши вида (2.1) при $n \gg 1$.*

Доказательство. Поскольку начальная функция $\varphi(t)$ принадлежит $L_2(0,\tau)$, то используя функции Хаара $\{\varphi_{m,k}(s)\}$, представим ее в виде

$$\varphi(t) = e^{-\theta t} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^m} c_{m,k} \varphi_{m,k}(t/\tau) + c_0 e^{-\theta t},$$

$$c_{m,k} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau e^{\theta s} \varphi_{m,k}(s/\tau) \varphi(s) ds, \qquad c_0 = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau e^{\theta s} \varphi(s) ds. \tag{4.1}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi_M(t) = e^{-\theta t} \sum_{m=0}^{M} \sum_{k=1}^{2^m} c_{m,k} \varphi_{m,k}(t/\tau) + c_0 e^{-\theta t},$$

с коэффициентами, определенными в (4.1). Пусть $y_M(t)$ — обобщенное решение начальной задачи вида (2.7)

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = \varphi_M(t), \quad 0 \le t \le \tau, \\ y(\tau + 0) = a. \end{cases} \tag{4.2}$$

В силу определения функции $\varphi_M(t)$ и базисности набора функций $\{\varphi_{m,k}(s)\} \cup \{1\}$ в $L_2(0,1)$, очевидно, имеем

$$\|\varphi(t) - \varphi_M(t), L_2(0,\tau)\| \to 0, \quad M \to \infty.$$

Поэтому, учитывая однозначную разрешимость начальной задачи вида (2.7) для уравнения с запаздывающим аргументом и используя теорему 9, получаем сходимость

$$\|y(t) - y_M(t), W_2^1(\tau,\infty)\| \to 0, \quad M \to \infty.$$

В силу сказанного выше для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое M_ε, что для решения $y_{M_\varepsilon}(t)$ начальной задачи (4.2) при $M = M_\varepsilon$ и решения $y(t)$ задачи (2.7) выполнена оценка

$$\|y(t) - y_{M_\varepsilon}(t), W_2^1(\tau,\infty)\| < \varepsilon/2.$$

Учитывая предельные теоремы 3–8, аналогичным образом можно показать, что найдутся такое число n_ε и такой начальный вектор в задаче Коши (2.1), что

$$\|x_{n_\varepsilon}^{n_\varepsilon}(t) - y_{M_\varepsilon}(t), W_2^1(\tau,\infty)\| < \varepsilon/2,$$

где $x_{n_\varepsilon}^{n_\varepsilon}(t)$ — последняя компонента решения задачи Коши (2.1) при $n = n_\varepsilon$.

Из этих оценок, очевидно, имеем

$$\|y(t) - x_{n_\varepsilon}^{n_\varepsilon}(t), W_2^1(\tau,\infty)\| \leq \|y(t) - y_{M_\varepsilon}(t), W_2^1(\tau,\infty)\|$$

$$+\|x_{n_\varepsilon}^{n_\varepsilon}(t) - y_{M_\varepsilon}(t), W_2^1(\tau,\infty)\| < \varepsilon.$$

Отсюда по теореме вложения соболевского пространства $W_2^1(\tau,\infty)$ в $C[\tau,\infty)$ вытекает неравенство

$$|y(t) - x_{n_\varepsilon}^{n_\varepsilon}(t)| < c\varepsilon, \quad t \geq \tau,$$

где константа $c > 0$ не зависит от ε.

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ любое решение дифференциального уравнения с параметром запаздывания $\tau > 0$, совпадающее на отрезке $[0,\tau]$ с кусочно-непрерывной функцией, может быть сколь угодно точно аппроксимировано решениями задачи Коши вида (2.1) при $n \gg 1$.

Теорема доказана. □

Список цитируемых источников

1. *Блаттер К.* Вейвлет-анализ. Основы теории. — Пер. с нем. — М.: Техносфера, 2004.

   Blatter C. (1998). Wavelets. A primer. Transl. from the German. Natick, MA: A K Peters.

2. *Демиденко Г. В.* О классах систем дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнениях с запаздывающим аргументом // Итоги науки. Юг России. Сер.: Математический форум. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. — Т. 5. — С. 45–56.

   Demidenko G. V. (2011). On classes of systems of differential equations of a higher dimension and delay equations. Itogi Nauki. Yug Rossii. Ser. Mat. Forum. Vladikavkaz: YuMI VNTs RAN i RSO-A, 5, 45–56. (in Russian)

3. *Демиденко Г. В.* Системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. — 2012. — Т. 53, № 6. — С. 1274–1282.

   Demidenko G. V. (2012). Systems of differential equations of higher dimension and delay equations. Sib. Math. J., 53, No. 6, 1021–1028.

4. *Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И.* Математическое моделирование регуляторных контуров генных сетей // Журн. выч. матем. матем. физ. — 2004. — Т. 44, № 12. — С. 2276–2295.

   Demidenko G. V., Kolchanov N. A., Likhoshvai' V. A., Matushkin Yu. G., Fadeev S. I. (2004). Mathematical modeling of regular contours of gene networks. Comput. Math. Math. Phys., 44, No. 12, 2166–2183.

5. *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е.* Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. — 2006. — Т. 47, № 1. — С. 58–68.

   Demidenko G. V., Likhoshvai' V. A., Kotova T. V., Khropova Yu. E. (2006). On one class of systems of differential equations and on retarded equations. Sib. Math. J., 47, No. 1, 45–54.

6. *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Мудров А. В.* О связи между решениями дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и бесконечномерных систем дифференциальных уравнений // Дифф. уравн. — 2009. — Т. 45, № 1. — С. 34–46.

   Demidenko G. V., Likhoshvai' V. A., Mudrov A. V. (2009). On the relationship between solutions of delay differential equations and infinite-dimensional systems of differential equations. Diff. Eq., 45, No. 1, 33–45.

7. *Демиденко Г. В., Мельник (Уварова) И. А.* Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. — 2010. — Т. 51, № 3. — С. 528–546.

   Demidenko G. V., Mel'nik (Uvarova) I. A. (2010). On a method of approximation of solutions to delay differential equations. Sib. Math. J., 51, No. 3, 419–434.

8. *Демиденко Г. В., Уварова И. А.* Класс систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности // Сиб. журн. индустр. мат. — 2016. — Т. 19, № 2. — С. 47–60.

   Demidenko G. V., Uvarova I. A. (2016). A class of systems of ordinary differential equations of large dimension. J. Appl. Ind. Math., 10, No. 2, 179–191.

9. *Демиденко Г. В., Уварова И. А.* Предельные теоремы для одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом // Динамические системы. — 2018. — Т. 8(36), № 3. — С. 205–234.

   Demidenko G. V., Uvarova I. A. (2018). Limit theorems for one system of ordinary differential equations of high dimension and delay differential equations. Dinamicheskie Sistemy, 8(36), No. 3, 205–234. (in Russian)

10. *Демиденко Г. В., Уварова И. А., Хазова Ю. А.* Об одной системе обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнении с запаздывающим аргументом // Сиб. журн. индустр. мат. — 2019. — Т. 22, № 3. — С. 59–73.

    Demidenko G. V., Uvarova I. A., Khazova Yu. A. (2019). On one system of ordinary differential equations of large dimension and a delay equation. J. Appl. Ind. Math., 13, No. 3, 447–459.

11. *Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г.* Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // Сиб. журн. индустр. мат. — 2004. — Т. 7, № 1. — С. 73–94.

    Likhoshvai' V. A., Fadeev S. I., Demidenko G. V., Matushkin Yu. G. (2004). Modeling multistage synthesis without branching by a delay equation. Sibirsk. Zh. Industr. Mat., 7, No. 1, 73–94. (in Russian)

12. *Матвеева И. И., Мельник (Уварова) И. А.* О свойствах решений одного класса нелинейных систем дифференциальных уравнений большой размерности // Сиб. мат. журн. — 2012. — Т. 53, № 2. — С. 312–324.

    Matveeva I. I., Mel'nik (Uvarova) I. A. (2012). On the properties of solutions to a class of nonlinear systems of differential equations of large dimension. Sib. Math. J., 53, No. 2, 248–258.

13. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972.

Myshkis A. D. (1972). Linear differential equations with retarded argument. Moscow: Nauka. (in Russian)

14. *Demidenko G. V., Kotova T. V.* (2010). Limit properties of solutions to one class of systems of differential equations with parameters. J. Anal. Appl., 8, No. 2, 63–74.

Получена 02.03.2020

Динамические системы, 2020, том 10(38), №1, 51–69

УДК 517.929

Об экспоненциальной устойчивости уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами[1]

В. В. Малыгина, А. С. Баландин

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь 614990. *E-mail: mavera@list.ru, balandin-anton@yandex.ru*

Аннотация. Исследуется устойчивость линейных уравнений нейтрального типа с постоянными запаздываниями и периодическими коэффициентами. Установлено, что для таких уравнений экспоненциальная устойчивость эквивалентна наличию экспоненциальной оценки функции Коши. Показано, что поведение решений исходного уравнения асимптотически эквивалентно поведению решений некоторого автономного уравнения, допускающего конструктивное построение. На основе известных признаков экспоненциальной устойчивости для автономных уравнений получены новые признаки экспоненциальной устойчивости для исходного уравнения.

Ключевые слова: уравнения нейтрального типа, функция Коши, экспоненциальная устойчивость.

On exponential stability of equations of neutral type with periodic coefficients

V. V. Malygina, A. S. Balandin

Perm National Research Polytechnic University, Perm 614990.

Abstract. We investigate stability of linear neutral equations with constant delays and periodic coefficients. On the basis of the integral representation of a solution, we deduce the problem of stability to the study of asymptotic behavior of the fundamental solution and the Cauchy function. For equations of the mentioned above form we find a formula connecting the fundamental solution and the Cauchy function and show that the exponential stability is equivalent to the existence of an exponential estimate for the Cauchy function. We also show that one may establish a correspondence between the original equation and an autonomous equation with coefficients formed by averaging over the length of the period, where the autonomous equation is exponentially stable if and only if the original equation is exponentially stable. Based on known conditions of exponential stability for autonomous equations, we obtain new effective sufficient conditions of exponential stability for equations with periodic coefficients.

Keywords: equations of neutral type, Cauchy function, exponential stability.

MSC 2010: 34K20, 34K40

---

[1]Работа выполнена в рамках госзадания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (задание FSNM-2020-0028) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00928).

Введение

Среди функционально-дифференциальных уравнений наиболее востребованными (и потому наиболее изученными) являются автономные уравнения, т. е. такие, решения которых инвариантны относительно сдвига начальной точки. Для этих уравнений известно максимальное число признаков устойчивости, сформулированных как в аналитической, так и в геометрической форме — в виде областей устойчивости в пространстве параметров.

С учетом этого представляется полезным выделение различных классов неавтономных уравнений, которые допускают сведение к автономным.

В настоящей статье рассмотрен класс дифференциально-разностных уравнений с периодическими коэффициентами, асимптотически эквивалентных автономным, к исследованию которых удалось эффективно применить уже известные результаты.

Впервые возможность сведения уравнений с периодическими коэффициентами к автономным была отмечена А. М. Зверкиным в «Дополнении» к монографии [8] (с. 498–512), где было показано, что исследование асимптотической устойчивости уравнения

$$\dot{x}(t) + \sum_{j=0}^{J} b_j(t)x(t-jh) = 0\,, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

с непрерывными h-периодическими коэффициентами b_j можно заменить исследованием автономного уравнения

$$\dot{x}(t) + \sum_{j=0}^{J} B_j x(t-jh) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где $B_j = \frac{1}{h}\int_0^h b_j(t)dt$. В частности, справедлив следующий результат [8, с. 505].

Теорема. *Уравнение* (1) *асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда асимптотически устойчиво уравнение* (2).

Заметим, что асимптотическая устойчивость здесь совпадает с экспоненциальной, поскольку (1) и (2) — уравнения запаздывающего типа.

1. Постановка задачи

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

На измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}_+$ определим $L_p(E)$ — пространства функций, суммируемых со степенью p $(1 \leqslant p < \infty)$, и $L_\infty(E)$ — пространство измеримых и ограниченных в существенном на E функций с естественными нормами.

Символом I будем обозначать единичный (тождественный) оператор, символом Θ — нулевой оператор. Через Δ обозначим множество $\Delta = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : t \geqslant s\}$.

Основным объектом изучения в данной работе является уравнение нейтрального типа

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - \sum\limits_{k=1}^{K} a_k \dot{x}(t-kh) = \sum\limits_{j=0}^{J} b_j(t) x(t-jh) + f(t), & t \geqslant s, \\ x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \dot{x}(\xi) = \psi(\xi), & \xi < s, \end{cases} \tag{3}$$

где $s \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $a_k \in \mathbb{R}$, b_j — суммируемые периодические функции с периодом h, f — локально суммируемая функция. Для корректной постановки задачи функцию x и ее производную $\dot{x}$ необходимо доопределить при отрицательных значениях аргумента начальными функциями $\varphi \in L_\infty[s-\omega, s]$, $\psi \in L_1[s-\omega, s]$, где $\omega = \max\{Kh, Jh\}$.

История построения теории функционально-дифференциальных уравнений наглядно показывает, что выбор пространства начальных функций — отдельная задача, которая допускает множество подходов. Начнем с постановки, которая принята в научной школе Н. В. Азбелева [1].

Обозначим через S_h оператор сдвига, действующий в пространстве непрерывных (кусочно-непрерывных, суммируемых) функций:

$$(S_h y)(t) = \begin{cases} y(t-h), & t-h \geqslant s, \\ 0, & t-h < s, \end{cases}$$

введем операторы $(Sy)(t) = \sum\limits_{k=1}^{K} a_k (S_h^k y)(t)$, $(Ty)(t) = \sum\limits_{j=0}^{J} b_j(t)(S_h^j y)(t)$ и рассмотрим уравнение

$$(I - S)\dot{x} = Tx + f, \quad t \geqslant s. \tag{4}$$

Заметим, что в такой постановке задачи не требуется доопределять решение для $t < s$.

Как известно ([1], с. 84, теорема 1.1), уравнение (4) с заданными начальными условиями однозначно разрешимо в классе локально абсолютно непрерывных функций и его решение представимо в виде:

$$x(t) = X(t,s)x(s) + \int_s^t Y(t,\tau) f(\tau)\, d\tau, \tag{5}$$

где X — фундаментальное решение, Y — функция Коши. Далее всюду полагаем, что $X(t,s) = Y(t,s) = 0$ при $t < s$. Функции X и Y описывают любое решение уравнения (4), а исследование задач устойчивости сводится к исследованию их асимптотического поведения.

2. Фундаментальное решение

Отметим ряд простых, но важных свойств фундаментального решения X. Из формулы (5) следует, что при любом фиксированном s функция $X(t,s)$ является локально абсолютно непрерывной по t и определяется как решение соответствующего (4) однородного уравнения с заданным начальным условием:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X(t,s)}{\partial t} - \displaystyle\sum_{k=0}^{K} a_k \dfrac{\partial X(t-kh,s)}{\partial t} = \displaystyle\sum_{j=0}^{J} b_j(t) X(t-jh,s), \quad t \geqslant s, \\ X(s,s)=1. \end{cases} \tag{6}$$

Первое свойство фундаментального решения, которое мы установим, показывает, что при увеличении разности аргументов функция X не может расти быстрее экспоненты. Для этого понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть $b = b(\tau)$ — неотрицательная, суммируемая на отрезке $[s,t]$ функция. Тогда* $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \int_s^t b(\tau)e^{-\alpha(t-\tau)}\,d\tau = 0.$

Доказательство. Обозначим $E_n = \{\tau \in [s,t] \colon b(\tau) \geqslant n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что множество E_n измеримо и

$$\mu E_n \leqslant \tfrac{1}{n} \int_{E_n} b(\tau)\,d\tau \leqslant \tfrac{1}{n} \int_s^t b(\tau)\,d\tau \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Не нарушая общности, можно считать, что $\alpha > 0$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега найдется такое N, что $\int_{E_N} b(\tau)e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau \leqslant \int_{E_N} b(\tau)d\tau < \varepsilon/2$. С другой стороны,

$$\int_{[s,t]\setminus E_N} b(\tau)e^{-\alpha(t-\tau)}\,d\tau \leqslant N \int_s^t e^{-\alpha(t-\tau)}\,d\tau = \frac{N}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha(t-s)}\right) < \frac{N}{\alpha},$$

следовательно, при $\alpha > 2N/\varepsilon$ имеем $\int_s^t b(\tau)e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau < \varepsilon$. □

Пусть $P_\alpha[s,s+l]$ — пространство кусочно-непрерывных на $[s,s+l]$ функций, имеющих разрывы разве лишь в точках, кратных h, с весовой нормой $\|y\|_\alpha = \sup\limits_{t\in[s,s+l]} |y(t)|e^{-\alpha(t-s)}$. Несложно убедиться, что пространство $P_\alpha[s,s+l]$ является банаховым.

Заметим, что операторы S_h и S переводят пространство $P_\alpha[s,s+l]$ в себя, а поскольку $\|S_h y\|_\alpha \leqslant e^{-\alpha h}\|y\|_\alpha$, то $\|S_h\|_\alpha \leqslant e^{-\alpha h}$, следовательно, $\|S_h^n\|_\alpha \leqslant e^{-\alpha hn}$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Пусть $A = \sum\limits_{k=1}^{K} |a_k|$. Тогда

$$\|S\|_\alpha = \left\|\sum\nolimits_{k=1}^{K} a_k S_h^k\right\|_\alpha \leqslant \sum\nolimits_{k=1}^{K} |a_k|\,\left\|S_h^k\right\|_\alpha \leqslant \sum\nolimits_{k=1}^{K} |a_k| e^{-\alpha hk} \leqslant Ae^{-\alpha h},$$

следовательно, $\|S^n\|_\alpha \leqslant A^n e^{-\alpha hn}$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$.

Теорема 1. *Существуют такие $\alpha > 0$, $N_1, N_2 > 0$, что при всех $(t,s) \in \Delta$ справедливы оценки $|X(t,s)| \leqslant N_1 e^{\alpha(t-s)}$ и $\int_s^t |\frac{d}{d\tau}X(\tau,s)|d\tau \leqslant N_2 e^{\alpha(t-s)}$.*

Доказательство. Считая, что операторы S и T применяются только к первому аргументу, а второй остается фиксированным, перепишем (6) в виде: $(I-S)\dot{X} = TX$.

Найдем $n \in \mathbb{N}_0$ такое, что $nh \leqslant t-s < (n+1)h$. Тогда $S^{n+1} = \Theta$, а $(I-S)^{-1} = I + S + \ldots + S^n$. Следовательно, $\dot{X}$ можно представить в виде $\dot{X} = (I-S)^{-1}TX = (I+S+\ldots+S^n)TX$.

Заметим, что в силу h-периодичности функций b_j операторы S и T перестановочны: $ST = TS$, значит

$$\dot{X} = T(I+S+\ldots+S^n)X. \tag{7}$$

Интегрируя последнее равенство, получаем $X = 1 + KX$, где оператор K определяется равенством:

$$(Ky)(t) = \int_s^t \sum_{j=0}^{J} b_j(\tau) S_h^j (I+S+\ldots+S^n) y(\tau)\, d\tau.$$

Очевидно, что оператор K действует в пространстве $P_\alpha[s, s+(n+1)h]$ и ограничен. Оценим его норму. По определению нормы в пространстве $P_\alpha[s, s+(n+1)h]$ имеем:

$$\|Ky\|_\alpha = \sup_{t\in[s,s+(n+1)h]} e^{-\alpha(t-s)} \left| \int_s^t \sum_{j=0}^{J} b_j(\tau) S_h^j (I+S+\ldots+S^n) y(\tau)\, d\tau \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t\in[s,s+(n+1)h]} \left(\int_s^t \sum_{j=0}^{J} |b_j(\tau)|\, e^{-\alpha(t-\tau)} \left\| S_h^j (I+S+\ldots+S^n) y \right\|_\alpha d\tau \right) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t\in[s,s+(n+1)h]} \left(\sum_{j=0}^{J} e^{-\alpha hj} \int_s^t |b_j(\tau)|\, e^{-\alpha(t-\tau)}\, d\tau \right) \left(1 + Ae^{-\alpha h} + \ldots + A^n e^{-\alpha hn}\right) \|y\|_\alpha .$$

Подчиним параметр α условию $\left|Ae^{-\alpha h}\right| < 1$. Тогда $1 + Ae^{-\alpha h} + \ldots + A^n e^{-\alpha hn} \leqslant (1 - Ae^{-\alpha h})^{-1}$, а для нормы оператора K получаем оценку

$$\|K\|_\alpha \leqslant \frac{1}{1 - Ae^{-\alpha h}} \left(\sum_{j=0}^{J} e^{-\alpha hj} \max_{t\in[s,s+(n+1)h]} \int_s^t |b_j(\tau)| e^{-\alpha(t-\tau)}\, d\tau \right).$$

Применяя лемму 1, заключаем, что $\|K\|_\alpha \underset{\alpha\to+\infty}{\to} 0$, следовательно, для некоторого $\alpha > 0$ выполнено неравенство $\|K\|_\alpha < 1$. В силу принципа сжимающих отображений [9, с. 230] уравнение $X = 1 + KX$ имеет в пространстве $P_\alpha[s, s+(n+1)h]$ единственное решение $X \in P_\alpha[s, s+(n+1)h]$, т. е. $|X(t,s)|e^{-\alpha(t-s)} \leqslant N_1$. Первое утверждение теоремы доказано.

Чтобы доказать второе утверждение, вновь используем соотношение (7), а также неравенства, полученные выше при оценке $\|Ky\|_\alpha$, и оценку на фундаментальное решение:

$$\sup_{t\in[s,s+(n+1)h]} e^{-\alpha(t-s)}\int_s^t \left|\frac{d}{d\tau}X(\tau,s)\right| d\tau =$$
$$= \sup_{t\in[s,s+(n+1)h]} e^{-\alpha(t-s)}\int_s^t |T(I+S+\ldots+S^n)X(\tau,s)|\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{1-A\mathrm{e}^{-\alpha h}}\sum_{j=0}^{J}\mathrm{e}^{-\alpha hj}\max_{t\in[s,s+(n+1)h]}\int_s^t |b_j(\tau)|\,\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}\,d\tau\right)\|X\|_\alpha = N_2.$$

□

Обозначим

$$B(r)=\{z\in\mathbb{C}:|z|<r\},\ P_a(z)=\sum_{k=1}^{K}a_kz^k,\ B_j=\frac{1}{h}\int_0^h b_j(t)dt,\ P_b(z)=\sum_{j=0}^{J}B_jz^j,$$
$$G(\zeta+s,z)=\exp\left\{\frac{1}{1-P_a(z)}\sum_{j=0}^{J}\left(\int_s^{\zeta+s}b_j(\tau)\,d\tau\right)z^j\right\},$$

и рассмотрим функцию

$$F(\zeta+s,z)=\frac{G(\zeta+s,z)}{1-z\exp\left\{\frac{hP_b(z)}{1-P_a(z)}\right\}},\quad z\in\mathbb{C},\quad \zeta\in[0,h]. \tag{8}$$

Лемма 2. *Существует непустая окрестность нуля $B(r)\subseteq\mathbb{C}$ такая, что при любом $z\in B(r)$ краевая задача*

$$(1-P_a(z))\frac{\partial F(\zeta+s,z)}{\partial\zeta}=\left(\sum_{j=0}^{J}b_j(\zeta+s)z^j\right)F(\zeta+s,z), \tag{9}$$
$$F(s,z)=zF(h+s,z)+1 \tag{10}$$

имеет единственное решение, определяемое формулой (8).

Доказательство. Выберем круг $B(r_1)\subseteq\mathbb{C}$, в котором $1-P_a(z)\neq 0$. Такой круг найдется, т.к. $P_a(z)$ — многочлен, причем $P_a(0)=0\neq 1$. При любом $z\in B(r_1)$ общее решение уравнения (8) имеет вид

$$F(\zeta+s,z)=C\cdot G(\zeta+s,z), \tag{11}$$

где C — произвольное комплексное число. Покажем, что можно выбрать C, при котором будет выполняться (10). Подставляя (11) в (10), с учетом введенных выше обозначений, получаем:

$$C(1-zG(h+s,z))=1.$$

Так как b_j — периодические функции с периодом h, то $\int_s^{h+s} b_j(\tau)d\tau = \int_0^h b_j(\tau)d\tau$, следовательно,

$$G(h+s,z) = \exp\left\{\frac{1}{1-P_a(z)}\sum_{j=0}^{J}\left(\int_0^h b_j(\tau)\,d\tau\right)z^j\right\} = \\ = \exp\left\{\tfrac{h}{1-P_a(z)}\sum_{j=0}^{J} B_j z^j\right\} = \exp\left\{\tfrac{hP_b(z)}{1-P_a(z)}\right\}.$$

Найдем круг $B(r_2) \subseteq B(r_1)$, в котором $1 - z\exp\left\{\frac{hP_b(z)}{1-P_a(z)}\right\} \neq 0$; такой круг найдется в силу непрерывности, а значит, ограниченности функции $\exp\left\{\frac{hP_b(z)}{1-P_a(z)}\right\}$ на любом замкнутом подмножестве круга $B(r_1)$. При любом $z \in B(r_2)$ константа C однозначно определяется: $C = \left(1 - z\exp\left\{\frac{hP_b(z)}{1-P_a(z)}\right\}\right)^{-1}$. Тем самым доказано, что при всех $z \in B(r_2)$ функция $F(\cdot, z)$, заданная формулой (8), является единственным решением краевой задачи (9)–(10). □

Для любого фиксированного $s \geqslant 0$ представим $t \geqslant s$ в виде $t = nh+\zeta+s$, где $n \in \mathbb{N}_0$, $\zeta \in [0,h)$, и обозначим $x_n(\zeta+s) = X(t,s)$. Любая из функций $x_n(\zeta+s)$ является абсолютно непрерывной по $\zeta \in [0,h]$, а последовательность $x_n(\zeta+s)$ однозначно определяется как решение следующей краевой задачи ($\dot{x}(\zeta+s) = \frac{\partial}{\partial\zeta}x(\zeta+s)$)

$$\begin{cases} \dot{x}_n(\zeta+s) - \sum\limits_{k=0}^{K} a_k \dot{x}_{n-k}(\zeta+s) = \sum\limits_{j=0}^{J} b_j(\zeta+s)x_{n-j}(\zeta+s), & n \in \mathbb{N}_0, \\ x_n(s) = x_{n-1}(h+s), & n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{12}$$

дополненной начальными условиями $x_0(s) = 1$ и $x_n(\zeta+s) = \dot{x}_n(\zeta+s) = 0$, если $n = -1, -2, \ldots$

Отметим, что в силу теоремы 1 при некоторых $N_1, N_2, R > 0$ справедливы оценки $|x_n(\zeta+s)| \leqslant N_1 R^{-n}$ и $\int_0^h |\dot{x}_n(\zeta+s)|d\zeta \leqslant N_2 R^{-n}$.

Построим производящую функцию для последовательности $\{x_n(\zeta+s)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$F_X(\zeta+s,z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(\zeta+s)z^n.$$

Приведенная выше оценка обеспечивает сходимость этого ряда в некоторой ненулевой окрестности нуля при всех $\zeta \in [0,h)$. Обоснуем возможность почленного дифференцирования данного ряда. Для этого докажем еще одно вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Пусть $\alpha_n(t)$, $n \in \mathbb{N}_0$, — абсолютно непрерывные на $[a,b]$ функции, такие, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n(t)$ сходится в каждой точке отрезка $[a,b]$*

и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_a^b|\dot\alpha_n(t)|dt$ *также является сходящимся. Тогда сумма ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n(t)$ *есть абсолютно непрерывная на* $[a,b]$ *функция, ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dot\alpha_n(t)$ *абсолютно сходится п. в. на* $[a,b]$, *а* $\frac{d}{dt}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dot\alpha_n(t)$.

Доказательство. По теореме Леви [9, с.305] имеем:

$$\int_a^b\sum_{n=0}^{\infty}|\dot\alpha_n(t)|\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b|\dot\alpha_n(t)|\,dt<\infty,$$

следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dot\alpha_n(t)$ абсолютно сходится п. в. на $[a,b]$, а его сумма принадлежит $L_1[a,b]$. Обозначим $\sigma(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n(t)$. Тогда

$$\sigma(t)=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\alpha_k(t)=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\left(\alpha_n(a)+\int_a^t\dot\alpha_n(s)ds\right)=$$
$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\alpha_k(a)+\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\int_a^t\dot\alpha_n(s)ds=\sigma(a)+\lim_{m\to\infty}\int_a^t\sum_{n=0}^{m}\dot\alpha_n(s)ds.$$

Легко видеть, что $\left|\sum\limits_{n=0}^{m}\dot\alpha_n(s)\right|\leqslant\sum\limits_{n=0}^{m}|\dot\alpha_n(s)|\leqslant\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\dot\alpha_n(s)|$, следовательно, по теореме Лебега [9, с. 302], возможен предельный переход под знаком интеграла:

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^t\sum_{n=0}^{m}\dot\alpha_n(s)\,ds=\int_a^t\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\dot\alpha_n(s)\,ds=\int_a^t\sum_{n=0}^{\infty}\dot\alpha_n(s)\,ds.$$

Возвращаясь к представлению функции σ, имеем окончательно

$$\sigma(t)=\sigma(a)+\lim_{m\to\infty}\int_a^t\sum_{n=0}^{m}\dot\alpha_n(s)\,ds=\sigma(a)+\int_a^t\sum_{n=0}^{\infty}\dot\alpha_n(s)\,ds.$$

Как было показано выше, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dot\alpha_n(t)\in L_1[a,b]$, следовательно, σ абсолютно непрерывна, а $\frac{d\sigma(t)}{dt}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dot\alpha_n(t)$. □

Следствие 1. *Функция* $F_X(\zeta+s,z)$ *абсолютно непрерывна по* $\zeta\in[0,h]$, *а при всех* $z\in B(R)$ *справедливо равенство* $\frac{\partial}{\partial\zeta}F_X(\zeta+s,z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dot x_n(\zeta+s)z^n$.

Доказательство. Поточечная сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n(\zeta+s)z^n$ отмечалась выше. Из оценки $\int\limits_0^h |\dot{x}_n(\zeta+s)|d\zeta \leqslant N_2R^{-n}$ следует, что при $z \in B(R)$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z|^n \int\limits_0^h |\dot{x}_n(\zeta+s)|d\zeta$ сходится. Утверждение следствия теперь вытекает из леммы 3. $\square$

Теорема 2. *Производящая функция последовательности* $\{x_n(\zeta+s)\}_{n=0}^{\infty}$ *задается равенством* (8), *т. е.* $F_X(\zeta+s,z) = F(\zeta+s,z)$.

Доказательство. Умножая обе части равенств задачи (12) на z^n и суммируя по n, получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dot{x}_n(\zeta+s)z^n - \left(\sum_{k=1}^{K} a_k z^k\right)\sum_{n=0}^{\infty} \dot{x}_n(\zeta+s)z^n = \left(\sum_{j=1}^{J} b_j(\zeta+s)z^k\right)\sum_{n=0}^{\infty} x_n(\zeta+s)z^n,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n(s)z^n = z\sum_{n=0}^{\infty} x_n(h+s)z^n + 1.$$

С учетом введенных выше обозначений и свойств функции F_X, последним двум равенствам можно придать вид:

$$(1-P_a(z))\frac{\partial F_X(\zeta+s,z)}{\partial\zeta} = \left(\sum_{j=0}^{J} b_j(\zeta+s)z^j\right)F_X(\zeta+s,z),$$
$$F_X(s,z) = zF_X(h+s,z)+1.$$

Следовательно, при всех z из некоторой окрестности нуля функция $F_X(\cdot,z)$ является решением задачи (9)–(10). Не нарушая общности, можно считать, что в этой окрестности решение задачи (9)–(10) единственно, а значит, совпадает с функцией F. $\square$

3. Функция Коши

Рассмотрим уравнение

$$Y(t,s) = 1 + \sum_{k=1}^{K} a_k Y(t,s+kh) + \sum_{j=0}^{J} \int_{s+jh}^{t} b_j(\tau)Y(t,\tau)\,d\tau, \quad t \geqslant s. \tag{13}$$

Как показано в [1, с.61], уравнение (13) может быть принято за определение функции Коши уравнения (4).

Лемма 4. *При любых* $(t,s) \in \Delta$ *справедливо равенство* $Y(t+h,s+h) = Y(t,s)$.

Доказательство. Подставляя функцию $Y(t+h, s+h)$ в (13) и используя h-периодичность функций b_j, убеждаемся, что эта функция обращает (13) в тождество. Так как (13) имеет единственное решение, то лемма доказана. □

Замечание. Из леммы 4 следует, что поведение функции Y определяется разностью аргументов $t-s$, если s принимает любые значения с отрезка $[0,h]$. Поэтому далее, не нарушая общности, будем считать, что $s \in [0,h]$.

Следующее утверждение устанавливает простую связь между функцией Коши и фундаментальным решением уравнения (4).

Теорема 3. *При любых $(t,s) \in \Delta$ функция Коши и фундаментальное решение связаны соотношением*

$$Y(t,s) - \sum_{k=1}^{K} a_k Y(t, s+kh) = X(t,s). \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $hn \leqslant t-s < (n+1)h$, $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $S^{n+1} = \Theta$, оператор $I-S$ обратим, причем $(I-S)^{-1} = I + S + S^2 + \ldots + S^n$. На отрезке $[s, s+(n+1)h]$ уравнение (4) можно переписать в эквивалентном виде

$$\dot{x} = (I-S)^{-1}\, Tx + (I-S)^{-1}\, f. \tag{15}$$

Легко видеть, что (15) имеет то же самое фундаментальное решение $X(t,s)$, что и уравнение (4). Так как (15) — уравнение запаздывающего типа, то его решение при $x(s) = 0$ имеет вид

$$x(t) = \int_s^t X(t,\tau)\,(I-S)^{-1}\, f(\tau)\, d\tau = \sum_{i=0}^{n} \int_s^t X(t,\tau) S^i f(\tau)\, d\tau. \tag{16}$$

Обозначим

$$(S_h^* y)(t,s) = \begin{cases} y(t, s+h), & t-h \geqslant s, \\ 0, & t-h < s, \end{cases} \qquad S^* = \sum_{k=1}^{K} a_k S_h^{*k},$$

и заметим, что $(S^*)^{n+1} = \Theta$, а $(I-S^*)^{-1} = I + S^* + S^{*2} + \ldots + S^{*n}$. Далее, имеем:

$$\int_s^t X(t,\tau) S_h f(\tau)\, d\tau = \int_{s+h}^t X(t,\tau) f(\tau-h)\, d\tau =$$
$$= \int_s^{t-h} X(t,\tau+h) f(\tau)\, d\tau = \int_s^t S_h^* X(t,\tau) f(\tau)\, d\tau,$$

$$\int_s^t X(t,\tau) S_h^k f(\tau)\, d\tau = \int_s^t S_h^{*k} X(t,\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

Отсюда следует, что

$$\int_s^t X(t,\tau)Sf(\tau)\,d\tau = \int_{s+h}^t X(t,\tau)\sum_{k=1}^K a_k S_h^k f(\tau)\,d\tau =$$
$$= \int_s^{t-h}\sum_{k=1}^K a_k S_h^{*k} X(t,\tau)f(\tau)\,d\tau = \int_s^t S^* X(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$$\int_s^t X(t,\tau)S^i f(\tau)\,d\tau = \int_s^t S^{*i}X(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$$\sum_{i=0}^n \int_s^t X(t,\tau)S^i f(\tau)\,d\tau = \int_s^t \sum_{i=0}^n S^{*i}X(t,\tau)f(\tau)d\tau = \int_s^t (I-S^*)^{-1}X(t,\tau)f(\tau)\,d\tau.$$

Опираясь на представления (5) и (16), заключаем, что при любой функции f из $L_1[s,s+(n+1)h]$

$$\int_s^t (I-S^*)^{-1}X(t,\tau)f(\tau)\,d\tau = \int_s^t Y(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

следовательно, $(I-S^*)^{-1}X(t,s) = Y(t,s)$ или $X(t,s) = (I-S^*)Y(t,s)$. В силу определения оператора S^* получаем представление (14). □

Соединяя лемму 4 и теорему 3, получаем

Следствие 2. *При любых* $(t,s)\in\Delta$ *справедливо равенство* $X(t+h,s+h) = X(t,s)$.

Из теоремы 3 и леммы 4 вытекает другая формула, связывающая функцию Коши и фундаментальное решение. Она давно известна для автономных уравнений и применялась при исследовании вопросов устойчивости в работах [7]–[13].

Следствие 3. *Функция Коши и фундаментальное решение уравнения* (4) *связаны соотношением*

$$Y(t,s) - \sum_{k=1}^K a_k Y(t-kh,s) = X(t,s), \quad (t,s)\in\Delta. \tag{17}$$

Отметим еще одно важное свойство функции Коши.

Следствие 4. *Существуют такие* $\alpha>0$, $N>0$, *что при всех* $(t,s)\in\Delta$ *справедлива оценка* $|Y(t,s)|\leqslant Me^{\alpha(t-s)}$.

Доказательство. Считая, что оператор S_h (следовательно, и S) применяется только к первому аргументу, а второй остается фиксированным, перепишем (17) в виде: $(I-S)Y = X$. Найдем $n\in\mathbb{N}_0$ такое, что $nh\leqslant t-s<(n+1)h$. Тогда $S^{n+1}=\Theta$, а $(I-S)^{-1} = I+S+\ldots+S^n$. Следовательно, функцию Коши можно представить в виде $Y = (I-S)^{-1}X = (I+S+\ldots+S^n)X$.

Опираясь на теорему 1, легко установить для любого $i = \overline{0, n}$ оценку $|S^i X(t,s)| \leqslant Ne^{\alpha(t-s)} A^i e^{-\alpha h i}$, из которой следует, что $|Y(t,s)| \leqslant Ne^{\alpha(t-s)} \sum\limits_{i=0}^{n} A^i e^{-\alpha h i}$. Заметим, что в процессе доказательства теоремы 1 показатель α выбирался так, чтобы выполнялось неравенство $|Ae^{-\alpha h}| < 1$. Тогда $|Y(t,s)| \leqslant \frac{Ne^{\alpha(t-s)}}{1-Ae^{-\alpha h}} = Me^{\alpha(t-s)}$, что и требовалось. □

Для любого фиксированного s представим $t \geqslant s$ в виде $t = nh + \zeta + s$, где $n \in \mathbb{N}_0$, $\zeta \in [0, h)$, обозначим $y_n(\zeta + s) = Y(t,s)$ и построим производящую функцию для последовательности $\{y_n(\zeta + s)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$F_Y(\zeta + s, z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(\zeta + s) z^n. \tag{18}$$

Следствие 4 обеспечивает сходимость этого ряда в некоторой ненулевой окрестности нуля при всех $\zeta \in [0, h)$. В терминах последовательностей $\{x_n(\zeta + s)\}_{n=0}^{\infty}$, $\{y_n(\zeta + s)\}_{n=0}^{\infty}$ равенство (17) можно переписать в виде

$$y_n(\zeta + s) - \sum_{k=0}^{K} a_k y_{n-k}(\zeta + s) = x_n(\zeta + s).$$

Домножая обе части этого равенства на z^n и суммируя по n, получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(\zeta + s) z^n - \left(\sum_{k=0}^{K} a_k z^k \right) \sum_{n=0}^{\infty} y_n(\zeta + s) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(\zeta + s) z^n,$$

а с учетом введенных выше обозначений это означает, что

$$(1 - P_a(z)) F_Y(\zeta + s, z) = F_X(\zeta + s, z).$$

Так как для функции F_X найден явный вид (формула (8)), то в итоге установлена

Теорема 4. *Производящая функция последовательности* $\{y_n(\zeta)\}_{n=0}^{\infty}$ *имеет вид:*

$$F_Y(\zeta + s, z) = \frac{1}{1 - P_a(z)} \cdot \frac{G(\zeta + s, z)}{1 - z \exp\left\{ \frac{hP_b(z)}{1 - P_a(z)} \right\}}. \tag{19}$$

Обозначим через z_0 ближайшую к нулю точку, в которой нарушается аналитичность функции $F_Y(\zeta + s, \cdot)$; очевидно, что $|z_0| > 0$. Из (19) следует, что z_0 не зависит от ζ и s, следовательно, в круге $B(|z_0|)$ функция $F_Y(\zeta + s, \cdot)$ является аналитической при всех $\zeta \in [0, h]$.

Теорема 5. *Для всех членов последовательности* $\{y_n(\zeta + s)\}_{n=0}^{\infty}$ *справедлива оценка* $|y_n(\zeta + s)| \leqslant Ne^{-\gamma n}$ *с положительными, независящими от* ζ *и* s *постоянными* N, γ *тогда и только тогда, когда* $|z_0| > 1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $|y_n(\zeta+s)| \leqslant Ne^{-\gamma n}$. Тогда $|y_n(\zeta+s)z^n| \leqslant Ne^{-\gamma n}|z|^n$, следовательно, ряд (18) сходится в круге $B(e^\gamma)$, где $\gamma > 0$, поэтому $|z_0| > 1$.

Достаточность. Пусть $|z_0| > 1$. Выберем R так, чтобы $1 < R < |z_0|$. Используя неравенство Коши для коэффициентов степенного ряда, получаем оценку $|y_n(\zeta + s)| \leqslant NR^{-n}$, где $N = \max\limits_{|z|=R;\ \zeta,s\in[0,h]} |F_Y(\zeta + s, z)|$. Обозначив $\gamma = \ln R$, приходим к требуемому неравенству. □

Теорема 6. *Функция Коши уравнения* (4) *имеет при некоторых* $N, \gamma > 0$ *экспоненциальную оценку*

$$|Y(t,s)| \leqslant Ne^{-\gamma(t-s)}, \quad (t,s) \in \Delta, \tag{20}$$

тогда и только тогда, когда все корни уравнений $P_a(z) = 1$, $z \exp\left\{\frac{hP_b(z)}{1-P_a(z)}\right\} = 1$ *лежат вне единичного круга* $|z| \leqslant 1$.

Доказательство. Следует из теоремы 5 и определения функций $y_n(\zeta)$. □

Следствие 5. *Если функция Коши уравнения* (4) *имеет оценку* (20), *то аналогичная оценка справедлива и для фундаментального решения:* $|X(t,s)| \leqslant Me^{-\gamma(t-s)}$, $(t,s) \in \Delta$.

Доказательство. Следует из соотношения (14). □

Заметим, что обратное утверждение неверно: из экспоненциальной оценки на фундаментальное решение не следует оценка на функцию Коши. Соответствующий пример приведен в работе [7].

Из теоремы 6 следует, что отсутствие у многочлена $1 - P_a(z)$ корней внутри или на границе единичного круга $|z| \leqslant 1$ есть необходимое условие для существования оценки (20). В работе [6] показано, что этому условию можно придать ряд эквивалентных переформулировок.

Теорема 7. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Все корни многочлена* $1 - P_a(z)$ *расположены вне единичного круга* $|z| \leqslant 1$.
2. *Оператор* $I - S$ *обратим в пространстве* $L_p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
3. *Разностное уравнение* $x_n = \sum\limits_{k=1}^{K} a_k x_{n-k}$, $n \in \mathbb{N}_0$, *экспоненциально устойчиво.*

4. Связь с автономными уравнениями

Поставим в соответствие уравнению (4) автономное уравнение

$$(I - S)\,\dot{x} = T_0 x + f, \quad t \geqslant 0, \tag{21}$$

где $(T_0x)(t) = \sum\limits_{j=0}^{J} B_j(S_h^j x)(t)$, а $B_j = \frac{1}{h}\int_0^h b_j(\tau)d\tau$; операторы S_h, S и функция f — те же, что и в уравнении (4). Через Y_0 обозначим функцию Коши уравнения (21).

Теорема 8. *Функция Коши уравнения* (21) *имеет экспоненциальную оценку тогда и только тогда, когда функция Коши уравнения* (4) *имеет экспоненциальную оценку.*

Доказательство. Уравнение (21) — частный случай уравнения (4) при $b_j(t) = B_j$, $j = \overline{1, J}$, причем многочлены $P_a(z)$ и $P_b(z)$ для уравнений (4) и (21) совпадают. По теореме 6 функция $Y_0(t, s)$ имеет экспоненциальную оценку вида (20) тогда и только тогда, когда все корни уравнений $P_a(z) = 1$ и $z \exp\left\{\frac{hP_b(z)}{1-P_a(z)}\right\} = 1$ лежат вне единичного круга $|z| \leqslant 1$, то есть ровно в том случае, когда экспоненциальную оценку имеет функция $Y(t, s)$. □

5. Связь с постановкой, учитывающей начальную функцию

Вернемся к постановке, включающей начальную функцию, то есть к уравнению (3). В таком виде задача ставится во многих работах (см., например, классические монографии [8], [12], [11]). Более того, при такой постановке начальная функция, как правило, считается частью решения, и тогда логично требовать, чтобы $\dot{\varphi} = \psi$, а $x(s) = \varphi(s)$. В записи (3) такие предположения не обязательны: решение и его производная могут доопределяться независимо.

Прежде всего подчеркнем, что уравнения (3) и (4) не противоречат друг другу. Уравнение (4) можно рассматривать как частный случай уравнения (3) с нулевыми начальными функциями. С другой стороны, и уравнение (3) можно переписать в виде (4), если внешнее возмущение $f(t)$ заменить на $f(t) + \eta(t)$, где

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{K} a_k\psi(t - kh)\chi_k(t) + \sum_{j=1}^{J} b_j(t)\varphi(t - jh)\chi_j(t),$$

а $\chi_n(t)$ — характеристическая функция множества $(-\infty, s + nh)$. Определение экспоненциальной устойчивости можно дать в терминах функции η.

Уравнение (3) называется *экспоненциально устойчивым*, если найдутся такие $N, \gamma > 0$, что при любых $x(s) \in \mathbb{R}$ и $\eta \in L_1[s, s + \omega]$ его решение имеет оценку

$$|x(t)| \leqslant Ne^{-\gamma(t-s)}\left(|x(s)| + \|\eta\|_1\right), \quad (t, s) \in \Delta.$$

Определение экспоненциальной устойчивости, приведенное, например, в монографии [12, с. 114], является частным случаем этого определения: если функции φ, ψ непрерывны на отрезке $[s - \omega, s]$, то сумму $|x(s)| + \|\eta\|_1$ можно заменить на $\max\limits_{t\in[s-\omega,s]} |\varphi(t)| + \max\limits_{t\in[s-\omega,s]} |\psi(t)|$.

Так как фундаментальное решение и функция Коши не зависят от начальных функций и внешнего возмущения, то они общие для уравнений (3) и (4). Связь между экспоненциальной устойчивостью уравнения (3) и свойствами функции Коши проясняет следующая теорема, установленная в [10].

Теорема 9. *Уравнение* (3) *экспоненциально устойчиво при* $\eta \in L_1[s, s+\omega]$ *тогда и только тогда, когда его функция Коши имеет экспоненциальную оценку* (20).

6. Примеры

Теорема 8 сводит вопрос об экспоненциальной оценке функции Коши уравнения (4) к той же задаче для автономного уравнения. Эта связь оказывается особенно полезной для получения эффективных признаков устойчивости, так как любой признак устойчивости, найденный для автономного уравнения, порождает новый признак устойчивости для уравнения (4).

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) = -b(t)x(t) + c(t)x(t-1) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{22}$$

где $a \in \mathbb{R}$, b, c — суммируемые на $[0,1]$ функции, причем $b(t+1) = b(t)$, $c(t+1) = c(t)$.

Зададим в трехмерном пространстве $Ouvw$ поверхность

$$\Gamma_1 = \{(u, v, w) : u = \cos\theta + \sin\theta/\theta,\ w = -\theta\sin\theta + v\cos\theta,\ \theta \in \mathbb{R}\}.$$

В поверхности Γ_1 ограничим область изменения параметра θ: пусть $\theta \in (\theta_1, \pi)$ при $v \geqslant 0$, где θ_1 — наименьший положительный корень уравнения $\cos y + \frac{v\sin y}{y} = -1$, и $\theta \in (0, \theta_2)$ при $v \in (-2, 0)$, где θ_2 – наименьший положительный корень уравнения $\cos y + \frac{v\sin y}{y} = 1$. Вместе с плоскостями $v = w$, $u = \pm 1$ поверхность Γ_1 ограничивает в пространстве $Ouvw$ область D (границы не принадлежат D), изображенную на рис. 1.

Предложение 1. *Уравнение* (22) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда точка с координатами* $\left(a, \int_0^1 b(t)dt, \int_0^1 c(t)dt\right)$ *принадлежит* D.

Доказательство. Поставим в соответствие уравнению (22) автономное уравнение

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) = -\left(\int_0^1 b(t)\,dt\right)x(t) + \left(\int_0^1 c(t)\,dt\right)x(t-1) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

для которого в работе [3] установлен признак экспоненциальной устойчивости. Применяя теорему 8, получаем условия, при которых функция Коши имеет экспоненциальную оценку, применяя теорему 9 — критерий экспоненциальной устойчивости уравнения (22). □

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - a_1\dot{x}(t-1) - a_2\dot{x}(t-2) = -b(t)x(t-1) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{23}$$

где $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, а b — суммируемая на $[0,1]$ функция, причем $b(t+1) = b(t)$.

Зададим в трехмерном пространстве $Ouvw$ криволинейную поверхность

$$\Gamma_2 = \{(u,v,w) : u = (1-v)\cos\theta,\ w = -(1+v)\theta\sin\theta,\ v \in (-1,1),\ \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Поверхность Γ_2 разбивает пространство $Ouvw$ на счетный набор множеств. Множество, ограниченное поверхностью Γ_2 и плоскостью $w = 0$, и содержащее точки $(0,0,w)$ при $w \in (0, \pi/2)$, обозначим через H (границы не принадлежат H). Область H изображена на рис. 2.

Предложение 2. *Уравнение* (23) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда точка с координатами* $\left(a_1, a_2, \int_0^1 b(t)dt\right)$ *принадлежит области* H.

Доказательство. Поставим в соответствие уравнению (23) автономное уравнение

$$\dot{x}(t) - a_1\dot{x}(t-1) - a_2\dot{x}(t-2) = -\left(\int_0^1 b(t)dt\right)x(t-1) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

для которого в работе [5] установлен признак экспоненциальной устойчивости. Остается применить теоремы 8 и 9. □

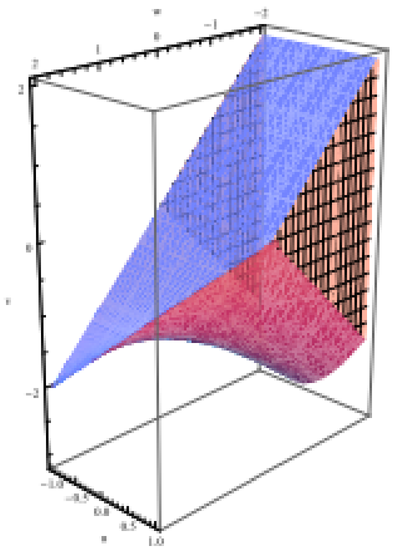


Рис. 1. Область D

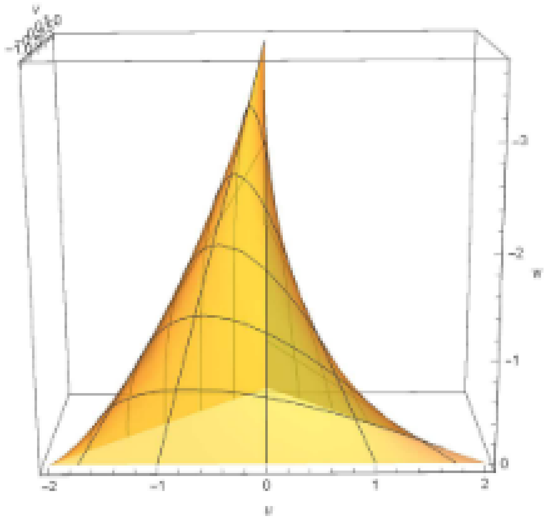


Рис. 2. Область H

В заключение приведем легко проверяемый достаточный признак экспоненциальной устойчивости для уравнений с любым количеством запаздываний.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - \sum_{k=1}^{K} a_k \dot{x}(t-kh) = -\sum_{j=0}^{J} b_j(t) x(t-jh) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{24}$$

где $a_k \in \mathbb{R}_+$, b_j — суммируемые на $[0,h]$ функции, причем $b_j(t+h) = b_j(t)$, а $\int_0^h b_j(t)dt \in \mathbb{R}_+$. Обозначим $Q(z) = (1 - P_a(z))^{-1}$.

Предложение 3. *Пусть выполнено любое из утверждений теоремы 7 и*

$$\dot{Q}(1) \sum_{j=0}^{J} \int_0^h b_j(t)\, dt + Q(1) \sum_{j=1}^{J} j \int_0^h b_j(t)\, dt < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда уравнение (24) *экспоненциально устойчиво, а его функция Коши имеет оценку* (20).

Доказательство. Ставим в соответствие уравнению (24) автономное уравнение

$$\dot{x}(t) - \sum_{k=1}^{K} a_k \dot{x}(t-kh) = -\sum_{j=0}^{J} \left(\frac{1}{h} \int_0^h b_j(t)\, dt \right) x(t-jh) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

применяем признак, полученный в [2], и вновь используем теоремы 8 и 9. □

Заключение

В работе рассмотрен класс дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами, эквивалентных автономным уравнениям (теорема 8). Используя известные признаки экспоненциальной устойчивости для автономных уравнений, удалось получить новые эффективные признаки устойчивости для уравнений с периодическими коэффициентами (предложения 1–3). В теоретическом плане принципиальным продвижением является теорема 3, которая устанавливает связь между фундаментальным решением и функцией Коши рассматриваемого неавтономного уравнения. Дальнейшие возможности изучения асимптотических свойств решений неавтономных функционально-дифференциальных уравнений связаны с обобщением этой теоремы на более широкие классы уравнений.

Список цитируемых источников

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

   Azbelev N. V., Maksimov V. P., Rahmatullina L. F. Introduction to the Theory of Functional Differential Equations. Moscow: Nauka, 1991 (in Russian, with English summary) Zbl 0725.34071

2. *Баландин А. С.* Об асимптотической устойчивости одного класса дифференциально-разностных уравнений. Вестник Перм. гос. техн. ун-та, №1, 122–129 (2009).

   Balandin A. S. On asymptotic stability of a class of differential-difference equations. Vestnik PGTU, No.1, 122–129 (2009) (in Russian)

3. *Баландин А. С.* Об устойчивости одного дифференциального уравнения, не разрешённого относительно производной. Сб. тр. X Междунар. конф. «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2017)» (стр. 68–71). Воронеж, 2017.

4. *Баландин А. С.* О связи между фундаментальным решением и функцией Коши для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа. Прикладная математика и вопросы управления. №1, 13–25 (2018).

   Balandin A. S. On relationship between the fundamental soluiton and the Cauchy function for neutral functional differential equations. Applied Mathematics and Control Sciences. No.1, 13–25 (2018) (in Russian)

5. *Баландин А. С.* Об устойчивости некоторых автономных дифференциальных уравнений нейтрального типа. Сб. тр. XII Междунар. конф. «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2019)» (стр. 59–63). Воронеж, 2019.

6. *Баландин А. С., Малыгина В. В.* О разрешимости одного класса разностных уравнений. Вычислительная механика: сб. научн. тр., №4, 67–72. Пермь, 2006.

7. *Баландин А. С., Малыгина В. В.* Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа. Известия вузов. Математика. №7, 17–27 (2007).

   Balandin A. S., Malygina V. V. Exponential stability of linear differential-difference equations of neutral type. Russian Mathematics (Iz. VUZ), 51, No.7, 15–24 (2007). Zbl 1182.34095

8. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения: Пер. с англ. М.: Мир, 1967.

   Bellman R., Cooke K. Differential-difference equations. Academic Press, 1963. Zbl 0105.06402

9. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.

   Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of the theory of functions and functional analysis. Moscow: Nauka, 1981 (in Russian) Zbl 0501.46002

10. *Симонов П. М., Чистяков А. В.* Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных систем. Известия вузов. Математика. №6, 37–49 (1997).

    Simonov P. M., Chistyakov A. V. On exponential stability of linear difference-differential systems. Russian Math. (Iz. VUZ), 41, No.6, 34–45 (1997). Zbl 0910.34067

11. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений: Пер. с англ. М.: Мир, 1984.

    Hale J. Theory of Functional Differetial Equations. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1977.

12. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

El'sgol'ts L. E., Norkin S. B. Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument. Moscow: Nauka, 1971 (in Russian) Zbl 0224.34053

13. *Balandin A. S., Chudinov K. M.* On the asymptotic behavior of linear autonomous functional differential equations of neutral type. Functional Differential Equations, 15, No.1-2, 5–15 (2008). Zbl 1217.34120

Получена 22.02.2020

Динамические системы, 2020, том 10(38), №1, 70–83

УДК 517.929

Об экспоненциально убывающих оценках решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием, используемых в моделях динамики популяций[1]

Н. В. Перцев

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск 630090. *E-mail: homlab@ya.ru*

Аннотация. Исследуется поведение решений задачи Коши для систем нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием, возникающих в моделях динамики популяций. Приведена совокупность условий, обеспечивающих экспоненциально убывающие оценки компонент решений изучаемой задачи Коши. Параметры экспоненциальных оценок находятся как решение нелинейной системы неравенств, построенной на основе линейных мажорант отображений, входящих в правые части рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. Представлены результаты построения экспоненциальных оценок для модели, описывающей динамику численности изолированной популяции, и трехкомпонентной модели процесса производства клеток крови.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения с запаздыванием, задача Коши, глобальная разрешимость, неотрицательность решений, экспоненциальные убывающие оценки решений, M-матрица, математическая биология, динамика популяций.

On exponentially decreasing estimates of solutions to nonlinear delay functional differential equations used in population dynamics models

N. V. Pertsev

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk 630090.

Abstract. The behavior of solutions to the Cauchy problem for systems of nonlinear delay functional differential equations arising in models of population dynamics is studied. A set of conditions providing exponentially decreasing estimates of the components of solutions to the studied Cauchy problem is presented. The parameters of exponential estimates are found as a solution to a nonlinear system of inequalities constructed on the basis of linear majorant mappings included in the right-hand sides of the system of differential equations under consideration. The results of constructing exponential estimates for a model describing the dynamics of an isolated population and a three-component model of the blood cell production process are presented.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект No. 18-29-10086.

Keywords: delay functional differential equations, Cauchy problem, global solvability, nonnegativity of solutions, exponential decreasing estimates of solutions, M-matrix, mathematical biology, population dynamics.

MSC 2010: 34K12, 34K20, 34K25

Введение

Одно из направлений математического моделирования живых систем связано с исследованием дифференциальных уравнений с запаздыванием, используемых для описания динамики различных популяций. Многие модели динамики популяций могут быть представлены в форме задачи Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x_t) - (\mu + g(t, x_t))x(t), \ t \geq 0, \tag{1}$$

$$x(t) = \psi(t), \ t \in I_\omega = [-\omega, 0], \tag{2}$$

для системы линейных или нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием. В уравнениях системы (1) и начальных условиях (2) использованы обозначения

$$x(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))^T, \ \psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t))^T,$$
$$f(t, x_t) = (f_1(t, x_t), \ldots, f_m(t, x_t))^T,$$
$$g(t, x_t) = \operatorname{diag}\big(g_1(t, x_t), \ldots, g_m(t, x_t)\big), \ \mu = \operatorname{diag}\big(\mu_1, \ldots, \mu_m\big),$$

где $x(t)$ – искомая функция, описывающая численность популяций $P_1, \ldots, P_m$; запаздывающая переменная $x_t : I_\omega \to R^m$ отражает предысторию развития популяций $P_1, \ldots, P_m$, и для каждого фиксированного $t \geq 0$ определена по правилу: $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in I_\omega$; начальная функция $\psi(t)$ задает численность изучаемых популяций при $t \leq 0$. Для фиксированного $1 \leq i \leq m$ отображение $f_i(t, x_t)$ описывает скорость появления новых индивидуумов популяции P_i, отображение $g_i(t, x_t)$ таково, что $g_i(t, x_t)x_i(t)$ задает скорость гибели или превращения индивидуумов популяции P_i за счет взаимодействия индивидуумов между собой, а также под влиянием внешней среды. Выражение $\mu_i x_i(t)$ означает скорость естественной смертности или миграционного оттока индивидуумов популяции P_i, где μ_i – некоторая константа. Под $dx(t)/dt$ понимается правосторонняя производная $x(t)$ (покомпонентно).

Положим $J = [a, b] \subset R$, $R_+ = \{v \in R : v \geq 0\}$, $A \subseteq R^m$. Пусть E – единичная $m \times m$ матрица, $||v||_{R^m} = \sum_{i=1}^m |v_i|$ — норма вектора $v \in R^m$. Через $C(J, A)$ обозначим множество всех непрерывных функций $z : J \to A$ с нормой

$$||z|| = \max_{\theta \in J}\big(||z(\theta)||_{R^m}\big), \quad z \in C(J, R^m).$$

Обозначим через $B_d = \{z \in C(I_\omega, R^m) : ||z|| \leq d\}$ шар в пространстве $C(I_\omega, R^m)$. Для $u, w \in R^m$ неравенства $u < 0$, $u > 0$, $u \leq w$, $u \geq w$ понимаются покомпонентно.

Если $x, y \in C(J, A)$, то для каждого $t \in J$ неравенство $x(t) \le y(t)$ понимается как неравенство между соответствующими векторами.

Примем, что отображения, функции и константы, входящие в (1), (2), удовлетворяют набору предположений, совокупность которых при всех $1 \le i \le m$ обозначим через **(H0)**:

1) f_i, $g_i : R_+ \times C(I_\omega, A_\xi) \to R$, где $A_\xi = \{u \in R^m : u \ge \xi\}$, $\xi \in R^m$, $\xi < 0$ — некоторый фиксированный вектор;

2) f_i, $g_i : R_+ \times C(I_\omega, R_+^m) \to R_+$;

3) $f_i(t, z)$, $g_i(t, z)$ непрерывны по $(t, z) \in R_+ \times C(I_\omega, A_\xi)$ и локально липшицевы по z: для каждого $d \in R$, $d > 0$, существуют константы $L_f^{(i)} = L_f^{(i)}(\xi, d) > 0$, $L_g^{(i)} = L_g^{(i)}(\xi, d) > 0$, такие, что при всех $z_1, z_2 \in B_d \bigcap C(I_\omega, A_\xi)$ и $t \in [0, \infty)$ выполнены неравенства

$$|f_i(t, z_1) - f_i(t, z_2)| \le L_f^{(i)} \, ||z_1 - z_2||, \ |g_i(t, z_1) - g_i(t, z_2)| \le L_g^{(i)} \, ||z_1 - z_2||;$$

4) $\psi_i : I_\omega \to R_+$ — непрерывная функция;

5) $\mu_i > 0$.

Следуя [2], [10], решением задачи Коши (1), (2) на полуоси R_+ будем называть функцию $x(t)$, непрерывную на любом конечном промежутке $I_\omega \cup [0, \tau]$, $\tau > 0$, удовлетворяющую начальному условию (2), имеющую непрерывную производную на промежутке $[0, \tau)$, которая удовлетворяет уравнениям системы (1) для всех $t \in [0, \tau)$.

Задача Коши (1), (2) для линейных и нелинейных систем (1) детально исследована в работах автора [4], [5], [6]. В этих работах получены условия глобальной разрешимости задачи Коши (1), (2), установлена неотрицательность компонент решения $x(t)$ при неотрицательных компонентах функции $\psi(t)$, получены покомпонентные верхние оценки для $x(t)$ и экспоненциально убывающие оценки для компонент $x(t)$ в случае линейной системы уравнений (1). Перечисленные результаты получены на основе теории монотонных операторов [3], [7], [8].

Целью настоящей работы является исследование задачи Коши (1), (2) для нелинейной системы уравнений (1) и получение условий, обеспечивающих существование экспоненциально убывающих оценок компонент решения $x(t)$ изучаемой задачи на промежутке $[0, \infty)$.

1. Вспомогательные результаты

Используя метод вариации произвольной постоянной, перейдем от системы (1), (2) к системе интегральных уравнений, дополненной начальными данными

$$x(t) = e^{-\int_0^t (\mu + g(s, x_s))ds} \psi(0) + \int_0^t e^{-\int_a^t (\mu + g(s, x_s))ds} f(a, x_a) da, \ t \ge 0, \tag{3}$$

$$x(t) = \psi(t), \ t \in I_\omega, \tag{4}$$

где символом

$$e^{-\int_a^t(\mu+g(s,x_s))ds}$$

обозначена диагональная матричная экспонента, построенная с помощью диагональной матрицы $\mu+g(s,x_s)$.

Опираясь на стандартный подход [10], получаем, что задачи (1), (2) и (3), (4) эквивалентны. Следовательно, для изучения поведения решения $x(t)$ задачи Коши (1), (2) можно воспользоваться системой (3), (4).

Зафиксируем $\tau>0$. Под $C_\psi \subset C([-\omega,\tau],R^m)$ будем понимать множество, состоящее из всех функций $x\in C([-\omega,\tau],R^m)$, таких, что $x(t)=\psi(t)$, $t\in I_\omega$. Решением задачи (3), (4) на промежутке $[0,\tau]$ будем называть функцию $x\in C_\psi$, такую, что $x(t)$ удовлетворяет (3) для всех $t\in[0,\tau]$. Примем, что $C_{\psi,0}\subset C_\psi$ — множество, состоящие из функций $x\in C_\psi$, таких, что $x(t)\geq 0$, $t\in[-\omega,\tau]$. Опираясь на (3), (4), определим оператор F, который каждой функции $x\in C_{\psi,0}$ сопоставляет функцию $F(x)\in C_{\psi,0}$ по формулам

$$F(x)(t)=\psi(t),\ t\in I_\omega,$$
$$F(x)(t)=e^{-\int_0^t(\mu+g(s,x_s))ds}\psi(0)+\int_0^t e^{-\int_a^t(\mu+g(s,x_s))ds}f(a,x_a)da,\ t\in[0,\tau].$$

Пусть $v=v(t)=(v_1(t),\dots,v_m(t))^T$ — некоторая функция с неотрицательными компонентами, непрерывная на промежутке $[-\omega,\tau]$. Положим, что $C_{\psi,0,v}$ состоит из функций $x\in C_\psi$, удовлетворяющих неравенствам $0\leq x(t)\leq v(t)$, $t\in[-\omega,\tau]$.

Используя леммы 1, 2, 5 работы [6], приходим к следующим результатам.

Лемма 1. *Пусть выполнено предположение (H0) и существует функция v, такая, что $F: C_{\psi,0,v}\to C_{\psi,0,v}$. Тогда задача* (3), (4) *имеет на промежутке* $[0,\tau]$ *единственное решение $x\in C_\psi$, причем $x\in C_{\psi,0,v}$.*

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение (H0) и для всех $(t,z)\in R_+\times C(I_\omega,R_+^m)$ имеет место оценка*

$$f(t,z)\leq p+\int_{-\omega}^0 d\,\nu(\theta)z(\theta), \tag{5}$$

где $p\in R_+^m$, ν — $m\times m$ матрица, элементы которой определены и не убывают на I_ω, матрица $\Delta\nu=\nu(0)-\nu(-\omega)$ содержит хотя бы один положительный элемент. Тогда задача (3), (4) *однозначно разрешима на полуоси R_+, и при всех $t\geq 0$ верна оценка $0\leq x(t)\leq c\,e^{\eta t}$, где $c\in R^m$, $c>0$ – некоторый вектор, $\eta\in R$ – некоторая константа, зависящие от μ, p, $\Delta\nu$.*

Из теоремы 1 следует, что искомая экспоненциально убывающая оценка для решения $x(t)$ задачи Коши (1), (2) может быть найдена в рамках оценки вида (5) и выполнения условий, при которых $\eta<0$.

2. Дополнительное предположение и основной результат

Примем, что отображение $f(t,x_t)$ удовлетворяет предположению **(H1)**:

1) для всех $(t,x_t)\in R_+\times C(I_\omega,R_+^m)$ имеет место оценка

$$f(t,x_t)\le \widehat{f}(x_t)=\sum_{i=0}^{n} L_i x(t-\omega_i)+\int_{-\omega_{n+1}}^{0} L_{n+1}(\theta)x(t+\theta)d\theta, \tag{6}$$

где запаздывания $0<\omega_i\le\omega$, $1\le i\le n+1$, $\omega_0=0$, $L_0,\ldots,L_n$, $L_{n+1}(\theta)$ – неотрицательные матрицы, элементы матрицы $L_{n+1}(\theta)$ интегрируемы по Риману;

2) каждая строка матрицы

$$L=\sum_{i=0}^{n} L_i+\int_{-\omega_{n+1}}^{0} L_{n+1}(\theta)d\theta \tag{7}$$

содержит хотя бы один ненулевой элемент.

Заметим, что матрица L, заданная формулой (7), является неотрицательной, а внедиагональные элементы матрицы $\mu-L$ не положительны. Будем говорить, что $\mu-L$ является невырожденной M-матрицей, если она имеет обратную и обратная матрица $(\mu-L)^{-1}$ неотрицательна. В монографиях [1], [9] приведен ряд критериев, позволяющих проверять матрицу $\mu-L$ на принадлежность к семейству невырожденных M-матриц.

Рассмотрим задачу Коши для функции $y(t)=(y_1(t),\ldots,y_m(t))^T$:

$$\frac{dy(t)}{dt}=\widehat{f}(y_t)-\mu y(t),\ t\ge 0, \tag{8}$$

$$y(t)=\psi(t),\ t\in I_\omega. \tag{9}$$

Решением задачи Коши (8), (9) на полуоси R_+ будем называть функцию $y(t)$, непрерывную на любом конечном промежутке $I_\omega\cup[0,\tau]$, $\tau>0$, удовлетворяющую начальному условию (9), имеющую на $[0,\tau)$ непрерывную производную, которая удовлетворяет уравнениям системы (8) для всех $t\in[0,\tau)$; при $t=0$ под $dy(t)/dt$ понимается правосторонняя производная.

Используя метод вариации произвольной постоянной и учитывая начальные условия, перейдем к изучению системы линейных интегральных уравнений, эквивалентной задаче (8), (9), а именно:

$$y(t)=e^{-\mu t}\psi(0)+\int_0^t e^{-\mu(t-a)}\widehat{f}(y_a)da,\ t\ge 0, \tag{10}$$

$$y(t)=\psi(t),\ t\in I_\omega. \tag{11}$$

Лемма 2. *Пусть матрица L, введенная в предположении (H1), такова, что $\mu-L$ является невырожденной M-матрицей. Тогда для решения $y(t)$ задачи Коши* (8), (9) *имеет место оценка*

$$0\le y(t)\le c\,e^{-\tau t},\ t\in I_\omega\cup R_+, \tag{12}$$

где $c \in R^m$, $r \in R$ *удовлетворяют системе неравенств*

$$c > 0,\ \Big(\mu - rE - \sum_{i=0}^{n} e^{r\omega_i} L_i - \int_{-\omega_{n+1}}^{0} e^{-r\theta} L_{n+1}(\theta) d\theta\Big) c \geq 0, \tag{13}$$

$$c \geq \max_{t \in I_\omega} \big(e^{rt}\psi(t)\big),\ 0 < r < \min(\mu_1, \ldots, \mu_m). \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $c \in R^m$, $r \in R$ — некоторые вектор и константа. Введем функцию

$$\upsilon(t) = c\, e^{-r\,t},\ t \in I_\omega \cup R_+. \tag{15}$$

Опираясь на условия леммы, используем теорему 3 работы [4] применительно к задаче Коши (8), (9) и эквивалентной ей задаче (10), (11). Получаем, что существуют $c \in R^m$ и $r \in R$, удовлетворяющие (13), (14), и такие, что для функции $\upsilon(t)$ вида (15) верны неравенства

$$e^{-\mu t}\psi(0) + \int_0^t e^{-\mu(t-a)} \widehat{f}(\upsilon_a) d\, a \leq \upsilon(t),\ 0 \leq t < \infty, \tag{16}$$

$$\psi(t) \leq \upsilon(t),\ t \in I_\omega. \tag{17}$$

Кроме того, из (10), (11), (16), (17) следует, что при всех $t \in I_\omega \cup R_+$ для решения $y(t)$ задачи Коши (8), (9) верно $0 \leq y(t) \leq \upsilon(t) = c\, e^{-r\,t}$, то есть имеет место оценка (12). Лемма доказана. □

Отметим, что способы нахождения $c \in R^m$ и $r \in R$, используемых в оценке (12), приведены в разделе 3 работы [4] и в разделе 2 работы [5].

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения (H0), (H1),* $\mu - L$ *является невырожденной M-матрицей. Тогда задача Коши* (1), (2) *имеет на полуоси* R_+ *единственное решение* $x(t)$, *и справедлива оценка*

$$0 \leq x(t) \leq c\, e^{-r\,t},\ t \in I_\omega \cup R_+, \tag{18}$$

где $c \in R^m$, $r \in R$ *удовлетворяют системе неравенств* (13), (14).

Доказательство. Используя лемму 2, рассмотрим функцию υ, определенную формулой (15) и удовлетворяющую соотношениям (16), (17). Имеем, что для всех $t \in I_\omega$ верно $\psi(t) \leq \upsilon(t)$. Опираясь на оценку (6), получаем цепочку неравенств

$$0 \leq e^{-\int_0^t (\mu + g(s,\upsilon_s))ds}\psi(0) + \int_0^t e^{-\int_a^t (\mu + g(s,\upsilon_s))ds} f(a, \upsilon_a) da$$
$$\leq e^{-\mu t}\psi(0) + \int_0^t e^{-\mu(t-a)} \widehat{f}(\upsilon_a) da \leq \upsilon(t),\ 0 \leq t < \infty.$$

Следовательно, для каждого фиксированного $\tau > 0$ верно $0 \leq F(\upsilon)(t) \leq \upsilon(t)$, $t \in [-\omega, \tau]$. Более того, если $x \in C_{\psi,0,\upsilon}$, то

$$0 \leq F(x)(t) \leq F(\upsilon)(t) \leq \upsilon(t),\ t \in [-\omega, \tau].$$

Последнее означает, что $F(x) \in C_{\psi,0,v}$, то есть множество функций $C_{\psi,0,v}$ является инвариантным для оператора F. Используя лемму 1, устанавливаем, что для фиксированного $\tau > 0$ задача (3), (4) имеет на промежутке $[0, \tau]$ единственное решение $x \in C_\psi$, причем $x \in C_{\psi,0,v}$. Заметим, что компоненты функции $v(t)$ не зависят от τ. Учитывая произвольность выбора τ и используя теорему 1, получаем, что задача Коши (1), (2) имеет единственное решение $x = x(t)$ на полуоси R_+, и для этого решения справедлива оценка (18). Теорема доказана. □

3. Примеры

Применение теоремы 2 к исследованию конкретных моделей означает поиск условий, приводящих к вырождению популяций. Экспоненциально убывающие оценки позволяют оценить скорость и время до вырождения популяций в зависимости от начальных данных и параметров линейной мажорирующей системы.

3.1. Динамика изолированной популяции

Пусть $m = 1$ и $x = x(t)$ – численность взрослых индивидуумов некоторой изолированной популяции P. Примем, что динамика $x(t)$ задается следующими соотношениями:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x_t) - (\mu + g(t, x_t))x(t)$$

$$= \frac{\rho\, e^{-\lambda\omega_1}\, x^2(t-\omega_1)}{1 + \beta\, x(t-\omega_1)} - \Big(\mu + \gamma x(t) + \int_{-\omega_2}^{0} \varphi(\theta)\, x(t+\theta) d\theta\Big) x(t),\ \ t \geq 0,$$

$$x(t) = \psi(t),\ \ t \in I_\omega = [-\max\{\omega_1, \omega_2\}, 0],$$

где ρ, λ, β, ω_1, μ, γ, ω_2 – положительные константы, $\varphi(\theta)$, $\psi(t)$ — неотрицательные, непрерывные функции, $\psi(t) \not\equiv 0$. Выражение

$$f(t, x_t) = \frac{\rho\, e^{-\lambda\omega_1}\, x^2(t-\omega_1)}{1 + \beta\, x(t-\omega_1)}$$

опирается на стадия-зависимый вариант модели Базыкина и задает скорость воспроизводства индивидуумов популяции. Запаздывание ω_1 означает продолжительность периода от появления новых индивидуумов до их перехода в группу взрослых индивидуумов, константа λ означает интенсивность гибели молодых индивидуумов популяции. Отметим, что для любых $x_t = x(t-\omega_1) \geq 0$ верно $0 \leq f(t, x_t) \leq (\alpha/\beta)\, x(t-\omega_1)$, где $\alpha = \rho\, e^{-\lambda\omega_1}$. Выражение

$$g(t, x_t) = \gamma x(t) + \int_{-\omega_2}^{0} \varphi(\theta)\, x(t+\theta) d\theta$$

описывает интенсивность гибели взрослых индивидуумов популяции вследствие их конкуренции за некоторые ресурсы и отражает один из вариантов модели Лотки-Вольтерра.

Для рассматриваемой модели выполнены предположения (H0) и (H1), причем $\widehat{f}(x_t) = (\alpha/\beta)\, x(t-\omega_1)$. При $m = 1$ система (8) с начальным условием (9) имеет достаточно простой вид, а именно: $y(t) \in R$,

$$\frac{dy(t)}{dt} = \widehat{f}(y_t) - \mu y(t) = (\alpha/\beta)\, y(t-\omega_1) - \mu y(t),\ t \geq 0,$$
$$y(t) = \psi(t),\ t \in I_\omega.$$

Обратимся к условиям теоремы 2. Вместо матрицы $\mu - L$ следует рассмотреть константу $\mu - \alpha/\beta$ и потребовать ее положительность. Тогда, если $\mu > \alpha/\beta$, то решение $x(t)$ изучаемой модели неотрицательно и имеет экспоненциально убывающую верхнюю оценку:

$$0 \leq x(t) \leq c\, e^{-rt},\ t \in I_\omega \cup [0, \infty). \tag{19}$$

В оценке (19) константы $c \in R$, $r \in R$ находятся как решение следующей системы неравенств:

$$c > 0,\quad 0 < r < \mu,\ (\mu - r - e^{r\omega_1}\, \alpha/\beta)\, c \geq 0,\quad c \geq \max_{t \in I_\omega}\bigl(e^{rt}\, \psi(t)\bigr).$$

Учитывая, что $c > 0$, константу r находим как корень уравнения

$$\mu - r = e^{r\omega_1}\, \alpha/\beta,\quad 0 < r < \mu. \tag{20}$$

Очевидно, что уравнение (20) имеет единственный корень r на указанном промежутке. Далее полагаем, что

$$c = \max_{t \in I_\omega}\bigl(e^{rt}\, \psi(t)\bigr).$$

Пусть, в частности, $\alpha/\beta = 1$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 1$, $\mu = 1.5$ и $\psi(t) = 10000 + 200\, t$, $t \in I_\omega$. Численное решение уравнения (20) дает корень $r = 0.235$ (с округлением до третьего знака). Поскольку $\psi(t)$ – монотонно возрастающая функция, то $c = \psi(0)$. Тогда приходим к оценке

$$0 \leq x(t) \leq 10000\, e^{-0.235\, t},\quad t \in [-\omega, \infty).$$

Неравенство $\mu > \alpha/\beta$ отражает ситуацию, в которой интенсивность естественной гибели взрослых индивидуумов популяции μ превышает уровень α/β, интерпретируемый как максимальная интенсивность производства потомства в расчете на одного взрослого индивидуума. Нетрудно заметить, что в случае $\mu > \alpha/\beta$ популяция вырождается при любой ее начальной численности.

3.2. Динамика гемопоэза

Рассмотрим модель, описывающую производство зрелых клеток крови одной из миелоидной линий кроветворения (моноцитов, макрофагов, гранулоцитов). Полагаем, что производство зрелых клеток крови регулируется с помощью положительной и отрицательной обратной связи, определяющей скорость выработки молекул гормона–поэтина. Система уравнений модели имеет вид:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \sigma_0\beta_0 s_0 x_3(t-\omega_3) - (\beta_1+\mu_1)x_1(t), \tag{21}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \sigma_1\beta_1 x_1(t-\omega_1) - \mu_2 x_2(t), \quad t \geq 0, \tag{22}$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = \alpha\, x_2(t-\omega_2)h(x_2(t-\omega_2)) - \mu_3 x_3(t), \tag{23}$$

$$x_i(t) = \psi_i(t), \quad t \in I_\omega = [-\omega, 0], \quad i = 1,2,3. \tag{24}$$

В системе (21)–(24) переменная $x_1(t)$ означает численность созревающих клеток костного мозга, $x_2(t)$ — численность зрелых клеток крови, $x_3(t)$ — концентрацию гормона–поэтина в момент времени t. Начальные значения этих переменных описываются с помощью неотрицательных, непрерывных функций $\psi_i(t)$, $i = 1,2,3$, $t \in I_\omega$, $\omega = \max\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Параметры ω_3, ω_1 задают время, необходимое для превращения клеток одной популяции в клетки другой популяции, s_0 означает число стволовых кроветворных клеток костного мозга, которое принято постоянным. Параметры β_0, β_1 задают интенсивности переходов клеток из одной популяции в другую, μ_1, μ_2, μ_3 — интенсивности разрушения созревающих клеток костного мозга, зрелых клеток крови и молекул гормона–поэтина за счет естественного старения и взаимодействия с факторами, которые в модели явно не учитываются. Параметры σ_0, σ_1 отражают пролиферативную активность стволовых кроветворных клеток и созревающих клеток костного мозга (коэффициенты, учитывающие количество делений этих клеток в процессе размножения и гибель части делящихся клеток). Слагаемое $\alpha\, x_2(t-\omega_2)\, h(x_2(t-\omega_2))$, входящее в (23), описывает скорость производства гормона–поэтина в условиях положительных и отрицательных обратных связей, α — некоторая константа. Параметр ω_2 учитывает запаздывание в реакции организма с точки зрения зависимости скорости производства гормона–поэтина от изменения численности зрелых клеток крови. Все указанные параметры и запаздывания положительны.

Примем, что $h(u)$ является неотрицательной, непрерывной, невозрастающей, локально–липшицевой на промежутке $u \in [0, \infty)$ функцией и $h(0) = 1$. Характерным примером $\rho(u) = \alpha\, u\, h(u)$ служат функции

$$\rho_1(u) = \frac{\alpha u}{1+u^n}, \quad \rho_2(u) = \alpha u\, e^{-\lambda u}, \quad u \geq 0,$$

где $\alpha > 0$, $n > 1$, $\lambda > 0$ — некоторые константы.

Из системы (21)–(23) видно, что матрица μ и компоненты отображений

$$f(t,x_t) = (f_1(t,x_t), f_2(t,x_t), f_3(t,x_t))^T,\ g(x_t) = \mathrm{diag}(g_1(x_t), g_2(x_t), g_3(x_t))$$

имеют следующий вид: $\mu = \mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$, $f_1(t,x_t) = \sigma_0\beta_0 s_0 x_3(t-\omega_3)$,

$$f_2(t,x_t) = \sigma_1\beta_1 x_1(t-\omega_1),\quad f_3(t,x_t) = \alpha\, x_2(t-\omega_2)\, h(x_2(t-\omega_2)),$$
$$g_1(x_t) = \beta_1,\quad g_2(x_t) \equiv 0,\quad g_3(x_t) \equiv 0.$$

Очевидно, что μ, $f(t,x_t)$, $g(t,x_t)$ удовлетворяют предположению (H0). Используя неравенство $0 \le h(u) \le 1$, $u \ge 0$, получаем, что для всех $x_2(t-\omega_2) \ge 0$ верно $f_3(t,x_t) \le a x_2(t-\omega_2)$.

Заметим, что $g_1(x_t)x_1(t) = \beta_1 x_1(t)$ – линейно зависит от $x_1(t)$. Поэтому, опираясь на структуру системы уравнений (21)–(23), можно использовать другую запись матрицы μ и отображения $g_1(x_t)$, а именно:

$$\mu = \mathrm{diag}(\beta_1+\mu_1, \mu_2, \mu_3),\ g_1(x_t) \equiv 0. \tag{25}$$

Тогда для модели (21)–(24) система (8), (9) может быть представлена в виде:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = \sigma_0\beta_0 s_0 y_3(t-\omega_3) - (\beta_1+\mu_1)y_1(t), \tag{26}$$
$$\frac{dy_2(t)}{dt} = \sigma_1\beta_1 y_1(t-\omega_1) - \mu_2 y_2(t),\quad t \ge 0, \tag{27}$$
$$\frac{dy_3(t)}{dt} = \alpha\, y_2(t-\omega_2) - \mu_3 y_3(t), \tag{28}$$
$$y_i(t) = \psi_i(t),\quad t \in I_\omega,\quad i = 1,2,3. \tag{29}$$

Обозначим: $a_1 = \sigma_1\beta_1$, $a_2 = \alpha$, $a_3 = \sigma_0\beta_0 s_0$,

$$\psi(t) = (\psi_1(t),\psi_2(t),\psi_3(t))^T,\ y(t) = (y_1(t),y_2(t),y_3(t))^T,$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \end{pmatrix},\ L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем систему (26)–(29) в компактной форме

$$\frac{dy(t)}{dt} = \widehat{f}(y_t) - \mu y(t) = L_1 y(t-\omega_1) + L_2 y(t-\omega_2) + L_3 y(t-\omega_3) - \mu y(t),\quad t \ge 0, \tag{30}$$

$$y(t) = \psi(t),\quad t \in I_\omega, \tag{31}$$

где под μ понимается матрица, заданная формулой (25). Матрица L, используемая в предположении (H1), имеет вид $L = L_1 + L_2 + L_3$ (в соответствии с формулой (7)) и не содержит нулевых строк. Следовательно, отображение $f(t,x_t)$ удовлетворяет предположению (H1).

Обратимся к теореме 2. Матрица $\mu - L$ (с учетом (25)) такова:

$$\mu - L = \begin{pmatrix} \beta_1 + \mu_1 & 0 & -a_3 \\ -a_1 & \mu_2 & 0 \\ 0 & -a_2 & \mu_3 \end{pmatrix}.$$

Получим условия, при которых $\mu - L$ является невырожденной M-матрицей. Применим критерий, связанный с положительностью главных (диагональных) миноров матрицы $\mu - L$, включая ее определитель (см., например, [9]). Вычисляя диагональные миноры этой матрицы, находим, что

$$M_1 = \beta_1 + \mu_1 > 0,\ M_2 = (\beta_1 + \mu_1)\,\mu_2 > 0, M_3 = (\beta_1 + \mu_1)\,\mu_2\,\mu_3 - a_1a_2a_3.$$

Следовательно, если верно неравенство

$$(\beta_1 + \mu_1)\,\mu_2\,\mu_3 > a_1a_2a_3, \tag{32}$$

то $\mu - L$ является невырожденной M-матрицей.

Опираясь на конкретный вид системы (30), (31), обратимся к неравенствам (13), (14) относительно $r \in R$ и $c \in R^3$:

$$\Big(\mu - rE - \sum_{i=1}^{3} e^{r\omega_i} L_i\Big)c \geq 0, \tag{33}$$

$$0 < r < \min(\beta_1 + \mu_1, \mu_2, \mu_3), \tag{34}$$

$$c > 0,\ c \geq \max_{t \in I_\omega}\big(e^{rt}\psi(t)\big). \tag{35}$$

Для нахождения решения системы (33)–(35) используем результаты раздела 2 работы [5]. Обозначим

$$\Omega(r) = \mu - rE - \sum_{i=1}^{3} e^{r\omega_i} L_i = \begin{pmatrix} \beta_1 + \mu_1 - r & 0 & -a_3e^{r\omega_3} \\ -a_1e^{r\omega_1} & \mu_2 - r & 0 \\ 0 & -a_2e^{r\omega_2} & \mu_3 - r \end{pmatrix}.$$

Параметр r будем искать как корень уравнения

$$\det \Omega(r) = 0 \tag{36}$$

с учетом неравенства (34). Определитель матрицы $\Omega(r)$ имеет вид:

$$\det \Omega(r) = (\beta_1 + \mu_1 - r)(\mu_2 - r)(\mu_3 - r) - a_1a_2a_3\, e^{r\,(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)}.$$

От (36) приходим к уравнению

$$(\beta_1 + \mu_1 - r)(\mu_2 - r)(\mu_3 - r) = a_1a_2a_3\, e^{r\,(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)}, \tag{37}$$

корни r которого будем искать на промежутке

$$r \in [r_1, r_2] = [0, \min(\beta_1 + \mu_1, \mu_2, \mu_3)]. \tag{38}$$

Пусть $F_1(r)$, $F_2(r)$ – функции, записанные в левой и правой частях уравнения (37), $r \in [r_1, r_2]$. Видно, что $F_1(r)$ монотонно убывает, а $F_2(r)$ монотонно возрастает на промежутке $r \in (r_1, r_2)$. Имеем, что $F_2(r_2) > F_1(r_2) = 0$. В силу выполнения неравенства (32) находим, что $F_1(r_1) > F_2(r_1) > 0$. Отсюда непосредственно получаем, что уравнение (37) имеет на промежутке (38) единственный корень $r = r_*$, и этот корень таков, что $0 < r_* < \min(\beta_1 + \mu_1, \mu_2, \mu_3)$.

Зафиксируем r_* и найдем решение системы

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \in R^3, \ \xi > 0, \ \Omega(r_*)\xi = 0. \tag{39}$$

Для матрицы $\Omega(r_*)$ имеем, что

$$\beta_1 + \mu_1 - r_* > 0, \ (\beta_1 + \mu_1 - r_*)(\mu_2 - r_*) > 0, \ \det \Omega(r_*) = 0.$$

Получаем, что ранг матрицы $\Omega(r_*)$ равен 2, и решение системы (39) имеет следующий вид:

$$\xi_3^{(*)} > 0, \ \xi_1^{(*)} = \frac{a_3 e^{r_* \omega_3}}{\beta_1 + \mu_1 - r_*} \xi_3^{(*)} > 0, \ \xi_2^{(*)} = \frac{\mu_3 - r_*}{a_2 e^{r_* \omega_2}} \xi_3^{(*)} > 0. \tag{40}$$

Следовательно, найдено решение системы (33) с учетом $c > 0$. Обратимся к неравенствам (35). Положим, что искомый вектор $c = c_* = \xi^{(*)} > 0$. Из (40) следует, что для каждой фиксированной функции $\psi(t)$ можно выбрать компоненту $\xi_3^{(*)}$ вектора $\xi^{(*)}$, обеспечивающую выполнение неравенства

$$\xi^{(*)} \geq \max_{t \in I_\omega} \big(e^{r_* t} \psi(t)\big).$$

В итоге получаем, что при выполнении неравенства (32) для решения $x(t)$ модели (21)–(24) имеет место оценка

$$0 \leq x(t) \leq c_* e^{-r_* t}, \ t \in [-\omega, \infty).$$

Результаты исследования модели (21)–(24) можно интерпретировать следующим образом. Неравенство (32) указывает на связь между параметрами процесса кроветворения, в рамках которой может возникать аплазия костного мозга (полное исчезновение созревающих клеток костного мозга и зрелых клеток крови). Такая ситуация возможна, в частности, за счет увеличения интенсивностей разрушения созревающих клеток костного мозга или зрелых клеток крови, а также снижения пролиферативного потенциала созревающих клеток костного мозга под влиянием различных факторов. Еще одной из причин может являться патологическая ситуация, приводящая к снижению выработки созревающих клеток костного мозга из стволовых кроветворных клеток или нарушения в производстве гормона–поэтина.

Заключение

Основной результат статьи состоит в разработке условий, обеспечивающих покомпонентно экспоненциально убывающие оценки решений задачи Коши для систем нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием специального вида. Параметры экспоненциальных оценок находятся как решение нелинейной системы неравенств, построенной на основе линейных мажорант отображений, входящих в правые части рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. Способы нахождения указанных параметров предполагают использование достаточно простых численных методов. Предложенный подход может быть применен для изучения еще одной проблемы, а именно: построение экспоненциально убывающих оценок по части компонент решений задачи Коши для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. Необходимость построения таких оценок обусловлена изучением высокоразмерных математических моделей, возникающих в задачах иммунологии и эпидемиологии.

Список цитируемых источников

1. *Воеводин, В. В., Кузнецов, Ю. А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.

   Voevodin, V. V., Kuznetsov, Yu. A. Matrices and Calculations. Moskva: Nauka, 1984. Zbl 0537.65024

2. *Колмановский, В. Б., Носов, В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.

   Kolmanovskii, V. B., Nosov, V. R. Stability and periodic modes of a controlled systems with aftereffect. Moskva: Nauka, 1981. Zbl 0457.93002

3. *Красносельский, М. А., Вайникко, Г. М., Забрейко, П. П., Рутицкий, Я. Б., Стеценко, В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.

   Krasnoselskiy, M. A., Vainikko, G. M., Zabreiko, P. P., Rutitskiy, J. B., Stretsko, V. J. Approximate solution of operator equations. Moskva: Nauka, 1969.

4. *Перцев, Н. В.* Применение М-матриц для построения экспоненциальных оценок решений задачи Коши для некоторых систем линейных разностных и дифференциальных уравнений. Математические труды. 16, № 2, 111–141 (2013).

   Pertsev, N. V. Application of M-matrices in construction of exponential estimates for solutions to the Cauchy problem for systems of linear difference and differential equations. Siberian Advances in Mathematics. 24, Issue 4, 240–260 (2014).

5. *Перцев, Н. В.* Двусторонние оценки на решения задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений Важевского с запаздыванием. Сибирский матем. журн. 54, № 6, 1368–1379 (2013).

   Pertsev, N. V. Two-sided estimates for solutions to the Cauchy problem for Wazewski linear differential systems with delay. Siberian Math. J., 54, No.6, 1089–1098 (2013). Zbl 1293.34097

6. *Перцев, Н. В.* Глобальная разрешимость и оценки решений задачи Коши для функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием, используемых в моделях живых систем. Сибирский матем. журн. 59, № 1, 143–157 (2018).

Pertsev, N. V. Global solvability and estimates for solutions to the Cauchy problem for the retarded functional differential equations that are used to the model living systems. Siberian Math. J., 59, No.1, 113–125 (2018).

7. *Цалюк, З. Б.* Интегральные уравнения Вольтерра. В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Матем. анал. 15, 131–198 (1977).

Tsalyuk, Z. B. Volterra integral equations, Itogi nauki i tekhniki. Mat. analiz (Results of Science and Technology: Mathematical Analysis). Moskva: VINITI, 15, 131–198 (1977).

8. *Azbelev, N. V., Maksimov, V. P., Rakhmatullina, L. F.* Introduction to the theory of functional differential equations: Methods and applications. Hindawi Publishing Corporation, 2007. Zbl 1202.34002

9. *Berman, A., Plemmons, R. J.* Nonnegative matrices in the mathematical sciences. New York: Academic Press, 1979. Zbl 0484.15016

10. *Hale J. K.* Theory of Functional Differential Equations. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, and Berlin, 1977. Zbl 0352.34001

Получена 12.03.2020

Динамические системы, 2020, том 10(38), №1, 84–96

УДК 517.929

О достаточных признаках экспоненциальной устойчивости линейных автономных дифференциальных уравнений с последействием[1]

Т. Л. Сабатулина

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь 614990. *E-mail: tlsabatulina@list.ru*

Аннотация. В работе рассматриваются линейные автономные функционально-дифференциальные уравнения с последействием. Предлагается способ получения эффективных, легко проверяемых достаточных признаков устойчивости таких уравнений на основе положительности фундаментального решения некоторого вспомогательного уравнения. Используя известные условия положительности фундаментального решения дифференциальных уравнений с последействием, установлены новые признаки экспоненциальной устойчивости для некоторых классов линейных автономных дифференциальных уравнений с последействием.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, последействие, экспоненциальная устойчивость, эффективные признаки.

On sufficient conditions of exponential stability for linear autonomous differential equations with aftereffect

T. L. Sabatulina

Perm National Research Polytechnic University, Perm 614990.

Abstract. In this paper we consider linear autonomous functional differential equations with aftereffect. These equations may contain a large number of parameters. We propose an approach to obtain effective and easily verifiable sufficient conditions of exponential stability for these equations. In the approach, we use the positiveness of the fundamental solution of an auxiliary equation. Based on known conditions of the positiveness of the fundamental solution for differential equations with aftereffect, we obtain new sufficient conditions of exponential stability for some classes of linear autonomous equations with aftereffect. The equations contain concentrated delays, distributed delays, or singular component (in the form of the Cantor function).

Keywords: functional differential equations, aftereffect, exponential stability, effective conditions.

MSC 2010: 34K20

---

[1]Работа выполнена в рамках госзадания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (задание FSNM-2020-0028) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-01-00928).

Введение

Как известно [1, 2, 3, 4], задачу устойчивости для линейных автономных функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) полностью решает исследование нулей его характеристической функции. Однако, как показывает опыт, исчерпывающее исследование расположения нулей характеристической функции возможно лишь для сравнительно простых уравнений с небольшим количеством параметров [3, 4, 5, 17, 6, 7]. Поэтому задача получения легко проверяемых достаточных признаков устойчивости, применимых к широким классам ФДУ, остаётся актуальной. В данной работе предлагается способ получения таких признаков на основе положительности фундаментального решения некоторого вспомогательного уравнения. Решения ФДУ первого порядка, в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, не обладают свойствами знакоопределённости и монотонности [7, 8]. Однако для некоторых классов ФДУ эти свойства сохраняются. Используя их, удаётся получать более точные и эффективно проверяемые признаки устойчивости.

1. Постановка задачи

Пусть $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, L_∞ — пространство ограниченных в существенном на $\mathbb{R}_+$ функций с нормой $\|x\|_\infty = \operatorname{vrai\,sup}_{t\in\mathbb{R}_+} |x(t)|$.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + \int_0^\omega x(t-s)\,dr(s) = \int_0^\tau x(t-s)\,dk(s) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $\omega, \tau \in \mathbb{R}_+$, функции $r\colon [0,\omega] \to \mathbb{R}$ и $k\colon [0,\tau] \to \mathbb{R}$ имеют ограниченную вариацию, $r(0) = 0$, $k(0) = 0$, интегралы понимаются в смысле Римана–Стилтьеса, функция f локально суммируема.

Обозначим $R = \int_0^\omega dr(s)$, $K = \int_0^\tau |dk(s)|$.

Следуя [9, с. 9], назовём *решением* уравнения (1) локально абсолютно непрерывную функцию, удовлетворяющую (1) почти всюду. При отрицательных значениях аргумента, не нарушая общности, функцию x полагаем равной нулю.

Как известно [9, с. 84, теорема 1.1], в указанных предположениях решение уравнения (1) при любом заданном начальном условии $x(0)$ существует, единственно и представимо в виде

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t X(t-s)f(s)\,ds. \tag{2}$$

Функцию X называют *фундаментальным решением* уравнения (1). Из представления (2) следует, что фундаментальное решение является решением уравнения

$$\dot{x}(t) + \int_0^\omega x(t-s)\,dr(s) = \int_0^\tau x(t-s)\,dk(s), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

дополненного начальным условием $x(0) = 1$. Фундаментальное решение естественно сделать основным объектом исследования.

Определение 1. Уравнение (1) будем называть *экспоненциально устойчивым*, если при некоторых положительных N и γ для всех $t \geqslant 0$ справедлива оценка $|X(t)| \leqslant Ne^{-\gamma t}$.

2. Основной результат

Рассмотрим уравнение, которое определяется левой частью уравнения (1):

$$\dot{x}(t) + \int_0^{\omega} x(t-s)\,dr(s) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{4}$$

Это уравнение далее будем называть *уравнением сравнения*. Через X_0 обозначим фундаментальное решение уравнения (4).

Лемма 1. *Пусть уравнение* (4) *экспоненциально устойчиво. Тогда* $\int_0^{\infty} X_0(t)\,dt = 1/R$.

Доказательство. Проинтегрируем уравнение (4), а затем поменяем порядок интегрирования (в силу теоремы Фубини [10, с. 317] это возможно):

$$\begin{aligned} X_0(t) - X_0(0) = -\int_0^{\omega}\int_0^{s} X_0(s-\xi)\,dr(\xi)\,ds - \int_{\omega}^{t}\int_0^{\omega} X_0(s-\xi)\,dr(\xi)\,ds = \\ = -\int_0^{\omega}\int_{\xi}^{\omega} X_0(s-\xi)\,ds\,dr(\xi) - \int_0^{\omega}\int_{\omega}^{t} X_0(s-\xi)\,ds\,dr(\xi) = \\ = -\int_0^{\omega}\int_{\xi}^{t} X_0(s-\xi)\,ds\,dr(\xi) = -\int_0^{\omega}\int_0^{t-\xi} X_0(s)\,ds\,dr(\xi). \end{aligned}$$

Перейдём к пределу при $t \to \infty$, при этом учтём, что уравнение (4) экспоненциально устойчиво, то есть $X_0(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, и воспользуемся теоремой Лебега [10, с. 302–303]:

$$1 = \int_0^{\omega}\int_0^{\infty} X_0(s)\,ds\,dr(\xi) = R\int_0^{\infty} X_0(s)\,ds,$$

что завершает доказательство леммы. □

Лемма 2. *Пусть $a \in \mathbb{R}$ и для фундаментального решения уравнения* (4) *справедливо неравенство $\dot{X}_0(t) \leqslant -aX_0(t)$. Тогда $X_0(t) \leqslant e^{-at}$.*

Доказательство. Из условия леммы вытекает, что

$$\frac{d}{dt}\left(X_0(t)e^{at}\right) = e^{at}\Big(\dot{X}_0(t) + aX_0(t)\Big) \leqslant 0.$$

Тогда функция $X_0(t)e^{at}$ не возрастает. Значит, $X_0(t)e^{at} \leqslant X_0(0)e^{a\cdot 0} = 1$, то есть $X_0(t) \leqslant e^{-at}$. □

Приведём в удобной для нас форме теорему типа Боля–Перрона.

Предложение 1 ([11, с. 103, теорема 3.3.1]). *Для уравнения* (1) *эквивалентны следующие утверждения:*

а) при любых $x(0) \in \mathbb{R}$ *и* $f \in L_\infty$ *решение уравнения* (1) *принадлежит* L_∞*;*

б) уравнение (1) *экспоненциально устойчиво.*

На основе предложения 1 докажем следующий признак экспоненциальной устойчивости.

Теорема 1. *Пусть* $K < R$ *и существуют* $N_0, \gamma_0 > 0$*, такие что при любом* $t \in \mathbb{R}_+$ *выполняются оценки*

$$0 < X_0(t) \leqslant N_0 e^{-\gamma_0 t}. \tag{5}$$

Тогда уравнение (1) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. Опираясь на формулу (2), перепишем уравнение (1) в эквивалентном интегральном виде

$$(I - T)x = g, \tag{6}$$

где

$$g(t) = X_0(t)x(0) + \int_0^t X_0(t-s)f(s)\,ds, \ (Tx)(t) = \int_0^t X_0(t-s)\int_0^\tau x(s-\xi)\,dk(\xi)\,ds.$$

Заметим, что если $f \in L_\infty$, то $g \in L_\infty$. Учитывая положительность функции X_0 и лемму 1, оценим норму оператора $T\colon L_\infty \to L_\infty$:

$$\begin{aligned}\|(Tx)(t)\|_\infty &= \sup_{t\geqslant 0}\left|\int_0^t X_0(t-s)\int_0^\tau x(s-\xi)\,dk(\xi)\,ds\right| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{t\geqslant 0}\left(\int_0^t X_0(t-s)\int_0^\tau |dk(\xi)|\,ds\right)\|x\|_\infty = K\sup_{t\geqslant 0}\left(\int_0^t X_0(t-s)\,ds\right)\|x\|_\infty = \\ &= K\left(\int_0^\infty X_0(s)\,ds\right)\|x\|_\infty = \frac{K}{R}\|x\|_\infty.\end{aligned}$$

Следовательно, $\|T\| \leqslant K/R$. Если $K < R$, то $\|T\| < 1$ и, в силу принципа сжимающих отображений [10, с. 320], при любом $f \in L_\infty$ уравнение (6) имеет решение в L_∞. Поэтому из предложения 1 вытекает теорема 1. □

Для успешного применения теоремы 1 требуются эффективные условия положительности фундаментального решения уравнения (4). Это само по себе является самостоятельной задачей, которая решалась для различных классов уравнений в работах [13, 14, 7, 15, 8]. Используя полученные в них результаты, можно устанавливать достаточные признаки экспоненциальной устойчивости для линейных автономных ФДУ с последействием. Далее мы найдём такие признаки для нескольких классов уравнений вида (1).

3. Эффективные признаки устойчивости

3.1. Уравнение с сосредоточенными запаздываниями

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + a_1 x(t-h_1) + a_2 x(t-h_2) = \int_0^\tau x(t-s)\, dk(s), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{7}$$

где $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$, $h_1, h_2 > 0$. Не теряя общности, можно считать, что $h_1 < h_2$.

Для (7) уравнение сравнения имеет вид

$$\dot{x}(t) + a_1 x(t-h_1) + a_2 x(t-h_2) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{8}$$

Зададим функцию $v = \varphi_1(u)$ параметрически равенствами

$$\left\{ u = -\frac{1+\zeta h_2}{h_2 - h_1} e^{\zeta h_1}, \quad v = \frac{1+\zeta h_1}{h_2 - h_1} e^{\zeta h_2}, \quad \zeta \in \left[-\frac{1}{h_2}, -\frac{1}{h_1} \right] \right\}.$$

Множество P_1 определим следующим образом: $P_1 = \{(u,v)\colon 0 \leqslant v \leqslant \varphi_1(u)\}$. На рис. 1 множество P_1 закрашено.

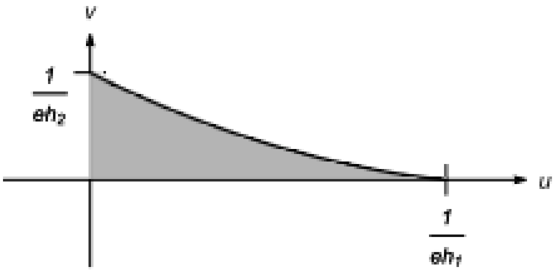


Рис. 1. Множество P_1.

В работе [12] показано, что фундаментальное решение уравнения (8) положительно при $\{a_1, a_2\} \in P_2$. Этот результат позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\{a_1, a_2\} \in P_1$ и $\int_0^\tau |dk(s)| < a_1 + a_2$. Тогда уравнение* (7) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. Как было отмечено выше, фундаментальное решение X_0 уравнения (8) положительно. Тогда $\dot X_0(t) < 0$, значит, $X_0(t)$ убывает на $\mathbb{R}_+$ и $\dot X_0(t) \leqslant -a_1X_0(t) - a_2X_0(t) = -(a_1+a_2)X_0(t)$. Поэтому из леммы 2 следует $X_0(t) \leqslant e^{-(a_1+a_2)t}$. Для уравнения (7) $R = a_1 + a_2$. Ссылка на теорему 1 завершает доказательство. □

Приведём два следствия теоремы 2.

Следствие 1. *Пусть* $\{a_1, a_2\} \in P_1$ *и* $\sum_{m=1}^{M} |b_m| < a_1 + a_2$. *Тогда уравнение*

$$\dot x(t) + a_1x(t-h_1) + a_2x(t-h_2) = \sum_{m=1}^{M} b_m x(t-\tau_m), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{9}$$

экспоненциально устойчиво.

Следствие 2. *Пусть* $0 < ah \leqslant \frac{1}{e}$ *и* $\sum_{m=1}^{M} |b_m| < a$. *Тогда уравнение*

$$\dot x(t) + ax(t-h) = \sum_{m=1}^{M} b_m x(t-\tau_m), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{10}$$

экспоненциально устойчиво.

3.2. Уравнение с распределёнными запаздываниями

Пусть теперь уравнение сравнения содержит распределённое запаздывание:

$$\dot x(t) + a_1\int_{t-h_1}^{t} x(s)\,ds + a_2\int_{t-h_2}^{t} x(s)\,ds = \int_0^{\tau} x(t-s)\,dk(s), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{11}$$

где $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$, $h_1, h_2 > 0$. Не теряя общности, можно считать, что $h_1 < h_2$.

Для (11) уравнение сравнения имеет вид

$$\dot x(t) + a_1\int_{t-h_1}^{t} x(s)\,ds + a_2\int_{t-h_2}^{t} x(s)\,ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{12}$$

Зададим функцию $v = \varphi_2(u)$ параметрически равенствами

$$\left\{ u = -\frac{\zeta e^{\zeta h_1}\left(2e^{\zeta h_2} - \zeta h_2 - 2\right)}{h_1(e^{\zeta h_2}-1) - h_2(e^{\zeta h_1}-1)}, \quad v = \frac{\zeta e^{\zeta h_2}\left(2e^{\zeta h_1} - \zeta h_1 - 2\right)}{h_1(e^{\zeta h_2}-1) - h_2(e^{\zeta h_1}-1)}, \zeta \in \left[-\frac{\zeta_0}{h_2}, -\frac{\zeta_0}{h_1}\right] \right\},$$

где ζ_0 — положительный корень уравнения $e^{-\zeta} = 1 - \frac{\zeta}{2}$. Множество P_2 определим следующим образом: $P_2 = \{(u,v)\colon 0 \leqslant v \leqslant \varphi_2(u)\}$. На рис. 2 множество P_2

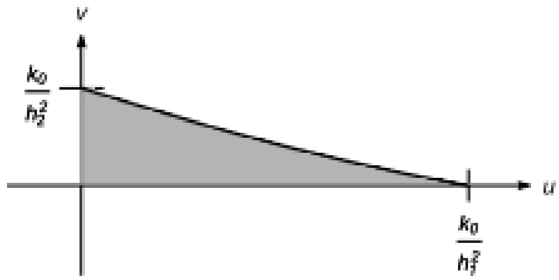


Рис. 2. Множество P_2.

закрашено. Постоянная k_0 определяется через корень ζ_0. Численные методы дают значение $k_0 = \zeta_0(2-\zeta_0) \approx 1.59362$.

Из работ [16] и [19] следует, что фундаментальное решение уравнения (12) положительно при $\{a_1, a_2\} \in P_2$. Этот результат позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\{a_1, a_2\} \in P_2$ *и* $\int_0^\tau |dk(s)| < a_1h_1 + a_2h_2$. *Тогда уравнение* (11) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. Как было отмечено выше, фундаментальное решение X_0 уравнения (12) положительно. Тогда $\dot{X}_0(t) < 0$, значит, $X_0(t)$ убывает на $\mathbb{R}_+$ и $\dot{X}_0(t) \leqslant -a_1\int_{t-h_1}^t X_0(t)\,ds - a_2\int_{t-h_2}^t X_0(t)\,ds = -(a_1h_1 + a_2h_2)X_0(t)$. Поэтому из леммы 2 вытекает $X_0(t) \leqslant e^{-(a_1h_1+a_2h_2)t}$. Для уравнения (11) $R = a_1h_1 + a_2h_2$. Остаётся применить теорему 1. $\square$

Приведём два следствия теоремы 3.

Следствие 3. *Пусть* $\{a_1, a_2\} \in P_2$ *и* $\sum_{m=1}^M |b_m| + \sum_{n=1}^N |c_n|\theta_n < a_1h_1 + a_2h_2$. *Тогда уравнение*

$$\dot{x}(t) + a_1\int_{t-h_1}^t x(s)\,ds + a_2\int_{t-h_2}^t x(s)\,ds = \\ = \sum_{m=1}^M b_m x(t-\tau_m) + \sum_{n=1}^N c_n\int_{t-\theta_n}^t x(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{13}$$

экспоненциально устойчиво.

Следствие 4. *Пусть* $0 < ah^2 \leqslant k_0$ *и* $\int_0^\tau |dk(s)| < ah$. *Тогда уравнение*

$$\dot{x}(t) + a\int_{t-h}^t x(s)\,ds = \int_0^\tau x(t-s)\,dk(s), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{14}$$

экспоненциально устойчиво.

3.3. Уравнение со слагаемыми без запаздываний

Область положительности фундаментального решения существенно расширяется, если в уравнение сравнения входит слагаемое, содержащее нулевое запаздывание. Рассмотрим два таких уравнения:

$$\dot{x}(t) + a_1 x(t) + a_2 x(t-h) = \int_0^\tau x(t-s)\,dk(s), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{15}$$

$$\dot{x}(t) + a_1 x(t) + a_2 \int_{t-\theta-h}^{t-\theta} x(s)\,ds = \int_0^\tau x(t-s)\,dk(s), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{16}$$

где $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $h, \tau, \theta \in \mathbb{R}_+$.

Отметим, что, в отличие от уравнений (7) и (11), в уравнениях (15) и (16) коэффициенты a_1, a_2 не обязательно положительны.

Для (15) и (16) уравнения сравнения имеют вид

$$\dot{x}(t) + a_1 x(t) + a_2 x(t-h) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{17}$$

$$\dot{x}(t) + a_1 x(t) + a_2 \int_{t-\theta-h}^{t-\theta} x(s)\,ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{18}$$

Определим $P_3 = \{(u,v)\colon -v < u \leqslant e^{-v-1}\}$. Множество P_3 изображено на рис. 3.

В работе [14] доказано, что фундаментальное решение уравнения (17) положительно тогда и только тогда, когда $a_2 h \leqslant e^{-a_1 h - 1}$. Этот результат позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $\{a_2 h, a_1 h\} \in P_3$ *и* $\int_0^\tau |dk(s)| < a_1 + a_2$. *Тогда уравнение* (15) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. В силу [17] и [14] для фундаментального решения уравнения (17) выполняется (5). Для уравнения (15) $R = a_1 + a_2$. Применение теоремы 1 обеспечивает экспоненциальную устойчивость уравнения (15). □

В декартовой системе координат $Ouvw$ зададим поверхность $u = \omega(v, w)$ параметрически:

$$\left\{ u = \zeta + \frac{\zeta\left(1 - e^{\zeta}\right)}{e^{\zeta}(\zeta(w+1) - 1) + (1 - \zeta w)}, \right.$$
$$\left. v = \frac{\zeta^2 e^{-\zeta w}}{e^{\zeta}(\zeta(w+1) - 1) + (1 - \zeta w)}, \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad w \geqslant 0. \right\}$$

Определим $P_4 = \{(u,v)\colon -v \leqslant u \leqslant \omega(v,w)\}$. Множество P_4 изображено на рис. 3 (находится между плоскостью и поверхностью).

В работе [7] доказано, что фундаментальное решение уравнения (18) положительно тогда и только тогда, когда $a_2 h^2 \leqslant \omega(a_1 h, \theta/h)$. Этот результат позволяет доказать следующее утверждение.

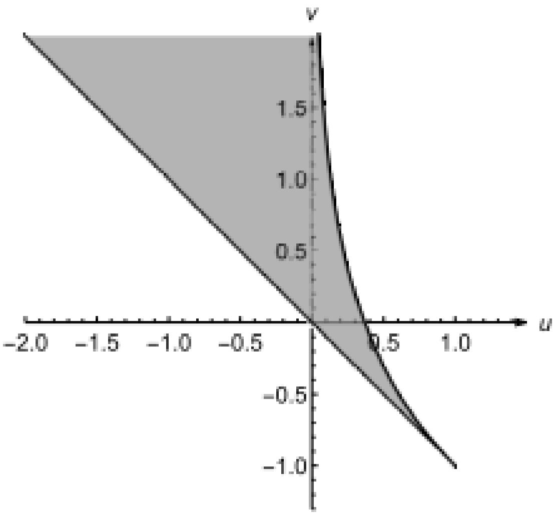


Рис. 3. Множество P_3.

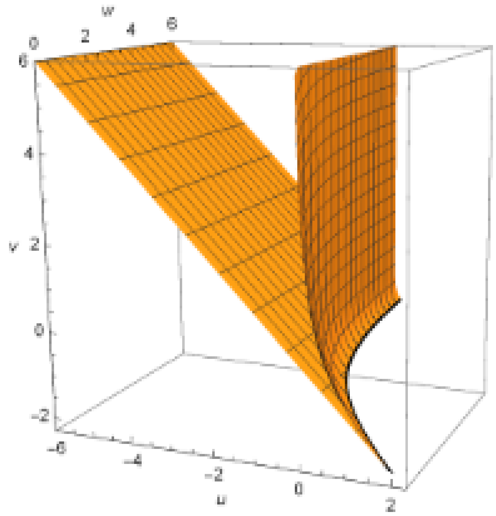


Рис. 4. Множество P_4.

Теорема 5. *Пусть* $\{a_2h^2, a_1h, \theta/h\} \in P_4$ *и* $\int_0^\tau |dk(s)| < a_1 + a_2h$. *Тогда уравнение* (16) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. В силу [18] и [7] для фундаментального решения уравнения (18) выполняется (5). Для уравнения (16) $R = a_1 + a_2h$. Остаётся применить теорему 1. □

3.4. Уравнение с сингулярной составляющей

В качестве уравнения сравнения можно выбирать и уравнение с сингулярной составляющей. Рассмотрим пример, в котором функция r является «канторовой лестницей» [10, с. 341]:

$$\dot{x}(t) + a\int_0^1 x(t-s)\,dc(s) = \int_0^\tau x(t-s)\,dk(s), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{19}$$

где $a \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}_+$.

Для (19) уравнение сравнения имеет вид

$$\dot{x}(t) + a\int_0^1 x(t-s)\,dc(s) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{20}$$

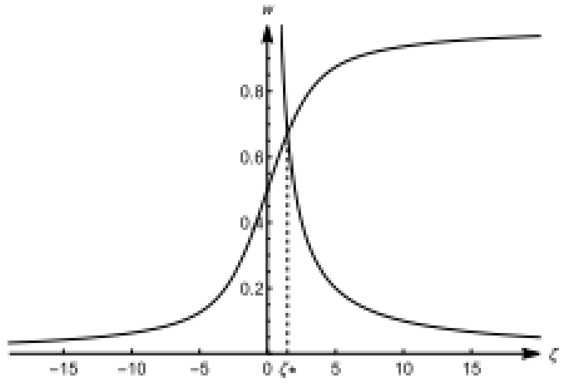


Рис. 5. Функция $w(\zeta)$ (толстая линия).

Пусть $\phi(\zeta) = \int_0^1 e^{\zeta\xi}\, dc(\xi)$, $w(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)}$. Свойства функции w исследованы в работе [8]: функция w определена и непрерывно дифференцируема на всей оси, монотонно возрастает от 0 до 1, $w(\zeta) + w(-\zeta) = 1$. График функции w изображён на рис. 5. Обозначим единственный корень уравнения $1/\zeta = w(\zeta)$ через ζ_* (см. рис. 5) и положим $a_* = \zeta_*/\phi(\zeta_*)$. Численные методы дают $\zeta_* \approx 1.48$, $a_* \approx 0.618$. В той же работе [8] доказано, что фундаментальное решение уравнения (20) положительно тогда и только тогда, когда $a \leqslant a_*$. На основе этого результата получим ещё один признак устойчивости.

Теорема 6. *Пусть* $\int_0^\tau |dk(s)| < a \leqslant a_*$. *Тогда уравнение* (19) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. Как отмечалось выше, в условиях леммы $X_0 > 0$. Тогда $\dot{X}_0(t) < 0$, значит, $X_0(t)$ убывает на $\mathbb{R}_+$ и $\dot{X}_0(t) \leqslant -a\int_0^1 X_0(t)\, dc(s) = -aX_0(t)$. Поэтому из леммы 2 следует $X_0(t) \leqslant e^{-at}$. Для уравнения (19) $R = a$. Ещё раз применяя теорему 1, получаем требуемое утверждение. □

Заключение

В работе предложен новый метод получения эффективных легко проверяемых признаков экспоненциальной устойчивости для линейных автономных ФДУ с последействием. Эти условия устанавливаются на основе положительности фундаментального решения уравнения сравнения. Суть метода состоит в построении уравнения сравнения — устойчивого ФДУ, фундаментальное решение которого положительно, — с последующим описанием класса близких к нему уравнений, для которых устойчивость сохраняется. Эффективность метода напрямую зависит от наличия и точности условий положительности фундаментального решения для уравнения сравнения, что стимулирует продолжение исследований в этом направлении. Используемую в работе технику предполагается развивать дальше, применяя её к изучению устойчивости линейных неавтономных ФДУ, а также нелинейных уравнений и систем.

Список цитируемых источников

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально–разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

   Bellman, R., Cooke, K. L. Differential–difference equations. New York: Academic Press, 1963.

2. *Зубов В. И.* К теории линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом. Известия вузов. Математика, №6, 86-95 (1958).

   Zubov, V. I. On the theory of linear stationary systems with lagging arguments. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., №6, 86-95 (1958). (in Russian)

3. *Неймарк Ю. И.* Устойчивость линеаризованных систем (дискретных и распределённых). Л.: ЛКВВИА, 1949.

   Neimark, Yu. I. Stability of linearized systems (discrete and distributed). Leningrad: LKVVIA, 1949. (in Russian)

4. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

   El'sgol'ts, L. E., Norkin, S. B. Introduction to the theory of differential equations with deviating argument. Moscow: Nauka, 1971. (in Russian)

5. *Мулюков М. В.* Устойчивость двупараметрических систем линейных автономных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием. Изв. ИМИ УдГУ, 51, 79–122 (2018).

   Mulyukov, M. V. Stability of two-parameter systems of linear autonomous differential equations with bounded delay. Izv. IMI UdGU, 51, 79–122 (2018). (in Russian)

6. *Вагина М. Ю.* Логистическая модель с запаздывающим усреднением. Автоматика и телемеханика, №4, 167-173 (2003).

   Vagina, M. Yu. A Delay-Averaged Logistic Model. Avtomat. i Telemekh., №4, 167-173 (2003). (in Russian)

7. *Малыгина В. В., Сабатулина Т. Л.* Знакоопределённость решений и устойчивость линейных дифференциальных уравнений с переменным распределённым запаздыванием. Известия вузов. Математика. №8, 73-77 (2008).

   Malygina, V. V., Sabatulina, T. L. The fixed sign property of solutions and stability of linear differential equations with varying distributed delay. Russian Mathematics (Iz. VUZ), 52, No. 8, 61-64 (2008).

8. *Sabatulina, T., Malygina, V.* On positiveness of the fundamental solution for a linear autonomous differential equation with distributed delay. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. No. 61., 1-16 (2014).

9. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

   Azbelev, N. V., Maksimov, V. P., Rakhmatullina, L. F. Introduction to the Theory of Linear Functional Differential Equations. Atlanta: World Federation Publ., 1995.

10. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.

Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V. Elements of theory of functions and functional analysis. Moscow: Nauka, 1981. (in Russian)

11. *Азбелев Н. В., Симонов П. М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновнными производными. Пермь: изд-во Пермск. ун-та, 2001.

Azbelev, N. V., Simonov, P. M. Stability of differential equations with aftereffect. Stability and Control: Theory, Methods and Applications 20. London: Taylor and Francis, 2003.

12. *Баландин А. С.* О положительности фундаментального решения линейных автономных дифференциально-разностных уравнений с коэффициентами разных знаков. Сборник трудов VII Международной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2014)» (стр. 22-25). Воронеж: ООО «Издательство «Научная книга», 2014.

Balandin, A. S. On positiveness of the fundamental solution of linear autonomous differential-difference equations with different sign coefficients. In Proc. VII Int. conf. "Modern methods of applied mathematics, control theory and computer technology" (pp. 22-25). Voronezh: OOO "Izdatel'stvo "Nauchnaya kniga", 2014. (in Russian)

13. *Мышкис А. Д.* О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом. Матем. сб. 28 (70), №3, 641-658 (1951).

Myshkis, A. D. On solutions of linear homogeneous differential equations of the first order of stable type with a retarded argument. Mat. Sb. (N.S.) 28 (70), No. 3, 641-658 (1951). (in Russian)

14. *Гусаренко С. А., Домошницкий А. И.* Об асимптотических и осцилляционных свойствах линейных скалярных функционально-дифференциальных уравнений первого порядка. Дифференц. уравнения. **25**, No. 12, 2090–2103 (1989).

Gusarenko, S. A., Domoshnitskii, A. I. Asymptotic and oscillation properties of first-order linear scalar functional-differential equations. Differ. Equ. 25, No. 12, 1480–1491 (1990).

15. *Agarwal, R. P., Berezansky, L., Braverman, E., Domoshnitsky, A.* Nonoscillation theory of functional differential equations with applications. New York: Springer, 2012.

16. *Сабатулина Т. Л.* Об осцилляции решений автономного дифференциального уравнения с двумя распределёнными запаздываниями. Сборник трудов IX Международной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2016)» (стр. 293-296). Воронеж: ООО «Издательство «Научная книга», 2016.

Sabatulina, T. L. On oscillation of solutions for autonomous differential equation with two distributed delays. In Proc. IX Int. conf. "Modern methods of applied mathematics, control theory and computer technology" (pp. 293-296). Voronezh: OOO "Izdatel'stvo "Nauchnaya kniga", 2016. (in Russian)

17. *Андронов А. А., Майер А. Г.* Простейшие линейные системы с запаздыванием. Автоматика и телемеханика. 7, №2-3, 95-106 (1946).

Andronov, A. A., Maier, A. G. Simplest linear systems with delay. Avtomat. i Telemekh., 7, No. 2-3, 95–106 (1946). (in Russian)

18. *Сабатулина Т. Л., Малыгина В. В.* Некоторые признаки устойчивости линейного автономного дифференциального уравнения с распределённым запаздыванием. Известия вузов. Математика. №6, 55-63 (2007).

Sabatulina, T. L., Malygina, V. V. Several stability tests for linear autonomous differential equations with distributed delay. Russian Mathematics (Iz. VUZ), 51, No. 6, 52-60 (2007).

19. *Sabatulina, T. L.* Oscillating and sign-definite solutions to autonomous functional-differential equations. J. Math. Sci., 230, No. 5, 766-769 (2018).

Получена 24.02.2020

Динамические системы, 2020, том 10(38), №1, 97–114

УДК 517.929.4

Асимптотические свойства решений в моделях биохимических реакций[1]

М. А. Скворцова

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
Новосибирск 630090. *E-mail: sm-18-nsu@yandex.ru*

Аннотация. В работе рассматриваются две модели биохимических реакций, описываемые системами дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Изучаются асимптотические свойства решений данных систем. При условиях, когда системы обладают асимптотически устойчивыми положениями равновесия, получены оценки решений, характеризующие скорости стабилизации на бесконечности, и указаны множества притяжения положений равновесия. Результаты получены с использованием модифицированных функционалов Ляпунова – Красовского.

Ключевые слова: модели биохимических реакций, уравнения с запаздывающим аргументом, асимптотическая устойчивость, оценки решений, множество притяжения, модифицированный функционал Ляпунова – Красовского.

Asymptotic properties of solutions in biochemical reactions models

M. A. Skvortsova
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Novosibirsk State University,
Novosibirsk 630090.

Abstract. We consider two biochemical reactions models described by systems of delay differential equations. We study asymptotic properties of solutions to these systems. Under conditions when systems have asymptotically stable equilibrium points, we obtain estimates of solutions characterizing the stabilization rate of at infinity, and specify attraction sets of equilibrium points. The results are obtained using modified Lyapunov–Krasovskii functionals.

Keywords: biochemical reactions models, delay differential equations, asymptotic stability, estimates of solutions, attraction set, modified Lyapunov–Krasovskii functional.

MSC 2010: 34K20, 34K25, 37N25

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10086).

1. Введение

Настоящая работа посвящена изучению асимптотических свойств решений двух моделей биохимических реакций, предложенных в работе [17]. Модели описывают синтез белка. Первая модель представляет собой систему дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = ad_0(t-\tau) - bx(t), \\[2mm] \dfrac{d}{dt}d_0(t) = -k_1x(t)d_0(t) + k_{-1}d_1(t), \\[2mm] \dfrac{d}{dt}d_1(t) = k_1x(t)d_0(t) - k_{-1}d_1(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $x(t)$ — концентрация белка в момент времени t. Предполагается, что производство белка в момент времени t определяется химическим состоянием участка оператора в момент времени $(t-\tau)$: если оператор в момент времени $(t-\tau)$ активен, к моменту времени t белок будет произведен, если оператор не активен, то производство белка блокируется. Концентрация активного участка оператора обозначена через $d_0(t)$, неактивного — через $d_1(t)$. Коэффициенты системы и параметр запаздывания предполагаются положительными.

Вторая модель также является системой дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = ad_0(t-\tau) - bx(t) - k_2x^2(t) + 2k_{-2}x_2(t), \\[2mm] \dfrac{d}{dt}x_2(t) = \dfrac{k_2}{2}x^2(t) - k_{-2}x_2(t) - k_1x_2(t)d_0(t) + k_{-1}d_1(t), \\[2mm] \dfrac{d}{dt}d_0(t) = -k_1x_2(t)d_0(t) + k_{-1}d_1(t), \\[2mm] \dfrac{d}{dt}d_1(t) = k_1x_2(t)d_0(t) - k_{-1}d_1(t). \end{cases} \tag{1.2}$$

Данная модель учитывает, что белок может существовать как в виде изолированных мономеров $x(t)$, так и в виде димеров $x_2(t)$, при этом только димеры могут деактивировать участок оператора. Коэффициенты системы (1.2) и параметр запаздывания также предполагаются положительными.

Подробное описание моделей (1.1) и (1.2) представлено в работе [17].

Отметим, что в работе [17] также были изучены свойства решений данных моделей. Были рассмотрены вопросы существования и единственности решения начальной задачи, неотрицательности решения при неотрицательных начальных условиях, продолжимости решений на всю правую полуось, ограниченности решений. Особое внимание было уделено вопросу устойчивости положений равновесия. Были указаны условия на коэффициенты систем и параметр запаздывания, при которых положения равновесия являются асимптотически устойчивыми.

Наряду с исследованием устойчивости положений равновесия важным вопросом также является получение оценок решений, характеризующих скорость стабилизации на бесконечности, и нахождение областей притяжения положений равновесия, т. е. допустимых условий на начальные данные, при которых происходит стабилизация решений. Отметим, что при получении оценок решений и нахождении областей притяжения для систем с запаздыванием активно применяются модифицированные функционалы Ляпунова – Красовского (см., например, [1–8, 15, 16, 18, 19]).

Цель настоящей работы — с использованием модифицированных функционалов Ляпунова – Красовского получить оценки решений систем (1.1) и (1.2), характеризующие скорость стабилизации на бесконечности, и указать области притяжения положений равновесия этих систем. Настоящая работа продолжает исследования [9–13, 20] асимптотических свойств решений биологических моделей.

Автор выражает благодарность профессору Г. В. Демиденко за внимание к работе.

2. Свойства решений систем (1.1) и (1.2)

Вначале рассмотрим систему (1.1). Для этой системы зададим начальные условия:

$$\begin{cases} d_0(t) = \varphi(t) \geq 0, \quad t \in [-\tau, 0), \quad \varphi(t) \in C([-\tau, 0]), \\ x(0) = x^0 \geq 0, \quad d_0(0) = d_0^0 \geq 0, \quad d_1(0) = d_1^0 \geq 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Как было отмечено в [17], решение начальной задачи (1.1), (2.1) существует, единственно, определено при всех $t > 0$, при этом компоненты решения неотрицательны и ограничены сверху.

Также из второго и третьего уравнений системы (1.1) нетрудно получить соотношение

$$d_0(t) + d_1(t) = \gamma, \quad \gamma = d_0^0 + d_1^0. \tag{2.2}$$

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда $\gamma > 0$.

Учитывая (2.2), из системы (1.1) получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} x(t) = a d_0(t-\tau) - b x(t), \\ \dfrac{d}{dt} d_0(t) = -k_1 x(t) d_0(t) + k_{-1}(\gamma - d_0(t)). \end{cases} \tag{2.3}$$

Данная система обладает единственным положением равновесия с положительными компонентами

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ d_0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ d_0^* \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

где $d_0^* = \dfrac{b}{a}x^*$, а x^* есть положительный корень уравнения

$$(x^*)^2 + \beta x^* - \beta \frac{a}{b}\gamma = 0, \quad \beta = \frac{k_{-1}}{k_1},$$

т. е.

$$x^* = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\beta^2 + 4\beta\frac{a}{b}\gamma} - \beta\right), \quad d_0^* = \frac{b}{a}x^* = \frac{b}{2a}\left(\sqrt{\beta^2 + 4\beta\frac{a}{b}\gamma} - \beta\right) < \gamma.$$

Приведем результат об асимптотической устойчивости положения равновесия (2.4) системы (2.3) из работы [17].

Теорема 1 ([17])**.** *Положение равновесия* (2.4) *системы* (2.3) *является асимптотически устойчивым.*

В разделе 3 мы получим оценки решений системы (2.3), характеризующие скорость стабилизации решений к положению равновесия (2.4) на бесконечности, а также укажем оценки на множество притяжения данного положения равновесия.

Теперь рассмотрим систему (1.2). Зададим начальные условия:

$$\begin{cases} d_0(t) = \varphi(t) \ge 0, \quad t \in [-\tau, 0), \quad \varphi(t) \in C([-\tau, 0]), \\[2ex] x(0) = x^0 \ge 0, \quad x_2(0) = x_2^0 \ge 0, \quad d_0(0) = d_0^0 \ge 0, \quad d_1(0) = d_1^0 \ge 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

В работе [17] было показано, что решение начальной задачи (1.2), (2.5) существует, единственно, определено при всех $t > 0$, при этом компоненты решения неотрицательны.

Так же, как и для системы (1.1), из третьего и четвертого уравнений системы (1.2) нетрудно получить соотношение (2.2), при этом мы также будем предполагать, что $\gamma = d_0^0 + d_1^0 > 0$.

Учитывая (2.2), из системы (1.2) получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = ad_0(t-\tau) - bx(t) - k_2x^2(t) + 2k_{-2}x_2(t), \\[2ex] \dfrac{d}{dt}x_2(t) = \dfrac{k_2}{2}x^2(t) - k_{-2}x_2(t) - k_1x_2(t)d_0(t) + k_{-1}(\gamma - d_0(t)), \\[2ex] \dfrac{d}{dt}d_0(t) = -k_1x_2(t)d_0(t) + k_{-1}(\gamma - d_0(t)). \end{cases} \tag{2.6}$$

Данная система также обладает единственным положением равновесия с положительными компонентами

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ x_2(t) \\ d_0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ x_2^* \\ d_0^* \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

где $x_2^* = \dfrac{k_2}{2k_{-2}}(x^*)^2$, $d_0^* = \dfrac{b}{a}x^*$, а x^* есть положительный корень уравнения

$$(x^*)^3 + \alpha x^* - \alpha \frac{a}{b}\gamma = 0, \quad \alpha = \frac{2k_{-1}k_{-2}}{k_1 k_2}.$$

Поскольку функция $f(x^*) = (x^*)^3 + \alpha x^* - \alpha \dfrac{a}{b}\gamma$ строго монотонно возрастает, то существует ровно одно вещественное решение x^* уравнения $f(x^*) = 0$. Его положительность следует из равенства

$$x^* = \frac{a}{b}\,\frac{\alpha\gamma}{(x^*)^2 + \alpha} > 0.$$

Замечание 1. Поскольку $d_0^* = \dfrac{b}{a}x^*$, то

$$d_0^* = \frac{\alpha\gamma}{(\frac{a}{b}d_0^*)^2 + \alpha} < \gamma.$$

В работе [17] были получены условия асимптотической устойчивости положения равновесия (2.7) системы (2.6).

Теорема 2 ([17]). *Если $\sqrt{\alpha} > \dfrac{a}{b}\dfrac{\gamma}{2}$, то положение равновесия* (2.7) *системы* (2.6) *является асимптотически устойчивым. Если $\sqrt{\alpha} < \dfrac{a}{b}\dfrac{\gamma}{2}$, то существует $\tau_0 > 0$ такое, что при $0 \leq \tau < \tau_0$ положение равновесия асимптотически устойчиво, а при $\tau > \tau_0$ положение равновесия неустойчиво.*

В разделе 4 при условии $\sqrt{\alpha} > \dfrac{a}{b}\dfrac{\gamma}{2}$ мы получим оценки решений системы (2.6), характеризующие скорость стабилизации решений к положению равновесия (2.7) на бесконечности, а также укажем оценки на множество притяжения данного положения равновесия.

3. Оценки решений системы (2.3)

В данном параграфе мы рассмотрим систему (2.3). По теореме 1 единственное положение равновесия $(x^*, d_0^*)^{\mathrm{T}}$ этой системы является асимптотически устойчивым. Мы получим оценки решений системы (2.3), характеризующие скорость сходимости к данному положению равновесия. При получении оценок мы будем использовать метод функционалов типа Ляпунова – Красовского, которые являются аналогами функций Ляпунова для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Вначале сведем задачу об исследовании устойчивости положения равновесия к задаче об исследовании устойчивости нулевого решения. Замена

$$x(t) = x^* + u(t), \quad d_0(t) = d_0^* + v(t),$$

где $d_0^* = x^* \dfrac{b}{a}$, приводит к системе

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = av(t-\tau) - bu(t), \\ \dfrac{d}{dt}v(t) = -k_1 x^* \dfrac{b}{a} u(t) - (k_1 x^* + k_{-1}) v(t) - k_1 u(t) v(t). \end{cases} \tag{3.1}$$

Начальные условия для системы (3.1) будут иметь вид

$$\begin{cases} v(t) = \varphi(t) - d_0^*, \quad t \in [-\tau, 0), \quad \varphi(t) \geq 0, \quad \varphi(t) \in C([-\tau, 0]), \\ u(0) = x^0 - x^*, \quad x^0 \geq 0, \quad v(0) = d_0^0 - d_0^*, \quad d_0^0 \in [0, \gamma]. \end{cases} \tag{3.2}$$

При получении оценок решений начальной задачи (3.1)–(3.2) мы будем использовать модифицированный функционал Ляпунова – Красовского следующего вида:

$$V(t, u, v) = h_1 u^2(t) + h_2 v^2(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} l_2(t-s) v^2(s) ds, \tag{3.3}$$

$$l_2(s) = l_2(0) e^{-ls}, \quad s \in [0, \tau],$$

где $l > 0$ удовлетворяет неравенству

$$e^{l\tau/2} < 1 + \frac{k_{-1}}{k_1 x^*}, \tag{3.4}$$

а величины $l_2(0)$, h_1 и h_2 определяются по формулам

$$l_2(0) = \frac{1}{2}\left((k_1 x^* + k_{-1} - b) + \sqrt{4 e^{l\tau/2} k_1 x^* b + (k_1 x^* + k_{-1} - b)^2} \right), \tag{3.5}$$

$$h_1 = e^{-l\tau/2} k_1 x^* \frac{b}{a^2}, \quad h_2 = 1. \tag{3.6}$$

Также введем обозначения

$$c = (k_1 x^* + k_{-1} + b) - \sqrt{4 e^{l\tau/2} k_1 x^* b + (k_1 x^* + k_{-1} - b)^2}, \tag{3.7}$$

$$\delta = \min\{c, l\}, \quad p = \frac{2k_1}{\sqrt{h_1}}. \tag{3.8}$$

Замечание 2. Из условия (3.4) вытекает, что $c > 0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Для решения* $(u(t), v(t))^{\mathrm{T}}$ *начальной задачи* (3.1)–(3.2) *с начальными условиями, удовлетворяющими неравенству*

$$V(0,u,v) = h_1(x^0 - x^*)^2 + h_2(d_0^0 - d_0^*)^2 + l_2(0)\int\limits_{-\tau}^{0} e^{ls}(\varphi(s) - d_0^*)^2 ds < \left(\frac{\delta}{p}\right)^2, \quad (3.9)$$

справедлива оценка

$$h_1u^2(t) + h_2v^2(t) \le V(t,u,v) \le \frac{V(0,u,v)}{\left(1 - \dfrac{p}{\delta}\sqrt{V(0,u,v)}\right)^2} e^{-\delta t}, \quad t > 0. \quad (3.10)$$

Доказательство. Рассмотрим модифицированный функционал Ляпунова – Красовского (3.3). Продифференцируем его вдоль решения системы (3.1):

$$\frac{d}{dt}V(t,u,v) = 2h_1u(t)\frac{d}{dt}u(t) + 2h_2v(t)\frac{d}{dt}v(t)$$

$$+l_2(0)v^2(t) - l_2(0)e^{-l\tau}v^2(t-\tau) - l\int\limits_{t-\tau}^{t} l_2(t-s)v^2(s)ds$$

$$= -2h_1bu^2(t) + \Big(2h_1au(t)v(t-\tau) - l_2(0)e^{-l\tau}v^2(t-\tau)\Big)$$

$$-2h_2k_1x^*\frac{b}{a}u(t)v(t) - \Big(2h_2(k_1x^* + k_{-1}) - l_2(0)\Big)v^2(t)$$

$$-2h_2k_1u(t)v^2(t) - l\int\limits_{t-\tau}^{t} l_2(t-s)v^2(s)ds.$$

В силу неравенства

$$2h_1au(t)v(t-\tau) - l_2(0)e^{-l\tau}v^2(t-\tau) \le \frac{e^{l\tau}(h_1a)^2}{l_2(0)}u^2(t)$$

будем иметь

$$\frac{d}{dt}V(t,u,v) \le -\left(2h_1b - \frac{e^{l\tau}(h_1a)^2}{l_2(0)}\right)u^2(t)$$

$$-2h_2k_1x^*\frac{b}{a}u(t)v(t) - \Big(2h_2(k_1x^* + k_{-1}) - l_2(0)\Big)v^2(t)$$

$$-2h_2k_1u(t)v^2(t) - l\int\limits_{t-\tau}^{t} l_2(t-s)v^2(s)ds$$

$$= -\left\langle R\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \right\rangle - 2h_2 k_1 u(t) v^2(t) - l \int\limits_{t-\tau}^{t} l_2(t-s) v^2(s) ds,$$

где

$$R = \begin{pmatrix} 2h_1 b - \dfrac{e^{l\tau}(h_1 a)^2}{l_2(0)} & h_2 k_1 x^* \dfrac{b}{a} \\ \\ h_2 k_1 x^* \dfrac{b}{a} & 2h_2(k_1 x^* + k_{-1}) - l_2(0) \end{pmatrix}.$$

Учитывая обозначения (3.5)–(3.7), нетрудно установить неравенство

$$R \geq c \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} V(t, u, v) \leq -c\Big(h_1 u^2(t) + h_2 v^2(t)\Big) - 2h_2 k_1 u(t) v^2(t) - l \int\limits_{t-\tau}^{t} l_2(t-s) v^2(s) ds.$$

Учитывая обозначение (3.8) величины δ и определение (3.3) функционала $V(t, u, v)$, отсюда получим оценку

$$\frac{d}{dt} V(t, u, v) \leq -\delta V(t, u, v) - 2h_2 k_1 u(t) v^2(t).$$

Оценим последнее слагаемое:

$$-2h_2 k_1 u(t) v^2(t) \leq 2k_1 |u(t)| V(t, u, v) \leq \frac{2k_1}{\sqrt{h_1}} V^{3/2}(t, u, v).$$

Тогда с учетом обозначения (3.8) величины p установим неравенство

$$\frac{d}{dt} V(t, u, v) \leq -\delta V(t, u, v) + p V^{3/2}(t, u, v).$$

Отсюда, принимая во внимание неравенство (3.9) и используя неравенство Гронуолла (см., например, [14]), получим оценку (3.10).

Теорема доказана. □

Из теоремы 3 непосредственно вытекают оценки скорости сходимости решений системы (2.3) к положению равновесия $(x^*, d_0^*)^{\mathrm{T}}$. Приведем соответствующий результат.

Теорема 4. *Для решения* $(x(t), d_0(t))^{\mathrm{T}}$ *системы* (2.3) *с начальными условиями*

$$\begin{cases} d_0(t) = \varphi(t) \geq 0, \quad t \in [-\tau, 0), \quad \varphi(t) \in C([-\tau, 0]), \\ \\ x(0) = x^0 \geq 0, \quad d_0(0) = d_0^0 \in [0, \gamma], \end{cases}$$

удовлетворяющими неравенству

$$V(0, x - x^*, d_0 - d_0^*) = h_1(x^0 - x^*)^2 + h_2(d_0^0 - d_0^*)^2$$

$$+l_2(0)\int\limits_{-\tau}^{0} e^{ls}(\varphi(s) - d_0^*)^2 ds < \left(\frac{\delta}{p}\right)^2,$$

где h_1, h_2, $l_2(0)$ *и* l *определены в* (3.4)–(3.6), δ *и* p *определены в* (3.8), *справедливы оценки*

$$|x(t) - x^*| \leq \frac{\sqrt{V(0, x - x^*, d_0 - d_0^*)}}{\sqrt{h_1}\left(1 - \frac{p}{\delta}\sqrt{V(0, x - x^*, d_0 - d_0^*)}\right)} e^{-\delta t/2}, \quad t > 0, \tag{3.11}$$

$$|d_0(t) - d_0^*| \leq \frac{\sqrt{V(0, x - x^*, d_0 - d_0^*)}}{\sqrt{h_2}\left(1 - \frac{p}{\delta}\sqrt{V(0, x - x^*, d_0 - d_0^*)}\right)} e^{-\delta t/2}, \quad t > 0. \tag{3.12}$$

Следствие 1. *Для решения* $(x(t), d_0(t), d_1(t))^{\mathrm{T}}$ *начальной задачи* (1.1), (2.1) *с начальными условиями, удовлетворяющими неравенству*

$$V(0, x - x^*, d_0 - d_0^*) < \left(\frac{\delta}{p}\right)^2,$$

справедливы оценки (3.11), (3.12) *и оценка*

$$|d_1(t) - (\gamma - d_0^*)| \leq \frac{\sqrt{V(0, x - x^*, d_0 - d_0^*)}}{\sqrt{h_2}\left(1 - \frac{p}{\delta}\sqrt{V(0, x - x^*, d_0 - d_0^*)}\right)} e^{-\delta t/2}, \quad t > 0.$$

4. Оценки решений системы (2.6)

В данном параграфе мы рассмотрим систему (2.6). По теореме 2 единственное положение равновесия $(x^*, x_2^*, d_0^*)^{\mathrm{T}}$ этой системы является асимптотически устойчивым при любом запаздывании τ, если выполнено условие

$$\sqrt{\alpha} > \frac{a}{b}\frac{\gamma}{2}, \quad \alpha = \frac{2k_{-1}k_{-2}}{k_1 k_2}. \tag{4.1}$$

При выполнении этого условия мы получим оценки решений системы (2.6), характеризующие скорость сходимости к данному положению равновесия. При получении оценок мы также будем использовать модифицированный функционал Ляпунова – Красовского.

Вначале сведем задачу об исследовании устойчивости положения равновесия к задаче об исследовании устойчивости нулевого решения. Замена

$$x(t) = x^* + u(t), \quad x_2(t) = x_2^* + v(t), \quad d_0(t) = d_0^* + w(t),$$

где

$$x_2^* = \frac{k_2}{2k_{-2}}(x^*)^2, \quad d_0^* = \frac{b}{a}x^*, \quad (x^*)^3 + \alpha x^* - \alpha\frac{a}{b}\gamma = 0, \quad \alpha = \frac{2k_{-1}k_{-2}}{k_1k_2},$$

приводит к системе

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = aw(t-\tau) - (b + 2k_2x^*)u(t) + 2k_{-2}v(t) - k_2u^2(t), \\ \dfrac{d}{dt}v(t) = k_2x^*u(t) - \left(k_{-2} + k_1\dfrac{b}{a}x^*\right)v(t) \\ \qquad\qquad -k_{-1}\dfrac{a}{b}\dfrac{\gamma}{x^*}w(t) + \dfrac{k_2}{2}u^2(t) - k_1v(t)w(t), \\ \dfrac{d}{dt}w(t) = -k_1\dfrac{b}{a}x^*v(t) - k_{-1}\dfrac{a}{b}\dfrac{\gamma}{x^*}w(t) - k_1v(t)w(t). \end{cases}$$

С учетом обозначений

$$z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -b - 2k_2x^* & 2k_{-2} & 0 \\ k_2x^* & -k_{-2} - k_1\dfrac{b}{a}x^* & -k_{-1}\dfrac{a}{b}\dfrac{\gamma}{x^*} \\ 0 & -k_1\dfrac{b}{a}x^* & -k_{-1}\dfrac{a}{b}\dfrac{\gamma}{x^*} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(z(t)) = \begin{pmatrix} -k_2u^2(t) \\ \dfrac{k_2}{2}u^2(t) - k_1v(t)w(t) \\ -k_1v(t)w(t) \end{pmatrix}$$

систему можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}z(t) = Az(t) + Bz(t-\tau) + F(z(t)). \tag{4.2}$$

Начальные условия для системы (4.2) будут иметь вид

$$\begin{cases} w(t) = \varphi(t) - d_0^*, \quad t \in [-\tau, 0), \quad \varphi(t) \geq 0, \quad \varphi(t) \in C([-\tau, 0]), \\ u(0) = x^0 - x^*, \quad x^0 \geq 0, \quad v(0) = x_2^0 - x_2^*, \quad x_2^0 \geq 0, \\ w(0) = d_0^0 - d_0^*, \quad d_0^0 \in [0, \gamma]. \end{cases} \tag{4.3}$$

Для формулировки результата нам потребуется ввести обозначения. Вначале перепишем матрицу A в более компактном виде

$$A = \begin{pmatrix} -b - 2a_{11} & 2a_{12} & 0 \\ a_{11} & -a_{12} - a_{22} & -a_{33} \\ 0 & -a_{22} & -a_{33} \end{pmatrix}$$

и заметим, что условие (4.1) эквивалентно условию

$$ba_{12}a_{33} > aa_{11}a_{22}. \tag{4.4}$$

Действительно, учитывая явный вид величин a_{ij}, условие (4.4) запишется в виде

$$\frac{a}{b}\frac{\gamma}{2} > \frac{1}{\alpha}(x^*)^3, \quad \alpha = \frac{2k_{-1}k_{-2}}{k_1k_2}.$$

Поскольку x^* является решением уравнения

$$g(x^*) = \frac{a}{b}\gamma, \quad g(x^*) = \frac{1}{\alpha}(x^*)^3 + x^*,$$

и функция $g(x^*)$ строго монотонно возрастает, то

$$\frac{a}{b}\frac{\gamma}{2} > \frac{1}{\alpha}(x^*)^3 \iff x^* > \frac{a}{b}\frac{\gamma}{2} \iff g(x^*) > g\left(\frac{a}{b}\frac{\gamma}{2}\right)$$
$$\iff \frac{a}{b}\gamma > \frac{1}{\alpha}\left(\frac{a}{b}\frac{\gamma}{2}\right)^3 + \frac{a}{b}\frac{\gamma}{2} \iff \sqrt{\alpha} > \frac{a}{b}\frac{\gamma}{2},$$

что и требовалось доказать.

Предполагая, что выполнено условие (4.4), введем величину $m > 0$, удовлетворяющую неравенству

$$ba_{12}a_{33} > e^{m\tau/2}aa_{11}a_{22}. \tag{4.5}$$

Пусть $0 < c < 2\min\{(b + 2a_{11}), (a_{12} + a_{22}), a_{33}\}$ — наименьший положительный корень уравнения

$$\left(b + 2a_{11} - \frac{2a_{11}a_{12}}{\left(a_{12} + a_{22} - \frac{a_{22}a_{33}}{(a_{33}-(c/2))} - (c/2)\right)} - (c/2)\right)$$
$$\times\left(a_{12} + a_{22} - \frac{a_{22}a_{33}}{(a_{33} - (c/2))} - (c/2)\right)(a_{33} - (c/2)) = e^{m\tau/2}aa_{11}a_{22}. \tag{4.6}$$

Заметим, что данное уравнение может быть преобразовано к более простому виду

$$(c/2) = \frac{(a_{12}a_{33}b - e^{m\tau/2}aa_{11}a_{22}) + (2a_{11} + a_{12} + a_{22} + a_{33} + b)(c/2)^2}{(2a_{11}a_{22} + 2a_{11}a_{33} + a_{12}a_{33} + a_{12}b + a_{22}b + a_{33}b) + (c/2)^2}.$$

Положим

$$h_{11} = e^{-m\tau}\left(b + 2a_{11} - \frac{2a_{11}a_{12}}{\left(a_{12} + a_{22} - \frac{a_{22}a_{33}}{(a_{33}-(c/2))} - (c/2)\right)} - (c/2)\right) > 0, \tag{4.7}$$

$$h_{22} = \frac{a^2a_{22}^2}{(a_{33} - (c/2))^2\left(a_{12} + a_{22} - \frac{a_{22}a_{33}}{(a_{33}-(c/2))} - (c/2)\right)} + 2h_{11}\frac{a_{12}}{a_{11}} > 0, \tag{4.8}$$

$$h_{33} = \frac{a^2}{(a_{33} - (c/2))} + h_{22}\frac{a_{33}}{a_{22}} > 0. \tag{4.9}$$

Также обозначим

$$\varepsilon = \min\{c, m\}, \quad q = \max\left\{\frac{k_2\sqrt{4h_{11} + h_{22}}}{h_{11}}, \frac{k_1\sqrt{h_{22} + h_{33}}}{\sqrt{h_{22}h_{33}}}\right\}. \tag{4.10}$$

При получении оценок решений начальной задачи (4.2)–(4.3) мы будем использовать модифицированный функционал Ляпунова – Красовского следующего вида:

$$V(t, z) = \langle Hz(t), z(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle M(t-s)z(s), z(s)\rangle\, ds, \tag{4.11}$$

где

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & h_{33} \end{pmatrix}, \quad M(s) = e^{-ms}B^*B, \quad s \in [0, \tau].$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть выполнено условие* (4.4). *Тогда для решения* $(u(t), v(t), w(t))^{\mathrm{T}}$ *начальной задачи* (4.2)–(4.3) *с начальными условиями, удовлетворяющими неравенству*

$$V(0, z) = h_{11}(x^0 - x^*)^2 + h_{22}(x_2^0 - x_2^*)^2 + h_{33}(d_0^0 - d_0^*)^2$$
$$+a^2 \int\limits_{-\tau}^{0} e^{ms}(\varphi(s) - d_0^*)^2 ds < \left(\frac{\varepsilon}{q}\right)^2, \tag{4.12}$$

справедлива оценка

$$h_{11}u^2(t) + h_{22}v^2(t) + h_{33}w^2(t) \le V(t, z) \le \frac{V(0, z)}{\left(1 - \frac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0, z)}\right)^2} e^{-\varepsilon t}, \quad t > 0. \tag{4.13}$$

Доказательство. Рассмотрим модифицированный функционал Ляпунова – Красовского (4.11). Дифференцируя его вдоль решения системы (4.2), получим

$$\frac{d}{dt}V(t, z) = \langle H(Az(t) + Bz(t-\tau) + F(z(t))), z(t)\rangle$$
$$+ \langle Hz(t), (Az(t) + Bz(t-\tau) + F(z(t)))\rangle + \langle B^*Bz(t), z(t)\rangle$$
$$-e^{-m\tau}\langle B^*Bz(t-\tau), z(t-\tau)\rangle - m\int\limits_{t-\tau}^{t} \langle M(t-s)z(s), z(s)\rangle\, ds.$$

Обозначим

$$S_1 = \langle (HA + A^*H + B^*B)z(t), z(t)\rangle$$

$$+2\langle Hz(t), Bz(t-\tau)\rangle - e^{-m\tau}\langle Bz(t-\tau), Bz(t-\tau)\rangle,$$

$$S_2 = 2\langle Hz(t), F(z(t))\rangle, \quad S_3 = -m\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle M(t-s)z(s), z(s)\rangle\, ds.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}V(t,z) = S_1 + S_2 + S_3. \tag{4.14}$$

Оценим S_1. Вначале заметим, что имеет место равенство

$$2\langle Hz(t), Bz(t-\tau)\rangle = 2\langle H_{11}z(t), Bz(t-\tau)\rangle,$$

где

$$H_{11} = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее, используя неравенство

$$2\langle H_{11}z(t), Bz(t-\tau)\rangle - e^{-m\tau}\langle Bz(t-\tau), Bz(t-\tau)\rangle \le e^{m\tau}\langle H_{11}z(t), H_{11}z(t)\rangle,$$

получим

$$S_1 \le \left\langle \left(HA + A^*H + B^*B + e^{m\tau}H_{11}^2\right)z(t), z(t)\right\rangle = -\langle Rz(t), z(t)\rangle,$$

где

$$R = -\left(HA + A^*H + B^*B + e^{m\tau}H_{11}^2\right) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & r_{22} & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} r_{11} = 2h_{11}(b + 2a_{11}) - e^{m\tau}h_{11}^2, \\ r_{12} = -2h_{11}a_{12} - h_{22}a_{11}, \\ r_{22} = 2h_{22}(a_{12} + a_{22}), \\ r_{13} = 0, \\ r_{23} = h_{22}a_{33} + h_{33}a_{22}, \\ r_{33} = 2h_{33}a_{33} - a^2. \end{cases}$$

Представим матрицу R в следующем виде:

$$R = c\begin{pmatrix} h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & h_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{11} - h_{11}c & r_{12} & 0 \\ r_{12} & r_{22} - h_{22}c & r_{23} \\ 0 & r_{23} & r_{33} - h_{33}c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & h_{33} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} r_{11} - h_{11}c & r_{12} & 0 \\ r_{12} & r_{12}^2(r_{11} - h_{11}c)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{23}^2(r_{33} - h_{33}c)^{-1} & r_{23} \\ 0 & r_{23} & r_{33} - h_{33}c \end{pmatrix}$$

$$
+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{22}-h_{22}c-r_{12}^2(r_{11}-h_{11}c)^{-1}-r_{23}^2(r_{33}-h_{33}c)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Учитывая обозначения (4.7)–(4.9) для величин h_{11}, h_{22}, h_{33} и обозначение (4.6) для величины c, получим, что

$$
r_{22}-h_{22}c-r_{12}^2(r_{11}-h_{11}c)^{-1}-r_{23}^2(r_{33}-h_{33}c)^{-1}=0.
$$

Следовательно, выполнено неравенство

$$
\langle Rz(t), z(t)\rangle \geq c\,\langle Hz(t), z(t)\rangle,
$$

откуда

$$
S_1 \leq -c\,\langle Hz(t), z(t)\rangle. \tag{4.15}
$$

Теперь оценим S_2. Имеем

$$
\begin{aligned}
S_2 = 2\,\langle Hz(t), F(z(t))\rangle &= 2\left\langle \begin{pmatrix} h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & h_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -k_2u^2(t) \\ \dfrac{k_2}{2}u^2(t)-k_1v(t)w(t) \\ -k_1v(t)w(t)\end{pmatrix}\right\rangle \\
&= -k_2u^2(t)\Big(2h_{11}u(t)-h_{22}v(t)\Big)-2k_1v(t)w(t)\Big(h_{22}v(t)+h_{33}w(t)\Big) \\
&\leq k_2u^2(t)\sqrt{4h_{11}+h_{22}}\sqrt{h_{11}u^2(t)+h_{22}v^2(t)} \\
&\quad +2k_1|v(t)||w(t)|\sqrt{h_{22}+h_{33}}\sqrt{h_{22}v^2(t)+h_{33}w^2(t)} \\
&\leq \Big(k_2u^2(t)\sqrt{4h_{11}+h_{22}}+2k_1|v(t)||w(t)|\sqrt{h_{22}+h_{33}}\Big)V^{1/2}(t,z) \\
&\leq \left(\frac{k_2\sqrt{4h_{11}+h_{22}}}{h_{11}}h_{11}u^2(t)+\frac{k_1\sqrt{h_{22}+h_{33}}}{\sqrt{h_{22}h_{33}}}\Big(h_{22}v^2(t)+h_{33}w^2(t)\Big)\right)V^{1/2}(t,z) \\
&\leq qV^{3/2}(t,z),
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

где q определено в (4.10).

Используя полученные неравенства (4.15), (4.16) и тождество (4.14), установим оценку

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(t,z) = S_1+S_2+S_3 &\leq -c\,\langle Hz(t), z(t)\rangle + qV^{3/2}(t,z) \\
&\quad -m\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle M(t-s)z(s), z(s)\rangle\,ds.
\end{aligned}
$$

Учитывая обозначение (4.10) величины ε и определение (4.11) функционала $V(t,z)$, получим оценку

$$
\frac{d}{dt}V(t,z) \leq -\varepsilon V(t,z) + qV^{3/2}(t,z).
$$

С учетом неравенства (4.12) в силу неравенства Гронуолла (см., например, [14]) отсюда вытекает оценка (4.13).

Теорема доказана. □

Из теоремы 5 непосредственно вытекают оценки скорости сходимости решений системы (2.6) к положению равновесия $(x^*, x_2^*, d_0^*)^{\mathrm{T}}$. Приведем соответствующий результат.

Теорема 6. *Пусть выполнено условие* (4.4). *Тогда для решения* $(x(t), x_2(t), d_0(t))^{\mathrm{T}}$ *системы* (2.6) *с начальными условиями*

$$\begin{cases} d_0(t) = \varphi(t) \geq 0, \quad t \in [-\tau, 0), \quad \varphi(t) \in C([-\tau, 0]), \\ x(0) = x^0 \geq 0, \quad x_2(0) = x_2^0 \geq 0, \quad d_0(0) = d_0^0 \in [0, \gamma], \end{cases}$$

удовлетворяющими неравенству

$$V(0, z) = h_{11}(x^0 - x^*)^2 + h_{22}(x_2^0 - x_2^*)^2 + h_{33}(d_0^0 - d_0^*)^2$$

$$+a^2 \int\limits_{-\tau}^{0} e^{ms}(\varphi(s) - d_0^*)^2 ds < \left(\frac{\varepsilon}{q}\right)^2,$$

где $z = (x - x^*, x_2 - x_2^*, d_0 - d_0^*)^{\mathrm{T}}$, h_{11}, h_{22}, h_{33} *определены в* (4.7)–(4.9), m *определено в* (4.5), ε *и* q *определены в* (4.10), *справедливы оценки*

$$|x(t) - x^*| \leq \frac{\sqrt{V(0, z)}}{\sqrt{h_{11}}\left(1 - \dfrac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0, z)}\right)} e^{-\varepsilon t/2}, \quad t > 0, \tag{4.17}$$

$$|x_2(t) - x_2^*| \leq \frac{\sqrt{V(0, z)}}{\sqrt{h_{22}}\left(1 - \dfrac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0, z)}\right)} e^{-\varepsilon t/2}, \quad t > 0, \tag{4.18}$$

$$|d_0(t) - d_0^*| \leq \frac{\sqrt{V(0, z)}}{\sqrt{h_{33}}\left(1 - \dfrac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0, z)}\right)} e^{-\varepsilon t/2}, \quad t > 0. \tag{4.19}$$

Следствие 2. *Пусть выполнено условие* (4.4). *Тогда для решения* $(x(t), x_2(t), d_0(t), d_1(t))^{\mathrm{T}}$ *начальной задачи* (1.2), (2.5) *с начальными условиями, удовлетворяющими неравенству*

$$V(0, z) < \left(\frac{\varepsilon}{q}\right)^2,$$

справедливы оценки (4.17)–(4.19) *и оценка*

$$|d_1(t) - (\gamma - d_0^*)| \leq \frac{\sqrt{V(0, z)}}{\sqrt{h_{33}}\left(1 - \dfrac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0, z)}\right)} e^{-\varepsilon t/2}, \quad t > 0.$$

5. Заключение

В настоящей работе рассматривались системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, являющиеся моделями биохимических реакций. Изучались асимптотические свойства решений данных систем. При условиях, когда системы обладают асимптотически устойчивыми положениями равновесия, были получены оценки решений, характеризующие скорости стабилизации на бесконечности, при этом были указаны множества притяжения положений равновесия. При получении результатов были использованы модифицированные функционалы Ляпунова – Красовского.

Список цитируемых источников

1. *Демиденко Г. В., Водопьянов Е. С., Скворцова М. А.* Оценки решений линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с несколькими отклонениями аргумента // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2013. — Т. 16, № 3. — С. 53–60.

   Demidenko G. V., Vodop'yanov E. S., Skvortsova M. A. (2013). Estimates of solutions to linear differential equations of neutral type with several delays of argument. Journal of Applied and Industrial Mathematics, 7, No. 4, 472–479.

2. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. — 2005. — Т. 5, № 3. — С. 20–28.

   Demidenko G. V., Matveeva I. I. (2005). Asymptotic properties of solutions to delay differential equations. Vestnik Novosibirskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Matematika, Mekhanika, Informatika, 5, No. 3, 20–28. (in Russian)

3. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сибирский математический журнал. — 2007. — Т. 48, № 5. — С. 1025–1040.

   Demidenko G. V., Matveeva I. I. (2007). Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms. Siberian Mathematical Journal, 48, No. 5, 824–836.

4. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сибирский математический журнал. — 2014. — Т. 55, № 5. — С. 1059–1077.

   Demidenko G. V., Matveeva I. I. (2014). On estimates of solutions to systems of differential equations of neutral type with periodic coefficients. Siberian Mathematical Journal, 55, No. 5, 866–881.

5. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И., Скворцова М. А.* Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах // Сибирский математический журнал. — 2019. — Т. 60, № 5. — С. 1063–1079.

   Demidenko G. V., Matveeva I. I., Skvortsova M. A. (2019). Estimates for solutions to neutral differential equations with periodic coefficients of linear terms. Siberian Mathematical Journal, 60, No. 5, 828–841.

6. *Матвеева И. И.* Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2013. — Т. 16, № 3. — С. 122–132.

Matveeva I. I. (2013). Estimates of solutions to a class of systems of nonlinear delay differential equations. Journal of Applied and Industrial Mathematics, 7, No. 4, 557–566.

7. *Матвеева И. И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сибирский математический журнал. — 2017. — Т. 58, № 2. — С. 344–352.

Matveeva I. I. (2017). On exponential stability of solutions to periodic neutral-type systems. Siberian Mathematical Journal, 58, No. 2, 264–270.

8. *Матвеева И. И.* Оценки экспоненциального убывания решений линейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2019. — Т. 22, № 3. — С. 96–103.

Matveeva I. I. (2019). Estimates of the exponential decay of solutions to linear systems of neutral type with periodic coefficients. Journal of Applied and Industrial Mathematics, 13, No. 3, 511–518.

9. *Скворцова М. А.* Асимптотическая устойчивость положений равновесия и оценки решений в одной модели заболевания // Динамические системы. — 2017. — Т. 7(35), № 3. — С. 257–274.

Skvortsova M. A. (2017). Asymptotic stability of equilibrium points and estimates of solutions in a model of disease. Dinamicheskie Sistemy, 7(35), No. 3, 257–274. (in Russian)

10. *Скворцова М. А.* Оценки решений в модели хищник-жертва с запаздыванием // Известия Иркутского государственного университета. Серия "Математика". — 2018. — Т. 25. — С. 109–125.

Skvortsova M. A. (2018). Estimates for solutions in a predator-prey model with delay. The Bulletin of Irkutsk State University, Series "Mathematics", 25, 109–125. (in Russian)

11. *Скворцова М. А.* Асимптотические свойства решений в модели противобактериального иммунного ответа // Сибирские электронные математические известия. — 2018. — Т. 15. — С. 1198–1215.

Skvortsova M. A. (2018). Asymptotic properties of solutions in a model of antibacterial immune response. Siberian Electronic Mathematical Reports, 15, 1198–1215. (in Russian)

12. *Скворцова М. А.* Об оценках решений в модели хищник-жертва с двумя запаздываниями // Сибирские электронные математические известия. — 2018. — Т. 15. — С. 1697–1718.

Skvortsova M. A. (2018). On estimates of solutions in a predator-prey model with two delays. Siberian Electronic Mathematical Reports, 15, 1697–1718. (in Russian)

13. *Скворцова М. А.* Асимптотические свойства решений в модели взаимодействия популяций с несколькими запаздываниями // Математические заметки СВФУ. — 2019. — Т. 26, № 4. — С. 63–72.

Skvortsova M. A. (2019). Asymptotic properties of solutions in a model of interaction of populations with several delays. Mathematical Notes of North-Eastern Federal University, 26, No. 4, 63–72. (in Russian)

14. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Пер. с англ. — М.: Мир, 1970.

    Hartman Ph. (1964). Ordinary differential equations. New York, London, Sydney: John Wiley & Sons.

15. *Хусаинов Д. Я., Иванов А. Ф., Кожаметов А. Т.* Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, № 8. — С. 1137–1140.

    Khusainov D. Ya., Ivanov A. F., Kozhametov A. T. (2005). Convergence estimates for solutions of linear stationary systems of differential-difference equations with constant delay. Differential Equations, 41, No. 8, 1196–1200.

16. *Ыскак Т.* Оценки решений одного класса систем уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием // Сибирские электронные математические известия. — 2020. — Т. 17. — С. 416–427.

    Yskak T. (2020). Estimates for solutions of one class of systems of equations of neutral type with distributed delay. Siberian Electronic Mathematical Reports, 17, 416–427. (in Russian)

17. *Bodnar M., Foryś U., Poleszczuk J.* (2011). Analysis of biochemical reactions models with delays. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 376, No. 1, 74–83.
18. *Demidenko G. V.* (2009). Stability of solutions to linear differential equations of neutral type. Journal of Analysis and Applications, 7, No. 3, 119–130.
19. *Mondié S., Kharitonov V. L.* (2005). Exponential estimates for retarded time-delay systems: LMI approach. IEEE Transactions on Automatic Control, 50, No. 2, 268–273.
20. *Skvortsova M. A.* (2016). Asymptotic properties of solutions to a system describing the spread of avian influenza. Siberian Electronic Mathematical Reports, 13, 782–798.

Получена 22.03.2020

Динамические системы, 2020, том 10(38), №1, 115–124

MSC 2010: 34K11

On three kinds of lower-limit oscillation tests for linear first-order differential equations with several delays[1]

K. M. Chudinov
Perm State National Research University,
Perm National Research Polytechnic University,
Russia, Perm 614990. *E-mail: cyril@list.ru*

Abstract. We consider linear non-autonomous delay differential equations of first order, and study effective conditions guaranteeing that all solutions of an equation oscillate, in the form of an estimate for the lower limit at infinity of a functional of coefficients and delays of the equation. Such conditions generalize the well-known Myshkis oscillation test for a linear equation with a single delay, in the form of an inequality with $1/e$ in its right-hand side. We consider three different approaches to obtaining such conditions for equations with several concentrated delays, and compare these approaches with each other. We present several new examples in order to show the effectiveness of the approaches and advantages of each of them over the others.

Keywords: delay differential equations, oscillation, explicit test.

1. Introduction

Linear first-order delay differential equations, in contrast to linear first-order ordinary differential equations, can have oscillating solutions. In particular, due to this property of solutions, equations with aftereffect serve as good mathematical models for describing a number of processes in biology, chemistry, and the theory of automatic control.

The problem of oscillation conditions for first-order differential equations was first investigated by Myshkis [15]. For 20 years after his pioneering works the problem did not attract researchers, since the directions of systematic research of equations with aftereffect in that time were mainly determined by the desire to transfer known results of the theory of ordinary differential equations to delay equations. Several papers on the oscillation of solutions to first-order equations were published in the 1970s. They led to the Koplatadze—Chanturiya theorem [10] on conditions for oscillation of all solutions of a linear non-autonomous equation. This theorem generalized results by Myshkis and Ladas [12]. Over the past 40 years, the number of papers devoted to effective oscillation conditions for first-order delay equations has been steadily growing. However, despite the fact that some of recent papers of this kind contain reviews of known results, there

[1]The work is supported by the Russian Ministry of Education and Science (the State contract No. FSNM-2020-0028) and the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 18-01-00928).

is no complete portrait of the phenomenon. This article is devoted to some of the most significant achievements in the study of effective oscillation tests. Namely, we consider sufficient conditions for the oscillation of all solutions to linear non-autonomous equations of stable type with several delays. The conditions should be explicitly expressed in terms of parameters of a given equation.

The paper is organized as follows. In the second section we specify some questions that arose when studying the oscillation problem for linear first-order equations. In the third section we consider three fruitful approaches to generalizing the Myshkis lower-limit oscillation test in the form of inequality with $1/e$ in its right-hand side. Two of the approaches are generalizations of the integral oscillation condition obtained by Koplatadze and Chanturiya, and the third one is the Hunt—Yorke theorem. In the fourth section we present several new examples in order to compare the domains of applicability of the approaches represented in the third section.

2. Lower-limit oscillation tests

Definition 1. We say that a continuous on the semiaxis $\mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty)$ function *oscillates*, if it has an unbounded from the right sequence of zeros.

Definition 2. We say that a differential equation is *oscillatory*, if its every solution oscillates.

The following criterion is well known: the autonomous delay equation

$$\dot{x}(t) + ax(t - r) = 0$$

is oscillatory if and only if $ar > 1/e$. For the oscillation of solutions to non-autonomous equations we can only talk about sufficient conditions. Naturally, we suppose that the best of oscillation tests are those for which both the essentiality of all imposed requirements and the sharpness of all constants in inequalities are established. The above test was first transferred to the case of non-autonomous equations by Myshkis [15]. Below we consider oscillation tests generalizing these results.

2.1. The Koplatadze—Chanturiya theorem

Assume that the functions a and h are continuous on $\mathbb{R}_+$, and let $h(t) \le t$.

Consider the linear non-autonomous equation with a single delay

$$\dot{x}(t) + a(t)x(h(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{1}$$

We say that a continuously differentiable function $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ is a *solution* to equation (1), if x satisfies (1) everywhere provided that for $\xi \le 0$ we have $x(\xi) = \varphi(\xi)$ for some *initial function* φ. It is easily seen that for any continuous function φ there is a unique solution to (1).

Theorem 1 ([10]). *If $a(t) \geq 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = +\infty$ and*

$$\liminf_{t\to+\infty} \int\limits_{h(t)}^{t} a(s)\,ds > 1/e, \tag{2}$$

then equation (1) *is oscillatory.*

Let us consider the hypotheses of Theorem 1. The condition $a_k(t) \geq 0$ means that equations under consideration are those of *stable type*. The condition $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = +\infty$ was for the first time introduced by Myshkis as a weakening of the condition of the boundedness of delay. Myshkis showed the essentiality of this condition, therefore below we will call it and its analogues for equations of more general form *the Myshkis condition*. The last few decades, as a rule, researchers of asymptotics of delay differential equations have imposed it without any explanation. The main condition of Theorem 1 is the inequality (2). The case of the autonomous equation shows that the constant $1/e$ in (2) is sharp, i.e. it cannot be diminished. Moreover, the strict inequality (2) cannot be replaced by the nonstrict one. However, one can refine the left-hand side of the inequality and make oscillation conditions to be applicable to wider classes of equations. The number of papers devoted to refinements and generalizations of Theorem 1 is growing every year.

2.2. The equation with several delays

One of the main directions of generalizations of Koplatadze—Chanturiya theorem is the transfer of the result to equations with several delays.

Consider the equation

$$\dot{x}(t) + \sum_{k=1}^{m} a_k(t) x(h_k(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

where it is assumed that the functions a_k and h_k are piecewise continuous, and $h_k(t) \leq t$, $k = \overline{1,m}$. By analogy with equation (1), we suppose that a *solution* to equation (3) is a continuously differentiable function $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ that satisfies (3) for some continuous initial function $\varphi\colon (-\infty, 0] \to \mathbb{R}_+$.

Futher, we everywhere suppose that $a_k(t) \geq 0$, that is equation (3) is of stable type, and that the Myshkis condition $\lim\limits_{t\to\infty} h_k(t) = +\infty$ is fulfilled, $k = \overline{1,m}$.

Since equation (1) is a special case of (3), there is a natural desire to generalize Theorem 1 to equation (3). First, consider the autonomous equation

$$\dot{x}(t) + \sum_{k=1}^{m} a_k x(t - r_k) = 0. \tag{4}$$

Theorem 2 ([13]). *For equation* (4) *to be oscillatory it is sufficient that*

$$\sum_{k=1}^{m} a_k r_k > 1/e. \tag{5}$$

Now, by virtue of Theorems 1 and 2, it is natural to set the following

Problem. Is it true that if

$$\liminf_{t\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_{h_k(t)}^{t} a_k(s)\,ds > 1/e, \tag{6}$$

then equation (3) is oscillatory?

In fact, Problem was not explicitly posed in literature; nevertheless, since 1982 many attempts have been made to bring sufficient oscillation conditions for equation (3) as close as possible to the inequality (6). However, the answer to the question in Problem is negative, which was shown by a counterexample in the recent paper [6].

The simplest way to generalize Theorem 1 to the case of equation (3) is to take an interval of integration small enough to be contained in all the intervals $[h_k(t), t]$, $k = \overline{1, m}$. Results of this kind are deduced from the following special case of the Myshkis theorem on the comparison of solutions [16, p. 177].

Theorem 3. *If equation* (3) *is oscillatory and* $\tilde{a}_k(t) \ge a(t) \ge 0$, $\tilde{h}_k(t) \le h(t)$, $k = \overline{1, m}$, *then the equation*

$$\dot{x}(t) + \sum_{k=1}^{m} \tilde{a}_k(t) x(\tilde{h}_k(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

is also oscillatory.

The following fact is obtained immediately from Theorems 1 and 3.

Denote $g(t) = \max\limits_{k\in\{1,\dots,m\}} \sup\limits_{s\in[0,t]} h_k(s)$.

Corollary 1. *If*

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{g(t)}^{t} \sum_{k=1}^{m} a_k(s)\,ds > 1/e,$$

then equation (3) *is oscillatory.*

Remark 1. The result equivalent to Corollary 1 was apparently first set in [8]. Unfortunately, contemporary authors do not read works by Myshkis, so they have to derive consequences of his results from scratch.

Corollary 1 has an evident weakness: the effect of relatively large delays on the oscillation is not taken into account; e. g., if $h_k(t) = t$ for some k, then the result completely loses force.

3. Three approaches to testing oscillation

In this section we consider the most effective of the known approaches to generalizing Theorems 1 and 2 to the case of equation (3).

3.1. Iterative method

Consider a fruitful approach, which allows to refine the hypotheses in Corollary 1 and take into account the effect of all delays on the oscillation of equation (3). It consists in constructing an iterative sequence of statements such that each of them refines oscillation conditions presented in the previous one. This approach goes back to paper [11] by Koplatadze and Kvinikadze. In works of other authors it has been developed only since 2016.

Denote $P_0(t,s) = 1$ and

$$P_n(t,s) = \exp\left\{\int\limits_s^t \sum_{k=1}^m a_k(\zeta)P_{n-1}(\zeta, h_k(\zeta))\,d\zeta\right\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Lemma 1 ([3]). *If a solution x of (3) is positive for $t \geq t_0$, then there exists $t_1 \geq t_0$ such that for all $n \in \mathbb{N}$ and $t \geq s \geq t_1$ we have*

$$x(t)P_n(t,s) \leq x(s).$$

Theorem 4 ([5]). *If for some $n \in \mathbb{N}$ the inequality*

$$\liminf_{t\to\infty} \int\limits_{g(t)}^t \sum_{k=1}^m a_k(s)P_n(g(s), h_k(s))\,ds > 1/e, \tag{8}$$

is true, then equation (3) is oscillatory.

If one replaces $g(s)$ by $g(t)$ in (8), then Theorem 4 turns into Theorem 6 from [3], which is erroneous, see [5]. There are corrected versions of [3] published at arXiv.org in 2017 and 2019.

It is possible to increase the left-hand side in the inequality (8) at the cost of increasing the number of integrals in (8) or (7). Such a refinement of Theorem 4 is presented, e. g., in [4]. It is curious that the incorrect Theorem 6 from [3] is quoted in [4] as well as in some other papers, results of which would be useless if this theorem were true. However, there are many absurdities in works of recent years on the topic under discussion.

3.2. Change of integration sets

Consider another recent approach to the refinement and generalization of Theorem 1. For $k = \overline{1,m}$ define families of sets

$$E_k(t) = \{s \geq t : h_k(s) < t\}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

For what follows, we extend the class of equations (3). Assume that the functions a_k are locally integrable, the functions h_k are Lebesgue measurable, and $h_k(t) \leq t$ for almost all $t \in \mathbb{R}_+$, $k = \overline{1,m}$. Below we mean that a *solution* to equation (3) is a locally absolutely continuous function $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ that satisfies (3) almost everywhere on $\mathbb{R}_+$. It is easily seen (see, e. g., [1, Ch. 1]) that for any given bounded Borel initial function $\varphi\colon (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ provided that $x(\xi) = \varphi(\xi)$, $\xi \leq 0$, and *initial value* $x(0)$ there exists a unique solution to equation (3).

We set $a_k(t) \geq 0$ for almost all $t \in \mathbb{R}_+$, and $h_k(t) \to \infty$ as $t \to \infty$ essentially, that is for t defined in some $M \subset \mathbb{R}_+$ such that $\mu(\mathbb{R} \setminus M) = 0$.

Theorem 5 ([7]). *If*

$$\liminf_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_{E_k(t)} a_k(s)\, ds > 1/e,$$

then equation (3) *is oscillatory.*

Theorem 5 is significantly stronger than Theorem 1 even in the case $m = 1$, see [7].

Corollary 2. *If the functions h_k are continuous and strictly increasing to infinity on $\mathbb{R}_+$, $k = \overline{1,m}$, and*

$$\liminf_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_{t}^{h_k^{-1}(t)} a_k(s)\, ds > 1/e,$$

then equation (3) *is oscillatory.*

Corollary 3 ([14]). *If $h_k(t) = t - r_k$, where $r_k = const > 0$, $k = \overline{1,m}$, and*

$$\liminf_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_{t}^{t+r_k} a_k(s)\, ds > 1/e, \tag{9}$$

then equation (3) *is oscillatory.*

Note that if $m > 1$, then, in general,

$$\liminf_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_{t}^{t+r_k} a_k(s)\, ds \neq \liminf_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_{t-r_k}^{t} a_k(s)\, ds.$$

If one replaces the intervals of integration $[t, t + r_k]$ by $[t - r_k, t]$ in (9), then (9) turns into a special case of (6), and Corollary 3 turns into an erroneous statement, see [6].

However, in some papers Theorem 5 from [14], which is the same as Corollary 3, is quoted with this incorrect replacement.

There is a question, is it possible to apply to Theorem 5 an iterative approach similar to that described in subsection 3.1. In this regard, we note that iterative refinements of Theorem 1 and Corollary 1 take place due to the fact that these propositions are insensitive to the non-monotonicity of the functions h and h_k. It is not the case for Theorem 5, which takes into account all the values of all delays. If an iterative generalization of Theorem 5 is possible, then it requires a more subtle approach.

3.3. The Hunt—Yorke theorem

The following result stands apart among lower-limit oscillation conditions for (3).

Theorem 6 ([9]). *If the functions a_k and h_k are continuous, the functions $r_k(t) = t - h_k(t)$ are bounded, $a_k(t), r_k(t) > 0$, $k = \overline{1,m}$, and*

$$\liminf_{t \to +\infty} \sum_{k=1}^{m} a_k(t) r_k(t) > \frac{1}{e},$$

then equation (3) is oscillatory.

Theorem 6, like Theorems 4 and 5, generalize Theorem 2. The conditions in Theorem 6 can be called *pointwise*, in contrast to integral conditions like those of Theorems 1, 4 and 5. Surprisingly, Theorem 6, which is quoted in a large number of works, has in fact not been compared in strength with integral conditions of oscillations.

Note that one of the hypotheses of Theorem 6 assumes that delays are limited. This condition is essentially used in the proof given by the authors in [9]. The natural question of whether it is possible to replace the condition of limited delays by the Myshkis condition, apparently, has not yet been posed in literature. We do not answer this question here, but we can conjecture that this weakening of the assumptions of Theorem 6 is correct.

4. Comparison of oscillation tests

In this section we compare with each other the classes of equations of the form (3) with parameters satisfying the hypotheses of Theorems 4, 5 and 6. We call these classes the *domains of applicability* of the theorems. We give a number of examples showing that for each of Theorems 4, 5 and 6 its domain of applicability is not included into that of any of the other two theorems even in the case of a single delay. The results of this section are valid regardless of whether we consider equation (3) under the assumptions of subsection 2.2 or those of subsection 3.2.

The easiest case of our task is to show that the domain of applicability of Theorem 5 is not included into any of those of Theorems 4 and 6. For this end, it is sufficient to consider an equation with periodically vanishing delay.

Consider the equation

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t - r(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{10}$$

and denote $g(t) = \sup\limits_{s\in[0,t]} (s - r(s))$.

Example 1. Set in equation (10) $a(t) \equiv 1$ and

$$r(t) = \begin{cases} 1, & t \in [n, n+1/2); \\ 0, & t \in [n+1/2, n+1); \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

We have

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{E(t)} a(s)\,ds = \int_n^{n+1/2} a(s)\,ds = 1/2 > 1/e;$$
$$\liminf_{t\to\infty} a(t)r(t) = \liminf_{t\to\infty} \int_{g(t)}^t a(s)P_n(g(s), h(s))\,ds = 0 < 1/e.$$

Thus, the equation is oscillatory by Theorem 5, but this cannot be established by any of Theorems 4 and 6.

The following example shows that the domain of applicability of Theorem 6 is not included into any of those of Theorems 4 and 5.

Example 2. Consider equation (10), where for $n = 0, 1, 2, \ldots$ set

$$a(t) = \begin{cases} 1/3, & t \in [3n, 3n+2); \\ 2/3, & t \in [3n+2, 3(n+1)); \end{cases} \qquad r(t) = \begin{cases} 2, & t \in [3n, 3n+2); \\ 1, & t \in [3n+2, 3(n+1)). \end{cases}$$

We have

$$\liminf_{t\to\infty} a(t)r(t) = 2/3 > 1/e;$$

however,

$$\begin{aligned}\liminf_{t\to\infty} \int_{g(t)}^t a(s)P_n(g(s), h(s))\,ds &= \int_{g(3n+2)}^{3n+2} a(s)P_n(g(s), h(s))\,ds \\ &= \int_{3n+1}^{3n+2} a(s)\,ds = 1/3 < 1/e,\end{aligned}$$

and

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{E(t)} a(s)\,ds = \int_{E(3n+1)} a(s)\,ds = \int_{3n+1}^{3n+2} a(s)\,ds = 1/3 < 1/e.$$

Thus, the equation is oscillatory by Theorem 6, but this cannot be established by any of Theorems 4 and 5.

At last, the following example shows that the domain of applicability of Theorem 4 is not included into any of those of Theorems 5 and 6.

Example 3. Consider equation (10), where $a(t) = 1/e$, and for $n = 0, 1, 2, \ldots$ we put

$$h(t) = t - r(t) = \begin{cases} t-2, & t \in [4n, 4n+2); \\ 4n-1, & t \in [4n+2, 4n+3); \\ 4n+2, & t \in [4n+3, 4(n+1)). \end{cases}$$

One can see that

$$\liminf_{t\to+\infty} \int_{E(t)} a(s)\,ds = \int_{E(4n+2)} a(s)\,ds = \int_{4n+2}^{4n+3} a(s)\,ds = 1/e,$$

and

$$\liminf_{t\to+\infty} a(t)r(t) = a(4n+3)r(4n+3) = (1/e)\cdot 1 = 1/e.$$

However,

$$\liminf_{t\to+\infty} \int_{g(t)}^{t} a(s)P_1(g(s), h(s))\,ds = \liminf_{t\to+\infty} \int_{g(t)}^{t} a(s)\exp\left(\int_{h(s)}^{g(s)} a(\tau)\,d\tau\right) ds$$
$$= \int_{4n+2}^{4n+3} a(s)\exp\left(\int_{h(s)}^{g(s)} a(\tau)\,d\tau\right) ds > \int_{4n+2}^{4n+3} a(s)\,ds = 1/e.$$

Thus, equation (10) is oscillatory, which is established by Theorem 4 and cannot be established by any of Theorems 5 and 6.

5. Conclusion

We have examined a class of sufficient conditions for the oscillation of all solutions to linear non-autonomous differential equations of first order with several delays, which is called a class of lower-limit oscillation tests. For our analysis, we have chosen three approaches to constructing such tests, which we consider to be the most effective.

As to the generalization and refinement of the represented results, we can say the following. The iterative oscillation tests allow refinement at the cost of a significant complication of formulas (7) and (8) [4]. The Hunt—York approach was tranferred to the case of equations with distributed delay in [2]. Generalizations of Theorem 5 are currently unknown.

There are other approaches to oscillation testing. In particular, it should be noted that oscillation conditions can be formulated in terms of estimates for not the lower, but the upper limit of a functional of equation parameters. Moreover, the iterative approach was first developed in [11] specifically for this kind of oscillation tests.

References

1. *Azbelev, N. V., Maksimov, V. P., Rakhmatullina, L. F.* Introduction to the theory of linear functional-differential equations. Transl. from the Russian. Advanced Series in Mathematical Science and Engineering, 3. Atlanta: World Federation Publishers Company, 1995. Zbl 0867.34051
2. *Berezansky, L., Braverman, E.* On oscillation of equations with distributed delay. Z. Anal. Anwend. 20, No. 2, 489–504 (2001). Zbl 0995.34059
3. *Braverman, E., Chatzarakis, G. E., Stavroulakis, I. P.* Iterative oscillation tests for differential equations with several non-monotone arguments. Adv. Difference Equ. 2016, Paper No. 87, 18 p. (2016). Zbl 1348.34121
4. *Chatzarakis, G. E., Dix, J. G.* Oscillations of nonlinear differential equations with several deviating arguments. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2018, Paper No. 39, 12 p. (2018). Zbl 1413.34214
5. *Chudinov, K. M., Malygina, V. V.* On oscillation of linear differential equations with several delays, Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science. No. 4, 11-18 (2017). (in Russian)
6. *Chudinov, K. M.* On exact sufficient oscillation conditions for solutions of linear differential and difference equations of the first order with aftereffect. Russian Math. (Iz. VUZ) 62, 79–84 (2018). Zbl 1403.34049
7. *Chudinov, K. M.* On the conditions for oscillation of the solutions to differential equations with aftereffect and generalization of the Koplatadze-Chanturiya theorem. Sib. Math. J. 61, 178–186 (2020).
8. *Fukagai, N., Kusano, T.* Oscillation theory of first order functional-differential equations with deviating arguments. Ann. Mat. Pura Appl. 136, No. 4, 95-117 (1984). Zbl 0552.34062
9. *Hunt, B. R., Yorke, J. A.* When all solutions of $x' = -\sum q_i(t)x(t - T_i(t))$ oscillate. J. Differential Equations 53, No. 2, 139–145 (1984). Zbl 0571.34057
10. *Koplatadze, R. G., Chanturiya, T. A.* Oscillating and monotone solutions of first-order differential equations with deviating argument. Differentsial'nye Uravneniya 18, No. 8, 1463–1465 (1982). (in Russian) Zbl 0496.34044
11. *Koplatadze, R., Kvinikadze, G.* On the oscillation of solutions of first-order delay differential inequalities and equations. Georgian Math. J. 1, No. 6, 675–685 (1994).
12. *Ladas G.* Sharp conditions for oscillations caused by delays. Applicable Anal. 9, No. 2, 93–98 (1979). Zbl 0407.34055
13. *Ladas, G., Stavroulakis, I. P.* Oscillations caused by several retarded and advanced arguments. J. Differ. Equations 44, 134-152 (1982). Zbl 0452.34058
14. *Li, B.* Oscillation of first order delay differential equations. Proc. Amer. Math. Soc. 124, No. 12, 3729–3737 (1996). Zbl 0865.34057
15. *Myshkis, A. D.* On solutions of linear homogeneous differential equations of the first order of stable type with a retarded argument. Mat. Sb., N. Ser. 28(70), 641-658 (1951). (in Russian) Zbl 0042.32802
16. *Myshkis, A. D.* Linear differential equations with a retarded argument. Moscow: Nauka, 1972. (in Russian) Zbl 0261.34040

Получена 20.02.2020

Подписано в печать 03.06.2020. Формат 60х84/8.
Усл. печ. л. 14,42. Тираж 25 экз. Заказ № НП/362. Бесплатно.
Дата выхода в свет 05.03.2021.
Отпечатано в Издательском доме
ФГАОУ ВО «КФУ им. В. И. Вернадского»
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7

Динамические системы

Том 10(38) №1 2020

Содержание