

ISSN 0203-3755

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Том 9 (37), №3



ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Министерство образования и науки Российской Федерации
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского

Математический журнал

Главный редактор: д-р физ.-мат. наук О. В. Анашкин, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь.

Заместитель главного редактора: д-р физ.-мат. наук О. В. Починка, Национальный исследовательский ун-т «Высшая школа экономики» (нижегородский филиал), Нижний Новгород.

Редакционная коллегия:

А. О. Ватульян, д-р физ.-мат. наук, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону;

В. З. Гринес, д-р физ.-мат. наук, Национальный исследовательский ун-т «Высшая школа экономики» (нижегородский филиал), Нижний Новгород;

Г. В. Демиденко, д-р физ.-мат. наук, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;

А. В. Карапетян, д-р физ.-мат. наук, МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва;

С. А. Кащенко, д-р физ.-мат. наук, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль;

Н. Д. Копачевский, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;

Н. В. Кузнецов, д-р физ.-мат. наук, Санкт-Петербургский университет, Санкт-Петербург;

В. Б. Левенштам, д-р физ.-мат. наук, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону;

В. А. Лукьяненко, канд. физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;

М. А. Муратов, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;

И. В. Орлов, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;

Г. С. Осипенко, д-р физ.-мат. наук, Севастопольский филиал МГУ им. М. В. Ломоносова, Севастополь;

Н. О. Седова, д-р физ.-мат. наук, Ульяновский государственный университет;

В. Н. Тхай, д-р физ.-мат. наук, Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова, Москва;

И. А. Финогенко, д-р физ.-мат. наук, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск;

В. Н. Чехов, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;

V. Kravchenko, PhD, Center for Research and Advanced Studies of the National Polytechnic Institute (Cinvestav), Queretaro, Mexico;

T. Krisztin, DSc, Corresponding member of the Hungarian Academy of Sciences, Bolyai Institute, University of Szeged, Szeged, Hungary;

A. Shiriaev, PhD, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway.

A. L. Zuev, DSc, Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems, Magdeburg, Germany.

Том 9(37), №3, 211-318.

Печатается по решению Научно-технического Совета КФУ протокол №9 от 30.12.2019.

ISSN 0203–3755

Адрес редакционной коллегии: Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, к. 203В, пр-т Вернадского, 4, Симферополь 295007, Россия.
Тел. +7 978 7715582· E-mail: dynsys2011@yandex.ru

© Крымский федеральный ун-т, 2019

Свидетельство о регистрации средства массовой информации — ПИ №ФС77-61810, выдано 18.05.15.

УДК 517.958

К проблеме малых колебаний системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд (модельная задача)¹

Н. Д. Копачевский

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь 295007. E-mail: kopachevsky@list.ru

Аннотация. В работе изучается скалярная задача сопряжения, модулирующая проблему малых колебаний двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд. Исследуется начально-краевая задача и методами теории полугрупп доказывается теорема о ее однозначной разрешимости на любом конечном отрезке времени. Возникающая при этом соответствующая спектральная проблема для нормальных колебаний системы исследуется методами спектральной теории оператор-функций (операторных пучков). Полученный операторный пучок обобщает как известный операторный пучок С. Г. Крейна (колебания вязкой жидкости в сосуде), так и пучок, возникающий в задаче о малых движениях вязкоупругой жидкости в частично заполненном сосуде. Рассмотрен также пример двумерной задачи, допускающей разделение переменных, и на этой основе исследован более подробно спектр нормальных движений гидросистем.

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, гидродинамическая система, ортопроектор, операторно-дифференциальное уравнение, задача Коши, спектральная задача

Normal oscillations of hydrosystem of two viscoelastic fluids in stationary container (a model problem)

N. D. Kopachevsky

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. In the paper, we consider a problem on small motions and normal oscillations of two viscoelastic fluids in a stationary container. One of models of such fluids is Oldroid's model. It is described, for example, in the book Eirich, F. R. Rheology. Theory and Applications. N.-Y.: Academic Press, 1956. It is important to notice that the present paper is devoted to the study of the scalar model problem. Also it should be noted that the present paper based on the previous author's works together with Azizov, T. Ya., Orlova L. D., Krein, S. G. Namely, problem on small movements of one or two viscoelastic fluid for generalized Oldroid's model and normal oscillations of a viscoelastic fluid in an open container were investigated in these papers. The aim of this paper is to use an operator approach of mentioned works, to prove the theorem on correct solvability for the scalar model initial boundary-value problem generated by a problem of small motions of two viscoelastic fluids in a stationary

¹Работа выполнена при частичной поддержке гранта Российского научного фонда (16-11-10125 "Операторные уравнения в функциональных пространствах и приложения к нелинейному анализу", выполняемого в Воронежском госуниверситете).

container and to get properties of eigenvalues and eigenelements of corresponding spectral problem. This paper is organized as follows. In section 1 we describe a model of viscoelastic fluid, formulate mathematical statement of the problem: linearized equations of movements, stickiness condition, kinematic and dynamic conditions. Further, in this section we receive the law of full energy balance and choose the functional spaces generated by the problem. For applying of method of orthogonal projection we need to get orthogonal projector on corresponding space. The law of action of this projector we receive in this section. In section 2 we make transition to operator equation by using orthogonal projector received in section 1. Further, we solve some auxiliary problems and obtain the Cauchy problem for the system of integro-differential equation in some Hilbert space. Then we make transition to a system of differential equation. This system can be rewrite as operator differential equation in the sum of Hilbert spaces. Properties of main operator of this problem are studied in this section. The existence and uniqueness theorems for final operator differential equation as for original initial-boundary-value problem based on factorization, closure and accretivity property of operator matrix. Finally, in this section we consider the spectral problem on normal oscillations corresponding to the evolution problem. This means that external forces equal to zero and dependence by time for the unknown function has the form $e^{-\lambda t}$. Here we obtain the spectral problem for operator pencil and study main properties of it. Section 3 is devoted to investigating of model spectral problem in rectangular domain. The more detailed properties of eigenvalues are obtained here.

Keywords: viscoelastic fluid, hydrodynamic system, orthogonal projector, operator differential equation, Cauchy problem, spectral problem

MSC 2010: 76D05, 35Q30, 39A14, 39B42

1. Постановка скалярной модельной задачи

1.1. Введение

Одними из первых работ, связанных с применением методов функционального анализа к исследованию проблемы малых движений и нормальных колебаний вязкоупругой жидкости в частично заполненном сосуде, являются работы А. И. Милославского (см. [8, 16, 17]). В них для обобщенной модели Олдройта ($m > 1$) применён операторный подход, развивающий построения, проведённые ранее С. Г. Крейном и его учениками (см. [5, 6]), а также ([3, 15]) применительно к задаче о малых колебаниях вязкой жидкости в частично заполненном сосуде либо системы из несмешивающихся жидкостей. Случай полного заполнения полости вязкоупругой жидкости рассмотрен в [12], а также в [2]. Вариант начально-краевой задачи для сосуда, заполненного двумя несмешивающимися вязкоупругими жидкостями, изучен в [14]. Там же сформирована спектральная проблема в задаче о нормальных колебаниях гидросистемы, которая приведена к исследованию операторного пучка, обобщающего известный пучок С. Г. Крейна.

В данной работе изучается модельная спектральная задача, обладающая всеми особенностями векторной проблемы о нормальных колебаниях системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих произвольный сосуд, а также ее частный случай (двумерная проблема в прямоугольном сосуде). Для произвольного сосуда изучена начально-краевая задача и получена спектральная проблема для операторного пучка, обобщающая пучок С. Г. Крейна. Далее изучается соответствующая спектральная задача в упомянутом частном случае, допускающем разделение переменных. Характеристическое уравнение задачи позволяет проводить её

исследование графически с использованием асимптотических методов. В итоге модельная задача позволяет выдвинуть гипотезу о структуре спектра в векторной гидродинамической задаче в случае, когда сосуд заполнен двумя или более несмешивающимися жидкостями.

1.2. Предварительная постановка проблемы

Будем считать, что две вязкоупругих жидкости модели Олдройта заполняют сосуд $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и в состоянии равновесия под действием гравитационного поля занимают области Ω_1 и Ω_2 соответственно с горизонтальной границей раздела Γ . Обозначим через S_1 и S_2 те части границы $\partial\Omega$, которые примыкают к первой и второй жидкостям соответственно.

Введем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, чтобы ось Ox_3 была направлена вверх, т.е. против действия однородного гравитационного поля, а начало координат O находилось на Γ . Тогда ускорение гравитационного поля $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, $g > 0$, а в состоянии покоя поле давлений в жидкостях выражаются по законам Архимеда:

$$P_{0,k}(x_3) = p_0 - \rho_k g x_3, \quad k = 1, 2, \tag{1.1}$$

где $\rho_k > 0$ — постоянные плотности жидкостей, а p_0 — давление на границе раздела Γ .

Приведём теперь постановку задачи о малых движениях системы из двух вязкоупругих жидкостей модели Олдройта (см.[14]). Пусть $\vec{u}_k(t, x)$ — поля малых скоростей, а $p_k(t, x)$ — отклонения полей давлений от их равновесных значений (1.1). Полагаем, что на гидросистему дополнительно к гравитационному действует малое поле внешних сил $\vec{f} = \vec{f}(t, x)$, $x \in \Omega$.

Тогда линеаризованные уравнения движения жидкостей имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho_k \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} &= -\nabla p_k + \mu_k \Delta \vec{v}_k + \rho_k \vec{f}_k, \quad \text{div} \vec{u}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \\ \vec{v}_k(t, x) &= \vec{u}_k(t, x) + \alpha_k \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)} \vec{u}_k(s, x) ds =: I_{0,k}(t) \vec{u}_k, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\mu_k > 0$ — динамические вязкости жидкостей, $\alpha_k \geq 0$, $\beta_k \geq 0$ — коэффициенты, характеризующие свойства вязкоупругости жидкостей модели Олдройта, $\vec{f}_k := \vec{f}|_{\Omega_k}$, $k = 1, 2$, а Δ — трёхмерный оператор Лапласа.

Для вязких жидкостей, как известно, на твёрдых стенках S_k сосуда должны выполняться условия прилипания, т.е.

$$\vec{u}_k = \vec{0} \quad (\text{на } S_k), \quad k = 1, 2, \tag{1.3}$$

а на границе Γ — условия непрерывности полей скоростей:

$$\vec{u}_1(t, x) = \vec{u}_2(t, x), \quad x \in \Gamma. \tag{1.4}$$

Пусть

$$x_3 = \zeta(t, x), \quad x \in \Gamma, \quad (1.5)$$

— вертикальное отклонение границы раздела между жидкостями в процессе малых движений системы. Тогда на Γ должно выполняться кинематическое условие

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \vec{u}_1 \cdot \vec{n} =: \gamma_{n,1} \vec{u}_1 = \vec{u}_2 \cdot \vec{n} =: \gamma_{n,2} \vec{u}_2, \quad (1.6)$$

а символом $\gamma_{n,k}$ обозначена операция взятия нормальной компоненты поля скорости. Заметим также, что из условия сохранения объёма каждой из жидкости имеем связь

$$\int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0. \quad (1.7)$$

Сформулируем теперь динамические условия на Γ . Они состоят в том, что на движущейся границе раздела жидкостей векторное поле напряжений при переходе из одной жидкости к другой изменяется непрерывно. Линеаризация этого условия и его снос на Γ приводит к следующим соотношениям: на Γ касательные напряжения изменяются непрерывно, а нормальное напряжение (т.е. вдоль оси Ox_3) компенсируется гравитационным скачком давлений. Имеем

$$\begin{aligned} \mu_1 \tau_{j3}(\vec{v}_1) &= \mu_2 \tau_{j3}(\vec{v}_2), \quad \vec{v}_k = I_{0,k}(t) \vec{u}_k, \quad k = 1, 2, \quad j = 1, 2; \\ [-p_1 + \mu_1 \tau_{33}(\vec{v}_1)] &- [-p_2 + \mu_2 \tau_{33}(\vec{v}_2)] = -g(\rho_1 - \rho_2) \zeta \quad (\text{на } \Gamma). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь

$$\tau_{jl}(\vec{u}) := \frac{\partial u_j}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_j}, \quad j, l = 1, 2, 3, - \quad (1.9)$$

— удвоенный тензор скоростей деформаций в жидкости с полем скоростей $\vec{u}(t, x)$, а $I_{0,k}(t)$ — закон действия памяти в модели Олдройта (см. (1.2)).

Наконец, для искомым функций $\vec{u}_k(t, x)$, $p_k(t, x)$, $k = 1, 2$, и $\zeta(t, x)$ необходимо еще задать начальные условия:

$$\begin{aligned} \vec{u}_k(0, x) &= \vec{u}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad k = 1, 2; \quad \vec{u}_1^0(x) = \vec{u}_2^0(x), \quad x \in \Gamma; \\ \zeta(0, x) &= \zeta^0(x), \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (1.10)$$

1.3. Формулировка модельной начально-краевой и спектральной задачи

Опираясь на постановку задачи (1.2) – (1.10), сформулируем модельную начально-краевую задачу о малых движениях системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, разбитую на две части Ω_1 и Ω_2 , как это было описано выше в п 1.2. При этом воспользуемся следующими упрощающими предположениями.

1. Векторные поля скоростей $\vec{u}_k(t, x)$ заменяем скалярными полями $u_k(t, x)$, $x \in \Omega_k$, $k = 1, 2$, поля давлений $p_k(t, x)$ считаем тождественно равными нулю, а условия соленоидальности отбрасываем.

2. Кинематические условия (1.6) заменяем аналогичными соотношениями с $u_1 = u_2$ на Γ .

3. В динамических условиях (1.8), (1.9) условие равенства касательных напряжений нулю отбрасываем, а нормальные напряжения на Γ заменяем производными от $u_k(t, x)$ по внешней нормали к Ω_k .

Тогда при тех же обозначениях для остальных параметров и функций приходим к следующей начально-краевой задаче:

$$\rho_k \frac{\partial u_k}{\partial t} = \mu_k \Delta v_k + \rho_k f_k \quad (\text{в } \Omega_k), \quad k = 1, 2, \tag{1.11}$$

$$v_k(t, x) := u_k(t, x) + \alpha_k \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)} u_k(s, x) ds =: I_{0,k}(t) u_k, \quad k = 1, 2, \tag{1.12}$$

$$u_k(t, x) = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad k = 1, 2, \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = u_1 =: \gamma_1 u_1 = u_2 =: \gamma_2 u_2 \quad (\text{на } \Gamma), \tag{1.14}$$

$$\int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0, \tag{1.15}$$

$$\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial n} - \mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial n} = -g(\rho_1 - \rho_2) \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad \vec{n} = \vec{e}_3, \tag{1.16}$$

$$u_k(0, x) = u_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad k = 1, 2; \quad \zeta(0, x) = \zeta^0(x), \quad x \in \Gamma. \tag{1.17}$$

Далее будем рассматривать также задачу о нормальных движениях, т.е. о решениях однородной начально-краевой проблемы (1.11) – (1.17), зависящих от t по экспоненциальному закону:

$$u_k(t, x) = \exp(-\lambda t) u_k(x), \quad x \in \Omega_k, \quad k = 1, 2, \tag{1.18}$$

$$\zeta(t, x) = \exp(-\lambda t) \zeta(x), \quad x \in \Gamma, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

При этом воспользуемся следствиями из соотношений (1.12) для модели вязко-упругой жидкости Олдройта:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_k}{\partial t} &= \alpha_k^{1/2} u_k - \beta_k w_k, \quad w_k(0) = 0, \\ w_k &:= \alpha_k^{1/2} \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)} u_k(s, x) ds, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Тогда для амплитудных функций $u_k(x)$, $k = 1, 2$, $\zeta(x)$, а также амплитудных функций $w_k(x)$, $k = 1, 2$, отвечающих связям (1.19), возникает следующая спектральная задача:

$$\begin{aligned} -\lambda\rho_k u_k &= \mu_k \Delta(u_k + \alpha_k^{1/2} w_k), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \\ -\lambda w_k &= \alpha_k^{1/2} u_k - \beta_k w_k, \quad x \in \Omega_k, \quad k = 1, 2, \\ u_k &= 0 \text{ (на } S_k), \quad k = 1, 2, \quad w_k = 0 \text{ (на } S_k), \quad k = 1, 2, \\ -\lambda\zeta &= u_1 = u_2 \text{ (на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0, \\ \mu_1 \frac{\partial}{\partial n} (u_1 + \alpha_1^{1/2} w_1) - \mu_2 \frac{\partial}{\partial n} (u_2 + \alpha_2^{1/2} w_2) &= -g(\rho_1 - \rho_2)\zeta \text{ (на } \Gamma), \quad \vec{n} = \vec{e}_3. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Далее задачу (1.11) – (1.17), а также задачу (1.20) будем исследовать методами функционального анализа и спектральной теории операторных пучков с использованием обобщённой формулы Грина для оператора Лапласа, приспособленной к изучению краевых задач в областях с липшицевой границей.

1.4. О формуле Грина для оператора Лапласа

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — область с границей $\partial\Omega$, разбитой на два куска S и Γ . Введем пространство функций $H^1(\Omega)$ с нормой, эквивалентной стандартной:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega + \left| \int_{\Gamma} u d\Gamma \right|^2. \tag{1.21}$$

Для подпространства $H_{\Gamma}^1(\Omega)$ функций из $H^1(\Omega)$, у которых выполнено условие

$$\int_{\Gamma} u d\Gamma = 0, \tag{1.22}$$

имеем

$$\|u\|_{H_{\Gamma}^1(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega, \tag{1.23}$$

т.е. квадрат нормы совпадает с интегралом Дирихле.

Введем далее подпространство $H_{0,S}^1(\Omega)$ функций, обращающихся в нуль на S :

$$H_{0,S}^1(\Omega) := \{u \in H_{\Gamma}^1(\Omega) : u|_S = 0\}. \tag{1.24}$$

Будем считать, что граница $\partial\Omega$ области Ω липшицева, причем ее куски S и Γ , на которые она разбита, также липшицевы. Тогда, как известно (см. [14]), след функций

из $H^1(\Omega)$, вычисленный на $\partial\Omega$, принадлежит пространству $H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L_2(\partial\Omega)$. Более того, функции на его кусках, заданные на Γ и S , также принадлежат соответствующим пространствам $H^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{1/2}(S)$ соответственно (см. [1]).

Введем в $H^1_\Gamma(\Omega)$ множество функций, которые обладают следующим свойством: их следы $\gamma_\Gamma u \in H^{1/2}_\Gamma \cap L_{2,\Gamma}$ продолжимы нулём на кусок S в классе $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Обозначим соответствующее множество из $H^1_\Gamma(\Omega)$ символом $\widehat{H}^1_\Gamma(\Omega)$, а совокупность следов на Γ — через $\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma$. Тогда оказывается, что имеет место оснащение пространства $L_{2,\Gamma} = L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$ в виде

$$\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma \hookrightarrow L_{2,\Gamma} \hookrightarrow \left(\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma\right)^* = H^{-1/2}_\Gamma; \tag{1.25}$$

при этом для элементов $\varphi \in \widetilde{H}^{1/2}_\Gamma$ и $\psi \in H^{-1/2}_\Gamma$ выражение $\langle \varphi, \psi \rangle_{L_{2,\Gamma}}$ является полуторалинейной формой в $L_{2,\Gamma}$:

$$|\langle \varphi, \psi \rangle_{L_{2,\Gamma}}| \leq \|\varphi\|_{\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma} \cdot \|\psi\|_{H^{-1/2}_\Gamma}. \tag{1.26}$$

Здесь $\langle \varphi, \psi \rangle_{L_{2,\Gamma}}$ — замыкание формы $(\varphi, \psi)_{L_{2,\Gamma}} := \int_\Gamma \varphi \psi d\Gamma$, заданное на гладких функциях, по соответствующим нормам.

Оказывается, для функций из $\widehat{H}^1_\Gamma(\Omega)$ имеет место следующая формула Грина для оператора Лапласа (см. [1]):

$$\begin{aligned} (\eta, u)_{H^1_{0,S}(\Omega)} &= \langle \eta, -\Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} + \left\langle \gamma_\Gamma \eta, \frac{\partial u}{\partial n} \right\rangle_{L_2(\Gamma)}, \\ -\Delta u &\in (H^1_\Gamma(\Omega))^*, \quad \gamma_\Gamma \eta \in \widetilde{H}^{1/2}_\Gamma, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_\Gamma \in H^{-1/2}_\Gamma. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Перейдём теперь к соответствующим формулам Грина для задачи (1.11) – (1.17). Считаем, что области $\Omega_k \subset \mathbb{R}^m$, $k = 1, 2$, имеют липшицевы границы $\partial\Omega_k$, состоящие из липшицевых кусков S_k и Γ соответственно, $k = 1, 2$. Введём множества $\widehat{H}^1_{0,S_k}(\Omega_k) \subset H^1_{0,S_k}(\Omega_k)$, а также наборы пар функций $\eta = (\eta_1; \eta_2)$ и $u = (u_1; u_2)$, $\eta_k, u_k \in \widehat{H}^1_{0,S_k}(\Omega_k)$, $k = 1, 2$. Для таких наборов определим скалярные произведения

$$(\eta, u)_{L_2(\Omega)} := \sum_{k=1}^2 \rho_k(\eta_k, u_k)_{L_2(\Omega_k)}, \tag{1.28}$$

$$(\eta, u)_{\widehat{H}^1_\Gamma(\Omega)} := \sum_{k=1}^2 \mu_k(\eta_k, u_k)_{H^1_{0,S_k}(\Omega_k)}. \tag{1.29}$$

Тогда оказывается (см. [1]), что для таких наборов имеет место следующая

обобщенная формула Грина:

$$\begin{aligned}
 (\eta, u)_{\widehat{H}_\Gamma^1(\Omega)} &= \sum_{k=1}^2 \langle \eta_k, -\mu_k \Delta u_k \rangle_{L_2(\Omega_k)} + \sum_{k=1}^2 \left\langle \gamma_k \eta_k, \mu_k \frac{\partial u_k}{\partial n_k} \right\rangle_{L_2, \Gamma}, \\
 \eta, u &\in \widehat{H}_{0,S}^1(\Omega), \quad \gamma_k \eta_k := \eta_k|_\Gamma \in \widetilde{H}_\Gamma^{1/2}, \quad k = 1, 2, \\
 \frac{\partial u_k}{\partial n_k} &\in H_\Gamma^{-1/2}, \quad k = 1, 2,
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

которая далее будет использоваться.

1.5. Закон баланса полной энергии

Будем считать, что начально-краевая задача (1.11) – (1.17) имеет классическое решение, т.е. все заданные и искомые функции, а также их производные, входящие в уравнения и краевые условия, являются непрерывными функциями своих переменных. Тогда, используя обобщенные формулы Грина для оператора Лапласа в областях Ω_k , $k = 1, 2$, можно установить, что для классического решения задачи имеет место следующее тождество:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} |u_k|^2 d\Omega_k + g(\rho_1 - \rho_2) \int_{\Gamma} |\zeta|^2 d\Gamma \right\} &= \\
 = - \sum_{k=1}^2 \mu_k \int_{\Omega_k} \nabla v_k \cdot \overline{\nabla u_k} d\Omega_k + \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} f_k \overline{u_k} d\Omega_k.
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Это тождество — закон баланса полной энергии системы в дифференциальной форме. Оно показывает, что изменение полной энергии исследуемой системы обусловлено мощностью диссипативных и внешних сил, действующих на систему.

Тождество (1.31) показывает также, что для искомых объектов следует выбирать пары функций $u = (u_1; u_2)$ из пространства $\widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega) \subset \widehat{H}_{0,S}^1(\Omega)$, которое определяется следующим образом:

$$\widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega) := \left\{ u = (u_1; u_2) \in \widehat{H}_{0,S}^1(\Omega) : \gamma_1 u_1 := u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma =: \gamma_2 u_2 \right\}. \tag{1.32}$$

Пространство $\widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$ плотно в пространстве $L_2(\Omega)$ (см. (1.28)), так как оно в качестве подпространства содержит множество

$$H_0^1(\Omega) := H_0^1(\Omega_1) \oplus H_0^1(\Omega_2) := \left\{ u = (u_1; u_2) \in \widehat{H}_{0,S}^1(\Omega) : u_k = 0 \text{ (на } \partial\Omega_k), \quad k = 1, 2 \right\}. \tag{1.33}$$

Лемма 1. *Имеет место следующее ортогональное разложение:*

$$\widehat{H}_{0,S}^1(\Omega) = \widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega) \oplus \widehat{H}_h^1(\Omega), \quad (1.34)$$

$$\widehat{H}_h^1(\Omega) := \left\{ u = (u_1; u_2) \in \widehat{H}_{0,S}^1(\Omega) : -\mu_k \Delta u_k = 0 \text{ (в } \Omega_k), k = 1, 2, \right. \\ \left. u_k = 0 \text{ (на } S_k), \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \text{ (на } \Gamma), \vec{n} = \vec{e}_3 \right\}. \quad (1.35)$$

Доказательство. Оно основано на формуле Грина (1.30) для областей Ω_1 и Ω_2 , а также на определении (1.32). \square

Опираясь на (1.33) – (1.35), получим закон действия ортопроектора

$$P_1 : \widehat{H}_{0,S}^1(\Omega) \rightarrow \widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega). \quad (1.36)$$

Пусть $(u_1; u_2) \in \widehat{H}_{0,S}^1(\Omega)$. Тогда

$$P_1(u_1; u_2) = (u_1; u_2) - (v_1; v_2),$$

где $(v_1; v_2) \in \widehat{H}_h^1(\Omega)$ – такой элемент, который в силу (1.32) удовлетворяет условию

$$\gamma_1 u_1 - \gamma_1 v_1 = \gamma_2 u_2 - \gamma_2 v_2,$$

т.е. для искомого $v = (v_1; v_2) \in \widehat{H}_h^1(\Omega)$ возникает задача сопряжения (см. (1.35))

$$-\mu_k \Delta v_k = 0 \text{ (в } \Omega_k), v_k = 0 \text{ (на } S_k), k = 1, 2;$$

$$\gamma_1 v_1 - \gamma_2 v_2 = \gamma_1 u_1 - \gamma_2 u_2 =: \varphi \text{ (на } \Gamma), \quad (1.37)$$

$$\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial n} =: \psi \text{ (на } \Gamma), \vec{n} = \vec{e}_3.$$

Здесь φ – заданная функция, а ψ – неизвестная.

Будем считать, что функция ψ известна, и выразим через нее функцию φ . Это можно сделать, рассматривая слабое решение вспомогательных задач

$$-\mu_k \Delta v_k = 0 \text{ (в } \Omega_k), v_k = 0 \text{ (на } S_k), \\ \mu_k \frac{\partial v_k}{\partial n_k} = \pm \psi \text{ (на } \Gamma), k = 1, 2, \vec{n}_1 = \vec{e}_3 = \vec{n}_2. \quad (1.38)$$

При $k = 1$ определим на основе формулы Грина вида (1.27) для области Ω_1 слабое решение задачи (1.38) тождеством

$$\mu_1 (\eta_1, v_1)_{\widehat{H}_{0,S_1}^1(\Omega_1)} = \langle \gamma_1 \eta_1, \psi \rangle_{L_2, \Gamma}, \forall \eta_1 \in \widehat{H}_{0,S_1}^1(\Omega_1). \quad (1.39)$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости этой задачи является условие

$$\psi \in H_{\Gamma}^{-1/2} = \left(\widetilde{H}_{\Gamma}^{1/2} \right)^*. \quad (1.40)$$

Тогда эта задача имеет единственное слабое решение

$$\mu_1 v_1 = V_1 \psi, \quad V_1 \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{-1/2}; \widehat{H}_{0,S_1}^1(\Omega_1)). \quad (1.41)$$

Аналогичным образом получаем, что слабое решение второй вспомогательной задачи (1.38) определяется из тождества

$$\mu_2(\eta_2, v_2)_{\widehat{H}_{0,S_2}^1(\Omega_2)} = \langle \gamma_2 \eta_2, -\psi \rangle_{L_{2,\Gamma}}, \quad \forall \eta_2 \in \widehat{H}_{0,S_2}^1(\Omega_2), \quad (1.42)$$

и поэтому

$$\mu_2 v_2 = V_2(-\psi), \quad V_2 \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{-1/2}; \widehat{H}_{0,S_2}^1(\Omega_2)). \quad (1.43)$$

Теперь из первого условия на Γ из (1.37) получим связь

$$\gamma_1 v_1 - \gamma_2 v_2 = (\mu_1^{-1} \gamma_1 V_1 + \mu_2^{-1} \gamma_2 V_2) \varphi; \quad \varphi = \gamma_1 u_1 - \gamma_2 u_2. \quad (1.44)$$

Однако можно проверить, что оператор

$$\mu_1^{-1} \gamma_1 V_1 + \mu_2^{-1} \gamma_2 V_2 =: \mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2 \quad (1.45)$$

ограниченно действует из $H_\Gamma^{-1/2} = \left(\widetilde{H}_\Gamma^{1/2}\right)^*$ на всё $\widetilde{H}_\Gamma^{1/2}$. Поэтому по теореме Банаха существует ограниченный обратный оператор

$$(\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2)^{-1} \in \mathcal{L}\left(\widetilde{H}_\Gamma^{1/2}; H_\Gamma^{-1/2}\right). \quad (1.46)$$

Лемма 2. Ортопроектор $P_1 : \widehat{H}_{0,S}^1(\Omega) \rightarrow \widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$ действует по закону

$$P_1(u_1; u_2) = (u_1; u_2) - \left\{ \begin{array}{l} \mu_1^{-1} V_1 (\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2)^{-1} (\gamma_1 u_1 - \gamma_2 u_2); \\ -\mu_2^{-1} V_2 (\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2)^{-1} (\gamma_1 u_1 - \gamma_2 u_2) \end{array} \right\}, \quad (1.47)$$

где V_1 и V_2 — операторы вспомогательных задач (1.38).

2. Применение операторного подхода

2.1. Вспомогательные краевые задачи

Будем считать, что начально-краевая задача (1.11) – (1.17) имеет решение $u = (u_1; u_2)$, являющееся функцией переменной t со значениями в пространстве $\widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$, и получим уравнение, которому должно удовлетворять это решение.

С этой целью перепишем уравнение в областях Ω_1 и Ω_2 в виде пар соотношений:

$$\left\{ \rho_k \frac{\partial u_k}{\partial t} \right\}_{k=1}^2 = \{ -\mu_k \Delta v_k \}_{k=1}^2 + \{ \rho_k f_k \}_{k=1}^2. \quad (2.1)$$

Затем представим решение $u = (u_1; u_2)$ задачи в виде суммы решений двух вспомогательных проблем:

$$u = (u_1; u_2) = w_1 + w_2 =: (w_{11}; w_{12}) + (w_{21}; w_{22}). \tag{2.2}$$

Первая проблема соответствует неоднородным уравнениям в областях Ω_k , $k = 1, 2$, а вторая — неоднородным краевым условиям.

Для первой проблемы имеем:

$$\begin{aligned} \{-\mu_k \Delta w_{1k}\}_{k=1}^2 &= - \left\{ \rho_k \frac{\partial u_k}{\partial t} \right\}_{k=1}^2 + \{\rho_k f_k\}_{k=1}^2, \quad w_k = u_k + \alpha_k \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)} u_k(s) ds, \\ w_{11} |_{S_1} &= 0, \quad w_{12} |_{S_2} = 0, \quad \gamma_1 w_{11} = \gamma_2 w_{12} \text{ (на } \Gamma), \\ \mu_1 \frac{\partial w_{11}}{\partial n} - \mu_2 \frac{\partial w_{12}}{\partial n} &= 0 \text{ (на } \Gamma), \quad \vec{n} = \vec{e}_3. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Для второй проблемы соответственно получаем:

$$\begin{aligned} \{-\mu_k \Delta w_{2k}\}_{k=1}^2 &= 0, \quad w_{2k} |_{S_k} = 0, \quad k = 1, 2, \\ \gamma_1 w_{21} &= \gamma_2 w_{22} =: \varphi \text{ (на } \Gamma), \\ \mu_1 \frac{\partial w_{21}}{\partial n} - \mu_2 \frac{\partial w_{22}}{\partial n} &= -g(\rho_1 - \rho_2)\zeta =: \psi \text{ (на } \Gamma), \quad \vec{n} = \vec{e}_3. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Рассмотрим сначала вопрос о существовании слабого решения задачи (2.4) и его представление через заданную функцию ψ . Если функция φ известна, то задача (2.4) распадается на две независимые задачи Дирихле для уравнения Лапласа. При этом для элементов $w_{2k} \in \widehat{H}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$ следы функций на Γ , т.е. элементы $\gamma_k w_{2k}$, должны принадлежать пространству $\widetilde{H}_\Gamma^{1/2}$, и тогда должно выполняться необходимое условие разрешимости

$$\varphi = \gamma_1 w_{21} = \gamma_2 w_{22} \in \widetilde{H}_\Gamma^{1/2}, \tag{2.5}$$

которое является и достаточным для каждой из распадающихся задач. Так как между следами гармонических функций из $\widehat{H}_{0,S_k}^1(\Omega_k)$ и самими функциями имеется взаимно однозначное соответствие, то (см. [1]) имеем связи

$$w_{2k} = \widetilde{\gamma}_k^{-1} \varphi, \quad \widetilde{\gamma}_k^{-1} \in \mathcal{L}(\widetilde{H}_\Gamma^{1/2}; \widehat{H}_{0,S_k}^1(\Omega_k)), \quad k = 1, 2. \tag{2.6}$$

Учитывая еще соотношения (1.41), (1.43) (см. также (1.38)), из динамического условия на Γ в (2.4) приходим к соотношению

$$(\mu_1 C_1^{-1} + \mu_2 C_2^{-1})\varphi = \psi, \quad C_k = \gamma_k V_k \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{-1/2}; \widetilde{H}_\Gamma^{1/2}), \quad k = 1, 2. \tag{2.7}$$

Здесь оператор $\mu_1 C_1^{-1} + \mu_2 C_2^{-1}$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между $\widetilde{H}_\Gamma^{1/2}$ и $H_\Gamma^{-1/2}$ и является ограниченным оператором. Поэтому по теореме Банаха существует ограниченный обратный оператор:

$$\varphi = (\mu_1 C_1^{-1} + \mu_2 C_2^{-1})^{-1} \psi, \quad (\mu_1 C_1^{-1} + \mu_2 C_2^{-1})^{-1} \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{-1/2}; \widetilde{H}_\Gamma^{1/2}), \quad k = 1, 2. \tag{2.8}$$

Лемма 3. Задача (2.4) имеет единственное слабое решение $w_2 = (w_{21}; w_{22}) \in \widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\zeta \in H_{\Gamma}^{-1/2}, \quad (2.9)$$

и это решение имеет вид

$$\begin{aligned} (w_{21}; w_{22}) &= (\tilde{\gamma}_1^{-1}(\mu_1 C_1^{-1} + \mu_2 C_2^{-1})^{-1} \psi; \tilde{\gamma}_2^{-1}(\mu_1 C_1^{-1} + \mu_2 C_2^{-1})^{-1} \psi) = \\ &= -g(\rho_1 - \rho_2) (\tilde{\gamma}_1^{-1}(\mu_1 C_1^{-1} + \mu_2 C_2^{-1})^{-1} \zeta; \tilde{\gamma}_2^{-1}(\mu_1 C_1^{-1} + \mu_2 C_2^{-1})^{-1} \zeta) =: -g(\rho_1 - \rho_2) V \zeta, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$V \in \mathcal{L} \left(H_{\Gamma}^{-1/2}; \widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega) \right). \quad (2.11)$$

Рассмотрим теперь вопрос о существовании слабого решения первой вспомогательной задачи, т.е. задачи (2.3), с учетом леммы 3. При этом понадобится формула Грина (1.30), приспособленная к определению обобщенного решения задачи (2.3).

Определение 1. Назовём обобщённым решением задачи (2.3) такую функцию

$$w_1(t) = \{w_{11}(t); w_{12}(t)\} \quad (2.12)$$

со значениями в пространстве $\widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$, для которой выполнено тождество, следующее из (1.30), а также из уравнений и краевых условий задачи (2.3):

$$\begin{aligned} (\eta, w_1(t))_{\widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)} &= \left(\eta, -\frac{du_1}{dt} - \frac{du_2}{dt} \right)_{L_2(\Omega)} + (\eta, f)_{L_2(\Omega)}, \\ \forall \eta \in \widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega), \quad f &= \{f_k\}_{k=1}^2 \in L_2(\Omega). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь выражение

$$\widehat{f}(t) := -\frac{d}{dt}(u_1 + u_2) + f \quad (2.14)$$

считается функцией переменной t со значениями в $L_2(\Omega)$ (и потому $\frac{\partial}{\partial t}$ заменено на $\frac{d}{dt}$). Если, в частности, выполнено условие

$$\widehat{f}(t) \in C([0, T]; L_2(\Omega)), \quad (2.15)$$

то, как известно из теории слабых и обобщенных решений краевых задач, обобщенное решение $w_1(t)$ задачи (2.3) существует, единственно и является непрерывной функцией переменной t со значениями в $\widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$.

Более того, так как $(\widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega); L_2(\Omega))$ — гильбертова пара пространств, то в сформированных условиях $w_1(t)$ — непрерывная функция t со значениями в $\mathcal{D}(\widetilde{A})$, где \widetilde{A} — оператор гильбертовой пары и

$$\mathcal{D}(\widetilde{A}) \subset \mathcal{D}(\widetilde{A}^{1/2}) = \widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega) \subset\subset L_2(\Omega), \quad \mathcal{R}(\widetilde{A}) = L_2(\Omega). \quad (2.16)$$

2.2. Переход к задаче Коши для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве

Опираясь на тождество (2.13), получим интегро-дифференциальное соотношение, которому должно удовлетворять сильное по переменной t решение проблемы (1.11) – (1.17). Предварительно отметим следующий факт: так как в (2.13) $\eta \in \widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$, то $P_1\eta = \eta$, где $P_1 := \widehat{H}_{0,S}^1(\Omega) \rightarrow \widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$ – ортопроектор (см. лемму 2). Кроме того, как уже упомянуто выше (см. (2.16)), при условии (2.15) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} (\eta, w_1(t))_{\widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)} &= (P_1\eta, w_1(t))_{\widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)} = (\eta, P_1w_1(t))_{\widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)} = \\ &= (\widetilde{A}^{1/2}\eta, \widetilde{A}^{1/2}P_1w_1(t))_{L_2(\Omega)} = (\eta, \widetilde{A}P_1w_1(t))_{L_2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in \widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Отсюда следует, что тождество (2.13) равносильно связи

$$\widetilde{A}P_1w_1(t) = -\frac{d}{dt}(w_1 + w_2) + f(t), \tag{2.18}$$

которая имеет место в пространстве $L_2(\Omega)$. Здесь \widetilde{A} – оператор гильбертовой пары $(\widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega); L_2(\Omega))$, P_1 – упомянутый выше ортопроектор, $w_1(t)$ – обобщенное решение первой вспомогательной задачи (см. (2.3)), а $w_2(t)$ – обобщенное решение второй краевой вспомогательной задачи (см. (2.4)).

Приведенные рассуждения приводят к следующему выводу.

Теорема 1. *Исходная начально-краевая задача (1.11) – (1.17) равносильна задаче Коши*

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\widetilde{A}P_1(I_0(t)u_1) + f(t), \quad w = w_1 + w_2 = I_0(t)(u_1 + u_2), \\ I_0(t)u_2 = w_2 &= -g(\rho_1 - \rho_2)V\zeta, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \gamma_1u_1 = \gamma_2u_2 =: \widehat{\gamma}u, \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0, \\ I_0(t)u &:= \left\{ \begin{array}{l} u_k(t) + \alpha_k \int_0^t \exp(-\beta_k(t-s))u_k(s)ds \\ u(0) = u^0, \quad \zeta(0) = \zeta^0, \end{array} \right\}_{k=1}^2, \end{aligned} \tag{2.19}$$

рассматриваемой для искомым функций $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ со значениями в $\widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$ и $\zeta(t)$ со значениями в $L_{2,\Gamma}$. □

Преобразуем задачу (2.19), сведя её к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в некотором гильбертовом пространстве. Из первого уравнения имеем

$$\widetilde{A}^{-1} \frac{du}{dt} + P_1I_0(t)u_1 = \widetilde{A}^{-1}f(t),$$

а второе уравнение даёт связь

$$w_2 = P_1 w_2 = P_1 I_0(t) u_2 = -g(\rho_1 - \rho_2) V \zeta.$$

Складывая левые и правые части, получаем начальную задачу для системы из интегродифференциального и дифференциального уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{A}^{-1} \frac{du}{dt} + P_1 I_0(t) u + g(\rho_1 - \rho_2) V \zeta = \tilde{A}^{-1} f, & u(0) = u^0, \\ \frac{d\zeta}{dt} - \hat{\gamma} u = 0, & \zeta(0) = \zeta^0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Эту систему, в свою очередь, можно привести к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений следующим образом. Используя связь между $u(t)$ и $w(t)$ (см. (2.19)), введём ещё одну искомую функцию

$$z(t) := \left\{ \alpha_k^{1/2} \int_0^t \exp(-\beta_k(t-s)) u_k(s) ds \right\}_{k=1}^2, \quad z(0) = 0. \quad (2.21)$$

Тогда будем иметь связь

$$\frac{dz}{dt} = \alpha^{1/2} u - \beta z, \quad \alpha^{1/2} := \left\{ \alpha_k^{1/2} \right\}_{k=1}^2, \quad \beta := \{ \beta_k \}_{k=1}^2, \quad (2.22)$$

и вместо (2.20), (2.21) возникает задача Коши, которая в векторно-матричной форме переписывается в виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ z \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & P_1 \alpha^{1/2} & g(\rho_1 - \rho_2) V \\ -\alpha^{1/2} P_1 & \beta & 0 \\ -\hat{\gamma} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ z \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}^{-1} f \\ 0 \\ \zeta^0 \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

$$u(0) = u^0, \quad z(0) = 0, \quad \zeta(0) = \zeta^0.$$

Эту задачу преобразуем далее к виду, удобному для дальнейшего исследования. Так как по предположению $u(t)$ является функцией переменной t со значениями в $\hat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega) = \mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2})$, то $z(t)$ — функция t со значениями в $\hat{H}_{0,S}^1(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2})$, где A — оператор гильбертовой пары $(\hat{H}_{0,S}^1(\Omega); L_2(\Omega))$. Отсюда следует, что

$$z(t) = A^{-1/2} \psi(t),$$

где $\psi(t)$ — функция переменной t со значениями в $L_2(\Omega)$.

Тогда вместо (2.22) возникает связь

$$\frac{d}{dt} (A^{-1/2} \psi) = \alpha^{1/2} P_1 u - \beta A^{-1/2} \psi, \quad \psi(0) = 0, \quad (2.24)$$

и взамен (2.23) приходим к задаче

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ \psi \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & P_1 \alpha^{1/2} A^{-1/2} & g(\rho_1 - \rho_2) V \\ -A^{1/2} \alpha^{1/2} P_1 & \beta & 0 \\ -\hat{\gamma} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \psi \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}^{-1} f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

$$u(0) = u^0, \quad \psi(0) = 0, \quad \zeta(0) = \zeta^0.$$

Здесь при выводе (2.25) использован тот факт, что $u(t)$ — функция переменной t со значениями в $\widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$, а $\psi(t)$ — функция t со значениями в $L_2(\Omega)$; тогда правая часть в (2.24) — функция t со значениями в $\widehat{H}_{0,S}^1(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2})$ и потому к обеим частям (2.24) можно применить оператор $A^{1/2}$.

Осуществим в (2.25) следующую замену:

$$\eta(t) = (g(\rho_1 - \rho_2))^{1/2} \zeta(t) =: b\zeta, \quad b > 0, \quad (2.26)$$

и применим к обеим частям оператор $\text{diag}(\tilde{A}; I; I)$ (эта операция далее будет оправдана). В итоге возникает задача Коши вида

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ \psi \\ \eta \end{pmatrix} = \\ = - \begin{pmatrix} \tilde{A}^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \tilde{A}^{1/2} P_1 \alpha^{1/2} A^{-1/2} & b(\tilde{A}^{1/2} V) \\ -A^{1/2} \alpha^{1/2} P_1 \tilde{A}^{-1/2} & \beta & 0 \\ -b(\hat{\gamma} \tilde{A}^{-1/2}) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \psi \\ \eta \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(0) = u^0, \quad \psi(0) = 0, \quad \eta(0) = \eta^0, \quad (2.27) \end{aligned}$$

которая и является основной при дальнейшем изучении проблемы.

2.3. Исследование начально-краевой задачи

Перейдём к рассмотрению задачи (2.27), предварительно изучив свойства операторных коэффициентов её операторной матрицы.

Лемма 4. *Операторы*

$$\tilde{A}^{1/2} P_1 \alpha^{1/2} A^{-1/2} : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega), \quad A^{1/2} \alpha^{1/2} P_1 \tilde{A}^{-1/2} : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega) \quad (2.28)$$

ограничены и взаимно сопряжены.

Доказательство. Ограниченность этих операторов проверяется непосредственно, если заметить, что в этих произведениях операторов каждый сомножитель ограничен из одного пространства в другое. В частности, $A^{-1/2} \in \mathcal{L}(L_2(\Omega); \widehat{H}_{0,S}^1(\Omega))$, $\alpha^{1/2} \in \mathcal{L}(\widehat{H}_{0,S}^1(\Omega); \widehat{H}_{0,S}^1(\Omega))$, $P_1 \in \mathcal{L}(\widehat{H}_{0,S}^1(\Omega); \widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega))$, $\widetilde{A}^{1/2} \in \mathcal{L}(\widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega); L_2(\Omega))$, и отсюда следует ограниченность первого из операторов в (2.28). Для второго проверка аналогична.

Проверим теперь свойство взаимной сопряженности этих операторов. Для любых $u, v \in L_2(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} (\widetilde{A}^{1/2} P_1 \alpha^{1/2} A^{-1/2} u, v)_{L_2(\Omega)} &= (\widetilde{A}^{1/2} P_1 \alpha^{1/2} A^{-1/2} u, \widetilde{A}^{1/2} \widetilde{A}^{-1/2} v)_{L_2(\Omega)} = \\ &= (P_1 \alpha^{1/2} A^{-1/2} u, \widetilde{A}^{-1/2} v)_{\widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)} = (\alpha^{1/2} A^{-1/2} u, P_1 \widetilde{A}^{-1/2} v)_{\widehat{H}_{0,S}^1(\Omega)} = \\ &= (A^{-1/2} u, \alpha^{1/2} P_1 \widetilde{A}^{-1/2} v)_{\widehat{H}_{0,S}^1(\Omega)} = (u, A^{1/2} \alpha^{1/2} P_1 \widetilde{A}^{-1/2} v)_{L_2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

(Здесь при выводе были использованы свойства

$$(u, v)_{\widehat{H}_{0,S}^1(\Omega)} = (A^{1/2} u, A^{1/2} v)_{L_2(\Omega)}, \quad (u, v)_{\widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)} = (\widetilde{A}^{1/2} u, \widetilde{A}^{1/2} v)_{L_2(\Omega)},$$

а также тот факт, что $\alpha^{1/2}$ самосопряжён в $\widehat{H}_{0,S}^1(\Omega)$.) □

Отметим ещё одно важное свойство матричных коэффициентов в (2.27).

Лемма 5. *Операторы*

$$\widehat{\gamma} \widetilde{A}^{-1/2} : L_2(\Omega) \rightarrow L_{2,\Gamma}, \quad \widetilde{A}^{1/2} V : L_{2,\Gamma} \rightarrow L_2(\Omega) \quad (2.30)$$

взаимно сопряжены и компактны.

Доказательство. Покажем, что имеют место свойства

$$\widehat{\gamma} \widetilde{A}^{-1/2} \in \mathcal{L}(L_2(\Omega); \widetilde{H}_\Gamma^{1/2}), \quad \widetilde{A}^{1/2} V \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{-1/2}; L_2(\Omega)), \quad (2.31)$$

откуда в силу компактности вложений

$$\widetilde{H}_\Gamma^{1/2} \hookrightarrow L_{2,\Gamma} \hookrightarrow H_\Gamma^{-1/2} \quad (2.32)$$

(по теореме Гальярдо, см. [14], и на основе общих свойств оснащённых гильбертовых пространств) следуют свойства (2.30).

В самом деле, $\widetilde{A}^{-1/2} \in \mathcal{L}(L_2(\Omega); \widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega))$, а $\widehat{\gamma} \in \mathcal{L}(\widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega); \widetilde{H}_\Gamma^{1/2})$. Аналогично имеем $V \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{-1/2}; \widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega))$ (см. (2.11)), $\widetilde{A}^{1/2} \in \mathcal{L}(\widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega); L_2(\Omega))$.

Докажем теперь свойство взаимной сопряженности операторов из (2.30). Пусть $u \in \widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$ — решение вспомогательной задачи (2.4) при $\psi = \zeta \in H_\Gamma^{-1/2}$. Тогда $u = V\zeta \in \widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$ (см. (2.10), (2.11)), и если $\eta \in \widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$, то

$$\begin{aligned} (\eta, u)_{\widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)} &= \mu_1 \int_{\Omega_1} \nabla \eta_1 \cdot \nabla u_1 \, d\Omega_1 + \mu_2 \int_{\Omega_2} \nabla \eta_2 \cdot \nabla u_2 \, d\Omega_2 = \\ &= \langle \gamma_1 \eta_1, \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} \rangle_{L_{2,\Gamma}} + \langle \gamma_2 \eta_2, \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} \rangle_{L_{2,\Gamma}} = \langle \widehat{\gamma} \eta, \zeta \rangle_{L_{2,\Gamma}}. \end{aligned}$$

Вспоминая, что

$$(\eta, u)_{\widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1} = (\widetilde{A}^{1/2}\eta, \widetilde{A}^{1/2}u)_{L_2(\Omega)},$$

получаем при $\eta = \widetilde{A}^{-1/2}\psi$, $\psi \in L_2(\Omega)$, тождество

$$(\psi, \widetilde{A}^{1/2}V\zeta)_{L_2(\Omega)} = \langle \widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}\psi, \zeta \rangle_{L_2,\Gamma}, \quad \forall \psi \in L_2(\Omega), \forall \zeta \in H_\Gamma^{-1/2}. \quad (2.33)$$

Значит, операторы $\widetilde{A}^{1/2}V$ и $\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}$ взаимно сопряжены. \square

Опираясь на леммы 2.2 и 2.3, перейдём теперь к вопросу о разрешимости задачи (2.27).

Лемма 6. *Операторная матрица*

$$\mathcal{A}_0 := \mathcal{J}_{\widetilde{A}^{1/2}}\mathcal{J}_0\mathcal{J}_{\widetilde{A}^{1/2}}, \quad (2.34)$$

$$\mathcal{J}_0 := \begin{pmatrix} I & \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2} & b(\widetilde{A}^{1/2}V) \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2} & \beta & 0 \\ -b\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_{\widetilde{A}^{1/2}} := \text{diag}(\widetilde{A}^{1/2}; I; I), \quad (2.35)$$

заданная на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) := \{y = (u, \psi, \eta)^\tau \in L_2(\Omega) \oplus L_2(\Omega) \oplus L_2,\Gamma =: L_2 : \begin{aligned} &\widetilde{A}^{1/2}u \in L_2(\Omega), \\ &\widetilde{A}^{1/2}u + \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\psi + b\widetilde{A}^{1/2}V\eta \in \mathcal{D}(\widetilde{A}^{1/2}) \end{aligned}\}, \quad (2.36)$$

является аккретивной в пространстве L_2 и действует в этом пространстве по закону

$$\mathcal{A}_0y = \begin{pmatrix} \widetilde{A}^{1/2}(\widetilde{A}^{1/2}u + \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\psi + b(\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2})^*\eta) \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}u + \beta\psi \\ -b\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}u \end{pmatrix}, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0). \quad (2.37)$$

Доказательство. Достаточно проверить, что выполнено свойство

$$\text{Re}(\mathcal{J}_0y, y)_{L_2} \geq 0, \quad \forall y \in L_2, \quad (2.38)$$

так как окаймляющие множители $\mathcal{J}_{\widetilde{A}^{1/2}}$ в (2.34) обладают свойством $(\mathcal{J}_{\widetilde{A}^{1/2}})^* = \mathcal{J}_{\widetilde{A}^{1/2}}$, а \mathcal{J}_0 — ограничен в L_2 . Имеем

$$\begin{aligned} \text{Re}(\mathcal{J}_0y, y)_{L_2} &= \text{Re}\{\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + (\widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\psi, u)_{L_2(\Omega)} + b((\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2})^*\eta, u)_{L_2(\Omega)} - \\ &\quad - (A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1A^{-1/2}u, \psi)_{L_2(\Omega)} + (\beta\psi, \psi)_{L_2(\Omega)} - b(\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}u, \eta)_{L_2,\Gamma}\} = \\ &= \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\beta^{1/2}\psi\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Здесь при выводе использованы утверждения лемм 2.2 и 2.3. \square

Введём теперь операторную матрицы

$$\mathcal{J}_a := \mathcal{J}_0 + a\mathcal{P}_3, \quad \mathcal{P}_3 := \text{diag}(0; 0; I), \quad a > 0. \quad (2.40)$$

Из свойства (2.39) и определений (2.34)-(2.36) получаем, что, во-первых, оператор \mathcal{J}_a равномерно аккретивен, т.е.

$$\text{Re}(\mathcal{J}_a y, y)_{L_2} = \|u\|_{L_2}^2 + \|\beta^{1/2}\psi\|_{L_2(\Omega)}^2 + a\|\eta\|_{L_{2,\Gamma}}^2 \geq c\|y\|_{L_2}^2, \quad c > 0, \quad (2.41)$$

а во-вторых, оператор

$$\mathcal{A}_a := \mathcal{J}_{\tilde{A}^{1/2}} \mathcal{J}_a \mathcal{J}_{\tilde{A}^{1/2}}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_a) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_0), \quad (2.42)$$

является максимальным равномерно аккретивным оператором, так как он равен произведению операторов, каждый из которых имеет ограниченный обратный. Поэтому его область значений

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}_a) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_a^{-1}) = L_2, \quad (2.43)$$

т.е. совпадает со всем пространством. При этом

$$\mathcal{J}_a^{-1} = \begin{pmatrix} I_Q^{-1} & -I_Q^{-1}Q\beta^{-1} & -I_Q^{-1}Qa^{-1} \\ \beta^{-1}Q^*I_Q^{-1} & \beta^{-1}I - \beta^{-1}Q^*I_Q^{-1}Q\beta^{-1} & -\beta^{-1}Q^*I_Q^{-1}Q_1a^{-1} \\ a^{-1}Q_1^*I_Q^{-1} & -a^{-1}Q_1^*I_Q^{-1}Q\beta^{-1} & a^{-1}I - aQ_1^*I_Q^{-1}Q_1a^{-1} \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

$$\begin{cases} I_Q := I + Q^*\beta^{-1}Q + Q_1a^{-1}Q_1^*, & I \leq I_Q = I_Q^* \in \mathcal{L}(L_2(\Omega)), \\ Q := \tilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}, & Q^* = A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\tilde{A}^{-1/2}, \\ Q_1 := b(\hat{\gamma}\tilde{A}^{-1/2})^* = b(\tilde{A}^{1/2}V)|_{L_{2,\Gamma}}, \\ Q_1^* = b(\hat{\gamma}\tilde{A}^{-1/2}), \end{cases} \quad (2.45)$$

см. леммы 2.2-2.4,

$$\mathcal{A}_a^{-1} := (\mathcal{J}_{\tilde{A}^{1/2}})^{-1}(\mathcal{J}_a)^{-1}(\mathcal{J}_{\tilde{A}^{1/2}})^{-1}, \quad (\mathcal{J}_{\tilde{A}^{1/2}})^{-1} = \text{diag}(\tilde{A}^{-1/2}; I; I). \quad (2.46)$$

Теорема 2. Пусть в начально-краевой задаче (2.27) выполнены условия

$$\begin{cases} u_0 \in \mathcal{D}(\tilde{A}) \subset \mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2}) = \hat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega), & \psi(0) = \psi^0 = 0, \\ \tilde{A}^{1/2}u^0 + b(\hat{\gamma}\tilde{A}^{-1/2})^*\eta^0 \in \mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2}), \end{cases} \quad (2.47)$$

$$f \in C^1([0; T]; L_2(\Omega)), \quad L_2 := L_2(\Omega) \oplus L_2(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma}. \quad (2.48)$$

Тогда задача (2.27) имеет единственное сильное решение $y(t) := (u(t); \psi(t); \eta(t))^\tau$, т.е.

$$y(t) \in C([0; T]; \mathcal{D}(\mathcal{A}_a)) \cap C^1([0; T]; L_2), \quad (2.49)$$

выполнено уравнение

$$\frac{dy}{dt} = -(\mathcal{A}_a - a\mathcal{P}_3)y + (f(t); 0; 0)^\tau, \quad \forall t \in [0; T], \quad (2.50)$$

и начальное условие

$$y(0) = y^0 := (u^0; 0; \eta^0)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_a). \quad (2.51)$$

Доказательство. Так как \mathcal{A}_a является максимальным равномерно аккретивным оператором, то $\mathcal{A}_a - a\mathcal{P}_3$ — максимальный аккретивный оператор, а тогда задача (2.27) переписывается в виде задачи Коши (2.50), (2.51) в пространстве L_2 . Поэтому оператор $-(\mathcal{A}_a - a\mathcal{P}_3)$ является генератором сжимающей полугруппы, действующей в L_2 . Отсюда и из [4, с.166] получаем, что задача (2.50), (2.51) имеет единственное сильное (по переменной t) решение, т.е. выполнены свойства (2.49) и соотношения (2.50), (2.51). \square

Замечание 1. Если $\eta^0 = 0$, то из (2.47) получаем достаточное условие существования и единственности решения задач (2.27), отвечающее в модельной проблеме (1.11)-(1.17) нулевому отклонению границы раздела жидкостей:

$$\zeta^0 \equiv 0, \quad u^0 \in \mathcal{D}(\tilde{A}) \subset \hat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega). \quad \square \tag{2.52}$$

Замечание 2. Из формулы (2.44) и представлений (2.42), (2.43) следует, что для сильного решения функция $\eta(t) \in C([0; T]; L_{2,\Gamma})$, и тогда потенциальная энергия является непрерывной по t функцией на отрезке $[0; T]$. \square

Теорема 3. *Для сильного решения $y(t)$ задачи (2.27) выполнены закон баланса полной энергии в следующей дифференциальной форме (сравн. с. (1.31)):*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + g(\rho_1 - \rho_2) \|\zeta\|_{L_{2,\Gamma}}^2 \right\} = \\ & = -\operatorname{Re}(v(t), u(t))_{\hat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)} + \operatorname{Re}(f(t), u(t))_{L_2(\Omega)}, \quad \forall t \in [0; T]. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Доказательство. Пусть $y(t) = (u(t); \psi(t); \eta(t))^T$ — сильное решение задачи (2.27), т.е. выполнены все уравнения этой задачи и каждое слагаемое является непрерывной функцией t со значениями в соответствующем пространстве. Вернёмся от задачи (2.27) к проблеме (2.20) используя промежуточные формулы (2.25)-(2.21).

Умножим скалярно обе части первого уравнения (2.20) справа на функцию $u(t)$ в пространстве $\hat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$, будем иметь соотношение

$$\left(\tilde{A}^{-1} \frac{du}{dt}, u \right)_{\hat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)} + (P_1 I_0(t)u, u)_{\hat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)} + g(\rho_1 - \rho_2) (V\zeta, u)_{\hat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)} = (\tilde{A}^{-1} f, u)_{\hat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)}.$$

Вспоминая, что $(\tilde{A}^{-1} \frac{du}{dt}, u)_{\hat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)} = (\frac{du}{dt}, u)_{L_2(\Omega)}$, а также связи $V^* = \hat{\gamma}$ (лемма 2.3) и $\hat{\gamma}u = d\zeta/dt$, получим

$$\left(\frac{du}{dt}, u \right)_{L_2(\Omega)} + (I_0(t)u, u)_{\hat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)} + g(\rho_1 - \rho_2) \left(\zeta, \frac{d\zeta}{dt} \right)_{L_{2,\Gamma}} = (f, u)_{L_2(\Omega)}.$$

Умножение слева на $u \in \hat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$ даёт комплексно сопряженное выражение, и из этих двух соотношений следует закон баланса (2.53). \square

Требования на функцию $f(t)$ в задаче (2.27) можно ослабить, если вместо (2.34)-(2.35) использовать в исследуемой проблеме другую факторизацию операторной матрицы \mathcal{A}_0 из (2.27).

Теорема 4. Пусть в задаче Коши (2.27) выполнены условия (2.47) вместо (2.48) — условие

$$f(t) \in C^\delta([0; T]; L_2(\Omega)), \quad 0 < \delta \leq 1. \quad (2.54)$$

Тогда эта задача имеет единственное сильное решение со свойствами (2.49).

Доказательство. Оно основано на факторизации операторной матрицы \mathcal{A}_0 из (2.37) по Шуру-Фробениусу:

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{A}^{1/2}Q & \tilde{A}^{1/2}Q_1 \\ -Q^*\tilde{A}^{-1/2} & \beta & 0 \\ -Q_1^*\tilde{A}^{-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \quad (2.55)$$

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -Q^*\tilde{A}^{-1/2} & I & 0 \\ -Q_1^*\tilde{A}^{-1/2} & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 & 0 \\ 0 & \beta + Q^*Q & Q^*Q_1 \\ 0 & Q_1^*Q & Q_1^*Q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \tilde{A}^{-1/2}Q & \tilde{A}^{-1/2}Q_1 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

□

$$Q := \tilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}, \quad Q_1 = b(\tilde{\gamma}\tilde{A}^{-1/2})^*,$$

(см. леммы 2.2 и 2.3. о свойствах Q и Q_1).

С учётом (2.55) задача (2.27) сводится к задаче Коши вида

$$\frac{dy}{dt} = -(\mathcal{J} - \mathcal{F}_1)\mathcal{A}_{00}(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)y + (f; 0; 0)^\tau, \quad y(0) = y^0, \quad (2.57)$$

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ Q^*\tilde{A}^{-1/2} & 0 & 0 \\ Q_1^*\tilde{A}^{-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1^* \in \mathfrak{S}_\infty(L_2), \\ \mathcal{A}_{00} := \text{diag}(\tilde{A}; A_{00}), & A_{00} := \begin{pmatrix} \beta + Q^*Q & Q^*Q_1 \\ Q_1^*Q & Q_1^*Q_1 \end{pmatrix} = A_{00}^*. \end{cases} \quad (2.58)$$

Здесь A_{00} — матричный ограниченный неотрицательный оператор:

$$\begin{pmatrix} \beta + Q^*Q & Q^*Q_1 \\ Q_1^*Q & Q_1^*Q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \eta \end{pmatrix} = (\beta\psi, \psi)_{L_2(\Omega)} + \|Q\psi + Q_1\eta\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq 0, \quad \forall (\psi; \eta) \in L_2(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma}. \quad (2.59)$$

Осуществим в (2.57) замену искомой функции

$$(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)g(t) =: \omega(t). \quad (2.60)$$

Тогда для $\omega(t)$ возникает задача Коши

$$\frac{d\omega}{dt} = -(\mathcal{J} - \mathcal{F}_2)(\mathcal{J} - \mathcal{F}_1)\mathcal{A}_{00}\omega + (\mathcal{J} - \mathcal{F}_2)(f; 0; 0)^\tau, \quad \omega(0) = \omega^0, \quad (2.61)$$

где учтено, что $(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)^{-1} = \mathcal{J} - \mathcal{F}_2$.

Так как \mathcal{A}_{00} является самосопряжённым неотрицательным оператором (см. (2.58), (2.59)), то $(-\mathcal{A}_{00})$ — генератор аналитической полугруппы сжимающих операторов, действующих в пространстве L_2 . Поскольку операторы \mathcal{J}_k , $k = 1, 2$, — компактные, то уравнение (2.61) является абстрактным параболическим и для его сильной разрешимости требуется выполнение условий (2.47) и (2.54). Опираясь на этот факт и возвращаясь к исходной задаче Коши (2.27), приходим к выводу, что эта задача имеет единственное сильное решение на отрезке $[0; T]$. \square

2.4. Вывод уравнения спектральной проблемы

Рассмотрим теперь постановку задачи о малых нормальных движениях исследуемой модельной проблемы, т. е. о решениях однородной задачи (2.27), зависящих от t по закону

$$(u(t); \psi(t); \eta(t))^\tau = (u; \psi; \eta)^\tau \exp(-\lambda t), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (2.62)$$

где λ — комплексный декремент затухания, а $(u; \psi; \eta)^\tau$ — искомый амплитудный элемент.

Опираясь на закон движения (2.37) операторной матрицы \mathcal{A}_0 , для амплитудных элементов получаем спектральную задачу

$$\begin{cases} \tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{1/2}u + Q\psi + Q_1\eta) = \lambda u, \\ -Q^*\tilde{A}^{1/2}u + \beta\psi = \lambda\psi, \\ -Q_1\tilde{A}^{1/2}u = \lambda\eta. \end{cases} \quad (2.63)$$

Проверим сначала, что при $\lambda = 0$ эта задача имеет лишь тривиальное решение, т.е. из соотношений

$$\tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{1/2}u + Q\psi + Q_1\eta) = 0, \quad \beta\psi = Q^*\tilde{A}^{1/2}u, \quad Q_1\tilde{A}^{1/2}u = 0 \quad (2.64)$$

следует, что $u = 0, \psi = 0, \eta = 0$. В самом деле, умножим скалярно в $L_2(\Omega)$ обе части первого уравнения (2.64) на u ; используя также остальные соотношения, будем иметь

$$\begin{aligned} & (\tilde{A}^{1/2}u, \tilde{A}^{1/2}u)_{L_2(\Omega)} + (\tilde{A}^{1/2}(Q\beta^{-1}Q^*)\tilde{A}^{1/2}u, \tilde{A}^{1/2}u)_{L_2(\Omega)} = \\ & = \|u\|_{\tilde{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)}^2 + \|P_1\beta^{-1/2}Q^*\tilde{A}^{1/2}u\|_{\tilde{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)}^2 = 0, \end{aligned} \quad (2.65)$$

откуда следует, что $u = 0$, а потому и $\psi = 0, Q_1\eta = 0$.

Наконец, из последнего равенства имеем $(\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2})^*\eta = 0$, и тогда при любом $\widetilde{\eta} \in L_2(\Omega)$ будет

$$(\widetilde{\eta}, (\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2})^*\eta)_{L_2(\Omega)} = (\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}\widetilde{\eta}, \eta)_{L_2, \Gamma} = 0.$$

Так как совокупность элементов $\{\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}\widetilde{\eta} : \widetilde{\eta} \in L_2(\Omega)\}$ пробегает всё пространство $\widetilde{H}_\Gamma^{1/2}$, плотное в L_2, Γ , получаем, что $\eta = 0$.

Если ещё $\lambda \in \overline{\sigma}(\beta)$, т.е. $\lambda \neq \beta_1, \lambda \neq \beta_2$, то в системе уравнений (2.63) можно исключить переменные ψ и η и получить одно соотношение для искомого объекта u . В итоге имеем спектральную задачу

$$u + \widetilde{A}^{-1/2}Q(\beta - \lambda I)^{-1}Q^*\widetilde{A}^{1/2}u - \frac{1}{\lambda}\widetilde{A}^{-1/2}Q_1Q_1^*\widetilde{A}^{1/2}u = \lambda\widetilde{A}^{-1}u. \quad (2.66)$$

Если здесь сделать замену

$$\widetilde{A}^{1/2}u = \varphi, \quad \varphi \in L_2(\Omega), \quad (2.67)$$

то приходим к спектральной проблеме

$$L(\lambda)\varphi := (I + Q(\beta - \lambda I)^{-1}Q^* - \lambda\widetilde{A}^{-1} - \lambda^{-1}Q_1Q_1^*)\varphi = 0 \quad (2.68)$$

для операторного пучка (оператор-функции) $L(\lambda)$, действующего в $L_2(\Omega)$.

Задача (2.68) обобщает соответствующую проблемы для операторного пучка С.Г. Крейна, когда полость Ω была частично заполнена лишь одной вязкой жидкостью, т.е. $\rho_2 = 0, \mu_2 = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$, а также вариант, когда жидкости в полости вязкие, но не вязкоупругие: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$.

Подробное исследование проблемы (2.68) — это и есть дальнейшая цель рассмотрений исходной модельной задачи о нормальных колебаниях системы из двух вязкоупругих жидкостей в сосуде.

2.5. Общие свойства спектра

Приведём общие свойства решений спектральной задачи (2.68), некоторые из которых легко выводятся.

1°. Спектр задачи (2.68) расположен симметрично относительно вещественной оси.

Действительно, операторный пучок $L(\lambda)$ из (2.68) является самосопряжённым, т.е. выполнено свойства

$$(L(\bar{\lambda}))^* \equiv L(\lambda), \quad (2.69)$$

так как операторные коэффициенты уравнения самосопряжённые. Отсюда и следует свойство симметрии спектра.

2°. Собственные значения λ задачи (2.68) расположены в правой полуплоскости:

$$\operatorname{Re} \lambda > 0. \quad (2.70)$$

В самом деле, для собственного значения λ и соответствующего ему собственного элемента $\varphi \neq 0$ имеет соотношение

$$(L(\lambda)\varphi, \varphi) = 0. \tag{2.71}$$

Отсюда, вычисляя вещественную часть, приходим к формуле

$$\operatorname{Re}\lambda = \left(\|(\beta - \bar{\lambda}I)^{-1}Q^*\varphi\|^2 + |\lambda|^{-2}\|Q_1^*\varphi\|^2 + \|\tilde{A}^{-1/2}\varphi\|^2 \right) / (\|\varphi\|^2 + \|\beta^{1/2}(\beta - \bar{\lambda}I)^{-1}Q^*\varphi\|^2), \tag{2.72}$$

откуда и следует свойство (2.70).

3°. Спектр задачи дискретен с возможными предельными точками $\lambda = 0, \lambda = \infty, \lambda = \beta_k, k = 1, 2$, а также точками λ_1 и $\lambda_2, 0 < \beta_1 < \lambda_1 < \beta_2 < \lambda_2$ (при условии, что $\beta_1 < \beta_2$). При этом точки λ_1 и λ_2 являются нулями скалярной функции

$$T(\lambda) := T_1(\lambda) + T_2(\lambda) = \mu_1\left(1 + \frac{\alpha_1}{\beta_1 - \lambda}\right) + \mu_2\left(1 + \frac{\alpha_2}{\beta_2 - \lambda}\right). \tag{2.73}$$

Это свойство выяснено в процессе получения асимптотических формул для ветвей собственных значений, отвечающих точкам $\lambda = 0, \lambda = +\infty, \lambda = \lambda_k (k = 1, 2)$, на основе тождества

$$\sum_{k=1}^2 \left(1 + \frac{\alpha_k}{\beta_k - \lambda}\right) \mu_k \int_{\Omega_k} \nabla u_k \cdot \overline{\nabla v_k} d\Omega_k - \lambda \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} u_k \overline{v_k} d\Omega_k - g(\rho_1 - \rho_2) \lambda^{-1} \int_{\Gamma} u_1 \overline{v_1} d\Gamma = 0, \tag{2.74}$$

$$u = (u_1; u_2) \in \widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega), \quad \forall v = (v_1; v_2) \in \widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega). \tag{2.75}$$

При выводе соотношения (2.74) использованы связи

$$u = (u_1; u_2) = \tilde{A}^{-1/2}\varphi, \quad v = (v_1; v_2) = \tilde{A}^{-1/2}\eta, \tag{2.76}$$

а также тот факт, что

$$\begin{aligned} (Q(\beta - \lambda I)^{-1}Q^*\varphi, \eta)_{L_2(\Omega)} &= \left(\left\{ \frac{\alpha_k}{\beta_k - \lambda} \right\}_{k=1}^2 u, v \right)_{\widehat{H}_{0,S}^1(\Omega)} = \\ &= \sum_{k=1}^2 \left[\left(\frac{\alpha_k}{\beta_k - \lambda} \right) \mu_k \int_{\Omega_k} \nabla u_k \cdot \overline{\nabla v_k} d\Omega_k \right]. \end{aligned} \tag{2.77}$$

Отметим также, что точки β_1 и β_2 не являются предельными для ветвей собственных значений задачи (2.68).

4°. Приведём теперь без доказательства асимптотические формулы для ветвей собственных значений, отвечающих предельным точкам $\lambda = 0, \lambda = +\infty$,

а также точкам λ_1 и λ_2 . Эти результаты получены с помощью теоремы об асимптотике собственных значений операторных пучков и связаны с работами А. С. Маркуса и В. И. Мацаева (см. [7]), а также на основе асимптотических формул для собственных значений вариационных задач математической физики (школа М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка, см., например, [13]).

1) Предельной точке $\lambda = +\infty$ отвечает ветвь $\{\lambda_j^{(\infty)}\}_{j=1}^{\infty}$ конечнократных собственных значений; числа $\lambda_j^{(\infty)}$, $j \in \mathbb{N}$, являются последовательными минимумами вариационного отношения

$$\left(\sum_{k=1}^2 \mu_k \int_{\Omega_k} |\nabla u_k|^2 d\Omega_k \right) / \left(\sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} |u_k|^2 d\Omega_k \right), \quad u = (u_1; u_2) \in \widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega). \quad (2.78)$$

Отсюда видно, что силы вязкоупругости не влияют на асимптотику собственных значений $\lambda_j^{(\infty)}$ при $j \rightarrow \infty$. Соответствующие нормальные колебания отвечают внутренним диссипативным волнам, как и в задаче о колебаниях двух обычных вязких жидкостей.

2) Предельной точке $\lambda = 0$ отвечает ветвь $\{\lambda_j^{(0)}\}_{j=1}^{\infty}$ конечнократных собственных значений $\lambda_j^{(0)}$, являющихся последовательными максимумами вариационного отношения задачи Стеклова:

$$\left[g(\rho_1 - \rho_2) \int_{\Gamma} |u_1|^2 d\Gamma \right] / \sum_{k=1}^2 \left[(1 + \alpha_k \beta_k^{-1}) \mu_k \int_{\Omega_k} |\nabla u_k|^2 d\Omega_k \right], \quad u = (u_1; u_2) \in \widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega). \quad (2.79)$$

Отсюда следует, что вязкоупругие силы в жидкостях существенно влияют на асимптотику собственных значений пограничных волн, связанных с колебаниями границы раздела между жидкостями.

3) Если полость заполнена не двумя, а частично лишь одной жидкостью ($\rho_2 = 0, \mu_2 = 0$), то имеется только одна конечная предельная точка $\lambda_1 > 0$, являющаяся нулём функции $T_1(\lambda)$ (см. (2.73)). В этом случае соответствующая ветвь собственных значений $\{\lambda_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$ имеет асимптотическое поведение

$$\lambda_j^{(1)} = \lambda_1 + \varepsilon_j^{(1)} [1 + o(1)] \quad (j \rightarrow \infty), \quad (2.80)$$

где $\varepsilon_j^{(1)}$ — последовательные максимумы вариационного отношения задачи Стефана:

$$(\lambda_1 \rho_1 \int_{\Omega_1} |u_1|^2 d\Omega_1 + g \rho_1 \lambda_1^{-1} \int_{\Gamma} |u_1|^2 d\Gamma) / (\alpha_1 (\beta_1 - \lambda_1)^{-2} \mu_1 \int_{\Omega_1} |\nabla u_1|^2 d\Omega_1), \quad (2.81)$$

$$u_1 \in \widehat{H}_{0,S_1}^1(\Omega_1), \quad 1 + \alpha_1 (\beta_1 - \lambda_1)^{-1} = 0.$$

Очевидно, что в этом случае вязкоупругие силы, действующие в жидкости, заполняющей область Ω_1 , приводят к появлению этой ветви собственных значений.

4) Если сосуд заполнен двумя вязкоупругими жидкостями, то конечных положительных предельных точек спектра две:

$$T(\lambda_k) = 0, \quad k = 1, 2, \quad \beta_1 < \lambda_1 < \beta_2 < \lambda_2 < \infty. \quad (2.82)$$

(см. (2.73)). При этом асимптотическое поведение ветвей собственных значений $\{\lambda_j^{(k)}\}_{j=1}^\infty$, $k = 1, 2$, найденное эвристическим способом, имеет вид

$$\lambda_j^{(k)} = \lambda_k + \varepsilon_j^{(k)}[1 + o(1)] \quad (j \rightarrow \infty), \quad (2.83)$$

где $\varepsilon_j^{(k)}$ — последовательные максимумы вариационного отношения задачи Стефана:

$$\left[\lambda_k \left(\sum_{m=1}^2 \rho_m \int_{\Omega_m} |u_m|^2 d\Omega_m \right) + g(\rho_1 - \rho_2) \lambda_k^{-1} \int_{\Gamma} |u_1|^2 d\Gamma \right] / \sum_{m=1}^2 \left[\alpha_m (\beta_m - \lambda_k)^{-2} \mu_m \int_{\Omega_m} |\nabla u_m|^2 d\Omega_m \right],$$

$$u = (u_1; u_2) \in \widehat{H}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega), \quad k = 1, 2. \quad (2.84)$$

Видно, что спектр поверхностно-внутренних волн, отвечающих предельным точкам λ_1 и λ_2 , порождается действием сил вязкоупругости, действующих в областях Ω_1 и Ω_2 и в окрестности границы раздела Γ .

3. Плоская задача, допускающая разделение переменных

3.1. Модельная спектральная проблема в прямоугольной области

Для уточнения характера спектра в исследуемой проблеме рассмотрим двумерный частный случай, когда область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ является прямоугольной, а граница раздела Γ — отрезок вещественной оси: $\Gamma = \{(x; 0) : 0 < x < \pi\}$, нижняя жидкость занимает область $\Omega_1 := \{(x, y) : 0 < x < \pi, -a_1 < y < 0\}$, а верхняя — область $\Omega_2 := \{(x, y) : 0 < x < \pi, 0 < y < a_2\}$, см. рис.1

В этом случае спектральная проблема (1.20) формулируется следующим образом. Для искомых амплитудных функций u_n и w_n , $n = 1, 2$, и ζ должны быть выполнены следующие уравнения и краевые условия:

$$\begin{aligned} -\rho_1 \lambda u_1 &= \mu_1 \Delta(u_1 + \alpha_1^{1/2} w_1) \quad (\text{в } \Omega_1), \quad u_1(0, y) = u_1(\pi, y) = u_1(x, -a_1) = 0, \\ -\rho_2 \lambda u_2 &= \mu_2 \Delta(u_2 + \alpha_2^{1/2} w_2) \quad (\text{в } \Omega_2), \quad u_2(0, y) = u_2(\pi, y) = u_2(x, a_2) = 0, \\ -\lambda w_1 &= \alpha_1^{1/2} u_1 - \beta_1 w_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad -\lambda w_2 = \alpha_2^{1/2} u_2 - \beta_2 w_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \\ -\lambda \zeta &= u_1 = u_2 \quad (\text{на } \Gamma), \quad \Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \\ \mu_1 \frac{\partial}{\partial y} (u_1 + \alpha_1^{1/2} w_1) - \mu_2 \frac{\partial}{\partial y} (u_2 + \alpha_2^{1/2} w_2) &= -g(\rho_1 - \rho_2) \zeta \quad (\text{на } \Gamma). \end{aligned} \quad (3.1)$$

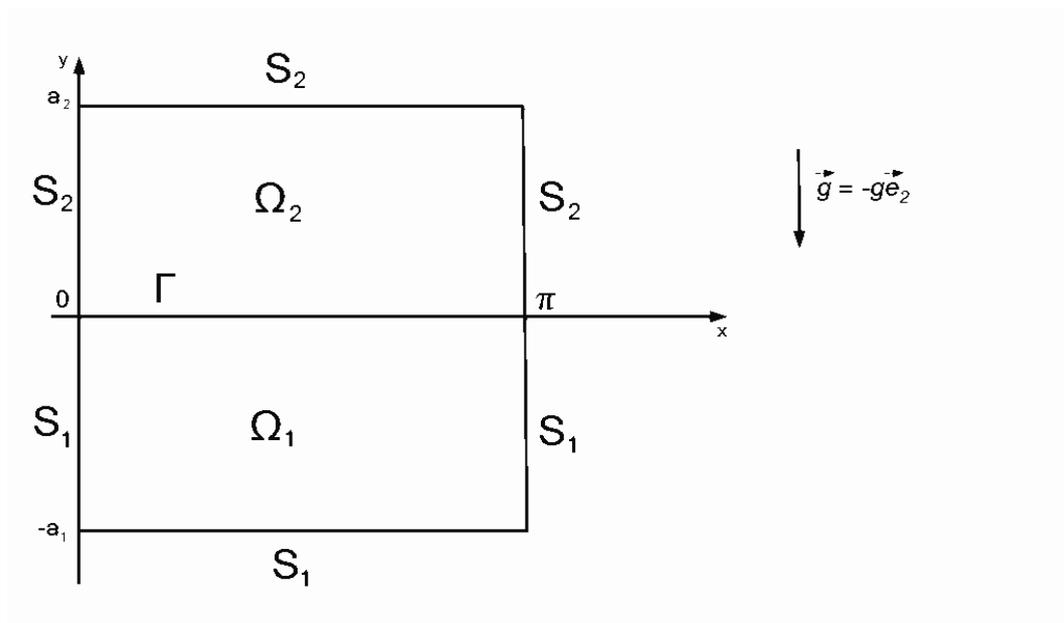


Рис. 1.

Эта задача допускает разделение переменных с использованием разложения искоемых функций в ряды Фурье по системе $\{\sin kx\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда при $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \beta_n$, $n = 1, 2$, имеем

$$\begin{aligned}
 u_1(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} v_{1k}(y) \sin kx, & u_2(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} v_{2k}(y) \sin kx, \\
 \zeta(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \sin kx, & w_n(x, y) &= \alpha_n^{1/2} (\beta_n - \lambda)^{-1} u_n(x, y), \quad n = 1, 2.
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

3.2. Получение характеристического уравнения задачи

Исключая переменные $w_n(x, y)$ и $\zeta(x)$, приходим к проблеме

$$\begin{aligned}
 -\Delta u_1 &= \delta_1(\lambda) u_1, & \delta_1(\lambda) &:= \rho_1 \lambda \mu_1^{-1} \left(1 + \frac{\alpha_1}{\beta_1 - \lambda}\right)^{-1} \quad (\text{в } \Omega_1), \\
 -\Delta u_2 &= \delta_2(\lambda) u_2, & \delta_2(\lambda) &:= \rho_2 \lambda \mu_2^{-1} \left(1 + \frac{\alpha_2}{\beta_2 - \lambda}\right)^{-1} \quad (\text{в } \Omega_2), \\
 u_1 &= 0 \quad (\text{на } S_1) & u_2 &= 0 \quad (\text{на } S_2), & u_1 &= u_2 \quad (\text{на } \Gamma), \\
 \left(1 + \frac{\alpha_1}{\beta_1 - \lambda}\right) \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} &- \left(1 + \frac{\alpha_2}{\beta_2 - \lambda}\right) \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} &= g(\rho_1 - \rho_2) \lambda^{-1} u_1 \quad (\text{на } \Gamma).
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Используя представление (3.2) для решения, получаем для функций $v_{1k}(y)$ и $v_{2k}(y)$, $k \in \mathbb{N}$, соотношения

$$\frac{d^2}{dy^2} v_{1k} - (k^2 - \delta_1(\lambda)) v_{1k} = 0, \quad -a_1 < y < 0, \quad v_{1k}(-a_1) = 0,$$

$$\frac{d^2}{dy^2}v_{2k} - (k^2 - \delta_2(\lambda))v_{2k} = 0, \quad 0 < y < a_2, \quad v_{2k}(a_2) = 0. \tag{3.4}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} v_{1k}(y) &= c_{1k} \operatorname{sh}(\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)}(y + a_1)), \\ v_{2k}(y) &= c_{2k} \operatorname{sh}(\sqrt{k^2 - \delta_2(\lambda)}(y - a_2)), \end{aligned} \tag{3.5}$$

где c_{nk} , $n = 1, 2$, $k \in \mathbb{N}$ — набор постоянных.

Для получения связей между ними используем кинематическое и динамическое условия на Γ из (3.3). Из кинематического условия получаем связь

$$c_{1k} \operatorname{sh}(\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)}a_1) + c_{2k} \operatorname{sh}(\sqrt{k^2 - \delta_2(\lambda)}a_2) = 0, \tag{3.6}$$

а динамическое условие даёт соотношение

$$\begin{aligned} (1 + \alpha_1(\beta_1 - \lambda)^{-1})\mu_1\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)} \operatorname{ch}(\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)}a_1)c_{1k} - \\ -(1 + \alpha_1(\beta_2 - \lambda)^{-1})\mu_2\sqrt{k^2 - \delta_2(\lambda)} \operatorname{ch}(\sqrt{k^2 - \delta_2(\lambda)}a_2)c_{2k} = \\ = g(\rho_1 - \rho_2)\lambda^{-1} \operatorname{sh}(\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)}a_1)c_{1k}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Приравнивая нулю определитель системы линейных однородных уравнений (3.6), (3.7), приходим к характеристическому уравнению для нахождения собственных значений λ спектральной задачи (3.1):

$$\det \begin{pmatrix} \operatorname{sh}(\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)}a_1) & \operatorname{sh}(\sqrt{k^2 - \delta_2(\lambda)}a_2) \\ f_1(\lambda) & -f_2(\lambda) \end{pmatrix} = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &:= (1 + \alpha_1(\beta_1 - \lambda)^{-1})\mu_1\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)} \operatorname{ch}(\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)}a_1) - g(\rho_1 - \rho_2)\lambda^{-1} \operatorname{sh}(\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)}a_1), \\ f_2(\lambda) &:= (1 + \alpha_2(\beta_2 - \lambda)^{-1})\mu_2\sqrt{k^2 - \delta_2(\lambda)} \operatorname{ch}(\sqrt{k^2 - \delta_2(\lambda)}a_2). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Оно преобразуется к виду

$$\begin{aligned} (1 + \alpha_1(\beta_1 - \lambda)^{-1})\mu_1\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)} \operatorname{cth}(\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)}a_1) + \\ + (1 + \alpha_2(\beta_2 - \lambda)^{-1})\mu_2\sqrt{k^2 - \delta_2(\lambda)} \operatorname{cth}(\sqrt{k^2 - \delta_2(\lambda)}a_2) = \\ = g(\rho_1 - \rho_2)\lambda^{-1}, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

если при положительных λ подкоренные выражения положительны, и к виду

$$\begin{aligned} (1 + \alpha_1(\beta_1 - \lambda)^{-1})\mu_1\sqrt{\delta_1(\lambda) - k^2} \operatorname{ctg}(\sqrt{\delta_1(\lambda) - k^2}a_1) + \\ + (1 + \alpha_2(\beta_2 - \lambda)^{-1})\mu_2\sqrt{\delta_2(\lambda) - k^2} \operatorname{ctg}(\sqrt{\delta_2(\lambda) - k^2}a_2) = \\ = g(\rho_1 - \rho_2)\lambda^{-1}, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

если эти выражения отрицательны.

В частности, для одной жидкости, когда $\rho_2 = 0$, $\mu_2 = 0$, из (3.10) получаем уравнение

$$(1 + \alpha_1(\beta_1 - \lambda)^{-1})\mu_1\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)} \operatorname{cth}(\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)}a_1) = g\rho_1\lambda^{-1}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.12}$$

а из уравнения (3.11) — соотношение

$$(1 + \alpha_1(\beta_1 - \lambda)^{-1})\mu_1\sqrt{\delta_1(\lambda) - k^2} \operatorname{ctg}(\sqrt{\delta_1(\lambda) - k^2}a_1) = g\rho_1\lambda^{-1}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.13)$$

Рассмотрим, опираясь на уравнения (3.10)-(3.13), асимптотику решений этих уравнений, отвечающих пограничным поверхностным волнам ($\lambda \rightarrow 0$), а также диссипативным внутренним волнам ($\lambda \rightarrow \infty$). Для пограничных поверхностных волн из (3.10),(3.12) приходим к формулам

$$\lambda_k^{(0)} = [g(\rho_1 - \rho_2)/(\mu_1(1 + \alpha_1\beta_1^{-1}) + \mu_2(1 + \alpha_2\beta_2^{-1}))]k^{-1}(1 + o(1)) \quad (k \rightarrow \infty) \quad (3.14)$$

(две жидкости) и соответственно

$$\lambda_k^{(0)} = [g\rho_1/\mu_1(1 + \alpha_1\beta_1^{-1})]k^{-1}(1 + o(1)) \quad (k \rightarrow \infty) \quad (3.15)$$

для одной жидкости (сравн. с (2.79)).

Для внутренних диссипативных волн ($\lambda \rightarrow \infty$) из (3.11),(3.13) получаем асимптотические соотношения

$$\mu_1\sqrt{\rho_1\mu_1^{-1}\lambda - k^2} \operatorname{ctg}(\sqrt{\rho_1\mu_1^{-1}\lambda - k^2}a_1) + \mu_2\sqrt{\rho_2\mu_2^{-1}\lambda - k^2} \operatorname{ctg}(\sqrt{\rho_2\mu_2^{-1}\lambda - k^2}a_2) = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.16)$$

(2 жидкости) и соответственно

$$\mu_1\sqrt{\rho_1\mu_1^{-1}\lambda - k^2} \operatorname{ctg}(\sqrt{\rho_1\mu_1^{-1}\lambda - k^2}a_1) = 0, \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.17)$$

для одной жидкости.

В частности, из (3.17) приходим к выводу, что для одной жидкости асимптотика внутренних волн такова:

$$\lambda_{k0}^{(\infty)} = \mu_1\rho_1^{-1}k^2(1 + o(1)) \quad (k \rightarrow \infty), \quad (3.18)$$

$$\lambda_{km}^{(\infty)} = \mu_1\rho_1^{-1}[k^2 + (\frac{\pi}{a_1})^2(m - \frac{1}{2})^2](1 + o(1)) \quad (m \rightarrow \infty), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.19)$$

сравните с (2.78). Для двух жидкостей асимптотика находится из (3.17) и имеет вид, подобный формулам (3.18),(3.19).

Далее, при вычислении асимптотического поведения собственных значений вязкоупругих волн заметим, что в задачах Стефана (2.81) и (2.84) главный член асимптотики определяется поверхностными волнами, т.е. вариационными соотношениями

$$g\rho_1\lambda_1^{-1} \int_{\Gamma_1} |u_1|^2 d\Gamma / [\alpha_1(\beta_1 - \lambda_1)^{-2}\mu_1 \int_{\Omega_1} |\nabla u_1|^2 d\Omega_1] \quad (3.20)$$

(для одной жидкости) и соответственно

$$g(\rho_1 - \rho_2)\lambda_n^{-1} \int_{\Gamma_1} |u_n|^2 d\Gamma / \sum_{m=1}^2 [\alpha_m(\beta_m - \lambda_n)^{-2}\mu_m \int_{\Omega_m} |\nabla u_m|^2 d\Omega_m], \quad n = 1, 2 \quad (3.21)$$

(для двух жидкостей). Вычисления на этой основе приводят к формулам

$$\varepsilon_k^{(1)} = \frac{g\rho_1}{\lambda_1\mu_1} \left[\frac{\alpha_1}{(\beta_1 - \lambda_1)^2} \right]^{-1} \cdot k^{-1} [1 + o(1)] \quad (k \rightarrow \infty) \quad (3.22)$$

(для одной жидкости) и

$$\varepsilon_k^{(n)} = \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_n} / \left(\sum_{m=1}^2 \frac{\alpha_m}{(\beta_m - \lambda_n)^2} \mu_m \right) \cdot k^{-1} [1 + o(1)] \quad (k \rightarrow \infty), \quad n = 1, 2, \quad (3.23)$$

(для двух жидкостей).

3.3. О структуре спектра в гидродинамической проблеме

Опираясь на общие рассмотрения модельной спектральной задачи (см.(2.68)), а также примера (3.1), можно сделать предположение о свойствах решений спектральной проблемы, отвечающей начально-краевой гидродинамической проблеме (1.2)-(1.10) о малых движениях двух вязкоупругих жидкостей в сосуде. Сформулируем эти выводы.

1. Спектр гидродинамической спектральной задачи дискретен и имеет четыре предельные точки:

$$\lambda = 0, \quad \lambda = +\infty, \quad \lambda = \lambda_n (n = 1, 2),$$

$$T(\lambda_n) := \mu_1 \left(1 + \frac{\alpha_1}{\beta_1 - \lambda_n} \right) + \mu_2 \left(1 + \frac{\alpha_2}{\beta_2 - \lambda_n} \right) = 0, \quad n = 1, 2.$$

2. Предельной точке $\lambda = +\infty$ отвечает ветвь положительных собственных значений $\lambda_j^{(\infty)}$, порождающих внутренние диссипативные как угодно быстро затухающие волны, причём силы вязкоупругости асимптотически на влияют на декременты затухания этих волн.

3. Предельной точке $\lambda = 0$ отвечает ветвь положительных собственных значений $\{\lambda_j^{(0)}\}_{j=1}^{\infty}$, порождающих поверхностные пограничные как угодно медленно затухающие волны, причём силы вязкоупругости существенно влияют на декременты затухания этих волн.

4. Точкам $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ отвечает спектр поверхностно-внутренних волн $\{\lambda_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_j^{(2)}\}_{j=1}^{\infty}$, состоящий из положительных собственных значений $\lambda_j^{(n)} = \lambda_1 + \varepsilon_j^{(n)}$, $0 < \varepsilon_j^{(n)} \rightarrow +0$ ($j \rightarrow \infty$), $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \infty$. Силы вязкоупругости влияют на декременты затухания этих волн.

5. Спектр гидродинамической спектральной задачи расположен симметрично относительно вещественной оси и может иметь не более конечного числа невещественных собственных значений (колебательные асимптотически затухающие нормальные движения системы вязкоупругих жидкостей).

Автор благодарит Д. А. Забору за внимание к работе и полезные обсуждения.

Список цитируемых источников

1. *Копачевский, Н. Д.* Абстрактная формула Грина и некоторые её приложения: монография. — Симферополь: ООО «Форма», 2016. — 280 с.

- Kopachevsky, N. D. (2016). Abstract Green's Formula and Applications. Simferopol: FLP ООО "FORMA".
2. *Копачевский, Н. Д.* К проблеме малых движений системы из двух вязкоупругих жидкостей в неподвижном сосуде. // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2018. — Т.64, № 3 — С. 547-572.
Kopachevsky, N. D. (2018). To the Problem on Small Motions of the System of Two Viscoelastic Fluids in a Fixed Vessel. SMFN, 64:3, 547–572.
 3. *Копачевский, Н. Д., Крейн, С. Г., Нго Зуь Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
Kopachevsky, N. D., Krein, S. G., Ngo Zuy Kan (1989). Operator methods in linear hydrodynamic. Evolutional and Spectral problems. Moscow: Nauka.
 4. *Крейн, С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.
Krein, S. G. (1967). Linear differential equations in a Banach space. Moscow: Nauka.
 5. *Крейн, С. Г.* О колебаниях вязкой жидкости в сосуде. // ДАН СССР. — 1964. — Т.159, № 2 — С.262-265.
Krein, S. G. (1964). O kolebaniyakh vyazkoj zhidkosti v sosude. DAN SSSR, 159:2.
 6. *Крейн, С. Г., Лантев, Г. И.* К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде. // Функциональный анализ и его приложения. — 1968. — Т.2, № 1 — С.40-50.
Krein, S. G., Laptev, G., I. (1968). Motion of a viscous liquid in an open vessel. Functional Analysis and Its Applications, 2:1.
 7. *Маркус, А. С., Матсаев, В. И.* Теоремы о сравнении спектров линейных операторов и спектральные асимптотики. // Труды Московского математического общества. — 1982. — Т.45 — С.133-181.
Marcus, A. S., Matsaev, V. I. (1982). Comparison theorems for the spectra of linear operators and spectral asymptotics. Tr. Mosk. Mat. O.-va, 45.
 8. *Милославский, А. И.* Спектральный анализ малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом контейнере / Институт математики НАН Украины. — Киев, 1989. — Деп. рукопись №1221.
Miloslavskii, A. I. (1989). Spectral Analysis of Small Oscillations of Visco-elastic fluid in the open container / Institute of mathematics NAS of Ukraine. — Kiev. — Preprint №1221.
 9. *Маркус, А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: «Штиинца», 1986. — 260 с.
Marcus, A. S. (1986). Vvedenie v spectralnuyu teoriyu polinomialnih operatornih puchkov. Kishinyov: Shtiintsa.
 10. *Милославский, А. И.* Спектр малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом сосуде // Успехи матем. наук. — 1989. — Т. 44. — №4.
Miloslavskiy, A. I. (1989). Spektr malyh kolebaniy vyazkouprugoy zhidkosti v otkrytom sosude. Uspehi Matem. Nauk, 44:4.
 11. *Милославский, А. И.* Спектр малых колебаний вязкоупругой наследственной среды // ДАН СССР. — 1989. — Т. 309. — №3.— С. 532 — 536.

- Miloslavskiy, A. I. (1989). Spektr malyih kolebaniy vyazkouprugoy nasledstvennoy sredy. DAN SSSR, 309:3, 532–536.
12. *Azizov, T. Ya., Kopachevskii, N. D., Orlova, L. D.* Evolution and Spectral Problems Related to Small Motions of Viscoelastic Fluid // Proceedings of the St.-Petersburg Math. Society, Vol. VI. AMS Translations (2) —2000. — Vol. 199. — P. 1–24.
 13. *Birman, M. Sh., Solomyak, M. Z.* Asymptotic behavior of the spectrum of differential equations. // Journal of Soviet Mathematics — 1979. — Vol. 12., No.3. — P. 247–283.
 14. *Gagliardo, E.* Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili // Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova — 1957. — Vol. 27. — P. 284–305.
 15. *Kopachevsky, Nikolay D., Krein, Selim G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics.. — Vol. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids. (Operator Theory: Advances and Applications. Vol.146) — Basel, Boston, Berlin: Birkhauser Verlag, 2003. — 444 p.
 16. *Miloslavskii, A. I.* Stability of a viscoelastic isotropic medium // Soviet Physics Doklady. — 1988. — Vol. 33 — P. 300.
 17. *Miloslavsky, A. I.* Stability of certain classes of evolution equations // Siberian Mathematical Journal. —1985. — Vol. 26, No.5. — P. 723–735.

Получена 09.10.2019

УДК 519.64

Аналитические и численные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений

И. В. Бойков

Пензенский государственный университет,
Пенза 440026. E-mail: *i.v.boykov@gmail.com*

Аннотация. В статье дан краткий обзор работ, посвященных аналитическим и численным методам решения гиперсингулярных интегральных уравнений. Рассматриваются гиперсингулярные интегральные уравнения на замкнутых и разомкнутых контурах интегрирования, полигиперсингулярные и многомерные гиперсингулярные интегральные уравнения. Основное внимание уделяется приближенным методам решения одномерных гиперсингулярных интегральных уравнений первого и второго рода с особенностями второго порядка. Рассматриваются гиперсингулярные интегральные уравнения первого рода, определенные на сегменте $[-1, 1]$, решения которых имеют вид $x(t) = (1 - t^2)^{\pm 1/2}\varphi(t)$, $((1 - t)/(1 + t))^{\pm 1/2}\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – гладкая функция. Рассматриваются гиперсингулярные интегральные уравнения второго рода, определенные на сегменте $[-1, 1]$, для решения которых строится сплайн-коллокационный метод со сплайнами первого порядка. Отдельный раздел посвящен приближенным методам решения гиперсингулярных интегральных уравнений на замкнутых контурах.

Ключевые слова: гиперсингулярные интегральные уравнения, метод коллокаций, метод механических квадратур, итерационные методы.

Analytical and numerical methods for solving hypersingular integral equations

I. V. Boykov

Penza State University e-mail: *i.v.boykov@gmail.com*.

Abstract. The article gives a brief overview of works devoted to analytical and numerical methods for solving hypersingular integral equations. Hypersingular integral equations on closed and open integration loops, polyhypersingular and multidimensional hypersingular integral equations are considered. The main attention is paid to approximate methods for solving one-dimensional hypersingular integral equations of the first and second kinds with singularities of the second order. We consider hypersingular integral equations of the first kind defined on the segment $[-1, 1]$, whose solutions have the form $x(t) = (1 - t^2)^{\pm 1/2}\varphi(t)$, $((1 - t)/(1 + t))^{\pm 1/2}\varphi(t)$, where $\varphi(t)$ is a smooth function. Hypersingular integral equations of the second kind, defined on the segment $[-1, 1]$, are considered. For solution of its the spline-collocation method with first-order splines is constructed. A separate section is devoted to approximate methods for solving hypersingular integral equations on closed circuits.

Keywords: hypersingular integral equations, collocation method, mechanical quadrature method, iterative methods.

MSC 2010: 65R20

© И. В. БОЙКОВ

Введение

Теория сингулярных интегральных уравнений, зародившаяся в начале прошлого века в трудах Д. Гильберта и А. Пуанкаре, в течение последующих почти 100 лет переживает бурное развитие. По-видимому, это в первую очередь связано с многочисленными приложениями сингулярных интегральных уравнений и краевой задачи Римана в физике, механике и технике. Хорошо известен спектр применения сингулярных интегральных уравнений в механике и технике: теория упругости, термоупругости, аэродинамика; сингулярные интегральные уравнения являются одним из основных аппаратов математического моделирования задач электродинамики.

Не менее широки области применения краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений в физике: квантовая теория поля, теория близкого и дальнего взаимодействия, теория солитонов.

Интересно отметить, что введенное примерно в то же время понятие гиперсингулярного интеграла [43] в течение долгого времени не находило практического применения. Ситуация резко изменилась в конце сороковых годов прошлого века, когда было обнаружено [28], что гиперсингулярные интегральные уравнения (ГИУ) являются незаменимым математическим аппаратом при моделировании задач аэродинамики. Начиная с этого момента, круг задач, к решению которых привлекаются ГИУ, неизменно расширяется. В настоящее время ГИУ находят широкое применение при моделировании задач аэродинамики, электродинамики, микроэлектроники, геофизики, атомной и ядерной физики и ряда других областей естествознания и техники. Отметим также, что к ГИУ приводят исключительные случаи краевой задачи Римана, которая, наряду с задачей Римана-Гильберта, находит все большее применение в различных областях физики [31].

Однако вычисление сингулярных и гиперсингулярных интегралов, а также решение сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений возможно лишь в исключительных случаях и основным аппаратом в прикладных задачах являются численные методы.

В настоящее время достаточно хорошо исследованы приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов [6], [7] и можно считать завершенными многие направления в численном решении сингулярных интегральных уравнений [21], [20], [47], [24], [49], [5].

Совершенно иная ситуация сложилась в направлении, связанном с приближенными методами решения ГИУ. Ежегодно публикуются десятки статей, посвященных построению вычислительных схем для различных классов ГИУ, однако автору не известны работы, посвященные обзору и сравнительному анализу полученных к настоящему времени результатов. Представляется необходимым и своевременным дать обзор основных направлений в численных методах решения ГИУ, выделив те из них, для которых существует строгое обоснование, и провести сравнительный анализ приближенных методов и алгоритмов. Под строгим обоснованием, следуя Л. В. Канторовичу [22], Н. С. Бахвалову [3], В. В. Иванову [21],

подразумевается исследование устойчивости решения, доказательство сходимости приближенного решения к точному, получение оценок величины погрешности и скорости сходимости.

1. Классы функций и обозначения

В этом разделе описаны классы функций, используемые в статье. Пусть γ — единичная окружность с центром в начале координат комплексной плоскости. Пусть $A = [a, b]$ или $A = \gamma$.

Определение 1. Класс функций Гельдера $H_\alpha(M; A)$, $0 < \alpha \leq 1$, состоит из заданных на A функций $f(x)$, удовлетворяющих во всех точках x' и x'' этого множества неравенству $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|^\alpha$, $M > 0$.

В случае, когда из текста ясно на каком множестве рассматриваются функции, вместо $H_\alpha(M; A)$ будем писать $H_\alpha(M)$. Это замечание относится и к остальным классам функций.

Определение 2. Класс $W^r(M; A)$ состоит из функций, заданных на A , имеющих непрерывные производные до $(r - 1)$ -го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную r -го порядка, удовлетворяющую на этом множестве неравенству $|f^{(r)}(x)| \leq M$.

Определение 3. Класс $W^r H_\alpha(M; A)$ состоит из функций $f(x)$ принадлежащих классу $W^r(M; A)$ и удовлетворяющих дополнительному условию $f^{(r)}(x) \in H_\alpha(M)$.

Пусть $L = \gamma_1 \times \gamma_2$, где γ_i — единичная окружность с центром в начале координат на плоскости комплексной переменной z_i , $i = 1, 2$. Пусть $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ или $D = L$.

Определение 4. Через $H_{\omega_1 \omega_2}(D)$ обозначен класс определенных на D функций $f(x, y)$ таких, что для любых точек (x', y') и (x'', y'') из D $|f(x', y') - f(x'', y'')| \leq \omega_1(|x' - x''|) + \omega_2(|y' - y''|)$, где $\omega_1(\sigma)$ и $\omega_2(\sigma)$ — заданные модули непрерывности. В случаях, когда $\omega_i(x) = M_i x^{\alpha_i}$ ($i = 1, 2$), используется обозначение $H_{\alpha_1 \alpha_2}(M, D)$, где $M = \max(M_1, M_2)$.

Определение 5. Через $W^{r_1, r_2}(M, D)$, $0 < M < \infty$, обозначен класс определенных на D функций $f(x_1, x_2)$, имеющих частные производные $f^{(v_1, v_2)}(x_1, x_2) = \partial^{v_1 + v_2} f(x_1, x_2) / \partial x_1^{v_1} \partial x_2^{v_2}$ ($0 \leq v_i \leq r_i, i = 1, 2$), причем $\|f^{(r_1, r_2)}(x_1, x_2)\|_{C(D)} \leq M$, $\|f^{(r_1, j)}(x_1, 0)\|_{C(D)} \leq M$, $j = 0, 1, \dots, r_2 - 1$, $\|f^{(i, r_2)}(0, x_2)\|_{C(D)} \leq M$, $i = 0, 1, \dots, r_1 - 1$.

Пусть $A = [a, b]$ или $A = \gamma$. Пусть $f(x)$ — функция, определенная на A . Через $H(f, \alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$, обозначим функционал

$$H(f, \alpha) = \sup_{x_1 \neq x_2, x_1, x_2 \in A} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha}.$$

2. Определения гиперсингулярных интегралов

Определение 6. ([43],[2]) Пусть $A(t) \in W^p(M)$. Интеграл вида $\int_a^b \frac{A(t) dt}{(b-t)^{p+\alpha}}$ при целом p и $0 < \alpha < 1$ определяет величину (“конечную часть”) рассматриваемого интеграла как предел при $x \rightarrow b$ суммы

$$\int_a^x \frac{A(t) dt}{(b-t)^{p+\alpha}} + \frac{B(x)}{(b-x)^{p+\alpha-1}}.$$

Здесь $B(x)$ — любая функция, на которую налагаются два условия:

- а) рассматриваемый предел существует;
- б) $B(x) \in W^p$.

Долгое время эти интегралы назывались интегралами Адамара. В настоящее время их называют гиперсингулярными интегралами.

Замечание. В книге [1] Ж. Адамар увлекательно рассказывает о различных сторонах творческого процесса при решении математических проблем и, в частности, останавливается (с. 104) на открытии им гиперсингулярных интегралов.

Определение 7. ([32]) Пусть $\varphi(t) \in W^p(M)$. Интегралом $\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-c)^p}$, $a < c < b$, в смысле главного значения Коши-Адамара называется предел:

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-c)^p} = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-v} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-c)^p} + \int_{c+v}^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-c)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} \right],$$

где $\xi(v)$ — некоторая функция, выбранная так, чтобы указанный предел существовал.

В конечных точках a и b гиперсингулярный интеграл может быть определен следующим образом.

Определение 8. Пусть $\varphi(t) \in W^p$. Интегралом $\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-a)^p}$ называется предел

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-a)^p} = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\int_{a+v}^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-a)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} + \xi_1(v) \ln |v| \right],$$

где $\xi(v)$ — некоторая функция, имеющая непрерывные производные до $(p-1)$ -го порядка, удовлетворяющие условию Дини-Липшица; $\xi_1(v)$ — некоторая функция, удовлетворяющая условию Дини-Липшица в окрестности от нуля. Функции $\xi(v)$ и $\xi_1(v)$ выбираются так, чтобы указанный предел существовал.

3. Аналитические методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений

В теории сингулярных интегральных уравнений известно несколько классов уравнений, которые разрешимы в замкнутом виде (в виде аналитического выражения). Помимо характеристических уравнений, такие классы описаны в статье С.Г. Самко [30] и в монографии Ф.Д. Гахова [19].

Несмотря на некоторую аналогию между сингулярными и гиперсингулярными интегральными уравнениями в настоящее время имеется только несколько разрозненных результатов, посвященных аналитическим методам решения гиперсингулярных интегральных уравнений.

Рассмотрим гиперсингулярное интегральное уравнение

$$Ax = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau = f(t), \quad -1 < t < 1. \quad (3.1)$$

В предположении, что решение ищется в классе функций, обращающихся в нуль на концах сегмента $[-1, 1]$, в работе [46] (см. также [45]) представлено точное решение ГИУ (3.1):

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(\tau) \ln \left| \frac{\tau - t}{1 - \tau t + ((1 - \tau^2)(1 - t^2))^{1/2}} \right| d\tau.$$

В работе [27] получено точное решение ГИУ (3.1) в случаях, когда правая часть может быть неинтегрируемой функцией $f(t) = c/(t - q)$, $-1 < q < 1$, или дельта-функцией $f(t) = \delta(t - q)$, $-1 < q < 1$.

Необходимость в решении таких уравнений возникает в задачах аэродинамики с устройством отсоса внешнего потока [24] и при расчете характеристик проволочных антенн [26].

Решение уравнения (1) ищется в классе функций $x(-1) = x(1) = 0$. Пусть $f(t) = (t - q)^{-1}$, $t, q \in (-1, 1)$.

Нетрудно видеть, что уравнение (3.1) эквивалентно следующему уравнению

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x'(\tau) d\tau}{\tau - t} = \frac{1}{t - q}, \quad t, q \in (-1, 1),$$

с дополнительным условием $\int_{-1}^1 x'(\tau) d\tau = 0$.

Из свойств дельта-функции и известного свойства гиперсингулярных интегралов

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - \tau^2} U_n(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau = -(n + 1) U_n(t), \quad t \in (-1, 1),$$

следует, что решением уравнения (3.1) будет функция $x'(t) = -\pi\delta(t - q) - (1 - t^2)^{-1/2}$, первообразная для которой даст $x(t) = \arcsin t + \pi \operatorname{sgn}(q - t)/2$. Здесь использовано следующее определение [27] дельта-функции

$$\int_{-1}^t \psi(\tau)\delta(\tau - q)d\tau = \begin{cases} 0, & t < q, \\ \frac{1}{2}\psi(q), & t = q, \quad q \in (-1, 1) \\ \psi(q), & t > q. \end{cases}$$

В работах [8], [35] прослеживается связь между гиперсингулярными и полигиперсингулярными интегральными уравнениями с одной стороны и обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных с другой стороны.

Рассмотрим для определенности ГИУ

$$a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau = f(t), \quad p = 2, 3, \dots, \tag{3.2}$$

где γ — гладкий замкнутый контур в плоскости комплексной переменной.

Обозначим через $D^+(D^-)$ внутреннюю (внешнюю) область плоскости z относительно контура γ . Через \bar{D}^+ обозначим замыкание области D^+ . Обозначим через G открытую область, такую, что $\bar{D}^+ \subset G$.

Пусть функции $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ являются аналитическими в области G . Будем искать решение уравнения (3.2) в классе функций, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) функции являются аналитическими в D^+ ,
- 2) функции непрерывно продолжаются, вместе с производными до $p - 1$ порядка, на контур γ ,
- 3) функции удовлетворяют условию $x(t) \in W^{p-1}H_{\alpha}(M, \gamma)$, $t \in \gamma$.

При этих условиях уравнение (3.2) эквивалентно следующему

$$a(t)x(t) + \frac{b(t)}{(p-1)! \pi i} \int_{\gamma} \frac{x^{(p-1)}(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t). \tag{3.3}$$

Из условий, накладываемых на искомое решение $x(t)$ следует, что

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^{(p-1)}(\tau)}{\tau - t} d\tau = x^{(p-1)}(t)$$

и, следовательно, уравнение (3.3) трансформируется в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{b(t)}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} x(t) + a(t)x(t) = f(t). \tag{3.4}$$

Аналогичным образом исследуются линейные уравнения вида

$$a(t)x(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(t, \tau)x(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} k(t, \tau)x(\tau) d\tau = f(t),$$

а также нелинейные уравнения вида

$$\left(\frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau - t)^p}, \dots, \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau) d\tau}{\tau - t}, x(t) \right) = f(t)$$

при условии, что коэффициенты, правые части и ядра уравнений (по обоим переменным) являются функциями, аналитическими в G .

Для решения уравнений вида (3.4) применяются аналитические и численные методы решения дифференциальных уравнений.

Отметим, что полигиперсингулярные интегральные уравнения сводятся к уравнениям в частных производных. Рассмотрим бигиперсингулярное интегральное уравнение

$$a(t_1, t_2)x(t_1, t_2) + \frac{b(t_1, t_2)}{\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{x(\tau_1, t_2)}{(\tau_1 - t_1)^p} d\tau_1 + \frac{c(t_1, t_2)}{\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{x(t_1, \tau_2)}{(\tau_2 - t_2)^p} d\tau_2 - \frac{d(t_1, t_2)}{\pi^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} = f(t_1, t_2), \quad (t_1, t_2) \in (\gamma_1 \times \gamma_2), \quad (3.5)$$

где $\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2$, γ_i — гладкий замкнутый контур в плоскости z_i , $i = 1, 2$.

Обозначим через G область $G_1 \times G_2$, где G_i — замкнутая ограниченная область в плоскости z_i такая, что γ_i лежит внутри G_i , $i = 1, 2$. В [8], [35] показано, что если уравнение (3.5) имеет решение $x^*(t_1, t_2)$ аналитическое в области G , то функция $x^*(t_1, t_2)$ также является решением дифференциального уравнения

$$a(t_1, t_2)x(t_1, t_2) + \frac{b(t_1, t_2)}{(p-1)!} \frac{\partial^{p-1} x(t_1, t_2)}{\partial t_1^{p-1}} + \frac{c(t_1, t_2)}{(p-1)!} \frac{\partial^{p-1} x(t_1, t_2)}{\partial t_2^{p-1}} + \frac{d(t_1, t_2)}{((p-1)!)^2} \frac{\partial^{2p-2} x(t_1, t_2)}{\partial t_1^{p-1} \partial t_2^{p-1}} = f(t_1, t_2), \quad (t_1, t_2) \in (\gamma_1 \times \gamma_2).$$

Для обоснования перехода от бигиперсингулярных интегральных уравнений к дифференциальным уравнениям используются аналоги формул Сохоцкого-Племеля для кратных интегралов типа Коши.

4. Уравнения первого рода

Наибольшего развития в настоящее время получили приближенные методы решения ГИУ первого рода

$$Kx \equiv Ax + Hx \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau - t)^2} + \int_{-1}^1 h(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad -1 < t < 1, \quad (4.1)$$

при различных предположениях о гладкости функций $h(t, \tau)$ и $f(t)$. Для решения уравнения (4.1) предложены различные методы: метод моментов, метод ортогональных полиномов, численно-аналитический метод, метод коллокации, метод механических квадратур.

Ряд результатов, полученных для приближенного решения уравнения (4.1) был позднее перенесен на составные особые уравнения

$$aAx + bSx + cLx + Hx \equiv \frac{a}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau + \\ + b \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau + c \int_{-1}^1 x(\tau) \ln |\tau - t| d\tau + \int_{-1}^1 h(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t). \quad (4.2)$$

При построении вычислительных схем предполагается, что уравнение (4.1) имеет решение одного из следующих видов

$$x(t) = (1 - t^2)^{\pm 1/2} \varphi(t), \quad x(t) = ((1 - t)/(1 + t))^{\pm 1/2} \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — гладкая функция.

Рассмотрим каждый случай в отдельности.

Пусть $x(t) = \sqrt{1 - t^2} \varphi(t)$. Вначале приведем известное [37] утверждение о разрешимости уравнения (4.1). Обозначим через $L_{2,\rho}$ пространство функций суммируемых в квадрате с весом $\rho(t)$. Скалярное произведение в $L_{2,\rho}$ вводится формулой

$$(u, v)_\rho = \int_{-1}^1 \rho(\tau)u(\tau)v(\tau)d\tau. \text{ Через } L_{2,\rho}^1 \text{ обозначим подпространство в } L_{2,\rho}, \text{ состоящее}$$

из функций $x(t)$, удовлетворяющих условию $\sum_{k=0}^{\infty} (k + 1)^2(x, \varphi_k) < \infty$, $\varphi_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} U_k$,

со скалярным произведением $(u, v)_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1)^2(u, \varphi_k)_\rho(v, \varphi_k)_\rho$. Здесь U_n — полином Чебышева второго рода. Норма в пространстве $L_{2,\rho}^1$ задается выражением

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1)^2(x, \varphi_k)_\rho^2. \text{ В работе [37] показано, что если } N(A) = 0 \text{ (} N(A) \text{ —}$$

нулевое подпространство оператора A), то уравнение (4.1) однозначно разрешимо и оператор $K \in [L_{2,\rho}^1, L_{2\rho}]$ непрерывно обратим.

Перейдем к описанию приближенных методов. Одним из первых был метод Галеркина [37]. Приближенное решение уравнения (4.1) ищется в виде

$$x_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k^n \varphi_k, \quad (4.3)$$

коэффициенты $\{\alpha_k^n\}_{k=0}^n$ находятся из системы

$$(Kx_n - f, \varphi_j)_\rho = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (4.4)$$

Используя формулу $AU_n = -(n+1)U_n$, систему (4.4) можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^n -(k+1)\alpha_k^n + \sum_{k=0}^n \alpha_k^n (H\varphi_k, \varphi_j)_\rho = (f, \varphi_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

В предположении, что $h(t, \tau) \in W^{r,r}([0, 1]^2)$ и $f \in W^r([0, 1])$, $r \geq 3$, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. ([37]) *При достаточно больших n система уравнений (4.4) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\|_\infty = O(n^{-r+2})$, где x^* – решение уравнения (4.1).*

Остановимся на методе коллокаций. Приближенное решение уравнения (4.1) ищется в виде (4.3); коэффициенты α_k^n определяются из системы

$$(Kx_n - f)_{t_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (4.5)$$

где $\{t_k\}_{k=0}^n$ нули полинома U_{n+1} .

В работе [36], в предположении что функция $h(t, \tau)$ непрерывная, доказана однозначная разрешимость системы уравнений (4.5) и сходимость x_n^* к x^* в метрике пространства $L_{2,\rho}$. Здесь x^* и x_n^* – решения уравнений (4.1) и (4.5), соответственно.

В [37] доказано более сильное утверждение.

Теорема 2. ([37]) *Пусть $h(t, \tau) \in W^{r,r}([-1, 1]^2)$, $f \in W^r([-1, 1])$, $r \geq 3$. Тогда система (4.5) однозначно разрешима при достаточно больших n и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\|_\infty = O(n^{-r+2})$.*

Численно-аналитический метод, предложенный в работе [40] для решения уравнения (4.2) при $b = 0$ заключается в следующем.

Обратимость оператора A на классе решений $x(t) = \sqrt{1-t^2}\varphi(t)$ позволяет преобразовать (4.1) в уравнение Фредгольма

$$ax(t) + c(A^{-1}Lx)(t) + (A^{-1}Hx)(t) = A^{-1}f. \quad (4.6)$$

Аппроксимация решения этого уравнения ищется в виде функции

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^n \varphi_k(t), \quad \text{где } \varphi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \sqrt{1-t^2} U_n(t).$$

Система функций $\varphi_k(t)$ образует в пространстве H_A со скалярным произведением $[\varphi_n, \varphi_m] = (A\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}$ ортонормальный базис. Подставляя x_n в (4.6) получаем бесконечную систему уравнений

$$a\alpha_l^n + c \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^n L_{kl} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^n H_{kl} = f_l, \quad l = 1, 2, \dots,$$

которая решается методом редукции.

В работе [25] исследуется в классе обобщенных функций уравнение

$$\begin{aligned} \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x(\sigma)d\sigma}{\sin^2 \frac{\sigma-s}{2}} d\tau + \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma + \\ + \frac{c}{\pi} \int_0^{2\pi} x(\sigma) \ln \left| \sin \frac{\sigma-s}{2} \right| d\sigma + \int_0^{2\pi} h(s, \sigma)x(\sigma)d\sigma = f(s), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где a, b, c — константы, $h(s, \sigma), f(s)$ — гладкие функции. Решение уравнения (4.7) ищется на множестве H^λ функций $u(s)$ таких, что $\|u\|_\lambda = (\sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{n}^{2\lambda} |\hat{u}(n)|^2)^{1/2} < \infty$, $\bar{n} = \max(1, |n|)$.

Здесь $u(s)$ — 2π -периодическая обобщенная функция

$$u(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}(n)e^{ins}, \quad \hat{u}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(s)e^{-ins} ds = (u(s), e^{-ins}).$$

Скалярное произведение в H^λ вводится формулой $(u, v) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^{2\lambda} \hat{u}(n) \overline{\hat{v}(n)}$.

Исследование спектральных свойств особых операторов, входящих в уравнение (4.7), приводит к соотношениям

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\sigma-s}{2} \right| e^{in\sigma} d\sigma = \begin{cases} -\frac{1}{n} \operatorname{sign}(n) e^{ins}, & n = \pm 1, \pm 2, \dots, \\ -2 \ln 2, & n = 0, \end{cases}$$

где

$$\operatorname{sign}(n) = \begin{cases} 1, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ -1, & n < 0; \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\sigma} \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma = -i \operatorname{sign}(n) e^{ins}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2;$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\sigma}}{\sin^2 \frac{\sigma-s}{2}} d\sigma = -n \operatorname{sign}(n) e^{ins}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Эти соотношения позволяют записать решения частных случаев уравнения (4.7) в явном виде. Положим

$$x(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{x}(n) e^{ins}, \quad f(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{ins}.$$

Пусть $a = 1$, $h(t, \tau) \equiv 0$. Тогда

$$x(s) = -\frac{\hat{f}(0)}{2c \ln 2} e^{i0s} + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} (-\text{sign}(n)) \frac{\hat{f}(n)}{n + ib + \frac{c}{n}} e^{ins}.$$

Пусть $a = 0$, $b = 1$, $h(t, \tau) \equiv 0$. Тогда

$$x(s) = -\frac{\hat{f}(0)}{2c \ln 2} e^{i0s} + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} (-\text{sign}(n)) \frac{\hat{f}(n)}{i + \frac{c}{n}} e^{ins}.$$

В общем случае уравнение (4.7) решается методом моментов. В работе [25] получены оценки погрешности.

В работе [42] построен приближенный метод решения уравнения

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x(\sigma)}{\sin^2 \frac{\sigma-s}{2}} d\sigma = f(s), \quad s \in (0, 2\pi) \quad (4.8)$$

при дополнительном условии $\int_0^{2\pi} f(\sigma) d\sigma = 0$.

Вводятся две системы узлов $t_k = 2\pi k/n$, $k = 0, 1, \dots, n$, и $\hat{t}_k = t_{k-1} + h/2$, $k = 1, 2, \dots, n$, $h = \pi/n$. Приближенное решение ищется в виде кусочно-постоянной функции

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(t), \quad \varphi_i(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_{i-1}, t_i], \\ 0, & t \in [0, 2\pi] \setminus [t_{i-1}, t_i]. \end{cases}$$

Коэффициенты $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} \gamma_{0n} + \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^n \left(\text{ctg} \frac{\hat{t}_k - t_l}{2} - \text{ctg} \frac{\hat{t}_k - t_{l-1}}{2} \right) \alpha_l = f(\hat{t}_k), & k = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{l=1}^n \alpha_l = 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

где $\gamma_{0n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n f(\hat{t}_k) h$, $h = \frac{2\pi}{n}$.

В [42] показано, что если решение x^* уравнения (4.8) принадлежит классу функций $W^3 H_\alpha[0, 2\pi]$, то, при достаточно больших n , система уравнений (4.9) однозначно разрешима и справедлива оценка $\max_{1 \leq i \leq n} |x^*(\hat{t}_i) - x_n(\hat{t}_i)| \leq Ch^2$.

В работе [23] уравнение (4.8) решалось методом дискретных вихрей.

Для приближенного решения ГИУ первого рода применяется метод гомотопий, который восходит к классическим работам Леверье, Пуанкаре, Бернштейна. Этому методу посвящено большое число теоретических и прикладных работ. Подробный обзор метода приведен в [48].

Применительно к ГИУ метод гомотопий заключается в следующем [41]. Рассмотрим уравнение

$$Kx \equiv a_0(Ax)(t) + a(t)(Sx)(t) + (Hx)(t) = f(t), \quad (4.10)$$

в котором использованы обозначения, введенные при описании уравнения (4.2). Здесь $x(t) = \sqrt{1 - t^2}\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — неизвестная функция. Вводится уравнение

$$H^*(x, p) \equiv (1 - p)(a_0(Ax) - f_0) + p(a_0(Ax) + a(t)(Sx) + (Hx) - f) = 0,$$

где p — параметр, $0 \leq p \leq 1$. При $p = 0$ последнее уравнение вырождается в уравнение $a_0Ax - f_0 = 0$, где f_0 — функция, для которой известно решение x_0 уравнения $a_0Ax = f_0$.

Решение уравнения (4.10) ищется в виде ряда

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k x_k(t), \quad (4.11)$$

где $x_k(t)$ — последовательные приближения, получаемые из уравнения

$$\begin{aligned} a_0A\left(\sum_{k=0}^{\infty} p^k x_k(t)\right) &= f_0 + p[f - a(t)S\left(\sum_{k=0}^{\infty} p^k x_k(t)\right) - H\left(\sum_{k=0}^{\infty} p^k x_k(t)\right) - f_0] : \\ x_0 &= (a_0A)^{-1}f_0, \\ x_1 &= (a_0A)^{-1}(f - f_0 - a(t)Sx_0 - Hx_0), \\ &\dots\dots \\ x_k &= (a_0A)^{-1}(-a(t)Sx_{k-1} - Hx_{k-1}), \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

В случае, если радиус сходимости ряда (4.11) больше 1, то при $p = 1$ $x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t)$ — решение уравнения (4.10).

Вернемся к уравнению (4.1). Исследуем построение и обоснование приближенных методов решения ГИУ в пространствах гельдеровских функций [12], [13].

Весовая функция $(1 - t^2)^{1/2}$. Пусть в уравнении (4.1) $h(t, \tau) \in H_{\alpha, \alpha}$, $f(t) \in H_{\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$. Приближенное решение уравнения (4.1) будем искать в виде функции

$$x_n(t) = \sqrt{1 - t^2} \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k. \quad (4.12)$$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются из системы уравнений

$$K_n x_n \equiv T_n \left[\int_{-1}^1 \frac{x_n(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} + \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} U_n^\tau [h(t, \tau) \varphi_n(\tau)] d\tau \right] = T_n [f(t)], \quad (4.13)$$

где $\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k$, $T_n[f]$ – оператор проектирования на множество интерполяционных полиномов n -го порядка по узлам ортонормальных полиномов Чебышева первого рода; $U_n^\tau[f]$ – оператор проектирования на множество интерполяционных полиномов n -го порядка по узлам ортонормальных полиномов Чебышева второго рода.

Введем пространство X функций вида $x(t) = \sqrt{1 - t^2} \varphi(t)$ с нормой $\|x(t)\| = \sum_{i=0}^1 \max_{-1 \leq t \leq 1} |\varphi^{(i)}(t)| + H(\varphi^{(1)}, \beta)$, и пространство Y функций $y(t) \in H_\beta$ с нормой $\|y(t)\| = \max_{-1 \leq t \leq 1} |y(t)| + H(y, \beta)$. Здесь $0 < \beta < \min(1/2, \alpha)$.

В [12] показано, что оператор $K \in [X, Y]$.

Теорема 3. [13]. Пусть $h(t, \tau) \in W^{r,r} H_{\alpha\alpha}(M)$, $f(t) \in W^r H_\alpha(M)$, $r = 2, 3, \dots$, $0 < \alpha \leq 1$, $M = \text{const}$. Пусть существует линейный обратный оператор $K^{-1} \in [Y, X]$. Тогда при n таких, что $q = Cn^{-r-\alpha+\beta} \ln n < 1$, система уравнений (4.13) однозначно разрешима и справедливо неравенство $\|x^*(t) - x_n^*(t)\|_{C[-1,1]} \leq Cn^{-r-\alpha+\beta} \ln n$, где x^* и x_n^* – решения уравнений (4.1) и (4.13), соответственно.

Весовая функция $(1 - t^2)^{-1/2}$. Пусть в уравнении (4.1) $h(t, \tau) \in H_{\alpha,\alpha}$, $f(t) \in H_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$. Будем искать приближенное решение ГИУ (4.1) на классе функций $x(t) = (1 - t^2)^{-1/2} \varphi(t)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. функция $\varphi(t)$ разлагается в ряд по степеням t : $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k$,
2. $x_0 = c_0$,
3. $x_1 = c_1$.

Здесь c_0 и c_1 – фиксированные константы.

Приближенное решение уравнения (4.1) будем искать в виде функции $x_n(t) = (1 - t^2)^{-1/2} \varphi_n(t)$, $\varphi_n(t) = c_0 + c_1 t + \sum_{k=2}^n \alpha_k t^k$, коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которой определяются из системы

$$K_n x_n \equiv T_{n-2} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_n(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2} (\tau - t)^2} + \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \tau^2}} T_n^\tau [h(t, \tau) \varphi_n(\tau)] d\tau \right] = T_{n-2} [f(t)], \quad (4.14)$$

где T_n – оператор проектирования на множество интерполяционных полиномов n -го порядка по узлам многочленов Чебышева первого рода; верхний индекс у оператора T_n^τ означает, что интерполяция проводится по переменной τ .

Введем пространство X функций $x(t)$ с нормой $\|x(t)\| = \sum_{j=0}^2 \max_{t \in [-1,1]} |x^j(t)| + H(x^{(2)}, \beta)$, $0 < \beta < \alpha$. Обозначим через Y пространство функций $y(t) \in H(\beta, [-1, 1])$. Норма в пространстве Y определяется выражением $\|y(t)\| = \max_{-1 \leq t \leq 1} |y(t)| + H(y, \beta)$.

В работе [13] показано, что оператор $K \in [X, Y]$.

Теорема 4. [13] Пусть оператор $K \in [X, Y]$ непрерывно обратим и $h(t, \tau) \in H_{\alpha, \alpha}$, $f(t) \in H_\alpha$. Тогда при n таких, что $Cn^{-\alpha+\beta} \ln^2 n < 1$, система уравнений (4.14) однозначно разрешима и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\|_{C[-1,1]} \leq Cn^{-\alpha+\beta} \ln^2 n$, где x^* и x_n^* – решения уравнений (4.1) и (4.14), соответственно.

Весовые функции $((1+t)/(1-t))^{\pm 1/2}$. В этом пункте исследуются приближенные методы решения ГИУ (4.1), решение которых ищется в классе функций $x(t) = ((1+t)/(1-t))^{\pm 1/2} \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – гладкая функция. Для определенности ограничимся рассмотрением весовой функции $(1+t)/(1-t)^{1/2}$.

Приближенное решение уравнения (4.1) ищется в виде функции

$$x_n(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \varphi_n(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k,$$

с заранее заданным коэффициентом $\alpha_0 = \text{const}$. Это соответствует тому, что в качестве дополнительного условия, налагаемого на решение уравнения (4.1), берется значение $x^*(0) = \alpha_0$.

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ функции $x_n(t)$ находятся из системы

$$K_n x_n \equiv T_{n-1} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \frac{\varphi_n(\tau)}{(\tau-t)^2} d\tau + \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} T_n^\tau [(1+\tau)h(t, \tau)\varphi_n(\tau)] d\tau \right] = T_n[f(t)], \quad (4.15)$$

где T_n – оператор проектирования на множество интерполяционных полиномов n -го порядка по узлам полиномов Чебышева первого рода.

Введем пространство X функций вида $x(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – функция, входящая в класс $W^r H_\alpha(M)$, $r = 2, 3, \dots$, $0 < \alpha \leq 1$, и удовлетворяющая условию $\varphi(0) = c_0$. Норма в пространстве X определяется формулой $\|x(t)\| = \|\varphi(t)\|_{C[-1,1]} + \|\varphi'(t)\|_{C[-1,1]} + H(\varphi', \beta)$, $\beta < \alpha$. Через Y обозначим пространство функций $y(t) \in H_\beta$ с нормой $\|y(t)\| = \|y(t)\|_{C[-1,1]} + H(y, \beta)$.

По аналогии с выкладками, проведенными в [13] при исследовании решений в пространствах функций с весами $(1 - t^2)^{\pm 1/2}$, можно показать, что оператор K отображает X в Y .

Теорема 5. Пусть выполнены следующие условия:

1. $h(t, \tau) \in W^{r,r} H_{\alpha\alpha}(M)$, $f(t) \in W^r H_\alpha$;
2. оператор $K \in [X, Y]$ непрерывно обратим.

Тогда при n таких, что $q = Cn^{-r-\alpha+\beta} \ln n < 1$, система уравнений (4.15) однозначно разрешима и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\|_{C[-1,1]} \leq Cn^{-r-\alpha+\beta} \ln^2 n$, где x^* и x_n^* — решения уравнений (4.1) и (4.15), соответственно.

5. Приближенное решение линейных гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода на замкнутых контурах

Рассмотрим гиперсингулярное интегральное уравнение

$$Kx \equiv a(t)x(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(t, \tau)x(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau = f(t), \quad (5.1)$$

где γ — единичная окружность с центром в начале координат, p — натуральное число, $p = 2, 3, \dots$

Будем считать, что выполнены следующие условия: $a(t), f(t) \in W^r H_\alpha$, $h(t, \tau) \in W^{r,r+p-1} H_{\alpha,\alpha}$, $r = 0, 1, \dots, 0 < \alpha \leq 1$.

Через $Y = H_\beta$ ($0 < \beta < \alpha$) обозначим банахово пространство функций $f(t) \in H_\beta$ с нормой $\|f(t)\|_Y = \|f(t)\|_{H_\beta} = \max_{t \in \gamma} |f(t)| + H(f, \beta)$.

Через X обозначим банахово пространство функций $x \in W^{p-1} H_\beta$, $0 < \beta < \alpha$, с нормой $\|x(t)\|_X = \sum_{k=0}^{p-1} \max_{t \in \gamma} |x^{(k)}(t)| + H(x^{(p-1)}, \beta)$.

Приближенное решение уравнения (5.1) будем искать в виде полинома

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^{k+p-1} + \sum_{k=-n}^{-1} \alpha_k t^k. \quad (5.2)$$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются из системы линейных уравнений, которая в операторной форме имеет вид

$$K_n x_n \equiv \bar{P}_n \left[a(t)x_n(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} P_n \left[\frac{h(t, \tau)x_n(\tau)}{(\tau - t)^p} \right] d\tau \right] = \bar{P}_n [f(t)]. \quad (5.3)$$

Здесь $P_n(\bar{P}_n)$ — оператор проектирования на множество интерполяционных тригонометрических полиномов по узлам $t_k = e^{is_k}$, $s_k = 2k\pi/(2n+1)$ ($\bar{t}_k = e^{i\bar{s}_k}$, $\bar{s}_k = (2k+1)\pi/(2n+1)$), $k = 0, 1, \dots, 2n$.

Теорема 6. [11]. Пусть уравнение (5.1) однозначно разрешимо. Тогда при n таких, что $q = A \ln^3 n/n^{r-p+1+\alpha-\beta}$, система уравнений (5.3) однозначно разрешима и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\|_X \leq A \ln^3 n/n^{r-p+1+\alpha-\beta}$, где x^* и x_n^* – решения уравнения (5.1) и системы уравнений (5.3), соответственно.

Доказательство теоремы проводится по следующей схеме. Пользуясь определением гиперсингулярного интеграла на гладком замкнутом контуре, точное уравнение (5.1) и приближенную систему уравнений (5.3) трансформируем в сингулярное интегро-дифференциальное уравнение и систему линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующих его. Применяя результаты [10], завершаем доказательство теоремы.

Эти результаты распространены [14] на гиперсингулярные интегро-дифференциальные уравнения.

Рассмотрим гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение

$$Kx \equiv \sum_{k=0}^m a_k(t)x^{(k)}(t) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^l \int_{\gamma} \frac{h_k(t, \tau)x^{(k)}(\tau)d\tau}{(\tau - t)^p} = f(t), \quad p = 2, 3, \dots \quad (5.4)$$

В качестве граничных условий в уравнении (5.4) возьмем следующие

$$\int_{\gamma} x(t)t^{-k-1}dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, s - 1, \quad s = \max(m, l + p - 1). \quad (5.5)$$

Будем считать, что выполнены следующие условия: $a_k(t), f(t) \in W^r H_{\alpha}$, $k = 0, 1, \dots, m$, $h_k(t, \tau) \in W^{r, r+p-1} H_{\alpha, \alpha}$, $r = 0, 1, \dots, 0 < \alpha \leq 1$, $k = 0, 1, \dots, l$.

Исследование приближенных методов решения граничной задачи (5.4), (5.5) основано [14] на ее трансформации к граничной задаче для сингулярных интегро-дифференциальных уравнений.

В работе [14], как и в работах [10], [15], обоснование приближенных методов решения ГИУ основано на общей теории приближенных методов Л.В. Канторовича [22]. В качестве другого подхода к построению и обоснованию приближенных методов решения ГИУ может быть использована работа [4].

Через Y обозначим банахово пространство функций $y(t) \in H_{\beta}$ с нормой $\|y(t)\|_Y = \max_{\gamma} |y(t)| + H(y, \beta)$, $0 < \beta < \alpha$.

Через X обозначим банахово пространство функций $x \in W^s H_{\beta}$, $0 < \beta < \alpha$ с нормой $\|x(t)\|_X = \sum_{k=0}^s \max_{t \in \gamma} |x^{(k)}(t)| + H(x^{(s)}, \beta)$.

Приближенное решение граничной задачи (5.4)-(5.5) будем искать в виде полинома

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^{k+s} + \sum_{k=-n}^{-1} \alpha_k t^k. \quad (5.6)$$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются из системы уравнений

$$K_n x_n \equiv \bar{P}_n \left[\sum_{k=0}^m a_k(t) x_n^{(k)}(t) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^l \int_{\gamma} P_n \left[\frac{h_k(t, \tau) x_n^{(k)}(\tau)}{(\tau - t)^p} \right] d\tau \right] = \bar{P}_n [f(t)]. \quad (5.7)$$

Здесь $P_n(\bar{P}_n)$ – оператор проектирования на множество интерполяционных тригонометрических полиномов по узлам $t_k = e^{is_k}$, $s_k = 2k\pi/(2n+1)$ ($\bar{t}_k = e^{is_k}$, $\bar{s}_k = (2k+1)\pi/(2n+1)$), $k = 0, 1, \dots, 2n$.

Теорема 7. [14], [17]. Пусть краевая задача (5.3)-(5.4) однозначно разрешима. Тогда при n таких, что $q = A \ln^3 n / n^{r-p+1+\alpha-\beta}$ система уравнений (5.7) однозначно разрешима и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\|_X \leq A \ln^3 n / n^{r-p+1+\alpha-\beta}$, где x^* и x_n^* – решения краевой задачи (24) - (25) и системы уравнений (5.7), соответственно.

В работе [11] предложена и обоснована следующая вычислительная схема для приближенного решения уравнения (5.1).

Через Y обозначим банахово пространство функций $y(t) \in H_\beta$ с нормой $\|y(t)\|_Y = \max_{\gamma} |y(t)| + H(y, \beta)$, $0 < \beta < \alpha$.

Через X обозначим банахово пространство функций $x \in W^{p-1}H_\beta$, $0 < \beta < \alpha$, с нормой $\|x(t)\|_X = \sum_{k=0}^{p-1} \max_{t \in \gamma} |x^{(k)}(t)| + H(x^{(p-1)}, \beta)$.

Приближенное решение ищется в виде функции

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{p-2} \alpha_k t^k \ln t + \sum_{k=p-1}^{n+p-1} \alpha_k t^k \ln t + \sum_{k=-n+p-1}^{-1} \alpha_k t^k,$$

коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которой определяются из системы

$$K_n x_n \equiv P_n \left[a(t) x_n(t) + \int_{\gamma} \frac{h(t, \tau) x_n(\tau) d\tau}{(\tau - t)^p} \right] = P_n [f(t)]. \quad (5.8)$$

Здесь через $P_n[f]$ обозначен оператор проектирования непрерывных функций $f \in C[\gamma]$ на множество интерполяционных тригонометрических полиномов n -го порядка, построенных на узлах $t_k = e^{is_k}$, $s_k = 2k\pi/(2n+1)$, $k = 0, 1, \dots, 2n$.

Теорема 8. [11]. Пусть оператор $K \in [X, Y]$ непрерывно обратим; $a, f \in H_\alpha$, $h \in H_{\alpha, \alpha}$. Тогда при n таких, что $q = C n^{-\alpha+\beta} \ln^3 n < 1$, система уравнений (5.8) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\|_X \leq C n^{-\alpha+\beta} \ln^3 n$, где x^* – решение уравнения (5.1).

Замечание. В теоремах 6, 8 достаточно потребовать односторонней обратимости оператора K в соответствующих пространствах. Аналогичное ослабление условий возможно и в теореме 7.

6. Сплайн-коллокационный метод решения ГИУ второго рода

Рассмотрим гиперсингулярное интегральное уравнение

$$Kx \equiv a(t)x(t) + b(t) \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau - t)^p} + \int_{-1}^1 h(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad (6.1)$$

где $p = 2k, k = 1, 2, \dots, b(t) \neq 0, t \in [-1, 1]$.

Введем узлы $t_k = -1 + 2k/N, k = 0, 1, \dots, N$, и $\bar{t}_k = t_k + 1/N, k = 0, 1, \dots, N - 1$. Обозначим через Δ_k интервалы $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, \dots, N - 2$, а через Δ_{N-1} сегмент $\Delta_{N-1} = [t_{N-1}, 1]$.

Приближенное решение уравнения (6.1) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \psi_k(t), \quad (6.2)$$

где

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_k \\ 0, & t \in [-1, 1] \setminus \Delta_k. \end{cases} \quad (6.3)$$

Значения $\{\alpha_k\}, k = 0, 1, \dots, N - 1$, определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$a(\bar{t}_k)\alpha_k + b(\bar{t}_k) \sum_{l=0}^{N-1} ' \alpha_l \int_{\Delta_l} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_k)^p} + \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_l \int_{\Delta_l} h(\bar{t}_k, \tau)d\tau = f(\bar{t}_k), \quad (6.4)$$

$k = 0, 1, \dots, N - 1$.

Здесь \sum' означает суммирование по $l \neq k-v, k-v+1, \dots, k-1, k+1, \dots, k+v-1$, где величина $v(v \geq 1)$ зависит от абсолютной величины коэффициентов $a(t), b(t)$ и от значений N . Начиная с некоторого, достаточно большого N , параметр v можно положить равным единице. Параметр v выбирается таким образом, чтобы были выполнены условия теоремы Адамара об обратимости прямоугольных матриц. В работе [16] показано, что этот выбор осуществим, если $b(t) \neq 0, t \in [-1, 1]$.

Теорема 9. [16]. Пусть выполнены следующие условия:

1. справедливо неравенство $|b(t)| \geq b > 0$ при $t \in (-1, 1)$;
2. функция $a(t), f(t), h(t, \tau)$ непрерывны.

Тогда существует такое $v \geq 1$, что при достаточно больших N система уравнений (32) имеет единственное решение $x_N^*(t)$.

Вычислительная схема, построенная на основе кусочно-постоянной аппроксимации решения, не гарантирует сходимости приближенного решения $x_N^*(t)$ к точному при $p \geq 2$.

Сходимость можно гарантировать только для уравнений с сингулярностью $1 + \lambda, 0 < \lambda < 1$:

$$a(t)x(t) + b(t) \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)d\tau}{|\tau - t|^{1+\lambda}} + \int_{-1}^1 h(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad 0 < \lambda < 1. \quad (6.5)$$

Приближенное решение уравнения (6.5) будем искать в виде кусочно-постоянной функции (6.2), (6.3), значения $\{\alpha_k\}$ которой определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$a(\bar{t}_k)\alpha_k + \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_l \int_{\Delta_l} \frac{d\tau}{|\tau - \bar{t}_k|^{1+\lambda}} + \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_l \int_{\Delta_l} h(\bar{t}_k, \tau)d\tau = f(\bar{t}_k), \quad (6.6)$$

$k = 0, 1, \dots, N - 1$.

Теорема 10. [33]. Пусть выполнены следующие условия:

1. функции $a(t), b(t), f(t) \in W^2(M), h(t, \tau) \in W^{2,2}(M)$;
2. уравнение (6.5) имеет единственное решение $x^*(t) \in W^1 H_\alpha(M), 0 < \alpha \leq 1$;
3. $0 < B_* \leq |b(t)| \leq B^* < \infty, -1 \leq t \leq 1$.

Тогда система уравнений (6.6) имеет единственное решение $x_N^*(t)$ и справедлива оценка $\|x^*(t) - x_N^*(t)\|_{C[-1,1]} \leq CN^{-(1-\lambda)}$.

Так как при $p \geq 2$ вычислительная схема, построенная на основе кусочно-постоянной аппроксимации решения, не гарантирует сходимости приближенного решения к точному, то ее необходимо трансформировать.

При $p = 2$ и при аппроксимации решения сплайном первого порядка, можно получить оценку точности приближенного решения.

Рассмотрим уравнение

$$a(t)x(t) + \int_{-1}^1 \frac{h(t, \tau)x(\tau)d\tau}{(\tau - t)^2} = f(t), \quad -1 \leq t \leq 1. \quad (6.7)$$

Это уравнение наиболее часто встречается в приложениях.

Отметим, что если при определении уравнения (6.7) предполагается, что переменная t может принимать значения ± 1 , то гиперсингулярный интеграл в (6.7) понимается в смысле определения 2 для $t \in (-1, 1)$ и в смысле определения 2.3 для $t = \pm 1$.

Каждому узлу t_k , $k = 1, 2, \dots, 2N - 1$, поставим в соответствие базисную функцию

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} 0, & t_{k-1} \leq t \leq t_{k-1} + \frac{1}{N^2}, \\ \frac{N^2}{N-2}(t - t_{k-1}) - \frac{1}{N-2}, & t_{k-1} + \frac{1}{N^2} \leq t \leq t_k - \frac{1}{N^2}, \\ 1, & t_k - \frac{1}{N^2} \leq t \leq t_k + \frac{1}{N^2}, \\ -\frac{N^2}{N-2}(t - t_{k+1}) - \frac{1}{N-2}, & t_k + \frac{1}{N^2} \leq t \leq t_{k+1} - \frac{1}{N^2}, \\ 0, & t_{k+1} - \frac{1}{N^2} \leq t \leq t_{k+1}, \\ 0, & t \in [-1, 1] \setminus [t_{k-1}, t_{k+1}]; \end{cases} \quad (6.8)$$

узлу t_0 поставим в соответствие базисную функцию

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t \leq -1 + \frac{1}{N^2}, \\ -\frac{N^2}{N-2}(t - t_1) - \frac{1}{N-2}, & -1 + \frac{1}{N^2} \leq t \leq t_1 - \frac{1}{N^2}, \\ 0, & t_1 - \frac{1}{N^2} \leq t \leq t_1, \\ 0, & [-1, 1] \setminus [t_0, t_1]; \end{cases} \quad (6.9)$$

узлу t_{2N} поставим в соответствие базисную функцию

$$\varphi_{2N}(t) = \begin{cases} 0, & -1 \leq t \leq t_{N-1} + \frac{1}{N^2}, \\ \frac{N^2}{N-2}(t - t_{N-1}) - \frac{1}{N-2}, & t_{N-1} + \frac{1}{N^2} \leq t \leq 1 - \frac{1}{N^2}, \\ 1, & 1 - \frac{1}{N^2} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (6.10)$$

Приближенное решение уравнения (6.7) будем искать в виде кусочно-непрерывной функции

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^{2N} \alpha_k \varphi_k(t), \quad (6.11)$$

коэффициенты которой определяются из следующей системы линейных алгебраических уравнений

$$a(t_k)x_N(t_k) + \sum_{l=0}^{2N} \alpha_l h(t_k, \tau_l) \int_{-1}^1 \frac{\varphi_l(\tau)}{(\tau - t_l)^2} d\tau = f(t_k), \quad (6.12)$$

$k = 0, 1, \dots, 2N$.

Теорема 11. [34] Пусть уравнение (6.7) однозначно разрешимо; функции $a(t)$, $f(t)$ имеют непрерывные производные r -го порядка; функция $h(t, \tau)$ имеет непрерывные производные r -го порядка по обоим переменным; $r \geq 1$; выполнено условие $|h(t, t)| \geq q > 0$ при $t \in [-1, 1]$. Тогда система уравнений (6.12) однозначно разрешима и справедливо неравенство $\max_{0 \leq k \leq 2N} |x^*(t_k) - x_N^*(t_k)| \leq AN^{-1}$. Здесь $x^*(t)$ и $x_N^*(t)$ — решения уравнений (6.10) и (6.12), соответственно.

7. Приближенные методы решения нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений

Большое число задач (физических и технических) сводится к нелинейным гиперсингулярным интегральным уравнениям типа Прандтля

$$\int_{-1}^1 \frac{x(\tau)}{(\tau-t)^2} d\tau + \gamma(t, x(t)) = f(t), \quad |t| < 1, x(\pm 1) = 0. \quad (7.1)$$

Условия разрешимости и проекционные методы решения уравнений вида (7.1) изложены в [38], [39].

Для приближенного решения уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{(\tau-t)^2} d\tau + \gamma(t, x(t)) = f(t), \quad (7.2)$$

при ряде условий на решение на бесконечности, предложен метод установления [44].

Аналог метода дискретных особенностей предложен и обоснован в [18] для приближенного решения уравнения Мультихофа безциркулярного обтекания поверхности потоком газа.

Рассмотрим нелинейное гиперсингулярное интегральное уравнение:

$$a(t)x(t) + \int_{-1}^1 \frac{h(t, \tau, x(\tau))d\tau}{(\tau-t)^p} = f(t). \quad (7.3)$$

Будем искать приближенное решение уравнения (7.3) в виде кусочно-постоянной функции (6.2)-(6.3) с коэффициентами α_k , которые определяются следующей системой уравнения, полученной путем аппроксимации ядра $h(t, \tau)$ кусочно-постоянной функцией и применения процедуры коллокации

$$a(\bar{t}_l)\alpha_l + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\Delta_k} \frac{h(\bar{t}_l, \bar{t}_k, \alpha_k)}{(\tau - \bar{t}_l)^p} d\tau = f(\bar{t}_l), l = 0, 1, \dots, N-1. \quad (7.4)$$

Используя определение гиперсингулярных интегралов, можно записать систему уравнений (7.4) как

$$a(\bar{t}_l)\alpha_l - \sum_{k=0}^{N-1} h(\bar{t}_l, \bar{t}_k, \alpha_k) \frac{N^{p-1}}{p-1} \left(\frac{1}{(2l-2k+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2l-2k-1)^{p-1}} \right) = f(\bar{t}_l), l = 0, 1, \dots, N-1. \quad (7.5)$$

Производная Фреше на элементах $(\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{N-1})$ в пространстве R_N равна

$$a(\bar{t}_l)\alpha_l - \sum_{k=0}^{N-1} h'_3(\bar{t}_l, \bar{t}_k, \bar{\alpha}_k)\alpha_k \frac{N^{p-1}}{p-1} \left(\frac{1}{(2l-2k+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2l-2k-1)^{p-1}} \right),$$

$l = 0, 1, \dots, N-1$. Нижний индекс в выражении $h'_3(t, \tau, u)$ означает, что производная берется по третьему аргументу.

Пусть уравнение (7.3) имеет единственное решение $x^*(t)$ внутри шара $B(x^*, \delta)$. Предположим, что функция $h'_3(t, \tau, \varphi(\tau))$, $\varphi(\tau) \in B(x^*, \delta)$, $-1 \leq t, \tau \leq 1$, имеет одинаковый знак внутри шара $B(x^*, \delta)$, а также имеет диагональное преобладание: $h'_3(t, t, \varphi(t)) \geq h'_3(t, \tau, \varphi(\tau))$ при $t, \tau \in [-1, 1]$.

Предположим, что N достаточно велико, а значения $h'_3(\bar{t}_l, \bar{t}_k, \bar{\alpha}_k)$ также имеют один и тот же знак внутри шара $B(\bar{x}^*, \delta)$, где $\bar{x}^* = (\bar{\alpha}_0^*, \dots, \bar{\alpha}_{N-1}^*)$, $\bar{\alpha}_k^* = x^*(\bar{t}_k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Предположим для определенности, что функция $h'_3(t, \tau, x(\tau))$, $(t, \tau) \in [-1, 1]$, $x \in B(x^*, \delta)$ положительна и имеется диагональное доминирование, а функция $a(t)$ неположительна. Тогда, согласно непрерывному методу решения операторных уравнений [9] решение системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_l(t)}{dt} = & a(\bar{t}_l)\alpha_l(t) - \sum_{k=0}^{N-1} h(\bar{t}_l, \bar{t}_k, \alpha_k(t)) \frac{N^{p-1}}{p-1} \times \\ & \times \left(\frac{1}{(2l-2k+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2l-2k-1)^{p-1}} \right) - f(\bar{t}_l), \quad l = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (7.6)$$

сходится к решению уравнения (7.3).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 12. [34] Пусть выполняются следующие условия:

1. Уравнение (7.3) имеет единственное решение $x^*(t)$ внутри шара $B(x^*, \delta)$;
2. Знак функции $h'_3(t, \tau, \varphi(\tau))$, $\varphi(\tau) \in B(x^*, \delta)$ не меняется, и знаки функций $h'_3(t, \tau, \varphi(\tau))$, и $a(t)$ противоположны;
3. $|h'_3(t, \tau, \varphi(\tau))| \geq \alpha$ при $(t, \tau) \in [-1, 1]$, $\varphi \in B(x^*, \delta)$;
4. функция $h'_3(t, \tau, \varphi(\tau))$, $(t, \tau) \in [-1, 1]$, $\varphi(\tau) \in B(x^*, \delta)$ имеет диагональное доминирование, т.е. $h'_3(t, t, \varphi(t)) \geq h'_3(t, \tau, \varphi(\tau))$.

Тогда система уравнений (7.4) имеет единственное решение внутри шара $B(x^*, \delta)$, и решение уравнения (7.5) сходится к этому решению при $t \rightarrow \infty$.

Замечание. Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7.6) может быть использован любой численный метод.

Замечание. Для решения системы нелинейных уравнений (7.4) не требуется обратимости производной Фреше (7.5) на каждом шаге итерационного процесса.

8. Приближенные методы решения полигиперсингулярных и многомерных гиперсингулярных интегральных уравнений

Не имея возможности, из-за ограниченного размера статьи, остановиться на приближенных методах решения полигиперсингулярных и многомерных ГИУ, приведем лишь ссылки на соответствующие работы

В работе [34] сплайн-коллокационный метод со сплайнами нулевого порядка применяется для решения бигиперсингулярного интегрального уравнения

$$a(t_1, t_2)x(t_1, t_2) + b(t_1, t_2) \int_{-1}^1 \frac{x(\tau_1, t_2)}{(\tau_1 - t_1)^p} d\tau_1 + c(t_1, t_2) \int_{-1}^1 \frac{x(t_1, \tau_2)}{(\tau_2 - t_2)^p} d\tau_2 +$$

$$+ d(t_1, t_2) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} = f(t_1, t_2), \quad p = 2, 4, \dots,$$

и многомерного ГИУ

$$a(t_1, t_2)x(t_1, t_2) + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{h(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} = f(t_1, t_2).$$

Приближенные методы решения последнего уравнения при $a(t_1, t_2) \equiv 0$ исследовались в [29].

В книге [18] исследовались приближенные методы решения многомерных гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода на гладких поверхностях.

Заключение

В статье дан краткий обзор работ посвященных аналитическим и численным методам решения гиперсингулярных интегральных уравнений. Не имея возможности, из-за ограниченного объема статьи, представить обзор всех известных численных методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений, автор ограничился рассмотрением классов уравнений, которые в настоящее время находят наиболее широкое применения в различных приложениях и в развитии которых он принимал участие. К сожалению, в обзор не попали многочисленные работы, посвященные применениям гиперсингулярных интегральных уравнений к задачам физики и технологий.

Поэтому я приношу свои извинения тем многочисленным авторам, чьи блестящие работы здесь не упомянуты.

Список цитируемых источников

1. *Адамар, Ж.* Исследование психологии процесса изобретения в области математики / Ж. Адамар. — М.: Советское радио, 1970. — 152 с.
Hadamard, J. Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique. Translation from the French by M. A. Shatalova and O. P. Shatalov. Moskau: Sovetskoe Radio. 152 S. (1970). (in Russian) Zbl 0217.29806
Hadamard, Jacques Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique. Paris: Librairie Scientifique Albert Blanchard, 1959. Zbl 0086.24206
2. *Адамар, Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. — М.: Наука, 1978. — 351 с.
Hadamard, J. Le Problème de Cauchy et les Équations aux Dérivées Partielles Linéaires Hyperboliques. Paris: Hermann & Cie. 542 p., 1932. Zbl 0006.20501
3. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — М.: БИНОМ, 2008. — 636 с.
Bakhvalov, N. S.; Zhidkov, N. P.; Kobel'kov, G. M. Numerical methods. Textbook. Moscow: BINOM, 2008. (in Russian)
4. *Бойков, И. В.* Принцип компактной аппроксимации в возмущенном методе Галеркина / И. В. Бойков // ДАН СССР. — 1974. — Т.215, № 1. — С.11-14.
Vojkov, I. V. The principle of compact approximation in the perturbed Galerkin method. Sov. Math., Dokl. 15, 385-389 (1974) Zbl 0302.41015
5. *Бойков, И. В.* Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков. — Пенза: Изд-во ПГУ, 2004. — 316 с.
Vojkov, I. V. Approximate solution of singular integral equations. Penza: Izdatel'stvo Penzenskogo Gosudarstvennogo Universiteta. 315 p. (2004). (in Russian) Zbl 1169.65001
6. *Бойков, И. В.* Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Часть первая. Сингулярные интегралы. — Пенза: Изд-во Пензенского государственного университета, 2005. — 360 с.
Vojkov, I. V. Approximate calculation for singular and hypersingular integrals. Part 1. Singular equations. Penza: Izdatel'stvo Penzenskogo Gosudarstvennogo Universiteta. 359 p. (2005). (in Russian) Zbl 1165.41002
7. *Бойков, И. В.* Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Часть II. Гиперсингулярные интегралы. — Пенза: Изд-во Пензенского государственного университета, 2009. — 252 с.
Vojkov, I. V. Approximate calculation for singular and hypersingular integrals. Part 2. Hypersingular integrals. Penza: Izdatel'stvo Penzenskogo Gosudarstvennogo Universiteta, 2009. (in Russian) Zbl 1216.41001
8. *Бойков, И. В.* Аналитические методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. Математика. — 2017. — № 2. — С. 63-78.
Vojkov, I. V.; Vojkova, A. I. Analytical methods for solving hypersingular integral equations. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiz.-mat. nauki. Matematika No.2, 63-78 (2017). (in Russian)

9. *Бойков, И. В.* Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т. 48, № 9. — С. 1308-1314.
 Boikov, I. V. On a continuous method for solving nonlinear operator equations. Differ. Equ. 48, No. 9, 1288-1295 (2012) Zbl 1267.47094
10. *Бойков, И. В.* К приближенному решению сингулярных интегро-дифференциальных уравнений 1 [линейные уравнения] / И. В. Бойков, И. И. Жечев // Дифференциальные уравнения. — 1973. — Т.9, № 8. — С. 1493-1502.
 Bojkov, I. V.; Zhechev, J. I. Approximate solution of singular integro-differential equations. I: Linear equations. Differ. Equations 9(1973), 1149-1156 (1975). (in Russian) Zbl 0302.45015
11. *Бойков, И. В.* Приближенное решение линейных гиперсингулярных интегральных уравнений методом коллокаций / И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова, М. А. Сёмов, А. А. Есафьев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. Математика. — 2014. — №3. — С. 101-113.
 Bojkov, I. V.; Zakharova, Yu. F.; Sëmov, M. A.; Esaf'ev, A. A. An approximate solution of linear hypersingular integral equations by the collocation method. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiz.-mat. nauki. Matematika No.3, 101-113 (2014). (in Russian)
12. *Бойков, И. В.* Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода. / И. В. Бойков, А. И. Бойкова, М. А. Сёмов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. Математика. — 2015. — №3. — С. 11-27.
 Bojkov, I. V.; Bojkova, A. I.; Sëmov, M. A. An approximate solution of hypersingular integral equations of the first kind. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiz.-mat. nauki. Matematika No.3, 11-27 (2015). (in Russian)
13. *Бойков, И. В.* Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода с особенностями второго порядка на классах функций с весами $(1 - t^2)^{-1/2}$ / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. Математика. — 2017. — № 2. — С. 79- 90.
 Bojkov, I. V.; Bojkova, A. I. Approximate methods for solving hypersingular integral equations of the first kind with second-order singularities on classes of functions with weights $(1 - t^2)^{-1/2}$. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiz.-mat. nauki. Matematika No.2, 79-90 (2017). (in Russian)
14. *Бойков, И. В.* Приближенные методы решения сингулярных и гиперсингулярных интегро-дифференциальных уравнений / И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. Математика. — 2012. — №3 (23). — С. 99-114.
 Bojkov, I. V.; Zakharova, Yu. F. Approximate methods for solving singular and hypersingular integro-differential equations. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiz.-mat. nauki. Matematika No.3(23), 99-114 (2012). (in Russian)
15. *Бойков, И. В.* К приближенному решению сингулярных интегро-дифференциальных уравнений 2 / И. В. Бойков, И. И. Жечев // Дифференциальные уравнения. — 1975. — Т.11, № 3. — С.562-571.

- Bojkov, I. V.; Zhechev, J. I. Approximate solution of singular integro-differential equations. II: Nonlinear equations. *Differ. Equations* 11(1975), 424-431 (1976). Zbl 0328.45005
16. *Бойков, И. В.* Сплайн-коллокационный метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Вестник Харк. нац. ун-та. Сер. Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления. — 2007. — вып. 5. — С.: 36-49.
- Bojkov, I. V.; Bojkova, A. I. Spline-collocation method for solving hypersingular integral equations. *Vestnik Khark. nats. un-ta. Ser. Matematicheskoye modelirovaniye. Informatsionnyye tekhnologii. Avtomatizirovannyye sistemy upravleniya.* Issue 5, 36-49 (2007). (in Russian)
17. *Бойков, И. В.* Приближенное решение гиперсингулярных интегродифференциальных уравнений / И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. Математика. — 2010. — №1. — С. 80-90.
- Bojkov, I. V.; Zakharova, Yu. F. Approximate methods for solving hypersingular integro-differential equations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiz.-mat. nauki. Matematika* No.1, 80-90 (2010). (in Russian)
18. *Вайникко, Г. М.* Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения / Г. М. Вайникко, И. К. Лифанов, Л. Н. Полтавский. — М.: Янус-К, 2001. — 508 с.
- Lifanov, I. K.; Poltavskii, L. N.; Vainikko, G. M. Numerical methods in hypersingular integral equations and their applications. Moscow: Yunus-K, 2001. (in Russian)
19. *Гахов, Ф. Д.* Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. — М.: Наука, 1977. — 640 с.
- Gakhov, F. D. Boundary value problems. 3rd ed., revised and augmented. Moskva: Izdatel'stvo Nauka, 1977. (in Russian) Zbl 0449.30030
20. *Гохберг, И. Ц.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения / И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман. — М.: Наука, 1971. — 352 с.
- Gohberg, I. C.; Fel'dman, I. A. Convolution equations and projection methods for their solution. *Translations of Mathematical Monographs* Vol. 41. Providence, R.I.: American Mathematical Society (AMS). IX, 261 p. (1974). Zbl 0278.45008
21. *Иванов, В. В.* Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений / В. В. Иванов. — Киев: Наукова думка, 1968. — 287 с.
- Ivanov, V. V. The theory of approximate methods and their application to the numerical solution of singular integral equations. *Monographs and Textbooks on Mechanics of Solids and Fluids. Mechanics: Analysis.* Vol. 2. Leyden: Noordhoff International Publishing. XVII, 330 p. (1976).
22. *Канторович, Л. В.* Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М.: Наука, 1977. — 750 с.
- Kantorovich, L. V.; Akilov, G. P. Functional analysis. 2nd ed. Oxford etc.: Pergamon Press, 1982. XIV, 589 p. Zbl 0484.46003

23. *Лифанов, И. К.* Численное решение сингулярных интегральных уравнений Гильберта с сильной особенностью // Оптимальные методы вычислений и их применение : межвуз. сб. науч. тр. / Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1985. — Вып. 7. — С. 38-45.
Lifanov, I. K. Numerical solution of singular integral Hilbert equations with a strong singularity. Optimal'nyye metody vychisleniy i ikh primeneniye: mezhvuz. sb. nauch. tr. Penza: Penz. politekhn. in-t, issue 7, 38-45 (1985) (in Russian) Zbl 0674.65099
24. *Лифанов, И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. — М.: ТОО "Янус", 1995. — 520 с.
25. *Лифанов, И. К.* К решению составных интегральных уравнений / И. К. Лифанов // Успехи современной радиоэлектроники. — 2006. — № 8. — С. 62-67.
Lifanov, I. K. To the solution of composite integral equations. Uspekhi sovr. radioelektroniki No.8, 62-67 (2006). (in Russian)
26. *Лифанов, И. К.* Гиперсингулярные интегральные уравнения и теория проволочных антенн / И. К. Лифанов, А. С. Ненашев // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, № 1 — С. 121-127.
Lifanov, I. K.; Nenashev, A. S. Hypersingular integral equations and the theory of wire antennas. Differ. Equ. 41, No. 1, 126-145 (2005). Zbl 1092.78010
27. *Лифанов, И. К.* Исследование некоторых вычислительных схем для гиперсингулярного интегрального уравнения на отрезке / И. К. Лифанов, А. С. Ненашев // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, № 9. — С. 1270 - 1275.
Lifanov, I. K.; Nenashev, A. S. Analysis of some computational schemes for a hypersingular integral equation on an interval. Differ. Equ. 41, No. 9, 1343-1348 (2005). Zbl 1127.65101
28. *Некрасов, А. И.* Теория крыла в нестационарном потоке / А. И. Некрасов. — Изд-во АН СССР, 1947. — С. 3-65.
Nekrasov, A. I. Theory of the wing in unsteady flow. Moscow: Izdatelstvo AN SSSR, 1947. (in Russian)
29. *Оседедец, И. В.* Приближенное обращение матриц при решении гиперсингулярного интегрального уравнения / И. В. Оседедец, Е. Е. Тыртышников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2005. — Т. 45, № 2. — С. 315-326.
Oseledets, I. V.; Tyrtysnikov, E. E. Approximate inversion of matrices at solving the hypersingular integral equation. Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 45, No.2, 315-326 (2005). Zbl 1073.65569
30. *Самко, С. Г.* О разрешимости в замкнутой форме сингулярных интегральных уравнений // ДАН СССР. — 1969. — Т. 189, № 3. — С. 483 -485.
Samko, S. G. On closed form solvability of singular integral equations. Sov. Math., Dokl. 10, 1445-1448 (1969). Zbl 0197.09102
31. *Тахтаджян, Л. А.* Гамильтонов подход в теории солитонов / Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев — М.: Наука, 1986. — 528 с.
Faddeev, Ludwig D.; Takhtajan, Leon A. Hamiltonian methods in the theory of solitons. Classics in Mathematics. Berlin: Springer. xiv, 592 p. (2007).

32. *Чикин, Л. А.* Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений / Л. А. Чикин // Уч. записки Казанского гос ун-та. — 1953. — Т.113, Кн. 10. — С. 57-105.
Chikin, L. A. Special cases of the Riemann boundary value problem and singular integral equations. Uch. zapiski Kazanskogo gos un-ta 113, Kn. 10, 57-105 (1953). (in Russian)
33. *Boikov, I. V.* An Approximate Solution of Hypersingular Integral Equations / I. V. Boykov, E. S. Ventsel, A. I. Boykova // Appl. Num. Math. — 2010. — №60. — P. 607-628.
34. *Boikov, I. V.* New iterative method for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations / I. V. Boykov, V. A. Roudnev, A. I. Boykova, O. A. Baulina // Applied Numerical Mathematics. — May 2018. — Vol. 127. — P. 280-305.
35. *Boikov, I. V.* Analytical methods for solution of hypersingular and polyhypersingular integral equations / I. V. Boykov, A. I. Boykova // arXiv:1901.04880v1 [math.NA] 15 January 2019. — 22 p.
36. *Golberg, M. A.* The convergence of several algorithms for solving integral equations with finite-part integrals I // Journal of Integral Equations. — 1983. — № 5. — pp. 329-340.
37. *Golberg, M. A.* The convergence of several algorithms for solving integral equations with finite-part integrals II // Journal of Integral Equations. — 1985. — No.9. — P. 267-275.
38. *Capobiano, M. R.* On the numerical solution of a nonlinear integral equations of Prandl's types / M. R. Capobiano, G. Criscuolo, P. Junghanns // Operator Theory: Advances and Applications (Birkhauser, Basel). — 2005. — V. 160. — P. 53-79.
39. *Capobiano, M. R.* Newton methods for a class of nonlinear hypersingular integral equations / M. R. Capobiano, G. Criscuolo, P. Junghanns // Numer. Algorithms. — 2010. — №55. — P. 205 -221.
40. *Eminov, S. I.,* The rate of convergence of hypersingular equations numerical computation / S. I. Eminov, S. Yu. Petrova // Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr. — 2018. — Vol. 11, iss. 2. — pp. 139-146.
41. *Eshkuvatov, Z. K.* Modified homotopy perturbation method for solving hypersingular integral equations of the first kind / Z. K. Eshkuvatov, F. S. Zulkarnain, N. M. A. Nik Long, Z. Muminov. — Springer Plus (2016) 5:1473.
42. *Feng, H.* Numerical solution of a certain hypersingular integral equation of the first kind / H. Feng, X. Zhang, J. Li // BIT Numer. Math. — 2011. — Vol. 51. — P. 609 - 630.
43. *Hadamard, J.* Lecons sur la Propagation des Ondes et les Equations de l'Hydrodynamique. Herman. — Paris, 1903. 320 p. (reprinted by Chelsea. — New York. — 1949).
44. *Karvin, V.* Numerical solution on nonlinear hypersingular integral equations of the Peierls type in dislocation theory / V. Karvin, V. G. Maz'ya, A. B. Movchan, J. C. Willis, R. Bullouch // SIAM J. Appl. Math. — 2000. — Vol. 60, № 2. — P. 664-678.
45. *Mandal, B. N., Chakrabani A.* Applied Singular Integral Equations / B. N. Mandal, A. Chakrabani. — CRC Press, 2011. — 264 p.
46. *Martin, P. A.* Exact solution of a simple hypersingular integral equation. J. Integral Equations Appl. 4, No. 2, 197-204 (1992). Zbl 0756.45003
47. *Mikhlin S. G.* Singular Integral Operatoren / S. G. Mikhlin, S. Prossdorf. — Acad.-Verl., Berlin, 1980. — 514 p.

48. *Park, C.-H.* What is the homotopy method for a system of nonlinear equations (survey) / C.-H. Park, H.-T. Shim // J. Appl. Math. Comput. — 2005. — V. 17. № 1-2-3. — P. 689-700.
49. *Prossdorf, S.* Numerical Analysis for Integral and Related Operator Equations / S. Prossdorf, B. Silberman. — Acad.-Verl., Berlin, 1991.

Получена 02.11.2019

MSC 2010: 34C60, 92D25, 34C25, 37C05

Review on the behaviour of a many predator–one prey system

G. J. Söderbacka*, A. S. Petrov**

*Åbo Akademi,

Turku FI-20500, Finland *E-mail: gsoderba@abo.fi*

**Lobachevsky State University,

Nizhny Novgorod 603022 *E-mail: alexpetrov1999@inbox.ru*

Abstract. We consider a known predator-prey system, where more than one predator compete for the same prey. Mainly the case with two predators is considered. A review of general results is given, among them conditions for the extinction of one predator and an investigation of the different types of coexistence of predators. In non-degenerate cases the predators in this model cannot coexist at an equilibrium, but there can be a cyclic or more complicated coexistence. Many numerical results are presented. A model map for a Poincaré map is given under some conditions. But the most interesting case where there can arise "spiral-like" attractors is not well known here, and we pose open questions. We discuss some bifurcations and the existence of systems with several attractors.

Keywords: bifurcation, chaos, predator-prey.

1. Introduction

In this work we make a review of the behaviour of a system of two predators and one prey. We discuss extinction and possible types of coexistence. The coexistence can be cyclic or chaotic of different types. In some cases the chaos is well described by a model map, in other cases it seems to be a spiral-like attractor. We conjecture that at least some of the spiral chaos comes from bifurcations from a contour described here. There is an open question whether there are even more types of chaos. We also give examples, where the system has more than one attractor. Some of the results are more general for the case of more predators, like dissipativity and extinction.

The general system of n competing predators feeding on the same prey is considered to be of the type

$$\begin{aligned} X_i' &= p_i \varphi_i(S) X_i - d_i X_i, & i = 1, \dots, n, \\ S' &= H(S) - \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i(S) X_i, \end{aligned} \tag{1.1}$$

where the variable S represents the prey populations and the variables X_i represent the predator populations. They are, of course, non-negative. The function φ_i is assumed non-decreasing. The function H describes the behaviour of the prey without predators and is usually of logistic type. An exception is the Lotka-Volterra system, the behaviour

of which is simple in this case. These systems were introduced by Hsu and Waltman [6, 7, 8]. We mainly consider the case where

$$H(S) = rS \left(1 - \frac{S}{K}\right), \quad \varphi_i(S) = \frac{S}{S + A_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

A. V. Osipov [12] introduced a family defined by some conditions on the functions of system (1.1) given below.

We assume $H(0) = H(K) = 0$ for some $K > 0$, $H'(K) < 0$, $H''(s) < 0$ and $\varphi_i(0) = 0$, $\varphi'_i(s) > 0$. The functions φ_i and H are of the class $C^2[0, \infty)$ and the variables x_i and s are non-negative: $x_i \geq 0$, $s \geq 0$. The change of variables $s = \frac{S}{K}$ and $x_i = \frac{q_i}{K} X_i$ gives the system

$$\begin{aligned} x'_i &= \phi_i(s)x_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ s' &= h(s) - \sum_{i=1}^n \psi_i(s)x_i, \end{aligned} \quad (1.3)$$

where

$$h(s) = \frac{1}{K}H(sK), \quad \psi_i(s) = \varphi_i(sK), \quad \phi_i(s) = p_i\psi_i(s) - d_i.$$

The following conditions $A_1 - A_5$ are the main conditions introduced by Osipov [12]. Here and further we will assume that i takes values from the set $\{1, 2, \dots, n\}$.

A_1 . All the considered functions are of the class $C^2[0, \infty)$ and the variables x_i and s are non-negative: $x_i \geq 0$, $s \geq 0$.

A_2 . $\psi_i(0) = 0$, $\psi'_i(s) > 0$ for $s > 0$.

A_3 . $\phi'_i(s) > 0$ for $s > 0$ and there exists a $\lambda_i > 0$ such that $\phi_i(\lambda_i) = 0$.

A_4 . $h(0) = h(1) = 0$, $h'(1) < 0$ and $h''(s) < 0$ for $s > 0$.

A_5 . $0 < \lambda_n < \dots < \lambda_2 < \lambda_1 < 1$.

If λ_i in (A_3) are all different we can always reorder the equations so that (A_5) is satisfied. We observe that if $\lambda_i \geq 1$ for some i , then the corresponding predator cannot survive.

The most standard example of system (1.3), which we will consider now, is obtained from the functions in (1.2). We assume $p_i > d_i$. If not, the corresponding predator will not survive. Using the time change $\tau = rt$, where τ is the new time, and the variable changes $s = \frac{S}{K}$, $x_i = \frac{q_i}{rK} X_i$, we get the simplified equations

$$\begin{aligned} x'_i &= m_i \frac{s - \lambda_i}{s + a_i} x_i, \\ s' &= \left(1 - s - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{s + a_i}\right) s, \end{aligned} \quad (1.4)$$

where

$$a_i = \frac{A_i}{K}, \quad m_i = \frac{p_i - d_i}{r}, \quad \lambda_i = \frac{d_i A_i}{K(p_i - d_i)}.$$

In earlier works [4, 5, 13, 14], for $n = 2$, we have discussed the behaviour of the system, boundaries for extinction, different types of coexistence of the predators, cyclic and chaotic. In some cases we have conjectured the existence of spiral chaos [15, 16, 17, 11]. In this work we present an overview of earlier results and some new results from numerical experiments of this system. It is a serious update of the review in [14], but without elementary introduction. Before we consider the properties of this systems, we shortly look at the Lotka-Volterra system, where in (1.1) the functions are

$$H(S) = rS, \quad \varphi_i(S) = S,$$

and thus the system becomes

$$\begin{aligned} X'_i &= (p_i S - d_i) X_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ S' &= \left(r - \sum_{i=1}^n q_i X_i \right) S, \end{aligned}$$

A change of the time $\tau = rt$ and the variables $x_i = \frac{q_i X_i}{r}$ gives the system

$$\begin{aligned} x'_i &= m_i (s - \lambda_i) x_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ s' &= \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) s, \end{aligned}$$

where $m_i = \frac{p_i}{r}$, $\lambda_i = \frac{d_i}{p_i}$. Further, suppose that $\lambda_n < \dots < \lambda_2 < \lambda_1$. Then all predators except the population x_n go extinct. To see that, use the Lyapunov function $\ln \left(\frac{x_i^{m_n}}{x_n^{m_i}} \right)$.

The main system we consider is anyhow rich in the behaviour of coexistence of the predators and it is one of the first systems, where the known Ecological Principle of Exclusion does not hold in general.

The outline of our work is the following. We start with discussing the dissipativity and extinction problem for any number of predators. Then we restrict ourselves to two predators and after shortly mentioning the chaos got from a model map (details can be found in earlier works) we give some typical results from numerical examination of the system. We look for extinction boundaries and for boundaries between different cyclic and chaotic behaviour. We continue with discussing a contour from which the spiral-like chaos might bifurcate. Then we show a bifurcation diagram from which we immediately conclude the existence of, at least, two attractors. At the end we give an example of the dynamics of a Poincaré map and mention about modifications in order to get more realistic systems from a biological point of view.

2. Dissipativity

We consider system (1.3). We find a positively invariant set for the system. More results on dissipativity are found in [12]. Let

$$w_i = \sup_{0 < s < 1} \tilde{w}_i(s), \tilde{w}_i(s) = \frac{\phi_i(s) + \frac{h(s)}{1-s}}{\psi_i(s)}, V = \frac{x_1}{w_1} + \frac{x_2}{w_2} + \cdots + \frac{x_n}{w_n} + s.$$

The value of w_i is finite and positive, because $\tilde{w}_i(s) \rightarrow -\infty$ for $s \rightarrow 0+0$ and $\tilde{w}_i(s) \rightarrow \frac{\phi_i(1)-h'(1)}{\psi_i(1)} = Q_i > 0$ for $s \rightarrow 1-0$. We now claim the following:

Statement 1. *The set formed by the inequalities $s, x_i \geq 0$ and $V \leq 1$ is positively invariant for system 1.3 satisfying conditions $A_1 - A_5$ and all trajectories of the system with positive initial values enter the set in finite time.*

Proof. It can be checked directly, that if $s = 1$ then $V' < 0$ except at $(0, \dots, 0, 1)$ where $V' = 0$. In other points we get

$$\begin{aligned} V' &= h(s) + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\phi_i(s)}{w_i} - \psi_i(s) \right] x_i = \\ &= \frac{h(s)}{1-s}(1-V) + \frac{h(s)}{1-s}(V-s) + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{w_i} [\phi_i(s) - w_i \psi_i(s)] = \\ &= \frac{h(s)}{1-s}(1-V) + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{w_i} \left[\frac{h(s)}{1-s} + \phi_i(s) - w_i \psi_i(s) \right] < 0. \end{aligned}$$

From here the statement follows. □

Let us examine the case where

$$h(s) = (1-s)s, \phi_i(s) = \frac{s^{b_i} - \lambda_i}{s^{b_i} + a_i}, \psi_i(s) = \frac{s^{b_i}}{s^{b_i} + a_i}. \quad (2.1)$$

If $0 < b_i \leq 1$ then $\tilde{w}_i(s)$ increases and $w_i = Q_i$. If $b_i > 1$ then it is possible that $w_i > Q_i$. For example, $b_i = 2a_i = 1, \lambda_i = 0.1$ gives $\tilde{w}_i(0.5) = 3.1$ and $Q_i = 2.9$.

3. Extinction

We here look for the competition between predators i and j for system (1.4). We find sufficient conditions for the extinction of one of them. More general results on extinction are found in [12]. We assume there is some j such that $\lambda_j < \lambda_i$, that is $i > j$.

Statement 2. *Let $L = \frac{\lambda_i(1-\lambda_j)}{\lambda_j(1-\lambda_i)}$ and $\lambda_i > \lambda_j$. If $a_j > \frac{a_i}{L + a_i(L-1)}$ then the predator i goes extinct.*

Because $L > 1$ the predator i always goes extinct when $a_j > \frac{1}{L-1}$. We observe that condition

$$a_j > \frac{a_i}{L + a_i(L-1)} \quad (3.1)$$

follows from $a_j > \frac{a_i}{L}$ and $a_j > a_i$.

Proof. We look at the function η defined by

$$\eta(s) = \frac{\phi_j(s)}{\phi_i(s)} = \eta_1(s)\eta_2(s),$$

where

$$\eta_1(s) = \frac{m_j(s - \lambda_j)}{m_i(s - \lambda_i)}, \eta_2(s) = \frac{s + a_i}{s + a_j}.$$

We use notations $\gamma = \eta(0), \alpha = \eta(1)$. We notice that $\gamma < \alpha$ is equivalent to $a_j > \frac{a_i}{L + a_i(L-1)}$. We introduce two numbers

$$\kappa_0 = \max_{s \in [0, \lambda_j]} \eta(s), \kappa_1 = \min_{s \in [\lambda_i, 1]} \eta(s).$$

They exist and are positive. We prove $\kappa_0 < \kappa_1$. We start with the case where $a_i \leq a_j$. From $\lambda_j < \lambda_i$ follows $\eta_1(s) < 1$ for $0 < s < \lambda_j$ and $\eta_1(s) > 1$ for $s > \lambda_j$. Thus we get $\eta(s) < \eta_2(s)$ for $0 < s < \lambda_j$ and $\eta(s) > \eta_2(s)$ for $s > \lambda_i$. Because η_2 is increasing or constant for $a_1 \leq a_2$ we conclude that $\eta(s_1) > \eta_2(s_1) \geq \eta_2(s_0) > \eta(s_0)$ for $s_0 < \lambda_j$ and $s_1 > \lambda_i$ from which follows $\kappa_0 < \kappa_1$ and (3.2).

We now consider the case where $a_j \leq a_i$. We observe that in this case both η_1 and η_2 are decreasing and thus also η . Then $\kappa_0 = \eta(0) = \gamma$ and $\kappa_1 = \eta(1) = \alpha$. We observe that if κ is a number such that $\kappa_0 < \kappa < \kappa_1$ then

$$\kappa\phi_i(s) - \phi_j(s) < 0 \quad (3.2)$$

for all $s \in (0, 1)$.

Really, for $s \in (0, \lambda_j]$, $\phi_i(s)$ is negative and $\phi_j(s)$ is non-positive and from $\eta(s) < \kappa_0$ we get $\phi_j(s) > \kappa_0\phi_i(s) > \kappa\phi_i(s)$ implying (3.2). For $s \in (\lambda_j, \lambda_i]$, $\phi_i(s) \leq 0 < \phi_j(s)$ implying (3.2). Finally for $s \in (\lambda_i, 1)$ both $\phi_i(s)$ and $\phi_j(s)$ are positive and from $\eta(s) > \kappa_1$ we get $\phi_j(s) > \kappa_1\phi_i(s) > \kappa\phi_i(s)$ implying (3.2).

Consider now the function U defined by $U(x, y) = \ln \left(\frac{x_i^\kappa}{x_j} \right)$. For the time derivative we get $U' = \kappa\phi_i(s) - \phi_j(s) < 0$ and predator x_i goes extinct. \square

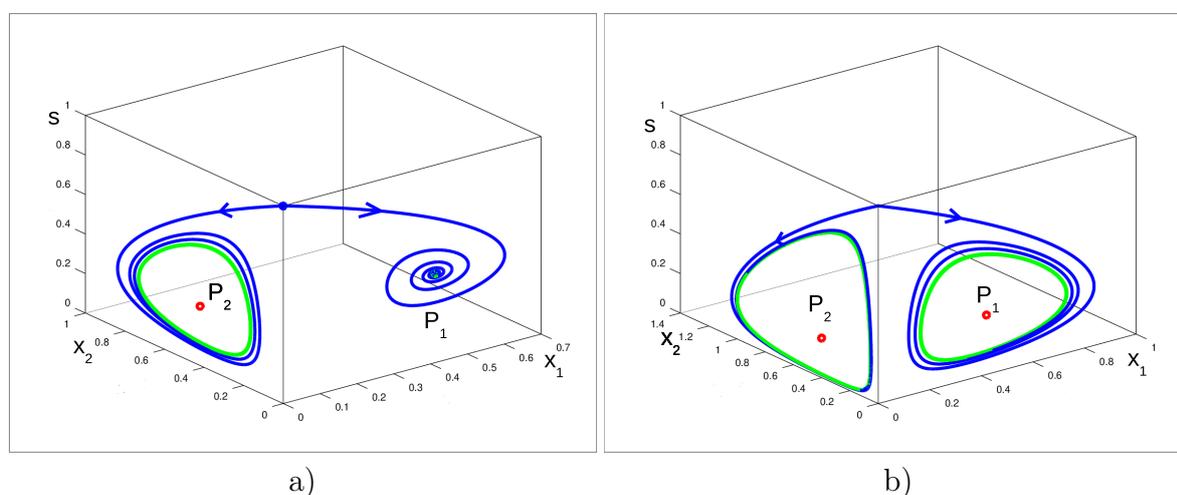
Remark. We notice that the proof can easily be modified for the functions in (2.1), so that the statement holds also if these functions are chosen for system (1.3).

It is well known [3] that when the number of predators increases, the probability for coexistence of all of them tends to zero. This is quite natural also from our estimates

showing that for coexistence we must have $a_i > La_{i-1}$, where $L > 1$ is defined as in statement 2 for $j = i - 1$.

4. General behaviour

We shortly describe the main local behaviour of the three-dimensional system. According to assumption (A_5) we suppose $\lambda_1 > \lambda_2$. The system always has two equilibria: $(0,0,0)$, which always is a saddle with two-dimensional stable manifold in the plane $s = 0$, and $(0,0,1)$, which is a saddle with one-dimensional stable manifold on the axis $x_1 = x_2 = 0$ if $\lambda_1, \lambda_2 < 1$ (in other cases at least one predator goes extinct and the system reduces to smaller dimension). When $\lambda_1, \lambda_2 < 1$ there are two more equilibria:



$$\lambda_1 = 0.45, \lambda_2 = 0.3, a_1 = a_2 = 0.3, m_1 = m_2 = 1 \quad \lambda_1 = 0.3, \lambda_2 = 0.2, a_1 = a_2 = 0.3, m_1 = m_2 = 1$$

Fig. 1. (a) In plane $x_2 = 0$ the equilibrium P_1 is a global attractor, in the whole space a saddle with one-dimensional unstable manifold, in plane $x_1 = 0$ there is a limit cycle, the equilibrium in this plane is a saddle with one-dimensional stable manifold. (b) Plane $x_1 = 0$ there is a limit cycle, the equilibrium in this plane is a saddle with one-dimensional stable manifold. In plane $x_2 = 0$ there is a limit cycle, the equilibrium in this plane is a sink.

- $P_1 = ((1 - \lambda_1)(1 + a_1), 0, \lambda_1)$ which is a saddle with one-dimensional unstable manifold for $\lambda_1 > \frac{1 - a_1}{2}$ and a source if $\lambda_1 < \frac{1 - a_1}{2}$. In the case $\lambda_1 > \frac{1 - a_1}{2}$, P_1 is a global attractor in the plane $x_2 = 0$.
- $P_2 = (0, (1 - \lambda_2)(1 + a_2), \lambda_2)$ which is a saddle with one-dimensional stable manifold for $\lambda_2 < \frac{1 - a_2}{2}$ and a sink if $\lambda_2 > \frac{1 - a_2}{2}$. In the case $\lambda_2 > \frac{1 - a_2}{2}$, P_2 is a global attractor in the plane $x_1 = 0$.

There is a unique globally attracting limit cycle in the plane $x_2 = 0$ if $\lambda_1 < \frac{1 - a_1}{2}$ and a unique globally attracting stable limit cycle in the plane $x_1 = 0$ if $\lambda_2 < \frac{1 - a_2}{2}$.

This was first proved by Cheng [2]. The uniqueness of limit cycles for this and similar systems can also be proved using the known Zhang Zhi-fen theorems [18]. Estimates for the size of the cycles for critically small a_i and λ_i are given in [9, 10]. The size of the cycle we determine by the maximal and minimal populations on the cycle. The cycle is called big if at least one population sometimes gets small. The behaviour around the coordinate planes is shown in figure 1.

There is no equilibrium for $\lambda_1 \neq \lambda_2$ or $a_1 \neq a_2$, where the predators coexist, anyhow they can coexist in a cyclic or chaotic way. Conditions for construction of some well-defined Poincaré maps on $s = \text{const}$, $s' < 0$ are obtained in [13].

In the case where the Poincaré map is well-defined, very often there is a strong contraction in the $(x_1 + x_2)$ -direction and it is shown by numerical experiments and theoretical estimating arguments that the one dimensional model map given by

$$f(v) = \beta + v - \frac{k_1 + k_2 e^v}{1 + e^v} u,$$

where β, u and k_i are constants and $v = \ln(x_2/x_1)$ gives a good approximation. This map is derived and analyzed for simple behaviour in [4, 5].

4.1. Charts of dynamical regimes

We now present some result of numerical two-parametric analysis.

In figures 2 – 4 we see the results of numerical investigations of the behaviour of the system for fixed λ_i and m_i where $i = 1, 2$. We have examined the behaviour for five different random initial conditions for a grid of parameter values of a_1 and a_2 . A predator is considered to go extinct if the populations becomes less than e^{-100} . We call the attractor n -cyclic if the intersection with $s = \lambda_2$, $s' < 0$ is n -periodic under the Poincaré map defined on this surface. We have denoted regions with x if the first predator x_1 goes extinct and with y if the second predator x_2 goes extinct. Regions, where there is observed only simple one-periodic cycles, are coloured cyan. Regions, where there is observed a 2-cyclic attractor, are coloured magenta. Regions, where there is observed a 3-cyclic attractor, are coloured dark yellow. Sometimes also regions where the second predator x_2 goes extinct can be seen in green. Regions, where there is observed chaos, but no 3-cyclic attractor, are coloured blue. We observe, that for some parameter values two different types of attractors have been detected.

In figures 2 – 3 we have added a figure calculating the boundaries for extinction of the predator x_1 for different values of m_i and compared with the theoretical estimate (the curve to the left).

We make the observation that the behaviour depends on m_1 and m_2 and strongly on the difference of λ_1 and λ_2 . When $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ we roughly have the following situation for a_1 increasing: for a_1 small, the predator x_1 goes extinct, for a little bigger, the predator x_2 goes extinct and for even bigger a_1 there is a simple cyclic coexistence. The predator x_2 can go extinct only if $a_1 < 1 - 2\lambda_1$, because if $a_1 > 1 - 2\lambda_1$ then there is saddle equilibrium in the coordinate plane $x_2 = 0$ and there is more likely to

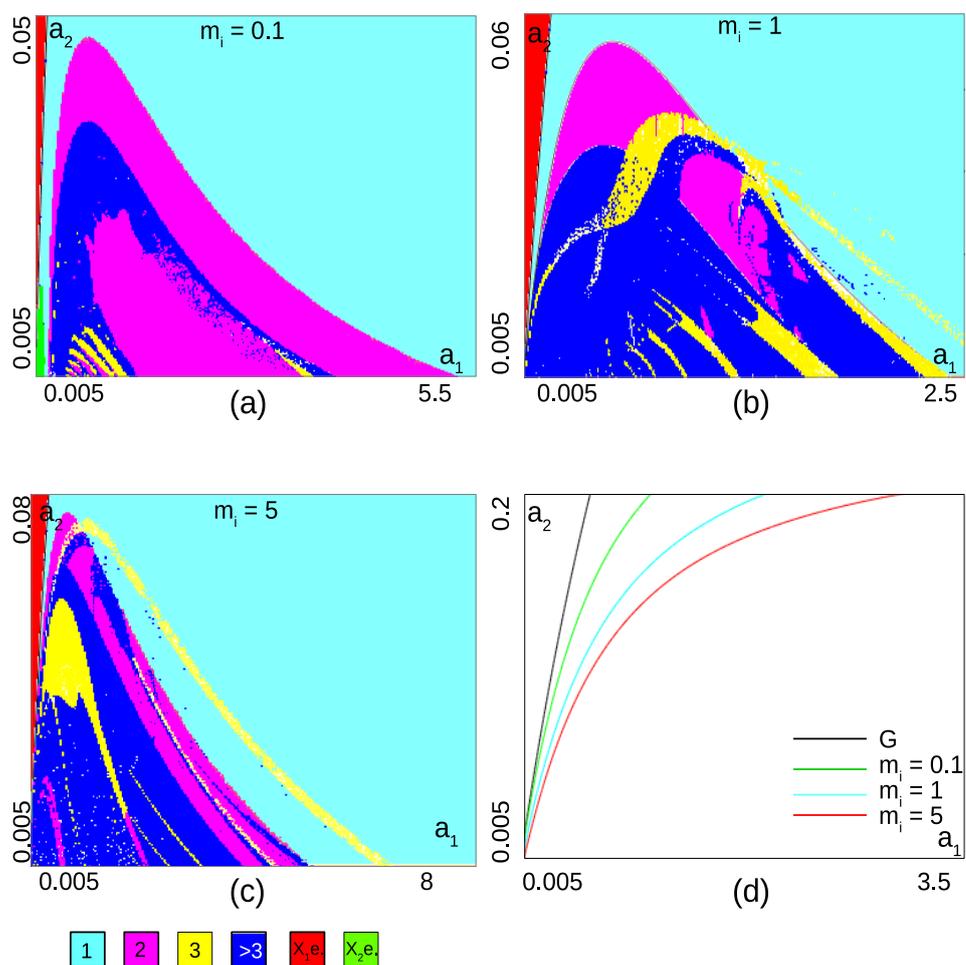


Fig. 2. (a),(b),(c) Charts of dynamical regimes for the system 1.4 on the parameter plane (a_1 , a_2) for $m_i = 0.1$, $m_i = 1$, and $m_i = 5$, respectively ($\lambda_1 = 0.35, \lambda_2 = 0.2$). Cyan color (1) corresponds to simple periodic regimes; magenta color (2) – 2-periodic regimes; dark yellow (3) – 3-periodic regimes; blue (> 3) – periodic regimes with period > 3 and a chaotic regimes; red color (x_{1e}) – regime corresponding to the extinction of the first predator x_1 ; and green color (x_{2e}) – the extinction of the second predator x_2 . (d) Curves of the extinction of the predator x_1 : G theoretical estimate (3.1), green, blue, and red curves are given by compared (3.1) for $m_i = 0.1$, $m_i = 1$, and $m_i = 5$, respectively.

be some kind of spiral chaos if it is not cyclic. Of this reason there is no extinction of the second predator in figure 3.

We have not included pictures for small λ_1 and λ_2 . In this case there is a hope to obtain theoretical estimates for the stability of the limit cycles in the coordinate planes. If both are unstable the predators coexist.

Open problem. Find out good reasons for the different behaviour observed in the

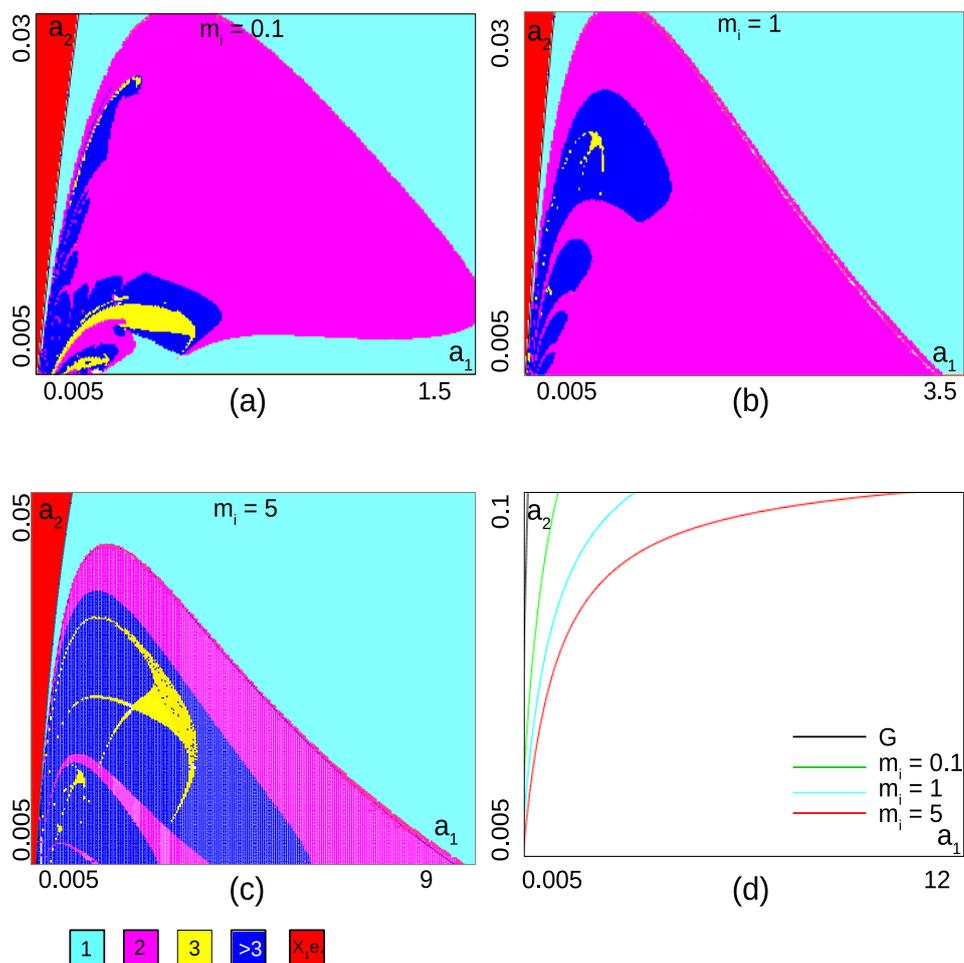


Fig. 3. (a),(b),(c) Charts of dynamical regimes for the system 1.4 on the parameter plane (a_1, a_2) for $m_i = 0.1, m_i = 1,$ and $m_i = 5,$ respectively ($\lambda_1 = 0.5, \lambda_1 = 0.2$). Cyan color (1) corresponds to simple periodic regimes; magenta color (2) – 2-periodic regimes; dark yellow (3) – 3-periodic regimes; blue (> 3) – periodic regimes with period > 3 and a chaotic regimes; red color (x_{1e}) – regime corresponding to the extinction of the first predator x_1 . (d) Curves of the extinction of the predator x_1 : G theoretical estimate (3.1), green, blue, and red curves are given by compared (3.1) for $m_i = 0.1, m_i = 1,$ and $m_i = 5,$ respectively.

figures and find approximate expressions for different bifurcation lines. Find bifurcation curves for attractors by numerical methods. How many attractors can we have in the same system for different parameters?

The cases where $\lambda_1 = 0.3$ and $\lambda_1 = 0.2$ and $m_i > 0.2$ are very interesting even if we do not include a figure here. But the existence of three different attractors is frequent in these cases.

In figure 5 we can see a case with three attractors.

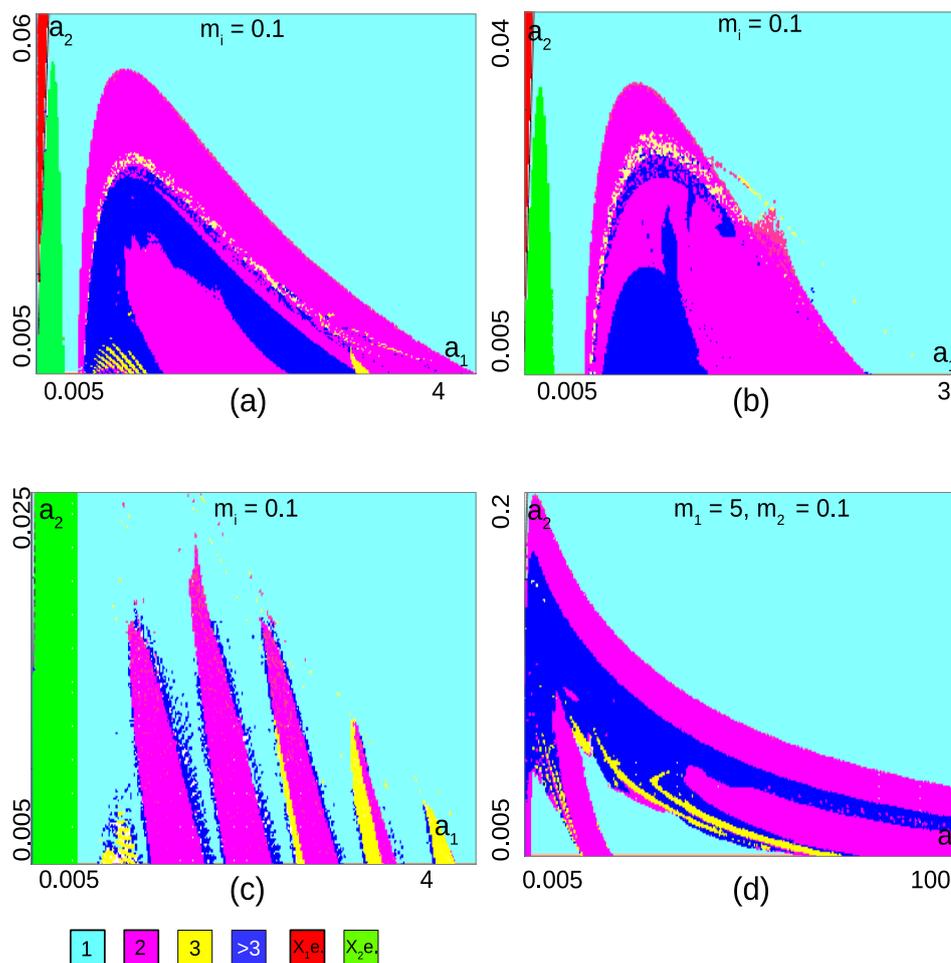


Fig. 4. (a), (b), (c), (d) Charts of dynamical regimes for the system 1.4 on the parameter plane (a_1 , a_2) for (a),(b) $\lambda_1 = 0.3$ and $\lambda_1 = 0.2$ and $m_i = 0.1$, (c) $\lambda_1 = 0.25$ and $\lambda_1 = 0.2$ and $m_i = 0.1$, (d) $\lambda_1 = 0.35$ and $\lambda_1 = 0.2$ and $m_1 = 5$ and $m_2 = 0.1$. Cyan color (1) corresponds to simple periodic regimes; magenta color (2) – 2-periodic regimes; dark yellow (3) – 3-periodic regimes; blue (> 3) – periodic regimes with period > 3 and a chaotic regimes; red color (x_{1e}) – regime corresponding to the extinction of the first predator x_1 ; and green color (x_{2e}) – the extinction of the second predator x_2 .

We now analyze the bifurcation diagram in [14]. This was produced for $a_2 = 0.02$, $\lambda_1 = 0.35$, $\lambda_2 = 0.2$, $m_1 = m_2 = 1$ and for a_1 as bifurcation parameter. New versions of this bifurcation diagram are produced in figure 6.

In figure 6 (a) we produce a bifurcation diagram looking at the value of $\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ on the intersection of the attractor with $s = \lambda_2$, $s' < 0$. The initial values for $a_1 = 0.1$ were taken as $x_1 = x_2 = s = 0.5$ and increasing a_1 for the next value of a_1 we take the

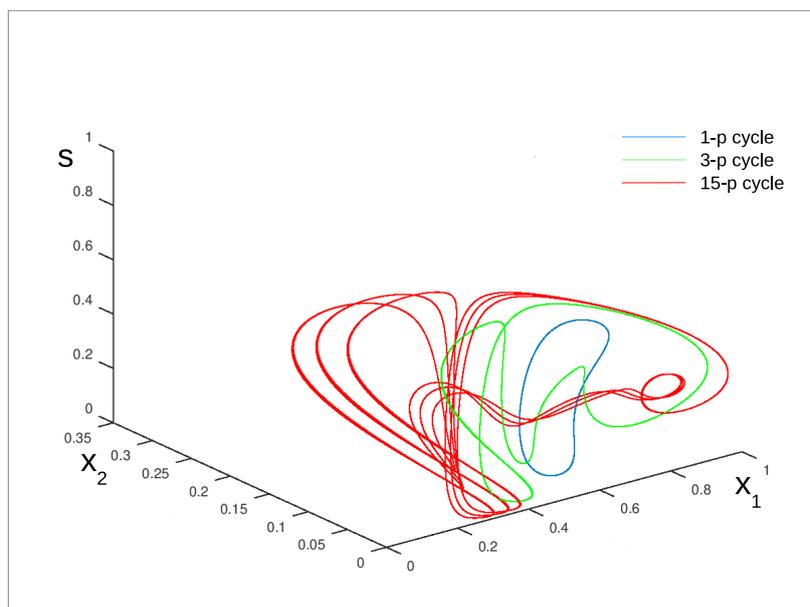


Fig. 5. Attractors for parameters $a_1 = 0.855, \lambda_1 = 0.3, a_2 = 0.0154, \lambda_2 = 0.2, m_1 = m_2 = 0.5$. There is a simple cycle (cyan) a 3-cyclic (green) and a 15-cyclic (red) attractor.

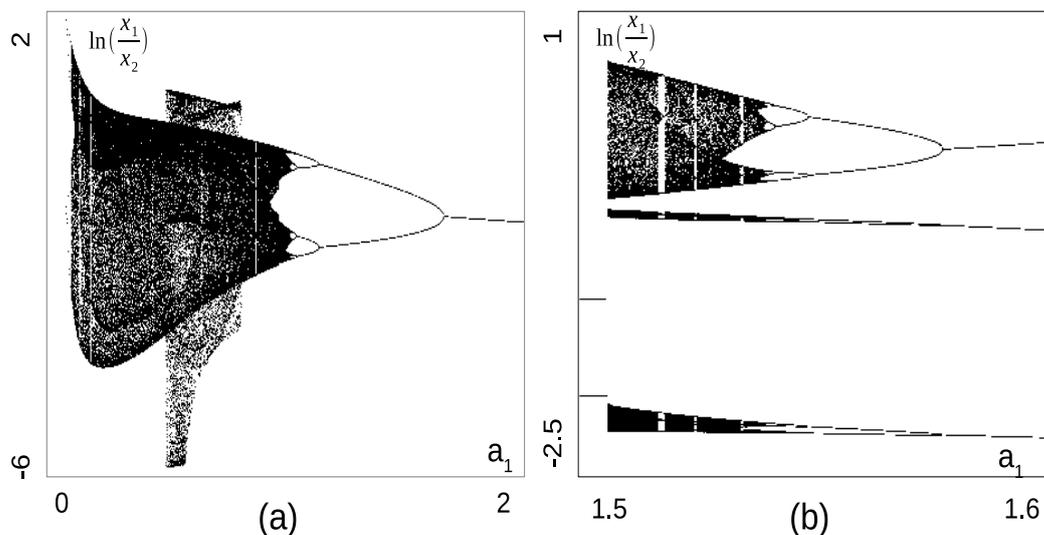


Fig. 6. (a) bifurcation diagram for $a_2 = 0.02, \lambda_1 = 0.35, \lambda_2 = 0.2, m_1 = m_2 = 1$. The range of bifurcation parameter a_1 goes from 0.1 to 2. (b) bifurcation diagram for $a_2 = 0.02, \lambda_1 = 0.35, \lambda_2 = 0.2, m_1 = m_2 = 1$. The range of bifurcation parameter a_1 goes from 1.5 to 1.6.

initial values to be the last point on the attractor calculated for the previous value of a_1 . In figure 6(b) the bifurcation diagram is produced for the same fixed parameters

as in the previous bifurcation diagram, but the value of a_1 goes from 1.6 to 1.5. The initial values for $a_1 = 1.6$ are chosen as $x_1 = 0.34, x_2 = 0.22, s = 0.35$ and decreasing a_1 for the next value of a_1 we take the initial values to be the last point on the attractor calculated for the previous value of a_1 .

Comparing the bifurcation diagrams we easily see two attractors for values of a_1 around 1.6.

5. Spiral chaos from a contour?

Finally, we discuss the nature of "spiral" attractors observed in the system for parameters $a_1 = 0.5, \lambda_1 = 0.33, a_2 = 0.001\nu, \lambda_2 = 0.01\nu, m_1 = 1, m_2 = 0.2$, see figure 7. Usually, such attractors appear due to a Shilnikov homoclinic orbit to the saddle-focus equilibrium [15, 16, 17, 11]. In the problem under consideration all equilibria are located in the invariant planes and, thus, we cannot have a homoclinic orbit. We suppose that in our problem another scenario is possible, when spiral chaos appears from a heteroclinic cycle.

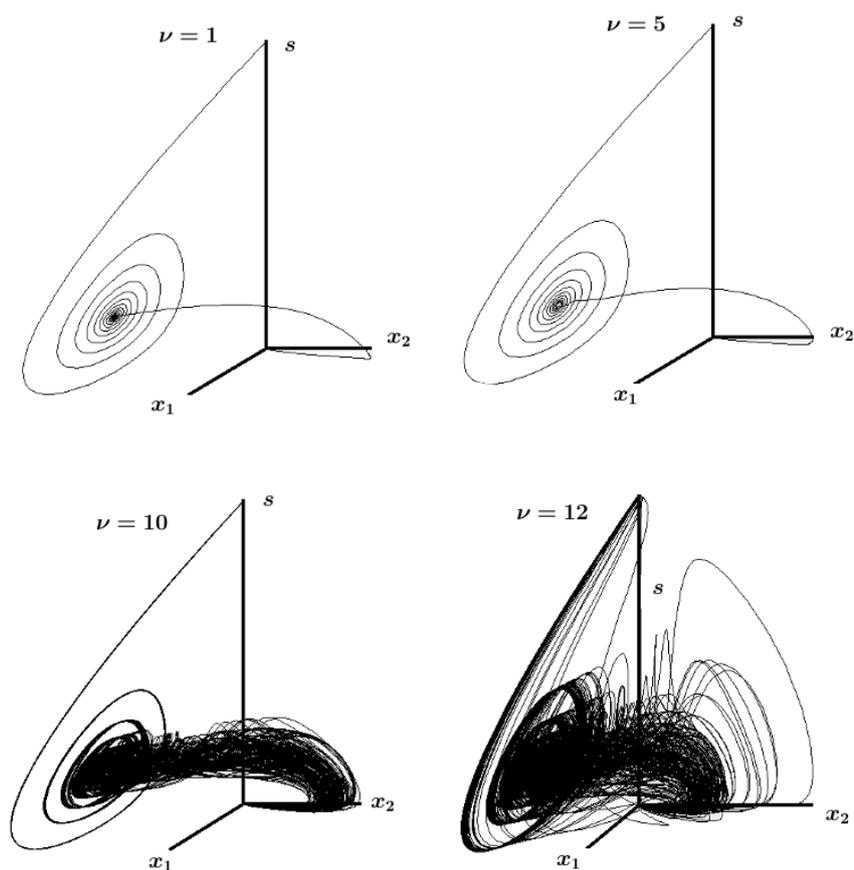


Fig. 7. Attractors for parameters $a_1 = 0.5, \lambda_1 = 0.33, a_2 = 0.001\nu, \lambda_2 = 0.01\nu, m_1 = 1, m_2 = 0.2$, in the cases $\nu = 1, 4, 10, 12$.

1. The unstable separatrix of the equilibrium at $((1 - \lambda_1)(\lambda_1 + a_1), 0, \lambda_1)$ until it hits $s = 0$ at $P^* = (x_1^*, x_2^*, 0)$ in the case $a_2 = \lambda_2 = 0$.
2. The curve along $x_2 = Cx_1^\gamma$, where $\gamma = \frac{m_2\lambda_2a_1}{m_1\lambda_1a_2}$ and $C = x_2^*(x_1^*)^{-\gamma}$ from P^* to $(0, 0, 0)$.
3. The line segment $x_1 = x_2 = 0, 0 < s < 1$.
4. The unstable separatrix of the equilibrium $(0, 0, 1)$ in the plane $x_2 = 0$ reaching the equilibrium, where part 1 starts.

We suppose that the spiral chaos arises from this contour. We support the conjecture by showing some attractors developing from the contour changing a parameter. We look at some attractors for $a_1 = 0.5, \lambda_1 = 0.33, a_2 = 0.001\nu, \lambda_2 = 0.01\nu, m_1 = 1, m_2 = 0.2$. We can see them in figures 7-8. The attractor for $\nu \leq 1$ is so near to the contour that we can not see the differences. Increase in ν shows us a series of attractors, where we can observe some spiral-like chaos development.

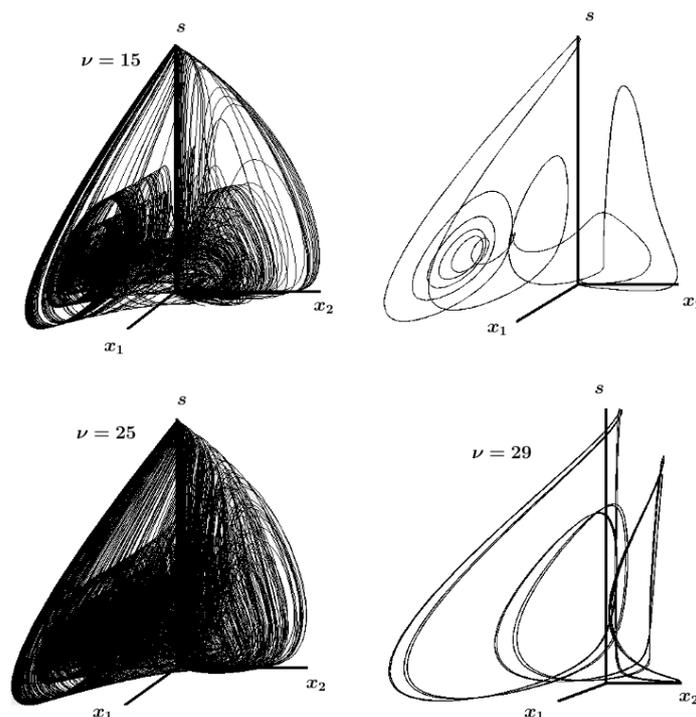


Fig. 8. Attractors for parameters $a_1 = 0.5, \lambda_1 = 0.33, a_2 = 0.001\nu, \lambda_2 = 0.01\nu, m_1 = 1, m_2 = 0.2$, in the cases $\nu = 15, 22, 25, 29$.

We also find out how the intersection of an attractor with a Poincaré section looks like. In figure 9 we see the attractor and intersection with $s' = 0$ in the part, where s' is increasing. It is an open problem to find some kinds of model maps in such cases.

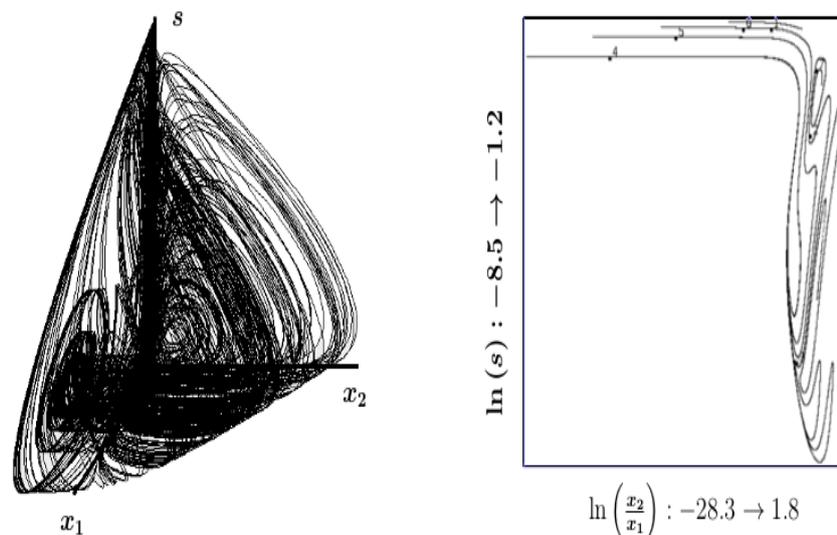


Fig. 9. Attractor and intersection with a Poincaré section for parameters $a_1 = 0.5$, $\lambda_1 = 0.33$, $a_2 = 0.015$, $\lambda_2 = 0.15$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$. The sequence of numbered points are iterates of the corresponding Poincaré map.

6. Conclusion.

We have given an overview of results of system (1.1) starting from dissipativity and extinction. The results of dissipativity could be improved to get a smaller positively invariant set using non-linear upper boundary like it was done for the system with only one predator in [10]. The results of extinction use only the equations for the predators, they can be improved by also using the equation for the prey. Our numerical results try to include the general picture of the behaviour of the system when we assume λ_i and m_i constant and change the parameters a_i . We have discussed the open problem of how many attractors can be found. We give numerical results which argument for the bifurcation leading to chaos starting from a contour got for some parameters tending to zero. A typical behaviour of the dynamics on an attractor on a Poincaré section is shown in figure 9.

In most of the chaotic behaviour studied here one population can get very low, and there is the question whether this can be realistic. Some modifications were suggested in [14]. Anyhow, there is also complicated behaviour in systems, where the populations are not getting too low. Such an example was also given in [14]. Another realistic case is the example we gave with three attractors. Yet another such interesting example we get for $a_1 = 1.5$, $\lambda_1 = 0.3$, $a_2 = 0.01$, $\lambda_2 = 0.2$, $m_1 = m_2 = 1$, where easily three attractors can be observed. One simple cyclic, another 3-periodic and a 4-periodic one. Studying the bifurcations of these attractors changing parameter $0.5 < a_1 < 2$ we

see that the simple periodic one always exists, while the branches from the 3- and 4-periodic attractors exist for intervals which overlap on a smaller interval.

The standard system has cycles with very low populations for small a and λ . In nature this does not occur because the predator changes behaviour to feeding on other preys, where however it cannot survive for ever. Because this change is sudden in Arctic regions (stochastic in Middle Europe) we there get a system with switches.

Such a system is given in [14].

References

1. *Afraimovich V. S., Gonchenko S. V., Lerman L. M., Shilnikov A. L., Turaev D. V.* Scientific Heritage of L.P. Shilnikov, Regular and Chaotic Dynamics 19, No.4, 435-460 (2014).
2. *Cheng K. S.* Uniqueness of limit cycle for a predator-prey system, SIAM J. Appl. Anal. 12, No.4, 541-548 (1981).
3. *Coste J.* Dynamical regression in many species ecosystems: The case of many predators competing for several preys, SIAM J. Appl. Math. 45, 555-564 (1985).
4. *Eirola T., Osipov A. V., Söderbacka G.* Chaotic regimes in a dynamical system of the type many predators one prey. Research reports A 386, Helsinki University of Technology, (1996).
5. *Eirola T., Osipov A. V., Söderbacka G.* On the appearance of chaotic regimes in one dynamical system of type two predators – one prey, Actual Problems of Modern Mathematics, Boxitogorsk, 1, 39-70 (1996).
6. *Hsu B., Hubell S. P., Waltman P.* Competing predators, SIAM J. Appl. Math. 35, No.4, 617-625 (1978).
7. *Hsu S. B.* Limiting behaviour for competing species, SIAM J. Appl. Math. 34, No.4, 760-763 (1978).
8. *Hsu B., Hubell S. P., Waltman P.* A contribution to the theory of competing predators, Ecological Monographs 48, No.3, 337-349 (1978).
9. *Hsu S.-B., Shi J.* Relaxation oscillation profile of limit cycle in predator-prey system, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B 11, No.4, 893-911 (2009).
10. *Lundström N. L. P., Söderbacka G.* Estimates of size of cycle in a predator-prey system, Differential Equations and Dynamical Systems, DOI: 10.1007/s12591-018-0422-x (2018).
11. *Ovsyannikov I. M., Shilnikov L. P.* On systems with a saddle-focus homoclinic curve. Matematicheskii Sbornik 172, No.4, 552–570 (1986).
12. *Osipov A. V., Söderbacka G.* Extinction and coexistence of predators, Dinamicheskie Sistemy 6(34), No.1, 61-70 (2016).
13. *Osipov A. V., Söderbacka G.* Poincaré map construction for some classic two predators-one prey systems. Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng. 27, No.8, Article ID 1750116, 9 p. (2017).
14. *Osipov A. V., Söderbacka G.* Review of results on a system of the type many predators – one prey, Nonlinear Systems and Their Remarkable Mathematical Structures, CRC, Vol.1, 520-540 (2018).
15. *Shil'nikov L. P.* A case of the existence of a countable number of periodic motions. Sov. Math., Dokl. 6, 163-166 (1965).

16. *Shilnikov L. P.* The existence of a countable set of periodic motions in the neighborhood of a homoclinic curve. *Sov. Math., Dokl.* 8, 102-106 (1967).
17. *Shilnikov L. P.* On the question of the structure of an extended neighborhood of a structurally stable state of equilibrium of saddle-focus type. *Mat. Sb., N. Ser.* 81(123), 92-103 (1970).
18. *Zhang Z-f., Ding T-r., Huang W-z., Dong Z-x.* *Qualitative Theory of Differential Equations*, AMS, Providence, Rhode Island, (1991).

Получена 13.06.2019 Переработана 25.11.2019

MSC 2010: 37D15

Dynamics of topological flows and homeomorphisms with a finite hyperbolic chain-recurrent set on n -manifolds¹

O. Pochinka, S. Zinina

National Research University Higher School of Economics, Mordovian State University, Russian Federation

E-mail: opochinka@hse.ru, suddenbee@gmail.com

Abstract. Starting from dimension 4, so-called non-smoothed manifolds, manifolds that do not allow triangulation and other obstacles that prevent the use of the technique of smooth manifolds for the study of multidimensional manifolds appear. In addition, all methods for studying smooth dynamical systems on multidimensional manifolds are based on the approximation of all subsets by piecewise linear or topological objects. In this regard, the idea of consideration of dynamical systems on multidimensional manifolds that do not use the concept of smoothness in their definition is completely natural. So homeomorphisms and topological Morse-Smale flows, which are also firmly connected with the topology of the ambient manifold, as well as their smooth analogues, have already entered into scientific usage. In the present paper we investigate general dynamical properties of homeomorphisms and topological flows with a finite hyperbolic chain recurrent set.

Keywords: topological flow, chain-recurrent set, hyperbolic set

1. Introduction and formulation of results

Let M^n be a closed n -dimensional manifold with metric d . A *topological flow* on M^n is a family of homeomorphisms $f^t: M^n \rightarrow M^n$ that continuously depends on $t \in \mathbf{R}$ and satisfies the following conditions:

- 1) $f^0(x) = x$ for any point $x \in M^n$;
- 2) $f^t(f^s(x)) = f^{t+s}(x)$ for any $s, t \in \mathbf{R}$, $x \in M^n$.

The *trajectory* or the *orbit* of a point $x \in M^n$ is the set $\mathcal{O}_x = \{f^t(x), t \in \mathbf{R}(\mathbf{Z})\}$. It is believed that the trajectories of the flow (homeomorphism) are oriented in accordance with an increase in the parameter t . Any two trajectories of a dynamical system either coincide or do not intersect, therefore, the phase space is represented as a union of pairwise disjoint trajectories. There are three types of trajectories:

- 1) *fixed point* $\mathcal{O}_x = \{x\}$;

¹The authors is partially supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, of the Ministry of science and higher education of the RF grant ag. № 075-15-2019-1931, except Statements 1 and 2 whose proofs were supported by the Foundation for the Advancement of Theoretical Physics and Mathematics “BASIS” ag. № 19-7-1-15-1

- 2) *periodic trajectory (orbit)* \mathcal{O}_x for which there exists a number $per(x) > 0$ ($per(x) \in \mathbb{N}$) such that $f^{per(x)}(x) = x$, but $f^t(x) \neq x$ for all real (natural) numbers $0 < t < per(x)$. The number $per(x)$ is called *period of a periodic orbit* and does not depend on the choice of a point in orbit;
- 3) *regular trajectory* \mathcal{O}_x — a trajectory that is not a fixed point or a periodic orbit.

To characterize the wandering of the trajectories of a dynamical system, the concept of chain recurrence is traditionally used.

The ε -*chain of length* T connecting the point x with the point y for the flow f^t is called a sequence of points $x = x_0, \dots, x_n = y$ for which there exists a sequence of times t_1, \dots, t_n such that $d(f^{t_i}(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$, $t_i \geq 1$ for $1 \leq i \leq n$ and $t_1 + \dots + t_n = T$.

The ε -*chain of length* n connecting the point x with the point y for a homeomorphism f is called a sequence of points $x = x_0, \dots, x_n = y$, such that $d(f(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$ for $1 \leq i \leq n$.

A point $x \in M^n$ is said to be *chain recurrent* for the flow f^t (cascade f), if for any $\varepsilon > 0$ there is $T(n)$, which depends on $\varepsilon > 0$, and there is an ε -chain of the length $T(n)$ from the point x to itself. The set of chain recurrent points of f^t (f) is called the *chain recurrent set* of f^t (f) denoted by \mathcal{R}_{f^t} (\mathcal{R}_f) and its connected components are called *chain components*. The set \mathcal{R}_{f^t} (\mathcal{R}_f) is f^t (f) - invariant, that is, it consists of the orbits of the flow (homeomorphism) f^t (f), which are called *chain recurrent*. It is obvious that fixed points and periodic orbits are chain recurrent.

As a model behavior of flow (homeomorphism) in a neighborhood of a fixed point, we consider a linear flow (homeomorphism) $a_\lambda^t : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ($a_\lambda : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$), $\lambda \in \{0, 1, \dots, n\}$ of the following form:

$$a_\lambda^t(x_1, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n) = (2^t x_1, \dots, 2^t x_\lambda, 2^{-t} x_{\lambda+1}, \dots, 2^{-t} x_n)$$

$$(a_\lambda(x_1, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n) = (\pm 2x_1, 2x_2, \dots, 2x_\lambda, \pm 2^{-1}x_{\lambda+1}, 2^{-1}x_{\lambda+2}, \dots, 2^{-1}x_n)).$$

A fixed point p of a flow (homeomorphism) f^t (f) is called *is topologically hyperbolic* if there exists a neighborhood $U_p \subset M^n$, a number $\lambda \in \{0, 1, \dots, n\}$ and a homeomorphism $h_p : U_p \rightarrow \mathbf{R}^n$ such that $h_p f^t|_{U_p} = a_{\lambda_p}^t h_p|_{U_p}$ ($h_p f|_{U_p} = a_{\lambda_p} h_p|_{U_p}$) whenever the left and right sides are defined. Let

$$E_\lambda^s = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_1 = \dots = x_\lambda = 0\},$$

$$E_\lambda^u = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_{\lambda+1} = \dots = x_n = 0\}.$$

The number λ_p is called the *index* of the fixed hyperbolic point p . A point of indexes n and 0 will be called *source* and *sink*, respectively; any point p such that $\lambda_p \in \{1, \dots, n-1\}$ is called *saddle*. For a topologically hyperbolic fixed point p of the flow (homeomorphism) f^t (f) the sets $h_p^{-1}(E_{\lambda_p}^s)$, $h_p^{-1}(E_{\lambda_p}^u)$ are called *local stable*, *unstable manifolds*.

The sets

$$W_p^s = \bigcup_{t \in \mathbf{R}} f^t(h_p^{-1}(E_{\lambda_p}^s)), \quad W_p^u = \bigcup_{t \in \mathbf{R}} f^t(h_p^{-1}(E_{\lambda_p}^u))$$

is called *stable and unstable invariant manifolds of the point p*.

If p is a periodic point of a period k for diffeomorphism f then its invariant manifolds and the index are defined as for fixed point $f^k(p)$ with respect to the homeomorphism f^k . The number $\lambda_{\mathcal{O}_p}$ which equals λ_p is called *index of the orbit \mathcal{O}_p* of the periodic point p .

Statement 1. *The unstable W_p^u and the stable W_p^s manifolds of the hyperbolic fixed point p are independent of the choice of the local homeomorphism h_p and are defined in topological terms as follows: $W_p^u = \{y \in M^n : \lim_{t \rightarrow +\infty} f^{-t}(y) = p\}$ u $W_p^s = \{y \in M^n : \lim_{t \rightarrow +\infty} f^t(y) = p\}$.*

It follows from Statement 1 that $W_p^u \cap W_q^u = \emptyset$ and $W_p^s \cap W_q^s = \emptyset$ for any different hyperbolic points p, q .

Denote by G a class of homeomorphisms and topological flows given on M^n with a finite hyperbolic chain recurrent set.

Let $\mathcal{F} \in G$. The dynamics of systems of this class are close in their properties to gradient-like systems (see, for example, [4], [2]). Namely, similar to S. Smale’s order [5], we introduce a partial order relation on the set of chain-recurrent orbits of the dynamical system \mathcal{F} by the condition

$$\mathcal{O}_i \prec \mathcal{O}_j \iff W_{\mathcal{O}_i}^s \cap W_{\mathcal{O}_j}^u \neq \emptyset,$$

where $\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j$ are orbits from the set $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ and $W_{\mathcal{O}_i}^s = \bigcup_{p \in \mathcal{O}_i} W_p^s, W_{\mathcal{O}_i}^u = \bigcup_{p \in \mathcal{O}_i} W_p^u$.

A *m-cycle* ($m \geq 1$) is a collection $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_m$ of pairwise disjoint chain recurrent orbits that satisfy the condition $\mathcal{O}_1 \prec \mathcal{O}_2 \prec \dots \prec \mathcal{O}_m \prec \mathcal{O}_1$.

Statement 2. *Every dynamical system $\mathcal{F} \in G$ has no cycles.*

Due to Statement 2 the introduced relation can be continued (not uniquely) to a complete order relation, that is for every chain recurrent orbits $\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j$ either $\mathcal{O}_i \prec \mathcal{O}_j$, or $\mathcal{O}_j \prec \mathcal{O}_i$. Thus, let us consider the orbits of a dynamical system $\mathcal{F} \in G$ numbered in accordance with the introduced order:

$$\mathcal{O}_1 \prec \dots \prec \mathcal{O}_k.$$

In addition, without loss of generality, we assume that any sink orbit is located in this order below any saddle orbit, and any source orbit is higher than any saddle one.

The main result of the present paper is the following fact.

Theorem 1. *Let $\mathcal{F} \in G$. Then*

$$(1) M^n = \bigcup_{i=1}^k W_{\mathcal{O}_i}^u = \bigcup_{i=1}^k W_{\mathcal{O}_i}^s;$$

$$(2) W_{\mathcal{O}_i}^u (W_{\mathcal{O}_i}^s) \text{ s a topological submanifold of } M^n, \text{ homeomorphic to } \mathbf{R}^{\lambda_{\mathcal{O}_i}} (\mathbf{R}^{n-\lambda_{\mathcal{O}_i}});$$

$$(3) \ (cl(W_{\mathcal{O}_i}^u) \setminus W_{\mathcal{O}_i}^u) \subset \bigcup_{j=1}^{i-1} W_{\mathcal{O}_j}^u \quad ((cl(W_{\mathcal{O}_i}^s) \setminus W_{\mathcal{O}_i}^s) \subset \bigcup_{j=i+1}^k W_{\mathcal{O}_j}^s).$$

Notice that a similar result for Morse-Smale diffeomorphisms was proved in [3] and for Morse-Smale homeomorphism was proved in [1].

2. Auxiliary facts

In this section we prove announced statements.

Proof of Statement 1.

Proof. Let us prove that if $\mathcal{F} \in G$ and p is a fixed point of the system \mathcal{F} , then W_p^u and W_p^s are independent of the choice of the local homeomorphism h_p .

Suppose for definiteness that \mathcal{F} is a homeomorphism f (for a flow the proof is similar). Let $\tilde{h}_p : \tilde{U}_p \rightarrow \mathbf{R}^n$ be a homeomorphism different from h_p and such that $\tilde{h}_p f|_{\tilde{U}_p} = a_{\tilde{\lambda}_p} \tilde{h}_p|_{\tilde{U}_p}$ whenever the left and right sides are defined. Then in a neighborhood U_O of the original point O in \mathbf{R}^n is well-defined a homeomorphism $h = h_p \tilde{h}_p^{-1}$ which conjugates a_{λ_p} with $a_{\tilde{\lambda}_p}$. As conjugating homeomorphism preserves the invariant manifolds then $\tilde{\lambda}_p = \lambda_p$ and $h(E_{\lambda_p}^s) = E_{\lambda_p}^s$, $h(E_{\lambda_p}^u) = E_{\lambda_p}^u$. Thus, $\tilde{h}_p^{-1}(E_{\lambda_p}^s) = h_p^{-1}(h(E_{\lambda_p}^s)) = h_p^{-1}(E_{\lambda_p}^s)$. It is the same for $E_{\lambda_p}^u$. \square

Proof of Statement 2.

Proof. We will prove that every dynamical system $\mathcal{F} \in G$ has no cycles.

Suppose the contrary: there exists a sequence of orbits $\mathcal{O}_1 \prec \dots \prec \mathcal{O}_m \prec \mathcal{O}_1$. By construction, any point of the set $\bigcup_{i=1}^m (W_{\mathcal{O}_i}^s \cap W_{\mathcal{O}_{i+1}}^u)$, where $\mathcal{O}_{m+1} = \mathcal{O}_1$, is a chain recurrent. It immediately contradicts with the finiteness of the chain recurrent set of the system \mathcal{F} . \square

Statement 3. *Every homeomorphism $f = f^1$, which is the one-time shift of a flow $f^t \in G$ belongs to the class G . Moreover, $\mathcal{R}_{f^t} = \mathcal{R}_f$ and $W_p^u(f^t) = W_p^u(f)$, $W_p^s(f^t) = W_p^s(f)$ for every chain recurrent point p .*

Proof. It immediately follows from the definition of hyperbolic point that $\mathcal{R}_{f^t} \subset \mathcal{R}_f$. Let us show that $\mathcal{R}_f \subset \mathcal{R}_{f^t}$. Let $p \in \mathcal{R}_f$, then there exists a ε -chain of length n connecting the point p with itself. Then the point p will also be a chain recurrence point for the flow f^t , since it has a ε -chain of length $T = n$, and $t_i = 1$ ($i = \overline{1; n}$) connecting the point p with itself.

It follows from the uniqueness of the invariant manifolds of a chain recurrent point, proved in Statement 1, that $W_p^u(f^t) = W_p^u(f)$, $W_p^s(f^t) = W_p^s(f)$ for every chain recurrent point p . \square

3. General dynamical properties of systems from class G

In this section, we prove Theorem 1 on the embedding and asymptotic behaviour of invariant manifolds of chain recurrent points of a dynamical system from class G . Due to Statement 3, it is enough to prove the theorem for the case when the dynamical system \mathcal{F} is a homeomorphism f . Moreover we can suppose (by changing of f by some power of f) that chain recurrent set consists of the fixed points, that is $\mathcal{O}_i = p_i$ and $f|_{U_{p_i}}$ is conjugated with the diffeomorphism $a_{\lambda_{p_i}}(x_1, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n) = (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_\lambda, 2^{-1}x_{\lambda_{p_i}+1}, 2^{-1}x_{\lambda_{p_i}+2}, \dots, 2^{-1}x_n)$ by means a homeomorphism h_{p_i} .

A fixed point p of a flow (homeomorphism) f^t (f) is called *is topologically hyperbolic* if there exists a neighborhood $U_p \subset M^n$, a number $\lambda \in \{0, 1, \dots, n\}$ and a homeomorphism $h_p : U_p \rightarrow \mathbf{R}^n$ such that $h_p f^t|_{U_p} = a_{\lambda_p}^t h_p|_{U_p}$ ($h_p f|_{U_p} = a_{\lambda_p} h_p|_{U_p}$) whenever the left and right sides are defined..

Below we prove each item of the theorem in a separate subsection.

All statements formulated for unstable manifolds hold for stable manifolds as well. One gets them if one formally changes “u” to “s” because $\mathcal{R}_f = \mathcal{R}_{f^{-1}}$ and stable manifolds of chain recurrent points for f are the unstable manifolds of the chain recurrent points for f^{-1} .

3.1. Representation of the ambient manifold as the union of the invariant manifolds of the periodic points

Proof of the item (1) of Theorem 1.

Proof. Now we prove that $M^n = \bigcup_{i=1}^k W_{p_i}^u$ for every homeomorphism $f \in G$.

Let $x \in M^n$. Let us recall that a point $y \in M^n$ is called an α -limit point for the point x if there is a sequence $t_n \rightarrow -\infty$, $t_n \in \mathbb{Z}$ such that

$$\lim_{t_n \rightarrow -\infty} d(f^{t_n}(x), y) = 0.$$

The set $\alpha(x)$ of all α -limit points for the point x is called the α -limit set of x . As M^n is compact then the set $\alpha(x)$ is not empty. Let us show that $\alpha(x) \subset \mathcal{R}_f$. Indeed, as f is uniformly continuous and $\lim_{t_n \rightarrow -\infty} d(f^{t_n}(x), y) = 0$, for every $\varepsilon > 0$ there is $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ such that $d(f^{t_n}(x), y) < \varepsilon$ and $d(f^{t_n+1}(x), f(y)) < \varepsilon$ for every $n \geq n_\varepsilon$. Thus, $y, f(y), f^{t_n+1}(x), f^{t_n+2}(x), \dots, f^{t_n+1}(x), y$ is the ε -chain connected y with itself.

We show that $\alpha(x)$ consists of exactly one fixed point which depends on x . Assume the contrary i.e there are distinct fixed points $p_v, p_w \in \alpha(x)$. Since \mathcal{R}_f is finite there is a $\rho > 0$ such that $d(p_i, p_j) > \rho$ whenever $i \neq j$. Denote $V_i = \{y \in M^n : d(y, p_i) < \frac{\rho}{3}\}$. Since all the points $p_i, i = \overline{1, k}$ are fixed there is a neighborhood U_i such that $cl(U_i) \subset V_i$ and $f^{-1}(cl(U_i)) \cap V_j = \emptyset$ for every $j \neq i$. By the assumption there is an increasing sequence q_ℓ of the iterations of f^{-1} such that $f^{-q_{2m}}(x) \in U_v, f^{-q_{2m+1}}(x) \in U_w$ and $q_{2m+1} - q_{2m} \geq 2$. We pick the sequence n_m so that n_m is the maximal natural number belonging to the interval (q_{2m}, q_{2m+1}) for each $f^{-(n_m-1)}(x) \in cl(U_v)$. Then

$f^{-n_m}(x) \notin cl(U_v)$. On the other hand $f^{-n_m}(x) = f^{-1}(f^{-(n_m-1)}(x)) \notin V_j$ for $j \neq v$ and hence $f^{-n_m}(x) \in (M^n \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i)$. But then $\alpha(x)$ is not a subset of \mathcal{R}_f and we have a contradiction.

Thus for each point $x \in M^n$ there is the unique point $p_v(x) \in \mathcal{R}_f$ such that $\alpha(x) = p_v(x)$, i.e. there is a sequence $k_n \rightarrow +\infty$ such that $\lim_{k_n \rightarrow +\infty} d(f^{-k_n}(x), p_v(x)) = 0$. It follows from the definition of the hyperbolic fixed point that $f^{-k_n}(x) \in W_{p_v(x)}^u$ for all n greater then some n_0 . Then $x \in W_{p_v(x)}^u$ because the unstable manifold is invariant. \square

3.2. Embedding of the invariant manifolds of periodic points into the ambient manifold

To prove item (2) of Theorem 1 we need the following lemma.

Lemma 1. *Let σ be a hyperbolic saddle fixed point of a diffeomorphism $f \in G$, let $T_\sigma \subset W_\sigma^s$ be a compact neighborhood of the point σ and $\xi \in T_\sigma$. Then for every sequence of points $\{\xi_m\} \subset (M^n \setminus T_\sigma)$ converging to the point ξ there are a subsequence $\{\xi_{m_j}\}$, a sequence of natural numbers $k_{m_j} \rightarrow +\infty$ and a point $\eta \in (W_\sigma^u \setminus \sigma)$ such that the sequence of points $\{f^{k_{m_j}}(\xi_{m_j})\}$ converges to the point η .*

Proof. Without loss of generality one assumes $(U_\sigma \cap W_\sigma^s) \subset T_\sigma$, $\xi \in (U_\sigma \cap f(U_\sigma))$ and $\{\xi_m\} \subset (U_\sigma \cap f(U_\sigma))$. We pick a number $r > 0$ so that the ball $B_r(O) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1^2 + \dots + x_n^2) \leq r\}$ would be a subset of the set $h_\sigma(U_\sigma)$.

Let $h_\sigma(\xi_m) = \bar{\xi}_m = (\bar{\xi}_{1,m}, \dots, \bar{\xi}_{\lambda_\sigma,m}, \bar{\xi}_{\lambda_\sigma+1,m}, \dots, \bar{\xi}_{n,m})$. The set $K^u = \{(x_1, \dots, x_{\lambda_\sigma}) \in Ox_1 \dots x_{\lambda_\sigma} : \frac{r^2}{4} \leq x_1^2 + \dots + x_{\lambda_\sigma}^2 \leq r^2\}$ is a fundamental domain of the restriction of the diffeomorphism a_{λ_σ} to $Ox_1 \dots, x_{\lambda_\sigma} \setminus O$. Then for every $m \in \mathbb{N}$ there is the unique integer k_m such that $\frac{r^2}{4} \leq 4^{k_m} ((\bar{\xi}_{1,m})^2 + \dots + (\bar{\xi}_{\lambda_\sigma,m})^2) < r^2$. Let $\bar{\eta}_m = a_{\lambda_\sigma+1}^{k_m}(\bar{\xi}_m)$. Since $\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\xi}_m = h_\sigma(\xi) \in (Ox_{\lambda_\sigma+1} \dots x_n \setminus O)$ for every $i \in \{1, \dots, \lambda_\sigma\}$ the limit $\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\xi}_{i,m}$ equals 0 and hence $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = +\infty$. Furthermore the sequence $\{\bar{\xi}_{i,m}\}$ is bounded for every $i \in \{\lambda_\sigma + 1, \dots, n\}$ and hence $\bar{\eta}_{i,m} = (\frac{1}{2})^{k_m} \bar{\xi}_{i,m} \rightarrow 0$ for $m \rightarrow +\infty$ and $i \in \{\lambda_\sigma + 1, \dots, n\}$.

Therefore the coordinates of the points $\bar{\eta}_m = (\bar{\eta}_{1,m}, \dots, \bar{\eta}_{n,m})$ satisfy $\frac{r^2}{4} \leq (\bar{\eta}_{1,m})^2 + \dots + (\bar{\eta}_{\lambda_\sigma,m})^2 < r^2$ for $i \in \{1, \dots, \lambda_\sigma\}$ and $\bar{\eta}_{i,m} \rightarrow 0$ as $m \rightarrow \infty$ for $i \in \{\lambda_\sigma + 1, \dots, n\}$, i.e. the points η_m are inside some compact subset of \mathbb{R}^n . Since any sequence of points of a compact set has a converging subsequence, there are a subsequence $\{k_{m_j}\}$ of the sequence $\{k_m\}$ and a point $\bar{\eta} \in (W_O^u \setminus O)$ such that $\lim_{j \rightarrow \infty} \bar{\eta}_{m_j} = \bar{\eta}$. Then $\xi_{m_j} = h_\sigma^{-1}(a_{\lambda_\sigma}^{-k_{m_j}}(\bar{\eta}_{m_j}))$ is the desired subsequence. \square

Proof of item (2) of Theorem 1

Proof. Here we prove that $W_{p_i}^u$ is a submanifold of the manifold M^n , homeomorphic to $\mathbb{R}^{\lambda_{p_i}}$.

Let $T_{p_i} = h_{p_i}(E_{\lambda_{p_i}}^u)$. Then for every point $x \in W_{p_i}^u$ there is a natural number n_x such that $x \in f^{-n_x}(T_{p_i})$. Let $T_{p_i}(x) = f^{-n_x}(T_{p_i})$ then there is a chart $\psi_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ of the manifold M^n such that $\psi_x(U_x \cap T_{p_i}(x)) = \mathbb{R}^{\lambda_{p_i}}$. If $\lambda_{p_i} = n$ or $\lambda_{p_i} = 0$ then $\psi_x(U_x \cap T_{p_i}(x)) = \psi_x(U_x \cap W_{p_i}^u)$. Therefore the unstable manifold of every node point is a smooth submanifold.

Now we show that $W_{p_i}^u$ is a submanifold of M^n homeomorphic to $\mathbb{R}^{\lambda_{p_i}}$ for every saddle point p_i as well. Suppose the contrary: $W_{p_i}^u$ is not a submanifold of M^n . Then there is a point $x \in W_{p_i}^u$ such that $(U_x \setminus T_{p_i}(x)) \cap W_{p_i}^u \neq \emptyset$ for every chart $\psi_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ of the manifold M^n for which $\psi_x(U_x \cap T_{p_i}(x)) = \mathbb{R}^{\lambda_{p_i}}$. Hence there is a sequence $\{x_m\} \subset (W_{p_i}^u \setminus T_{p_i}(x))$ such that $d(x_m, x) \rightarrow 0$ for $m \rightarrow +\infty$.

Lemma 1 gives us that there is a subsequence x_{m_j} and there is a sequence k_j such that the sequence $y_j = f^{-k_j}(x_{m_j}) \in W_{p_i}^u$ converges to a point $y \in (W_{p_i}^s \setminus p_i)$.

According to the item (1) of Theorem 1 there is a point $p_v \in \mathcal{R}_f$ such that $y \in W_{p_v}^u$. Consider three possibilities: [a] $\dim W_{p_v}^u = 0$; [b] $0 < \dim W_{p_v}^u < n$; [c] $\dim W_{p_v}^u = n$.

[a] If $\dim W_{p_v}^u = 0$ then $y_j \in W_{p_v}^u$ for all j starting from some one. Hence, $i = v$ and y is a homoclinic point, that contradicts to Statement 2. Thus case [a] is impossible.

[c] If $\dim W_{p_v}^u = n$ then $W_{p_v}^u = p_v$ and $y = p_v$, that contradicts to the condition $y \in W_{p_i}^s$. Thus case [c] is impossible.

[b] If $0 < \dim W_{p_v}^u < n$ then $v > i$ as f has no homoclinic points. According to Lemma 1 there is a subsequence $\{y_{j_r}\}$, a sequence $m_r \rightarrow +\infty$ and a point $z \in W_{p_v}^s$ such that the sequence $\{f^{m_r}(y_{j_r})\}$ converges to the point z . As $M^n = \bigcup_{i=1}^k W_{p_i}^u$ then $z \in W_{p_w}^u$. Similarly to above arguments, $v \neq j, v \neq i$ and $0 < \dim W_{p_w}^u < n$. Due to finiteness of the set \mathcal{R}_f the case [b] is also impossible.

Thus, $W_{p_i}^u$ is a topological submanifold of the manifold M^n homeomorphic to $\mathbb{R}^{\lambda_{p_i}}$. □

3.3. Asymptotic behaviour of the invariant manifolds of chain recurrent points

Proof of the item (3) of Theorem 1

Proof. Now we prove that $(cl(W_{p_i}^u) \setminus W_{p_i}^u) \subset \bigcup_{j=1}^{i-1} W_{p_j}^u$.

If p_i is a sink then the set $cl(W_{p_i}^u) \setminus W_{p_i}^u$ is empty and the statement is automatically true. In the other cases let us consider a point $x \in (cl(W_{p_i}^u) \setminus W_{p_i}^u)$ and prove that $x \in W_{p_v}^u$ for some $v < i$.

Indeed, as $x \in (cl(W_{p_i}^u) \setminus (W_{p_i}^u \cup p_i))$ then there is a sequence $\{x_m\} \subset W_{p_i}^u$ such that $d(x_m, x) \rightarrow 0$ for $m \rightarrow +\infty$. By item (1) of Theorem 1, $x \in W_{p_v}^u$ for some $v \in \{1, \dots, k\}$. There are three possibilities: (a) p_v is a sink, (b) p_v is a saddle, (c) p_v is a source.

In the case (c) $x_m \in W_{p_v}^u$ for all m large enough. But then $p_v = p_i$ and $x \in W_{p_i}^u$ that contradicts the assumption.

In the case (a) $W_{p_v}^u = p_v$, $x = p_v$ and $x_m \in W_{p_v}^s$ for all m large enough. Then $W_{p_i}^u \cap W_{p_v}^s \neq \emptyset$ and $v < i$ is true.

In the case (b) by Lemma 1 there are a subsequence x_{m_j} and a sequence k_j such that the sequence $y_j = f^{-k_j}(x_{m_j})$ converges to a point $y \in (W_{p_v}^s \setminus p_v)$. By the item (1) of Theorem 1 there is a point $p_w \in \mathcal{R}_f$ such that $y \in W_{p_w}^u$, that is $p_v \prec p_w$. If $w = i$ then the statement is true. If not then arguing as above we get that the point p_w cannot be a source. The point p_w is evidently not a sink because p_v is a saddle point. Thus, the point p_w is a saddle different from p_v . Repeating the process, taking into account the finiteness of \mathcal{R}_f and the absence of cycles, we obtain the statement in a finite number of steps. \square

References

1. Grines V., Gurevich E., Medvedev V., Pochinka O. An analog of Smale's theorem for homeomorphisms with regular dynamics. *Math. Notes* 102, No. 4, 569-574 (2017);
2. Grines V., Gurevich E., Zhuzhoma E., Pochinka O. Classification of Morse-Smale systems and the topological structure of bearing manifolds. *Russian Mathematical Surveys* 74, No.1, 41-116 (2019).
3. Grines V., Medvedev T., Pochinka O. *Dynamical systems on 2- and 3-manifolds*. Cham: Springer, 2016.
4. Grines V., Pochinka O. Morse-Smale cascades on 3-manifolds. *Russian Mathematical Surveys* 68. No.1, 117-173 (2013).
5. Smale S. Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.* 73, No.1, 741-817 (1967).

Получена 11.11.2019

УДК 517.957

Задачи с быстро осциллирующими данными. Два примера построения асимптотик

Н. С. Ивлева

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича,
Ростов-на-Дону 344058. E-mail: ivleva.n.s@yandex.ru

Аннотация. Для двух конкретных задач с быстро осциллирующими по времени данными — полуплоскостной параболической системы с двумя пространственными переменными и системы Навье-Стокса, моделирующей течение жидкости в плоском случае, — решается вопрос о построении асимптотических разложений их периодических по времени решений. Обе задачи рассматриваются в бесконечном по времени цилиндре, осью которого служит временная числовая ось, а основанием — двумерный единичный круг. В качестве краевых условий взяты условия Дирихле. В основе построения указанных асимптотических разложений лежат два алгоритма, разработанных, обоснованных и полученных ранее Н.С. Ивлевой и В.Б. Левенштамом (2010, 2015 гг.).

Ключевые слова: параболическая система, задача Навье-Стокса, высокочастотные коэффициенты, метод усреднения, асимптотика.

Tasks with fast oscillating data. Two examples of asymptotics construction

N. S. Ivleva

I. I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science,
Rostov-on-Don 344058.

Abstract. For two specific problems with rapidly oscillating data in time — the semilinear parabolic system with two spatial variables and the Navier-Stokes system that simulates the fluid flow in the flat case — the question of constructing asymptotic expansions of their time-periodic solutions is solved. Both problems are considered in the cylinder, infinite in time, the axis of which is the temporary numerical axis, and the basis is the two-dimensional unit circle. The Dirichlet conditions are taken as boundary conditions. The construction of these asymptotic expansions is based on two algorithms developed, justified and obtained earlier by N. S. Ivleva and V. B. Levenstam (2010, 2015).

Keywords: parabolic system, the Navier-Stokes problem, high-frequency terms, averaging method, asymptotics.

MSC 2010: 35K40, 76E06, 35B10, 58J37, 76D05

1. Введение

В настоящее время список работ, посвященных асимптотическому интегрированию различных задач для дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими по времени данными, очень велик. Упомянем лишь некоторые особенно

близкие к данной статье работы [13, 7, 8, 1, 9, 10, 11, 12, 14, 5, 3], в которых речь идет о параболических, абстрактных параболических уравнениях и некоторых задачах гидродинамики.

В работе [4] для широкого класса полулинейных параболических систем, содержащих быстро осциллирующие по времени слагаемые, построена полная асимптотика периодического по времени решения.

В работе [15] аналогичный вопрос решен для задачи Навье-Стокса с быстро осциллирующими по времени данными, которая моделирует течение жидкости в плоском случае.

В настоящей статье разработанные в [4, 15] алгоритмы применяются в двух модельных задачах.

2. Параболическая система дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми

В цилиндре $\mathbf{Q} = \bar{\Omega} \times \mathbb{R} = \{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу о $\frac{2\pi}{\omega}$ -периодическом по времени решении системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} = e^{-|x|} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) + u_1^2 \sin 5\omega t - 2 \sin^2 \omega t + u_2 \cos 4\omega t + \\ + \sqrt{\omega}(1 - (x_1^2 + x_2^2)) \left(\sin 3\omega t - \frac{\sqrt{3}}{6} \sin \omega t \right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + u_2^2 \cos 5\omega t - 1 + u_1 \sin 4\omega t + \\ + \sqrt{\omega}(1 - (x_1^2 - x_2^2)) \left(\cos 3\omega t - \frac{\sqrt{3}}{6} \cos \omega t \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (2.2)$$

где $\Gamma = \{x_1^2 + x_2^2 = 1\} \times \mathbb{R}$ — граница \mathbf{Q} , ω — большой параметр, $x = (x_1, x_2)$.

Решения всех задач в данной работе мы понимаем в классическом смысле.

Наряду с возмущенной задачей (2.1)-(2.2) рассмотрим усредненную [4]:

$$\begin{aligned} (L_0 v)_1 &\equiv \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} = e^{|x|}, \quad v_1|_{x_1^2+x_2^2=1} = 0, \\ (L_0 v)_2 &\equiv \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} = 1, \quad v_2|_{x_1^2+x_2^2=1} = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Заметим, что вектор-функция

$$u_0(x) = \begin{pmatrix} \int_r^1 \left(\frac{1-e^s}{s} + e^s \right) ds \\ r^2/4 - 1/4 \end{pmatrix}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

является стационарным решением усредненной задачи (2.3) для системы (2.1)-(2.2). Действительно, в задаче (2.3) перейдем к полярным координатам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \varphi^2} &= e^r, v_1|_{r=1} = 0, \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \varphi^2} &= 1, v_2|_{r=1} = 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Будем предполагать, что $\frac{\partial^2 v_1}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 v_2}{\partial \varphi^2} = 0$ и пусть $\frac{\partial v_1}{\partial r} = w_1, \frac{\partial v_2}{\partial r} = w_2$. Тогда (2.4) без учета граничных условий примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{1}{r} w_1 &= e^r, \\ \frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{1}{r} w_2 &= 1. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Найдем общее решение однородной задачи

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} v = 0.$$

Имеем:

$$\ln|v| = -\ln|r| + \ln c, \ln|v| = \ln \frac{c}{|r|}, v = \frac{c_1}{r}, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Легко проверить, что частным решением неоднородной задачи (2.5) является вектор-функция

$$\begin{pmatrix} w_{p1} \\ w_{p2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{e^r}{r} + e^r \\ \frac{1}{r} + \frac{r}{2} \end{pmatrix}.$$

Решением (2.5) будет сумма частного решения неоднородной задачи и общего решения однородной:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{e^r}{r} + e^r + \frac{c_1}{r} \\ \frac{1}{r} + \frac{r}{2} + \frac{c_2}{r} \end{pmatrix}, c_{1,2} = const.$$

Подберем константы $c_{1,2}$ так, чтобы наше решение было непрерывно дифференцируемо в нуле:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{e^r}{r} + e^r + \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} + \frac{r}{2} + \frac{1}{r} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, задача (2.3) имеет стационарное вещественное решение

$$u_0(x) = \begin{pmatrix} \int_r^1 \left(\frac{1 - e^s}{s} + e^s \right) ds \\ r^2/4 - 1/4 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что под невырожденностью решения $u_0(x)$ подразумевается, что линейная эллиптическая задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} &= 0, \\ u_1|_{x_1^2+x_2^2=1} &= 0, u_2|_{x_1^2+x_2^2=1} = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

имеет только нулевое решение в области $\{x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Для задачи (2.6) это известный факт.

Определим теперь три вспомогательные задачи

(A1) Задача Дирихле для эллиптической системы вида

$$\begin{aligned} L_0 u &= \gamma(x), x \in \Omega, \\ u(x)|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned}$$

где γ — известная бесконечно дифференцируемая вектор-функция.

Еще две задачи представляют собой задачи об ограниченном на луче $\rho > 0$ решении следующих обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром $\psi \in \partial\Omega$.

(A2)

$$\begin{aligned} ikw(\psi, \rho) &= \frac{\partial^2 w(\psi, \rho)}{\partial \rho^2} + F(\psi, \rho)e^{\lambda\rho}, \\ w(\psi, 0) &= w_0(\psi), \\ w|_{\rho=\infty} &= 0, \end{aligned}$$

(A3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w(\psi, \rho)}{\partial \rho^2} + F(\psi, \rho)e^{\lambda\rho} &= 0, \\ w|_{\rho=\infty} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $Re(\lambda) < 0$, F — полином по ρ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, w_0 — бесконечно дифференцируемая функция.

Как известно ([4, теоремы 1,2]), в наших предположениях для задачи (2.1)-(2.2) справедливы следующие утверждения.

1. Найдутся четыре положительных числа $\beta \geq 1$, $\mu, r_0 \in (0, 1]$, ω_0 таких, что при $\omega > \omega_0$ в шаре S_{r_0} пространства $C_\mu(\mathbb{R}, C^\beta(\bar{\Omega}))$ с центром в точке u_0 радиуса r_0 существует и единственно $\frac{2\pi}{\omega}$ -периодическое по t решение u_ω задачи (2.1)-(2.2). При этом выполнено предельное равенство

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|u_\omega - u_0\|_{C_\mu(\mathbb{R}, C^\beta)} = 0.$$

2. Это решение является бесконечно гладким.

3. В [4] разработан алгоритм построения полной асимптотики решения u_ω . Построение частичных сумм этой асимптотики сводится к решению линейных однозначно разрешимых задач типов (A1), (A2), (A3). Эти частичные суммы $\overset{k}{u}, k = 1, 2, \dots$, вещественные и бесконечно гладкие.

В данном разделе мы останавливаемся на построении только $\overset{1}{u}$. Отметим сразу, что в [4] доказана, в частности, следующая оценка.

4. Найдется такое положительное число ω_1 , что при $\omega > \omega_1$ при всех целых $k \geq 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \left\| u_\omega - \overset{1}{u} \right\|_{C^{k, \frac{k}{2}}} &\leq c(k) \omega^{\frac{k-2}{2}}, \\ c(k) = \text{const} &> 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Асимптотическое разложение будем строить, следуя [4].

Для построения асимптотики решения задачи (2.1)-(2.2) введем в замыкании $\overline{\Omega}_\eta$ пограничной подобласти Ω_η области Ω ширины η криволинейную систему координат (s, φ) следующим образом.

Определим отображение $\partial\Omega \times [0, \eta] \rightarrow \overline{\Omega}_\eta, 0 < \eta < 1$, где $\partial\Omega$ — граница области Ω , т.е. круг: $\{x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, по закону $(s, \varphi) \rightarrow \varphi + n_\varphi s$. Здесь φ — точка на $\partial\Omega$, имеющая местную координату φ , а n_φ — вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке φ .

Согласно методу пограничного слоя [2], введем новую независимую переменную $\rho = \sqrt{\omega} s, s \leq \eta$, выразим производные по x_1, x_2 через производные по ρ, φ и разложим коэффициенты в полученных равенствах по степеням $\omega^{-1/2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} &= \frac{\partial s}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \sqrt{\omega} \frac{\partial s}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial s}{\partial x_1} &= \frac{\partial s}{\partial[(1-s)\cos\varphi]} = -\cos\varphi, \quad \frac{\partial s}{\partial x_2} = \frac{\partial s}{\partial[(1-s)\sin\varphi]} = -\sin\varphi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} &= -\frac{\sin\varphi}{1-s} = -\sin\varphi(1 + \rho/\sqrt{\omega} + \rho^2/\omega + \dots), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= \frac{\cos\varphi}{1-s} = \cos\varphi(1 + \rho/\sqrt{\omega} + \rho^2/\omega + \dots). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= -\sqrt{\omega} \frac{\partial}{\partial \rho} \cos\varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} \sin\varphi(1 + \rho/\sqrt{\omega} + \rho^2/\omega + \dots), \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= -\sqrt{\omega} \frac{\partial}{\partial \rho} \sin\varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi} \cos\varphi(1 + \rho/\sqrt{\omega} + \rho^2/\omega + \dots). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 e^{-|x|} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] &= e^{-(1-\rho/\sqrt{\omega})} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] = \\
 &= e^{-1} (1 + \rho/\sqrt{\omega} + \rho^2/(2\omega) + \dots) \left(\omega \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \sqrt{\omega} \times 0 + \sum_{i,j=1}^2 \left[\sum_{k=0}^{N_0} \omega^{-\frac{k}{2}} M_{i,j,k}(\rho, \varphi) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \omega^{-\frac{N_0+1}{2}} M_{i,j,N_0+1}(\rho, \varphi, s) \right] \right), \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

где $M_{i,j,k}$, $1 \leq i, j \leq 2$, $0 \leq k \leq N_0$ — дифференциальные выражения относительно ρ, φ , коэффициенты которых являются полиномами по ρ .

Асимптотическое разложение решения $u_\omega(x, t)$ задачи (2.1)-(2.2) строим в виде ряда

$$u(x, t) \sim u_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} (u_k(x) + v_k(x, \tau) + w_k(\rho, \varphi) + z_k(\rho, \varphi, \tau)), \quad \tau = \omega t, \quad (2.9)$$

где коэффициенты $v_k(x, \tau)$ и $z_k(\rho, \varphi, \tau)$ являются 2π -периодическими с нулевыми средними по τ , $u_k(x), v_k(x, \tau)$ — регулярные слагаемые, а $w_k(\rho, \varphi), z_k(\rho, \varphi, \tau)$ — погранслойные. Следуя [2], мы полагаем, что все погранслойные функции обращаются в ноль вне погранполосы, а в ней умножены на следующую срезающую функцию $\nu(x) \in C^\infty(\Omega)$ такую, что

$$\nu(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq \eta/3, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_{2\eta/3}. \end{cases}$$

Подставив ряд (2.9) в исходное уравнение, получим:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^{\infty} \omega^{\frac{2-k}{2}} \frac{\partial (v_{k1}(x, \tau) + z_{k1}(\rho, \varphi, \tau))}{\partial \tau} = \\
 &= e^{-|x|} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] \left[u_{01}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} (u_{k1}(x) + v_{k1}(x, \tau)) \right] + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} e^{-1} (1 + \rho/\sqrt{\omega} + \rho^2/(2\omega) + \dots) \times \left(\omega \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (w_{k1}(\rho, \varphi) + z_{k1}(\rho, \varphi, \tau)) + \right. \\
 &+ \sum_{i,j=1}^2 \left[M_{i,j,0} (w_{k1}(\rho, \varphi) + z_{k1}(\rho, \varphi, \tau)) + \frac{1}{\sqrt{\omega}} M_{i,j,1} (w_{k1}(\rho, \varphi) + z_{k1}(\rho, \varphi, \tau)) + \dots \right] \left. \right) + \\
 &+ u_1^2 \sin 5\omega t - 2 \sin^2 \omega t + u_2 \cos 4\omega t + \sqrt{\omega} (1 - (x_1^2 + x_2^2)) \left(\sin 3\omega t - \frac{\sqrt{3}}{6} \sin \omega t \right);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{\infty} \omega^{\frac{2-k}{2}} \frac{\partial(v_{k2}(x, \tau) + z_{k2}(\rho, \varphi, \tau))}{\partial\tau} = \tag{2.10} \\
 & = \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] \left[u_{02}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} (u_{k2}(x) + v_{k2}(x, \tau)) \right] + \\
 & \quad + \sum_{k=1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} \left(\omega \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (w_{k2}(\rho, \varphi) + z_{k2}(\rho, \varphi, \tau)) + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{i,j=1}^2 \left[M_{i,j,0}(w_{k2}(\rho, \varphi) + z_{k2}(\rho, \varphi, \tau)) + \frac{1}{\sqrt{\omega}} M_{i,j,1}(w_{k2}(\rho, \varphi) + z_{k2}(\rho, \varphi, \tau)) + \dots \right] \right) + \\
 & \quad + u_2^2 \cos 5\omega t - 1 + u_1 \sin 4\omega t + \sqrt{\omega}(1 - (x_1^2 + x_2^2)) \left(\cos 3\omega t - \frac{\sqrt{3}}{6} \cos \omega t \right); \\
 & \quad u_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} (u_k(x) + v_k(x, \tau) + w_k(\rho, \varphi) + z_k(\rho, \varphi, \tau)) = 0, \tag{2.11} \\
 & \quad x_1^2 + x_2^2 = 1.
 \end{aligned}$$

Сначала найдем регулярные коэффициенты. Приравняем их при степени $\omega^{\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_{11}(x, \tau)}{\partial \tau} &= (1 - (x_1^2 + x_2^2)) \left(\sin 3\omega t - \frac{\sqrt{3}}{6} \sin \omega t \right), \\
 \frac{\partial v_{12}(x, \tau)}{\partial \tau} &= (1 - (x_1^2 + x_2^2)) \left(\cos 3\omega t - \frac{\sqrt{3}}{6} \cos \omega t \right), \\
 \langle v_1 \rangle &= 0.
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$v_1 = \begin{pmatrix} (1 - (x_1^2 + x_2^2)) \left(-\frac{\cos 3\omega t}{3} + \frac{\sqrt{3} \cos \omega t}{6} \right) \\ (1 - (x_1^2 + x_2^2)) \left(\frac{\sin 3\omega t}{3} - \frac{\sqrt{3} \sin \omega t}{6} \right) \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Соберем коэффициенты при степени ω^0 в (2.10):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_{21}}{\partial \tau} &= e^{-|x|} \left[\frac{\partial^2 u_{01}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_{01}}{\partial x_2^2} \right] + u_{01}^2 \sin 5\omega t - 1 + \sin 2\omega t + u_{02} \cos 4\omega t + \\
 & + (u_{11} + v_{11}) \left(\sin 3\omega t - \frac{\sqrt{3}}{6} \sin \omega t \right), \\
 \frac{\partial v_{22}}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 u_{02}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_{02}}{\partial x_2^2} + u_{02}^2 \cos 5\omega t - 1 + u_{01} \sin 4\omega t + \\
 & + (u_{12} + v_{12}) \left(\cos 3\omega t - \frac{\sqrt{3}}{6} \cos \omega t \right). \tag{2.13}
 \end{aligned}$$

Применим к уравнениям (2.13) операцию усреднения по τ :

$$\begin{aligned} e^{-|x|} \left[\frac{\partial^2 u_{01}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_{01}}{\partial x_2^2} \right] - 1 &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_{02}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_{01}}{\partial x_2^2} - 1 &= 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Вычтем из (2.13) уравнения (2.14) и упростим полученную систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{21}}{\partial \tau} &= u_{01}^2 \sin 5\omega t + \sin 2\omega t + u_{02} \cos 4\omega t + u_{11} \left(\sin 3\omega t - \frac{\sqrt{3}}{6} \sin \omega t \right) + \\ &+ (1 - (x_1^2 + x_2^2)) \left(-\frac{\sin 6\omega t}{6} + \frac{\sqrt{3} \sin 4\omega t}{9} + \frac{\sqrt{3} \sin \omega t}{18} - \frac{\sin 2\omega t}{24} \right), \\ &< v_{21} > = 0, \\ \frac{\partial v_{22}}{\partial \tau} &= u_{02}^2 \cos 5\omega t + u_{01} \sin 4\omega t + u_{12} \left(\cos 3\omega t - \frac{\sqrt{3}}{6} \cos \omega t \right) + \\ &+ (1 - (x_1^2 + x_2^2)) \left(\frac{\sin 6\omega t}{6} - \frac{\sqrt{3} \sin 4\omega t}{9} - \frac{\sqrt{3} \sin \omega t}{18} + \frac{\sin 2\omega t}{24} \right), \\ &< v_{22} > = 0. \end{aligned}$$

Усредненная задача (уравнения (2.14) вместе с соответствующими граничными условиями $u_0|_{x_1^2+x_2^2=1} = 0$) есть задача (2.3), которая имеет невырожденное стационарное решение u_0 . Подставим это решение в (2.12), ищем v_1 .

Приравняем коэффициенты при $\omega^{-\frac{1}{2}}$, учтя последнее представление v_2 и полученное далее погранслоное слагаемое $w_1 = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x_2^2} &= 0, \quad u_{11}|_{x_1^2+x_2^2=1} = 0, \\ \frac{\partial^2 u_{12}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_{12}}{\partial x_2^2} &= 0, \quad u_{12}|_{x_1^2+x_2^2=1} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим $u_1 = 0$.

Перейдем к определению погранслоных коэффициентов. При $\omega^{\frac{1}{2}}$:

$$\frac{\partial z_1}{\partial \tau} = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 z_1(\rho, \varphi, \tau)}{\partial \rho^2},$$

$$z_1|_{x_1^2+x_2^2=1} = -v_1|_{x_1^2+x_2^2=1}, \quad z_1|_{\rho=\infty} = 0.$$

Т.к. $v_1|_{x_1^2+x_2^2=1} = 0$, то $z_1 = 0$.

$$\frac{\partial^2 w_1(\rho, \varphi, \tau)}{\partial \rho^2} = 0,$$

$$w_1|_{\rho=\infty} = 0.$$

Получаем: $w_1 = 0$.

Таким образом,

$$u_\omega(x, t) = \left(\int_r^1 \left(\frac{1 - e^s}{s} + e^s \right) ds \right) + \frac{1}{\sqrt{\omega}} \begin{pmatrix} (1 - (x_1^2 + x_2^2)) \left[-\frac{\cos 3\omega t}{3} + \frac{\sqrt{3}\cos\omega t}{6} \right] \\ (1 - (x_1^2 + x_2^2)) \left[\frac{\sin 3\omega t}{2} - \frac{\sqrt{3}\sin\omega t}{6} \right] \end{pmatrix} + O(\omega^{-1}),$$

$\omega \rightarrow \infty,$

равномерно относительно $(x, t) \in \mathbf{Q}$.

3. Задача о течении жидкости в высокочастотном силовом поле

В цилиндре $\mathbf{Q} = \bar{\Omega} \times \mathbb{R} = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу о $\frac{2\pi}{\omega}$ -периодическом по времени решении системы уравнений Навье-Стокса

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v, \nabla)v + \nabla p &= \omega \begin{pmatrix} (1 - (x^2 + y^2))y \\ (1 - (x^2 + y^2))(-x) \end{pmatrix} \sin\omega t + b(x, y), \\ \operatorname{div} v &= 0, \\ v|_\Gamma &= 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $\Gamma = \{x^2 + y^2 = 1\} \times \mathbb{R}$ — граница \mathbf{Q} , ω — большой параметр. Здесь $b(x, y) = -\nu \Delta a(x, y) + (a(x, y), \nabla)a(x, y)$, где $a(x, y)$ — какая-либо бесконечно дифференцируемая вектор-функция, которая обращается в ноль на границе $\partial\Omega$, соленоидальная, т.е. $\operatorname{div} a = 0$. Таких вектор-функций a , как известно, бесконечно много (см., например, [6]).

Решение задачи (3.1), как и остальных задач в этой работе (мы это уже отмечали), понимается в классическом смысле.

Ниже будет построена соответствующая (3.1) усредненная задача (см. [15]) и найдено некоторое ее стационарное невырожденное решение (u_0, p_0) . При этом для задачи (3.1) в окрестности этого решения выполняются все условия теоремы 1 работы [15], где рассмотрен широкий класс уравнений Навье-Стокса. Из этой теоремы следует, что в некоторой окрестности (u_0, p_0) существует и единственно $2\pi/\omega$ -периодическое по времени решение задачи (3.1). Кроме того, в [15] разработан алгоритм построения полной асимптотики решения.

В данной работе асимптотика решения будет построена для задачи (3.1) в окрестности найденного ранее решения (u_0, p_0) .

Для построения асимптотики решения задачи (3.1) (см. [15]) введем криволинейную систему координат (φ, r) точно так же, как мы это делали в предыдущем параграфе.

Снова введем переменную $\rho = \sqrt{\omega}r, r \leq \eta < 1$.

Следуя [15], решение (3.1) будем разыскивать в следующем виде:

$$\begin{aligned} v(x, y, t) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \omega^{-k/2} [u_k(x, y) + v_k(x, y, \tau) + w_k(\varphi, \rho) + z_k(\varphi, \rho, \tau)], \\ p(x, y, t) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \omega^{-k/2} p_k(x, y) + \sum_{k=0}^{\infty} \omega^{(-k+2)/2} s_k(x, y, \tau) + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} \omega^{-k/2} h_k(\varphi, \rho) + \sum_{k=1}^{\infty} \omega^{(-k+1)/2} g_k(\varphi, \rho, \tau), \\ &\tau = \omega t, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где u_k, v_k, p_k и s_k — регулярные слагаемые, а w_k, z_k, h_k и g_k — погранслоиные.

Для $(x, y) \in \Omega_\eta$ через $v^{(s)}(x, y), s = 1, 2$, будем обозначать компоненты произвольного вектора $v(x, y) \in \mathbb{R}^2$ в криволинейных координатах (φ, r) .

Найдем первые погранслоиные быстро осциллирующие слагаемые. Подставим решение, представленное в виде (3.2), в систему (3.1), найдем [15]:

$$\frac{\partial w_0^{(2)}}{\partial \rho} = 0, \frac{\partial z_0^{(2)}}{\partial \rho} = 0, \frac{\partial^2 w_0^{(1)}}{\partial \rho^2} = 0,$$

где верхние индексы указывают криволинейные координаты вектор-функций. Выпишем уравнения для первых регулярных быстро осциллирующих слагаемых:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial \tau} + \nabla s_0 &= \begin{pmatrix} (1 - (x^2 + y^2))y \\ (1 - (x^2 + y^2))(-x) \end{pmatrix} \sin \omega t, \\ \operatorname{div} v_0 &= 0, \\ v_0^{(2)} \Big|_{\Gamma} &= -z_0^{(2)} \Big|_{\Gamma}. \end{aligned}$$

Или:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial \tau} + \nabla s_0 &= \begin{pmatrix} (1 - r^2)y \\ (1 - r^2)(-x) \end{pmatrix} \sin \omega t, \\ \operatorname{div} v_0 &= 0, \\ v_0^{(2)} \Big|_{r=1} &= -z_0^{(2)} \Big|_{r=1}. \end{aligned}$$

Получаем, что $v_0 = - \begin{pmatrix} (1 - (x^2 + y^2))y \\ (1 - (x^2 + y^2))(-x) \end{pmatrix} \cos \omega t, s_0 = 0$.

Займемся стационарными задачами для отыскания регулярных коэффициентов:

$$-\nu \Delta u_0 + \nabla p_0 + (u_0, \nabla) u_0 + \langle (v_0, \nabla) v_0 \rangle = b,$$

$$\operatorname{div} u_0 = 0,$$

$$u_0|_{\Gamma} = -w_0|_{\Gamma}.$$

Найдем значение выражения $\langle (v_0, \nabla)v_0 \rangle$. Имеем:

$$\begin{aligned} \langle (v_0, \nabla)v_0 \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} v_{01} \frac{\partial v_{01}}{\partial x} + v_{02} \frac{\partial v_{01}}{\partial y} \\ v_{01} \frac{\partial v_{02}}{\partial x} + v_{02} \frac{\partial v_{02}}{\partial y} \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} [(1-r^2)y]2xy + (1-r^2)x((1-r^2)-2y^2) \\ (1-r^2)y((1-r^2)-2x^2) + [(1-r^2)x]2xy \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} [(1-x^2-y^2)y]2xy + (1-x^2-y^2)x(1-x^2-3y^2) \\ (1-x^2-y^2)y(1-y^2-3x^2) + [(1-x^2-y^2)x]2xy \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} y^2x - x^3y^2 - \frac{y^4x}{2} - \frac{x}{2} + x^3 - \frac{x^5}{2} \\ x^2y - y^3x^2 - \frac{x^4y}{2} - \frac{y}{2} + y^3 - \frac{y^5}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, вектор-функция $\langle (v_0, \nabla)v_0 \rangle$ имеет потенциал $p = \frac{x^2y^2}{2} - \frac{x^4y^2}{4} - \frac{x^2y^4}{4} - \frac{x^2+y^2}{4} + \frac{x^4+y^4}{4} - \frac{x^6+y^6}{12}$. Тогда вектор-функция $(u_0, p) = \left(a, -\frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^4y^2}{4} + \frac{x^2y^4}{4} + \frac{x^2+y^2}{4} - \frac{x^4+y^4}{4} + \frac{x^6+y^6}{12}\right)$ удовлетворяет нашим требованиям.

Перейдем к погранслоиным слагаемым:

$$\frac{\partial z_0^{(1)}}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial^2 z_0^{(1)}}{\partial \rho^2},$$

$$z_0^{(1)}|_{\Gamma} = -v_0^{(1)}|_{\Gamma} = 0.$$

Откуда $z_0^{(1)} = 0$.

Наконец, $\frac{\partial g_1}{\partial \rho} = -\frac{\partial z_0^{(2)}}{\partial \tau} = 0$.

Отыщем вторые погранслоиные слагаемые:

$$\frac{\partial w_1^{(2)}}{\partial \rho} = 0, \frac{\partial z_1^{(2)}}{\partial \rho} = 0, \frac{\partial^2 w_1^{(1)}}{\partial \rho^2} = 0.$$

Выпишем уравнения для вторых регулярных быстро осциллирующих слагаемых:

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau} + \nabla s_1 = 0,$$

$$\operatorname{div} v_1 = 0,$$

$$v_1^{(2)}|_{\Gamma} = -z_1^{(2)}|_{\Gamma}.$$

Положим $v_1 = 0, s_1 = 0$.

Перейдем к стационарным задачам для отыскания регулярных коэффициентов:

$$-\nu \Delta u_1 + (u_0, \nabla)u_1 + (u_1, \nabla)u_0 + \langle (v_0, \nabla)v_1 \rangle + \langle (v_1, \nabla)v_0 \rangle + \nabla p_1 = 0,$$

$$\operatorname{div} u_1 = 0,$$

$$u_1|_{\Gamma} = -w_1|_{\Gamma}.$$

Вектор-функция $(u_1, p_1) = (0, 0)$ нам подходит.

Перейдем к погранслоynom слагаемым:

$$\frac{\partial z_1^{(1)}}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial^2 z_1^{(1)}}{\partial \rho^2},$$

$$z_1^{(1)}|_{\Gamma} = -v_1^{(1)}|_{\Gamma} = 0.$$

Откуда $z_1^{(1)} = 0$. Наконец, $\frac{\partial g_2}{\partial \rho} = -\frac{\partial z_1^{(2)}}{\partial \tau} = 0$, $\frac{\partial h_2}{\partial \rho} = 0$.

Получаем в итоге приближение компоненты v решения:

$$v(x, y, \tau) = - \left(\begin{array}{l} (1 - (x^2 + y^2))y \\ (1 - (x^2 + y^2))(-x) \end{array} \right) \cos \omega t + a + O(\omega^{-1}), \quad \omega \rightarrow \infty,$$

равномерно относительно $(x, y, t) \in \mathbf{Q}$.

Список цитируемых источников

1. *Басистая, Д.А., Левенштам, В.Б.* Асимптотика решений обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми. Известия вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств.науки. Механика сплошной среды. Спецвыпуск, 46-48 (2004).
Basistaya, D.A. Levenshtam, V.B. Asimptotika resheniy obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy s bol'shimi vysokochastotnymi slagayemyymi. Izvestiya vuzov. Sev.-Kavk. region. Yestekstvennyye nauki. Mekhanika sploshnoy sredy. Spetsvypusk. 46-48 (2004). (In Russian)
2. *Вишик, М.И., Люстерник, Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Успехи мат. Наук, 12, №5, 3-122 (1957).
Vishik, M.I., Lyusternik, L.A. Regulyarnoye vyrozhdeniye i pogranichnyy sloy dlya lineynykh differentsial'nykh uravneniy s malym parametrom. Uspekhi mat. Nauk, 12, No5, 3-122 (1957). (In Russian)
3. *Ивлева, Н.С., Левенштам, В.Б.* Асимптотическое интегрирование параболических систем с большими высокочастотными слагаемыми. Мат.форум, 4. Иссл. по мат. анализу, диф. уравн. и их прил. Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, 63-78 (2010). (Итоги науки. Юг России)

- Ivleva, N.S., Levenshtam, V.B. Asimptoticheskoye integrirovaniye parabolicheskikh sistem s bol'shimi vysokochastotnymi slagayemyimi. *Mat.forum*, 4. Issl. po mat. analizu, dif. uravn. i ikh pril. Vladikavkaz: YUMI VNTS RAN i RSO-A, 63-78 (2010). (Itogi nauki. Yug Rossii) (In Russian)
4. *Ивлева, Н.С., Левенштам, В.Б.* Асимптотическое интегрирование параболических систем с большим параметром. *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки*, 172, №6, 26-31 (2012).
- Ivleva, N.S., Levenshtam, V.B. Asimptoticheskoye integrirovaniye parabolicheskikh sistem s bol'shim parametrom. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-kavkazskiy region. Seriya: yestestvennyye nauki*, 172, No6, 26-31 (2012). (In Russian)
5. *Капикуян, А.К., Левенштам, В.Б.* Асимптотика периодического решения системы параболических уравнений с большими высокочастотными слагаемыми. *Изв. вузов. Сев-Кавк. регион*, 2009.
- Капикуян, А.К., Levenshtam, V.B. Asimptotika periodicheskogo resheniya sistemy parabolicheskikh uravneniy s bol'shimi vysokochastotnymi slagayemyimi. *Izv. vuzov. Sev-Kavk. region*, 2009. (In Russian)
6. *Ладыженская, О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости (2-е изд.), М: Наука (1970).
- Ladyzhenskaya O.A. *Matematicheskiye voprosy dinamiki vyazkoj neshhimayemoy zhidkosti* (2 izd.), M.: Nauka (1970).
7. *Левенштам, В.Б.* Обоснование метода усреднения для задачи конвекции при высокочастотных вибрациях. *Сибирский матем. ж.*, 34, №2, 92-109 (1993).
- Levenshtam, V.B. Justification of the averaging method for the convection problem with high-frequency vibrations. *Siberian Math. J.*, 34, No2, 280–296 (1993).
8. *Левенштам, В.Б.* Асимптотическое разложение решения задачи о вибрационной конвекции, *ЖВМиМФ.*, 40, №9, 1416–1424 (2000).
- Levenshtam, V.B. Asymptotic expansion of the solution to the problem of vibrational convection. *Comput. Math. Math. Phys.*, 40, No9, 1357–1365 (2000).
9. *Левенштам, В.Б.* Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми. *Сиб. матем. журн.*, 46, №4, 805–821 (2005).
- Levenshtam, V.B. Asymptotic integration of parabolic problems with large high-frequency summands. *Siberian Math. J.*, 46, No4, 637–651 (2005).
10. *Левенштам, В.Б.* Обоснование метода усреднения для параболических уравнений, содержащих быстроосциллирующие слагаемые с большими амплитудами. *Изв. РАН. Сер. матем.*, 70, №2 (2006).
- Levenshtam, V.B. Justification of the averaging method for parabolic equations containing rapidly oscillating terms with large amplitudes. *Izv. Math.*, 70, No2, 233–263 (2006).
11. *Левенштам, В.Б.* Некоторые вопросы теории усреднения параболических уравнений с большими высокочастотными слагаемыми. *ДАН*, 411, №3 (2006).
- Levenshtam, V.B. Nekotoryye voprosy teorii usredneniya parabolicheskikh uravneniy s bol'shimi vysokochastotnymi slagayemyimi. *DAN*, 411, No3 (2006). (In Russian)

12. *Левенштам, В.Б., Хатламаджиян, Г.Л.* Распространение теории метода усреднения на дифференциальные уравнения, содержащие быстроосциллирующие слагаемые с большими амплитудами. Задача о периодических решениях. Изв. вузов. Математика, 2006.

Levenshtam, V.B., Khatlamadzhiyan, G.L. Extension of averaging theory to differential equations containing rapidly oscillating terms with large amplitudes. The problem of periodic solutions. Russian Math. (Iz. VUZ), 50, No6, 33–45 (2006).

13. *Симоненко, И.Б.* Обоснование метода осреднения для задачи конвекции в поле быстро осциллирующих сил и для других параболических уравнений. Мат.сб., 87, №2, 236-253 (1972).

Simonenko, I.B. A justification of the averaging method for a problem of convection in a field of rapidly oscillating forces and for other parabolic equations. Math. USSR-Sb., 16, No2, 245–263, (1972).

14. *Юдович, В.И.* Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями. Успехи механики, 4, №3, 26-158 (2006).

Yudovich, V.I. Vibrodinamika i vibrogeometriya mekhanicheskikh sistem so svyazyami. Uspekhi mekhaniki, 4, No3. S.26-158 (2006). (In Russian)

15. *N. Ivleva, V. Levenshtam* Asymptotic analysis of the generalized convection problem, Eurasian Math. J., 6, No 1, 41–55, (2015).

Получена 27.10.2019

РЕФЕРАТЫ

УДК 517.958

Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ. **К проблеме малых колебаний системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд (модельная задача)** (русский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №3. — С. 213–243.

В работе изучается скалярная задача сопряжения, модулирующая проблему малых колебаний двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд. Исследуется начально-краевая задача и методами теории полугрупп доказывается теорема о ее однозначной разрешимости на любом конечном отрезке времени. Возникающая при этом соответствующая спектральная проблема для нормальных колебаний системы исследуется методами спектральной теории оператор-функций (операторных пучков). Полученный операторный пучок обобщает как известный операторный пучок С. Г. Крейна (колебания вязкой жидкости в сосуде), так и пучок, возникающий в задаче о малых движениях вязкоупругой жидкости в частично заполненном сосуде. Рассмотрен также пример двумерной задачи, допускающей разделение переменных, и на этой основе исследован более подробно спектр нормальных движений гидросистем.

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, гидродинамическая система, ортопроектор, операторно-дифференциальное уравнение, задача Коши, спектральная задача

Ил. 1. Библиогр. 17 назв.

УДК 519.64

И. В. БОЙКОВ. **Аналитические и численные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений** (русский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №3. — С. 244–272.

В статье дан краткий обзор работ, посвященных аналитическим и численным методам решения гиперсингулярных интегральных уравнений. Рассматриваются гиперсингулярные интегральные уравнения на замкнутых и разомкнутых контурах интегрирования, полигиперсингулярные и многомерные гиперсингулярные интегральные уравнения. Основное внимание уделяется приближенным методам решения одномерных гиперсингулярных интегральных уравнений первого и второго рода с особенностями второго порядка. Рассматриваются гиперсингулярные интегральные уравнения первого рода, определенные на сегменте $[-1, 1]$, решения которых имеют вид $x(t) = (1 - t^2)^{\pm 1/2} \varphi(t)$, $((1 - t)/(1 + t))^{\pm 1/2} \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — гладкая функция. Рассматриваются гиперсингулярные интегральные уравнения второго рода, определенные на сегменте $[-1, 1]$, для решения которых строится сплайн-коллокационный метод со сплайнами первого порядка. Отдельный раздел посвящен приближенным методам решения гиперсингулярных интегральных уравнений на замкнутых контурах.

Ключевые слова: гиперсингулярные интегральные уравнения, метод коллокаций, метод механических квадратур, итерационные методы.

Библиогр. 49 назв.

УДК 314.15.926

G. J. SÖDERBACKA, A. S. PETROV. **Исследование поведения в системе: много хищников — одна жертва** (английский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №3. — С. 273–288.

Рассматривается известная система хищник — жертва, где хищники питаются на одной жертве. В основном рассматривается система с двумя хищниками. Приведен обзор общих результатов, среди них условия для вымирания одного хищника и изучение разных типов сосуществования.

В невырожденных случаях хищники в этой системе не могут сосуществовать у состояния равновесия. Однако циклические и более сложные сосуществования возможны. Предлагаются результаты многих численных экспериментов. Одномерное модельное отображение для отображения Пуанкаре приведена при некоторых условиях на систему. Самые интересные случаи, где модельное отображение не работает и когда присутствует кое-что подобное спиральному аттрактору, мало изучены и сформулируем открытые вопросы. Обсуждаем бифуркации и существование многих аттракторов одной и той же системе.

Ключевые слова: бифуркация, хаос, хищник-жертва.

Ил. 9. Библиогр. 18 назв.

УДК 517.938.5+523.947

О. ПОЧИНКА, С. ЗИНИНА. **Динамика топологических потоков и гомеоморфизмов с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством на n -мерных многообразиях** (английский) // *Динамические системы*, 2019. — Том 9(37), №3. — С. 289–296.

Начиная с размерности 4 появляются так называемые несглаживаемые многообразия, многообразия, не допускающие триангуляцию и другие препятствия, не дающие возможности использовать технику гладких многообразий для исследования многомерных многообразий. Кроме того, все методы изучения гладких динамических систем на многомерных многообразиях основаны на аппроксимации всех подмножеств кусочно линейными или топологическими объектами. В связи с этим совершенно естественной является идея рассмотрения на многомерных многообразиях динамических систем, не использующих понятия гладкости в своем определении. Так уже прочно вошли в научный обиход гомеоморфизмы и топологические потоки Морса-Смейла, которые также прочно связаны с топологией объемлющего многообразия, как и их гладкие аналоги. В настоящей статье мы исследуем общие динамические свойства гомеоморфизмов и топологических потоков с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством.

Ключевые слова: топологический поток, цепно рекуррентное множество, гиперболическое множество

Библиогр. 5 назв.

УДК 517.957

Н. С. ИВЛЕВА. **Задачи с быстро осциллирующими данными. Два примера построения асимптотик** (русский) // *Динамические системы*, 2019. — Том 9(37), №3. — С. 297–310.

Для двух конкретных задач с быстро осциллирующими по времени данными — полулинейной параболической системы с двумя пространственными переменными и системы Навье-Стокса, моделирующей течение жидкости в плоском случае, — решается вопрос о построении асимптотических разложений их периодических по времени решений. Обе задачи рассматриваются в бесконечном по времени цилиндре, осью которого служит временная числовая ось, а основанием — двумерный единичный круг. В качестве краевых условий взяты условия Дирихле. В основе построения указанных асимптотических разложений лежат два алгоритма, разработанных, обоснованных и полученных ранее Н.С. Ивлевой и В.Б. Левенштамом (2010, 2015 гг.).

Ключевые слова: параболическая система, задача Навье-Стокса, высокочастотные коэффициенты, метод усреднения, асимптотика.

Библиогр. 15 назв.

ABSTRACTS

MSC 2010: 76D05, 35Q30, 39A14, 39B42

N. D. KOPACHEVSKY. **Normal oscillations of hydrosystem of two viscoelastic fluids in stationary container (a model problem)** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **9(37)**, no.3, 213–243 (2019).

In the paper, we consider a problem on small motions and normal oscillations of two viscoelastic fluids in a stationary container. One of models of such fluids is Oldroid's model. It is described, for example, in the book Eirich, F. R. *Rheology. Theory and Applications*. N.-Y.: Academic Press, 1956. It is important to notice that the present paper is devoted to the study of the scalar model problem. Also it should be noted that the present paper based on the previous author's works together with Azizov, T. Ya., Orlova L. D., Krein, S. G. Namely, problem on small movements of one or two viscoelastic fluid for generalized Oldroid's model and normal oscillations of a viscoelastic fluid in an open container were investigated in these papers. The aim of this paper is to use an operator approach of mentioned works, to prove the theorem on correct solvability for the scalar model initial boundary-value problem generated by a problem of small motions of two viscoelastic fluids in a stationary container and to get properties of eigenvalues and eigenelements of corresponding spectral problem. This paper is organized as follows. In section 1 we describe a model of viscoelastic fluid, formulate mathematical statement of the problem: linearized equations of movements, stickiness condition, kinematic and dynamic conditions. Further, in this section we receive the law of full energy balance and choose the functional spaces generated by the problem. For applying of method of orthogonal projection we need to get orthogonal projector on corresponding space. The law of action of this projector we receive in this section. In section 2 we make transition to operator equation by using orthogonal projector received in section 1. Further, we solve some auxiliary problems and obtain the Cauchy problem for the system of integro-differential equation in some Hilbert space. Then we make transition to a system of differential equation. This system can be rewrite as operator differential equation in the sum of Hilbert spaces. Properties of main operator of this problem are studied in this section. The existence and uniqueness theorems for final operator differential equation as for original initial-boundary-value problem based on factorization, closure and accretivity property of operator matrix. Finally, in this section we consider the spectral problem on normal oscillations corresponding to the evolution problem. This means that external forces equal to zero and dependence by time for the unknown function has the form $e^{-\lambda t}$. Here we obtain the spectral problem for operator pencil and study main properties of it. Section 3 is devoted to investigating of model spectral problem in rectangular domain. The more detailed properties of eigenvalues are obtained here.

Keywords: viscoelastic fluid, hydrodynamic system, orthogonal projector, operator differential equation, Cauchy problem, spectral problem

Fig. 1. Ref. 17.

MSC 2010: 65R20

I. V. BOYKOV. **Analytical and numerical methods for solving hypersingular integral equations** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **9(37)**, no.3, 244–272 (2019).

The article gives a brief overview of works devoted to analytical and numerical methods for solving hypersingular integral equations. Hypersingular integral equations on closed and open integration loops, polyhypersingular and multidimensional hypersingular integral equations are considered. The main attention is paid to approximate methods for solving one-dimensional hypersingular integral equations of the first and second kinds with singularities of the second order. We consider hypersingular integral equations of the first kind defined on the segment $[-1, 1]$, whose solutions have the form $x(t) = (1 - t^2)^{\pm 1/2} \varphi(t)$, $((1 - t)/(1 + t))^{\pm 1/2} \varphi(t)$, where $\varphi(t)$ is a smooth function. Hypersingular

integral equations of the second kind, defined on the segment $[-1, 1]$, are considered. For solution of its the spline-collocation method with first-order splines is constructed. A separate section is devoted to approximate methods for solving hypersingular integral equations on closed circuits.

Keywords: hypersingular integral equations, collocation method, mechanical quadrature method, iterative methods.

Ref. 49.

MSC 2010: 34C60, 92D25, 34C25, 37C05

G. J. SÖDERBACKA, A. S. PETROV. **Review on the behaviour of a many predator–one prey system** (English). *Dinamicheskie Sistemy* **9(37)**, no.3, 273–288 (2019).

We consider a known predator-prey system, where more than one predator compete for the same prey. Mainly the case with two predators is considered. A review of general results is given, among them conditions for the extinction of one predator and an investigation of the different types of coexistence of predators. In non-degenerate cases the predators in this model cannot coexist at an equilibrium, but there can be a cyclic or more complicated coexistence. Many numerical results are presented. A model map for a Poincaré map is given under some conditions. But the most interesting case where there can arise "spiral-like" attractors is not well known here, and we pose open questions. We discuss some bifurcations and the existence of systems with several attractors.

Keywords: bifurcation, chaos, predator-prey.

Fig. 9. Ref. 18.

MSC 2010: 37D15

O. POCHINKA, S. ZININA. **Dynamics of topological flows and homeomorphisms with a finite hyperbolic chain-recurrent set on n -manifolds** (English). *Dinamicheskie Sistemy* **9(37)**, no.3, 289–296 (2019).

Starting from dimension 4, so-called non-smoothed manifolds, manifolds that do not allow triangulation and other obstacles that prevent the use of the technique of smooth manifolds for the study of multidimensional manifolds appear. In addition, all methods for studying smooth dynamical systems on multidimensional manifolds are based on the approximation of all subsets by piecewise linear or topological objects. In this regard, the idea of consideration of dynamical systems on multidimensional manifolds that do not use the concept of smoothness in their definition is completely natural. So homeomorphisms and topological Morse-Smale flows, which are also firmly connected with the topology of the ambient manifold, as well as their smooth analogues, have already entered into scientific usage. In the present paper we investigate general dynamical properties of homeomorphisms and topological flows with a finite hyperbolic chain recurrent set.

Keywords: topological flow, chain-recurrent set, hyperbolic set

Ref. 5.

MSC 2010: 35K40, 76E06, 35B10, 58J37, 76D05

N. S. IVLEVA. **Tasks with fast oscillating data. Two examples of asymptotics construction** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **9(37)**, no.3, 297–310 (2019).

For two specific problems with rapidly oscillating data in time — the semilinear parabolic system with two spatial variables and the Navier-Stokes system that simulates the fluid flow in the flat case — the question of constructing asymptotic expansions of their time-periodic solutions is solved. Both problems are considered in the cylinder, infinite in time, the axis of which is the temporary numerical axis, and the basis is the two-dimensional unit circle. The Dirichlet conditions are taken as boundary

conditions. The construction of these asymptotic expansions is based on two algorithms developed, justified and obtained earlier by N. S. Ivleva and V. B. Levenstam (2010, 2015).

Keywords: parabolic system, the Navier-Stokes problem, high-frequency terms, averaging method, asymptotics.

Ref. 15.

Подписано в печать 30.12.2019. Формат 60x84/8.
Усл. печ. л. 12,09. Тираж 30 экз. Заказ № НП/323. Бесплатно.
Дата выхода в свет 07.02.2020.
Отпечатано в Издательском доме
ФГАОУ ВО «КФУ им. В. И. Вернадского»
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7

Динамические системы

Том 9(37) №3

2019

Содержание

- Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ. К проблеме малых колебаний системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд (модельная задача) 213
- И. В. БОЙКОВ. Аналитические и численные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений 244
- G. J. SÖDERBACKA, A. S. PETROV. Review on the behaviour of a many predator–one prey system 273
- O. POCHINKA, S. ZININA . Dynamics of topological flows and homeomorphisms with a finite hyperbolic chain-recurrent set on n -manifolds 289
- Н. С. ИВЛЕВА. Задачи с быстро осциллирующими данными. Два примера построения асимптотик 297

Dinamicheskie sistemy (Dynamical Systems)

Volume 9(37) no.3

2019

Table of Contents

N. D. KOPACHEVSKY. Normal oscillations of hydrosystem of two viscoelastic fluids in stationary container (a model problem)	213
I. V. BOYKOV. Analytical and numerical methods for solving hypersingular integral equations	244
G. J. SÖDERBACKA, A. S. PETROV. Review on the behaviour of a many predator–one prey system	273
O. POCHINKA, S. ZININA. Dynamics of topological flows and homeomorphisms with a finite hyperbolic chain-recurrent set on n -manifolds	289
N. S. IVLEVA. Tasks with fast oscillating data. Two examples of asymptotics construction	297