Динамические системы, 2019, том 9(37), №3, 297–310

УДК 517.957

Задачи с быстро осциллирующими данными. Два примера построения асимптотик

Н. С. Ивлева

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича,
Ростов-на-Дону 344058. *E-mail: ivleva.n.s@yandex.ru*

Аннотация. Для двух конкретных задач с быстро осциллирующими по времени данными — полулинейной параболической системы с двумя пространственными переменными и системы Навье-Стокса, моделирующей течение жидкости в плоском случае, — решается вопрос о построении асимптотических разложений их периодических по времени решений. Обе задачи рассматриваются в бесконечном по времени цилиндре, осью которого служит временная числовая ось, а основанием — двумерный единичный круг. В качестве краевых условий взяты условия Дирихле. В основе построения указанных асимптотичесвких разложений лежат два алгоритма, разработанных, обоснованных и полученных ранее Н.С. Ивлевой и В.Б. Левенштамом (2010, 2015 гг.).

Ключевые слова: параболическая система, задача Навье-Стокса, высокочастотные коэффициенты, метод усреднения, асимптотика.

Tasks with fast oscillating data. Two examples of asymtotics construction

N. S. Ivleva

I. I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science,
Rostov-on-Don 344058.

Abstract. For two specific problems with rapidly oscillating data in time — the semilinear parabolic system with two spatial variables and the Navier-Stokes system that simulates the fluid flow in the flat case — the question of constructing asymptotic expansions of their time-periodic solutions is solved. Both problems are considered in the cylinder, infinite in time, the axis of which is the temporary numerical axis, and the basis is the two-dimensional unit circle. The Dirichlet conditions are taken as boundary conditions. The construction of these asymptotic expansions is based on two algorithms developed, justified and obtained earlier by N. S. Ivleva and V. B. Levenstam (2010, 2015).

Keywords: parabolic system, the Navier-Stokes problem, high-frequency terms, averaging method, asymptotics.

MSC 2010: 35K40, 76E06, 35B10, 58J37, 76D05

1. Введение

В настоящее время список работ, посвященных асимптотическому интегрированию различных задач для дифференциальных уравнений с быстро осцилирующими по времени данными, очень велик. Упомянем лишь некоторые особенно близкие к данной статье работы [13, 7, 8, 1, 9, 10, 11, 12, 14, 5, 3], в которых речь идет о параболических, абстрактных параболических уравнениях и некоторых задачах гидродинамики.

В работе [4] для широкого класса полулинейных параболических систем, содержащих быстро осциллирующие по времени слагаемые, построена полная асимптотика периодического по времени решения.

В работе [15] аналогичный вопрос решен для задачи Навье-Стокса с быстро осциллирующими по времени данными, которая моделирует течение жидкости в плоском случае.

В настоящей статье разработанные в [4, 15] алгоритмы применяются в двух модельных задачах.

2. Параболическая система дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми

В цилиндре $\mathbf{Q} = \overline{\Omega} \times \mathbb{R} = \{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу о $\frac{2\pi}{\omega}$-периодическом по времени решении системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= e^{-|x|}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right) + u_1^2 \sin 5\omega t - 2\sin^2 \omega t + u_2 \cos 4\omega t + \\ &\quad + \sqrt{\omega}(1 - (x_1^2 + x_2^2))\left(\sin 3\omega t - \frac{\sqrt{3}}{6}\sin \omega t\right), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + u_2^2 \cos 5\omega t - 1 + u_1 \sin 4\omega t + \\ &\quad + \sqrt{\omega}(1 - (x_1^2 - x_2^2))\left(\cos 3\omega t - \frac{\sqrt{3}}{6}\cos \omega t\right), \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{2.2}$$

где $\Gamma = \{x_1^2 + x_2^2 = 1\} \times \mathbb{R}$ — граница $\mathbf{Q}$, ω — большой параметр, $x = (x_1, x_2)$.

Решения всех задач в данной работе мы понимаем в классическом смысле.

Наряду с возмущенной задачей (2.1)-(2.2) рассмотрим усредненную [4]:

$$\begin{aligned} (L_0 v)_1 &\equiv \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} = e^{|x|},\ v_1|_{x_1^2+x_2^2=1} = 0, \\ (L_0 v)_2 &\equiv \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} = 1,\ v_2|_{x_1^2+x_2^2=1} = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Заметим, что вектор-функция

$$u_0(x) = \begin{pmatrix} \int\limits_r^1 \left(\frac{1-e^s}{s} + e^s\right) ds \\ r^2/4 - 1/4 \end{pmatrix}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

является стационарным решением усредненной задачи (2.3) для системы (2.1)-(2.2). Действительно, в задаче (2.3) перейдем к полярным координатам:

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_1}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial \varphi^2} = e^r,\ v_1|_{r=1} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_2}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial \varphi^2} = 1,\ v_2|_{r=1} = 0. \end{array} \tag{2.4}$$

Будем предполагать, что $\frac{\partial^2 v_1}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 v_2}{\partial \varphi^2} = 0$ и пусть $\frac{\partial v_1}{\partial r} = w_1$, $\frac{\partial v_2}{\partial r} = w_2$. Тогда (2.4) без учета граничных условий примет вид:

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial w_1}{\partial r} + \dfrac{1}{r} w_1 = e^r, \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial r} + \dfrac{1}{r} w_2 = 1. \end{array} \tag{2.5}$$

Найдем общее решение однородной задачи

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} v = 0.$$

Имеем:

$$ln|v| = -ln|r| + lnc, ln|v| = ln\frac{c}{|r|}, v = \frac{c_1}{r}, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Легко проверить, что частным решением неоднородной задачи (2.5) является вектор-функция

$$\begin{pmatrix} w_{p1} \\ w_{p2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{e^r}{r} + e^r \\ -\dfrac{1}{r} + \dfrac{r}{2} \end{pmatrix}.$$

Решением (2.5) будет сумма частного решения неоднородной задачи и общего решения однородной:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{e^r}{r} + e^r + \dfrac{c_1}{r} \\ -\dfrac{1}{r} + \dfrac{r}{2} + \dfrac{c_2}{r} \end{pmatrix}, c_{1,2} = const.$$

Подберем константы $c_{1,2}$ так, чтобы наше решение было непрерывно дифференцируемо в нуле:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{e^r}{r} + e^r + \dfrac{1}{r} \\ -\dfrac{1}{r} + \dfrac{r}{2} + \dfrac{1}{r} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, задача (2.3) имеет стационарное вещественное решение

$$u_0(x) = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_r^1 \left(\frac{1-e^s}{s} + e^s\right) ds \\ r^2/4 - 1/4 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что под невырожденностью решения $u_0(x)$ подразумевается, что линейная эллиптическая задача

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = 0, \\ u_1|_{x_1^2+x_2^2=1} = 0, \, u_2|_{x_1^2+x_2^2=1} = 0, \end{array} \tag{2.6}$$

имеет только нулевое решение в области $\{x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Для задачи (2.6) это известный факт.

Определим теперь три вспомогательные задачи

(A1) Задача Дирихле для эллиптической системы вида

$$\begin{array}{l} L_0 u = \gamma(x), x \in \Omega, \\ u(x) \,|_{\partial\Omega} = 0, \end{array}$$

где γ — известная бесконечно дифференцирумая вектор-функция.

Еще две задачи представляют собой задачи об ограниченном на луче $\rho > 0$ решении следующих обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром $\psi \in \partial\Omega$.

(A2)

$$\begin{array}{l} ikw(\psi,\rho) = \dfrac{\partial^2 w(\psi,\rho)}{\partial \rho^2} + F(\psi,\rho)e^{\lambda\rho}, \\ w(\psi,0) = w_0(\psi), \\ w\,|_{\rho=\infty} = 0, \end{array}$$

(A3)

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 w(\psi,\rho)}{\partial \rho^2} + F(\psi,\rho)e^{\lambda\rho} = 0, \\ w\,|_{\rho=\infty} = 0. \end{array}$$

Здесь $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, Re(\lambda) < 0$, F — полином по ρ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, w_0 — бесконечно дифференцируемая функция.

Как известно ([4, теоремы 1,2]), в наших предположениях для задачи (2.1)-(2.2) справедливы следующие утверждения.

1. Найдутся четыре положительных числа $\beta \geq 1, \mu, r_0 \in (0,1]$, ω_0 таких, что при $\omega > \omega_0$ в шаре S_{r_0} пространства $C_\mu(\mathbb{R}, C^\beta(\overline{\Omega}))$ с центром в точке u_0 радиуса r_0 существует и единственно $\frac{2\pi}{\omega}$-периодическое по t решение u_ω задачи (2.1)-(2.2). При этом выполнено предельное равенство

$$\lim_{\omega\to\infty} \|u_\omega - u_0\|_{C_\mu(\mathbb{R}, C^\beta)} = 0.$$

2. Это решение является бесконечно гладким.

3. В [4] разработан алгоритм построения полной асимптотики решения u_ω. Построение частичных сумм этой асимптотики сводится к решению линейных однозначно разрешимых задач типов (А1), (А2), (А3). Эти частичные суммы $\overset{k}{u}, k = 1, 2, \ldots,$ вещественные и бесконечно гладкие.

В данном разделе мы останавливаемся на построении только $\overset{1}{u}$. Отметим сразу, что в [4] доказана, в частности, следующая оценка.
4. Найдется такое положительное число ω_1, что при $\omega > \omega_1$ при всех целых $k \geq 0$ справедливы оценки

$$\begin{gathered}\left\| u_\omega - \overset{1}{u} \right\|_{C^{k,\frac{k}{2}}} \leq c(k)\omega^{\frac{k-2}{2}}, \\ c(k) = const > 0.\end{gathered} \tag{2.7}$$

Асимптотическое разложение будем строить, следуя [4].

Для построения асимптотики решения задачи (2.1)-(2.2) введем в замыкании $\overline{\Omega}_\eta$ пограничной подобласти Ω_η области Ω ширины η криволинейную систему координат (s, φ) следующим образом.

Определим отображение $\partial\Omega \times [0, \eta] \to \overline{\Omega}_\eta$, $0 < \eta < 1$, где $\partial\Omega$ — граница области Ω, т.е. круг: $\{x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, по закону $(s, \varphi) \to \varphi + n_\varphi s$. Здесь φ — точка на $\partial\Omega$, имеющая местную координату φ, а n_φ — вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке φ.

Согласно методу пограничного слоя [2], введем новую независимую переменную $\rho = \sqrt{\omega}s, s \leq \eta$, выразим производные по x_1, x_2 через производные по ρ, φ и разложим коэффициенты в полученных равенствах по степеням $\omega^{-1/2}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial s}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \varphi} = \sqrt{\omega}\frac{\partial s}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = \frac{\partial s}{\partial[(1-s)\cos\varphi]} = -\cos\varphi, \frac{\partial s}{\partial x_2} = \frac{\partial s}{\partial[(1-s)\sin\varphi]} = -\sin\varphi,$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -\frac{\sin\varphi}{1-s} = -\sin\varphi(1 + \rho/\sqrt{\omega} + \rho^2/\omega + \ldots), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\cos\varphi}{1-s} = \cos\varphi(1 + \rho/\sqrt{\omega} + \rho^2/\omega + \ldots).\end{gathered}$$

Таким образом,

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x_1} = -\sqrt{\omega}\frac{\partial}{\partial \rho}\cos\varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi}sin\varphi(1 + \rho/\sqrt{\omega} + \rho^2/\omega + \ldots), \\ \frac{\partial}{\partial x_2} = -\sqrt{\omega}\frac{\partial}{\partial \rho}sin\varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi}\cos\varphi(1 + \rho/\sqrt{\omega} + \rho^2/\omega + \ldots).\end{gathered}$$

Отсюда

$$e^{-|x|}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right]=e^{-(1-\rho/\sqrt{\omega})}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right]=$$

$$=e^{-1}(1+\rho/\sqrt{\omega}+\rho^2/(2\omega)+\dots)\Bigg(\omega\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\sqrt{\omega}\times 0+\sum_{i,j=1}^{2}\Bigg[\sum_{k=0}^{N_0}\omega^{-\frac{k}{2}}M_{i,j,k}(\rho,\varphi)+$$

$$+\omega^{-\frac{N_0+1}{2}}M_{i,j,N_0+1}(\rho,\varphi,s)\Bigg]\Bigg),\quad(2.8)$$

где $M_{i,j,k}$, $1\le i,j\le 2$, $0\le k\le N_0$ — дифференциальные выражения относительно ρ,φ, коэффициенты которых являются полиномами по ρ.

Асимптотическое разложение решения $u_\omega(x,t)$ задачи (2.1)-(2.2) строим в виде ряда

$$u(x,t)\sim u_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\omega^{-\frac{k}{2}}(u_k(x)+v_k(x,\tau)+w_k(\rho,\varphi)+z_k(\rho,\varphi,\tau)),\ \tau=\omega t,\quad(2.9)$$

где коэффициенты $v_k(x,\tau)$ и $z_k(\rho,\varphi,\tau)$ являются 2π-периодическими с нулевыми средними по τ, $u_k(x),v_k(x,\tau)$ — регулярные слагаемые, а $w_k(\rho,\varphi),z_k(\rho,\varphi,\tau)$ — погранслойные. Следуя [2], мы полагаем, что все погранслойные функции обращаются в ноль вне погранполосы, а в ней умножены на следующую срезающую функцию $\nu(x)\in C^\infty(\Omega)$ такую, что

$$\nu(x)=\begin{cases}1,0\le r\le\eta/3,\\0,x\in\Omega\setminus\Omega_{2\eta/3}.\end{cases}$$

Подставив ряд (2.9) в исходное уравнение, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\omega^{\frac{2-k}{2}}\frac{\partial(v_{k1}(x,\tau)+z_{k1}(\rho,\varphi,\tau))}{\partial\tau}=$$

$$=e^{-|x|}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right]\left[u_{01}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\omega^{-\frac{k}{2}}(u_{k1}(x)+v_{k1}(x,\tau))\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\omega^{-\frac{k}{2}}e^{-1}(1+\rho/\sqrt{\omega}+\rho^2/(2\omega)+\dots\times\left(\omega\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}(w_{k1}(\rho,\varphi)+z_{k1}(\rho,\varphi,\tau))+\right.$$

$$\left.+\sum_{i,j=1}^{2}\left[M_{i,j,0}(w_{k1}(\rho,\varphi)+z_{k1}(\rho,\varphi,\tau))+\frac{1}{\sqrt{\omega}}M_{i,j,1}(w_{k1}(\rho,\varphi)+z_{k1}(\rho,\varphi,\tau))+\dots\right]\right)+$$

$$+u_1^2\sin 5\omega t-2\sin^2\omega t+u_2\cos 4\omega t+\sqrt{\omega}(1-(x_1^2+x_2^2))\left(sin3\omega t-\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\omega t\right);$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\omega^{\frac{2-k}{2}}\frac{\partial(v_{k2}(x,\tau)+z_{k2}(\rho,\varphi,\tau))}{\partial\tau}= \tag{2.10}$$

$$=\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right]\left[u_{02}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\omega^{-\frac{k}{2}}(u_{k2}(x)+v_{k2}(x,\tau))\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\omega^{-\frac{k}{2}}\left(\omega\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}(w_{k2}(\rho,\varphi)+z_{k2}(\rho,\varphi,\tau))+\right.$$

$$\left.+\sum_{i,j=1}^{2}\left[M_{i,j,0}(w_{k2}(\rho,\varphi)+z_{k2}(\rho,\varphi,\tau))+\frac{1}{\sqrt{\omega}}M_{i,j,1}(w_{k2}(\rho,\varphi)+z_{k2}(\rho,\varphi,\tau))+\ldots\right]\right)+$$

$$+u_2^2\cos 5\omega t-1+u_1\sin 4\omega t+\sqrt{\omega}(1-(x_1^2+x_2^2))\left(\cos 3\omega t-\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\omega t\right);$$

$$\begin{array}{l} u_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\omega^{-\frac{k}{2}}\left(u_k(x)+v_k(x,\tau)+w_k(\rho,\varphi)+z_k(\rho,\varphi,\tau)\right)=0,\\ x_1^2+x_2^2=1. \end{array} \tag{2.11}$$

Сначала найдем регулярные коэффициенты. Приравняем их при степени $\omega^{\frac{1}{2}}$:

$$\frac{\partial v_{11}(x,\tau)}{\partial\tau}=(1-(x_1^2+x_2^2))\left(\sin 3\omega t-\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\omega t\right),$$

$$\frac{\partial v_{12}(x,\tau)}{\partial\tau}=(1-(x_1^2+x_2^2))\left(\cos 3\omega t-\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\omega t\right),$$

$$\langle v_1\rangle=0.$$

Отсюда

$$v_1=\begin{pmatrix}(1-(x_1^2+x_2^2))\left(-\frac{\cos 3\omega t}{3}+\frac{\sqrt{3}\cos\omega t}{6}\right)\\ (1-(x_1^2+x_2^2))\left(\frac{\sin 3\omega t}{3}-\frac{\sqrt{3}\sin\omega t}{6}\right)\end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Соберем коэффициенты при степени ω^0 в (2.10):

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial v_{21}}{\partial\tau}=e^{-|x|}\left[\dfrac{\partial^2 u_{01}}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u_{01}}{\partial x_2^2}\right]+u_{01}^2\sin 5\omega t-1+\sin 2\omega t+u_{02}\cos 4\omega t+\\ +(u_{11}+v_{11})\left(\sin 3\omega t-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\sin\omega t\right),\\ \dfrac{\partial v_{22}}{\partial\tau}=\dfrac{\partial^2 u_{02}}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u_{02}}{\partial x_2^2}+u_{02}^2\cos 5\omega t-1+u_{01}\sin 4\omega t+\\ +(u_{12}+v_{12})\left(\cos 3\omega t-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\cos\omega t\right). \end{array} \tag{2.13}$$

Применим к уравнениям (2.13) операцию усреднения по τ :

$$\begin{aligned} &e^{-|x|}\left[\frac{\partial^2 u_{01}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_{01}}{\partial x_2^2}\right]-1=0,\\ &\frac{\partial^2 u_{02}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_{01}}{\partial x_2^2}-1=0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Вычтем из (2.13) уравнения (2.14) и упростим полученную систему:

$$\frac{\partial v_{21}}{\partial \tau}=u_{01}^2\sin 5\omega t+\sin 2\omega t+u_{02}\cos 4\omega t+u_{11}\left(\sin 3\omega t-\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\omega t\right)+$$

$$+(1-(x_1^2+x_2^2))\left(-\frac{\sin 6\omega t}{6}+\frac{\sqrt{3}\sin 4\omega t}{9}+\frac{\sqrt{3}\sin\omega t}{18}-\frac{\sin 2\omega t}{24}\right),$$

$$< v_{21} >= 0,$$

$$\frac{\partial v_{22}}{\partial \tau}=u_{02}^2\cos 5\omega t+u_{01}\sin 4\omega t+u_{12}\left(\cos 3\omega t-\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\omega t\right)+$$

$$+(1-(x_1^2+x_2^2))\left(\frac{\sin 6\omega t}{6}-\frac{\sqrt{3}\sin 4\omega t}{9}-\frac{\sqrt{3}\sin\omega t}{18}+\frac{\sin 2\omega t}{24}\right),$$

$$< v_{22} >= 0.$$

Усредненная задача (уравнения (2.14) вместе с соответствующими граничными условиями $u_0|_{x_1^2+x_2^2=1}=0$) есть задача (2.3), которая имеет невырожденное стационарное решение u_0. Подставим это решение в (2.12), ищем v_1.

Приравняем коэффициенты при $\omega^{-\frac{1}{2}}$, учтя последнее представление v_2 и полученное далее погранслойное слагаемое $w_1=0$:

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial^2 u_{11}}{\partial x_1^2}+\tfrac{\partial^2 u_{11}}{\partial x_2^2}=0,\ u_{11}|_{x_1^2+x_2^2=1}=0,\\ &\tfrac{\partial^2 u_{12}}{\partial x_1^2}+\tfrac{\partial^2 u_{12}}{\partial x_2^2}=0,\ u_{12}|_{x_1^2+x_2^2=1}=0. \end{aligned}$$

Отсюда находим $u_1=0$.

Перейдем к определению погранслойных коэффициентов. При $\omega^{\frac{1}{2}}$:

$$\frac{\partial z_1}{\partial \tau}=\begin{pmatrix} e^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial^2 z_1(\rho,\varphi,\tau)}{\partial \rho^2},$$

$$z_1|_{x_1^2+x_2^2=1}=-v_1|_{x_1^2+x_2^2=1},\ z_1|_{\rho=\infty}=0.$$

Т.к. $v_1|_{x_1^2+x_2^2=1}=0$, то $z_1=0$.

$$\frac{\partial^2 w_1(\rho,\varphi,\tau)}{\partial\rho^2}=0,$$

$$w_1|_{\rho=\infty} = 0.$$

Получаем: $w_1 = 0$.

Таким образом,

$$u_\omega(x,t) = \left(\begin{array}{c} \int\limits_r^1 \left(\dfrac{1-e^s}{s} + e^s \right) ds \\ \left[r^2/4 - 1/4 \right] \end{array} \right) +$$

$$+1/\sqrt{\omega} \left(\begin{array}{c} (1-(x_1^2+x_2^2)) \left[-\dfrac{cos3\omega t}{3} + \dfrac{\sqrt{3}cos\omega t}{6} \right] \\ (1-(x_1^2+x_2^2)) \left[\dfrac{sin3\omega t}{2} - \dfrac{\sqrt{3}sin\omega t}{6} \right] \end{array} \right) + O(\omega^{-1}),$$
$$\omega \to \infty,$$

равномерно относительно $(x,t) \in \mathbf{Q}$.

3. Задача о течении жидкости в высокочастотном силовом поле

В цилиндре $\mathbf{Q} = \overline{\Omega} \times \mathbb{R} = \{x^2 + y^2 \le 1\} \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу о $\dfrac{2\pi}{\omega}$-периодическом по времени решении системы уравнений Навье-Стокса

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + (v,\nabla)v + \nabla p = \omega \left(\begin{array}{c} (1-(x^2+y^2))y \\ (1-(x^2+y^2))(-x) \end{array} \right) sin\omega t + b(x,y), \\ divv = 0, \\ v|_\Gamma = 0, \end{array} \tag{3.1}$$

где $\Gamma = \{x^2 + y^2 = 1\} \times \mathbb{R}$ — граница $\mathbf{Q}$, ω — большой параметр. Здесь $b(x,y) = -\nu\Delta a(x,y) + (a(x,y),\nabla)a(x,y)$, где $a(x,y)$ — какая-либо бесконечно дифференцируемая вектор-функция, которая обращается в ноль на границе $\partial\Omega$, соленоидальная, т.е. $diva = 0$. Таких вектор-функций a, как известно, бесконечно много (см., например, [6]).

Решение задачи (3.1), как и остальных задач в этой работе (мы это уже отмечали), понимается в классическом смысле.

Ниже будет построена соответствующая (3.1) усредненная задача (см. [15]) и найдено некоторое ее стационарное невырожденное решение (u_0, p_0). При этом для задачи (3.1) в окрестности этого решения выполняются все условия теоремы 1 работы [15], где рассмотрен широкий класс уравнений Навье-Стокса. Из этой теоремы следует, что в некоторой опрестности (u_0, p_0) существует и единственно $2\pi/\omega$-периодическое по времени решение задачи (3.1). Кроме того, в [15] разработан алгоритм построения полной асимптотики решения.

В данной работе асимптотика решения будет построена для задачи (3.1) в окрестности найденного ранее решения (u_0, p_0).

Для построения асимптотики решения задачи (3.1) (см. [15]) введем криволинейную систему координат (φ, r) точно так же, как мы это делали в предыдущем параграфе.

Снова введем переменную $\rho = \sqrt{\omega} r, r \leq \eta < 1$.

Следуя [15], решение (3.1) будем разыскивать в следующем виде:

$$\begin{gathered} v(x,y,t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \omega^{-k/2} \left[u_k(x,y) + v_k(x,y,\tau) + w_k(\varphi,\rho) + z_k(\varphi,\rho,\tau) \right], \\ p(x,y,t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \omega^{-k/2} p_k(x,y) + \sum_{k=0}^{\infty} \omega^{(-k+2)/2} s_k(x,y,\tau) + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} \omega^{-k/2} h_k(\varphi,\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} \omega^{(-k+1)/2} g_k(\varphi,\rho,\tau), \\ \tau = \omega t, \end{gathered} \tag{3.2}$$

где u_k, v_k, p_k и s_k — регулярные слагаемые, а w_k, z_k, h_k и g_k — погранслойные.

Для $(x,y) \in \Omega_\eta$ через $v^{(s)}(x,y), s = 1, 2,$ будем обозначать компоненты произвольного вектора $v(x,y) \in \mathbb{R}^2$ в криволинейных координатах (φ, r).

Найдем первые погранслойные быстро осциллирующие слагаемые. Подставим решение, представленное в виде (3.2), в систему (3.1), найдем [15]:

$$\frac{\partial w_0^{(2)}}{\partial \rho} = 0, \frac{\partial z_0^{(2)}}{\partial \rho} = 0, \frac{\partial^2 w_0^{(1)}}{\partial \rho^2} = 0,$$

где верхние индексы указывают криволинейные координаты вектор-функций. Выпишем уравнения для первых регулярных быстро осциллирующих слагаемых:

$$\frac{\partial v_0}{\partial \tau} + \nabla s_0 = \begin{pmatrix} (1-(x^2+y^2))y \\ (1-(x^2+y^2))(-x) \end{pmatrix} \sin \omega t,$$

$$div v_0 = 0,$$

$$v_0^{(2)}\Big|_\Gamma = -\, z_0^{(2)}\Big|_\Gamma.$$

Или:

$$\frac{\partial v_0}{\partial \tau} + \nabla s_0 = \begin{pmatrix} (1-r^2)y \\ (1-r^2)(-x) \end{pmatrix} \sin \omega t,$$

$$div v_0 = 0,$$

$$v_0^{(2)}\Big|_{r=1} = -\, z_0^{(2)}\Big|_{r=1}.$$

Получаем, что $v_0 = -\begin{pmatrix} (1-(x^2+y^2))y \\ (1-(x^2+y^2))(-x) \end{pmatrix} \cos \omega t, s_0 = 0.$

Займемся стационарными задачами для отыскания регулярных коэффициентов:

$$-\nu \Delta u_0 + \nabla p_0 + (u_0, \nabla) u_0 + < (v_0, \nabla) v_0 >= b,$$

$$div u_0 = 0,$$

$$u_0|_\Gamma = -w_0|_\Gamma.$$

Найдем значение выражения $<(v_0, \nabla)v_0>$. Имеем:

$$<(v_0,\nabla)v_0>= \left\langle \begin{pmatrix} v_{01}\frac{\partial v_{01}}{\partial x} + v_{02}\frac{\partial v_{01}}{\partial y} \\ v_{01}\frac{\partial v_{02}}{\partial x} + v_{02}\frac{\partial v_{02}}{\partial y} \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} [(1-r^2)y]2xy + (1-r^2)x((1-r^2)-2y^2) \\ (1-r^2)y((1-r^2)-2x^2) + [(1-r^2)x]2xy \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} [(1-x^2-y^2)y]2xy + (1-x^2-y^2)x(1-x^2-3y^2) \\ (1-x^2-y^2)y(1-y^2-3x^2) + [(1-x^2-y^2)x]2xy \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y^2x - x^3y^2 - \frac{y^4x}{2} - \frac{x}{2} + x^3 - \frac{x^5}{2} \\ x^2y - y^3x^2 - \frac{x^4y}{2} - \frac{y}{2} + y^3 - \frac{y^5}{2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, вектор-функция $<(v_0,\nabla)v_0>$ имеет потенциал $p = \frac{x^2y^2}{2} - \frac{x^4y^2}{4} - \frac{x^2y^4}{4} - \frac{x^2+y^2}{4} + \frac{x^4+y^4}{4} - \frac{x^6+y^6}{12}$. Тогда вектор-функция $(u_0, p_0) = \left(a, -\frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^4y^2}{4} + \frac{x^2y^4}{4} + \frac{x^2+y^2}{4} - \frac{x^4+y^4}{4} + \frac{x^6+y^6}{12}\right)$ удовлетворяет нашим требованиям.

Перейдем к погранслойным слагаемым:

$$\frac{\partial z_0^{(1)}}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial^2 z_0^{(1)}}{\partial \rho^2},$$

$$z_0^{(1)}\Big|_\Gamma = -\,v_0^{(1)}\Big|_\Gamma = 0.$$

Откуда $z_0^{(1)} = 0$.

Наконец, $\frac{\partial g_1}{\partial \rho} = -\frac{\partial z_0^{(2)}}{\partial \tau} = 0$.

Отыщем вторые погранслойные слагаемые:

$$\frac{\partial w_1^{(2)}}{\partial \rho} = 0, \frac{\partial z_1^{(2)}}{\partial \rho} = 0, \frac{\partial^2 w_1^{(1)}}{\partial \rho^2} = 0.$$

Выпишем уравнения для вторых регулярных быстро осциллирующих слагаемых:

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau} + \nabla s_1 = 0,$$

$$div v_1 = 0,$$

$$v_1^{(2)}\Big|_\Gamma = -\,z_1^{(2)}\Big|_\Gamma.$$

Положим $v_1 = 0, s_1 = 0$.

Перейдем к стационарным задачам для отыскания регулярных коэффициентов:

$$-\nu\Delta u_1 + (u_0,\nabla)u_1 + (u_1,\nabla)u_0 + < (v_0,\nabla)v_1 > + < (v_1,\nabla)v_0 > + \nabla p_1 = 0,$$

$$div u_1 = 0,$$

$$u_1|_\Gamma = -w_1|_\Gamma \,.$$

Вектор-функция $(u_1, p_1) = (0, 0)$ нам подходит.

Перейдем к погранслойным слагаемым:

$$\frac{\partial z_1^{(1)}}{\partial\tau} = \nu\frac{\partial^2 z_1^{(1)}}{\partial\rho^2},$$

$$z_1^{(1)}\Big|_\Gamma = - \, v_1^{(1)}\Big|_\Gamma = 0.$$

Откуда $z_1^{(1)} = 0$. Наконец, $\dfrac{\partial g_2}{\partial\rho} = -\dfrac{\partial z_1^{(2)}}{\partial\tau} = 0, \dfrac{\partial h_2}{\partial\rho} = 0.$

Получаем в итоге приближение компоненты v решения:

$$v(x,y,\tau) = -\begin{pmatrix} (1-(x^2+y^2))y \\ (1-(x^2+y^2))(-x) \end{pmatrix}\cos\omega t + a + O(\omega^{-1}), \quad \omega\to\infty,$$

равномерно относительно $(x, y, t) \in \mathbf{Q}$.

Список цитируемых источников

1. *Басистая, Д.А, Левенштам, В.Б.* Асимптотика решений обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми. Известия вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств.науки. Механика сплошной среды. Спецвыпуск, 46-48 (2004).

   Basistaya, D.A. Levenshtam, V.B. Asimptotika resheniy obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy s bol'shimi vysokochastotnymi slagayemymi. Izvestiya vuzov. Sev.-Kavk. region. Yestekstvennyye nauki. Mekhanika sploshnoy sredy. Spetsvypusk. 46-48 (2004). (In Russian)

2. *Вишик, М.И., Люстерник, Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Успехи мат. Наук, 12, №5, 3-122 (1957).

   Vishik, M.I., Lyusternik, L.A. Regulyarnoye vyrozhdeniye i pogranichnyy sloy dlya lineynykh differentsial'nykh uravneniy s malym parametrom. Uspekhi mat. Nauk,12, No5, 3-122 (1957). (In Russian)

3. *Ивлева, Н.С., Левенштам, В.Б.* Асимптотическое интегрирование параболических систем с большими высокочастотными слагаемыми. Мат.форум, 4. Иссл. по мат. анализу, диф. уравн. и их прил. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 63-78 (2010). (Итоги науки. Юг России)

Ivleva, N.S., Levenshtam, V.B. Asimptoticheskoye integrirovaniye parabolicheskikh sistem s bol'shimi vysokochastonymi slagayemymi. Mat.forum, 4. Issl. po mat. analizu, dif. uravn. i ikh pril. Vladikavkaz: YUMI VNTS RAN i RSO-A, 63-78 (2010). (Itogi nauki. Yug Rossii) (In Russian)

4. *Ивлева, Н.С., Левенштам, В.Б.* Асимптотическое интегрирование параболических систем с большим параметром. Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки, 172, №6, 26-31 (2012).

   Ivleva, N.S., Levenshtam, V.B. Asimptoticheskoye integrirovaniye parabolicheskikh sistem s bol'shim parametrom. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-kavkazskiy region. Seriya: yestestvennyye nauki, 172, No6, 26-31 (2012). (In Russian)

5. *Капикян, А.К., Левенштам, В.Б.* Асимптотика периодического решения системы параболических уравнений с большими высокочастотными слагаемыми. Изв. вузов. Сев-Кавк. регион, 2009.

   Kapikyan, A.K., Levenshtam, V.B. Asimptotika periodicheskogo resheniya sistemy parabolicheskikh uravneniy s bol'shimi vysokochastotnymi slagayemymi. Izv. vuzov. Sev-Kavk. region, 2009. (In Russian)

6. *Ладыженская, О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости (2-е изд.), М: Наука (1970).

   Ladyzhenskaya O.A. Matematicheskiye voprosy dinamiki vyazkoy neszhimayemoy zhidkosti (2 izd.), M.: Nauka (1970).

7. *Левенштам, В.Б.* Обоснование метода усреднения для задачи конвекции при высокочастотных вибрациях. Сибирский матем. ж., 34, №2, 92-109 (1993).

   Levenshtam, V.B. Justification of the averaging method for the convection problem with high-frequency vibrations. Siberian Math. J., 34, No2, 280–296 (1993).

8. *Левенштам, В.Б.* Асимптотическое разложение решения задачи о вибрационной конвекции, ЖВМиМФ., 40, №9, 1416–1424 (2000).

   Levenshtam, V.B. Asymptotic expansion of the solution to the problem of vibrational convection. Comput. Math. Math. Phys., 40, No9, 1357–1365 (2000).

9. *Левенштам, В.Б.* Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми. Сиб. матем. журн., 46, №4, 805–821 (2005).

   Levenshtam, V.B. Asymptotic integration of parabolic problems with large high-frequency summands. Siberian Math. J., 46, No4, 637–651 (2005).

10. *Левенштам, В.Б.* Обоснование метода усреднения для параболических уравнений, содержащих быстроосциллирующие слагаемые с большими амплитудами. Изв. РАН. Сер. матем., 70, №2 (2006).

    Levenshtam, V.B. Justification of the averaging method for parabolic equations containing rapidly oscillating terms with large amplitudes. Izv. Math., 70, No2, 233–263 (2006).

11. *Левенштам, В.Б.* Некоторые вопросы теории усреднения параболических уравнений с большими высокочастотными слагаемыми. ДАН, 411, №3 (2006).

    Levenshtam, V.B. Nekotoryye voprosy teorii usredneniya parabolicheskikh uravneniy s bol'shimi vysokochastotnymi slagayemymi. DAN, 411, No3 (2006). (In Russian)

12. *Левенштам, В.Б, Хатламаджиян, Г.Л.* Распространение теории метода усреднения на дифференциальные уравнения, содержащие быстроосциллирующие слагаемые с большими амплитудами. Задача о периодических решениях. Изв. вузов. Математика, 2006.

    Levenshtam, V.B., Khatlamadzhiyan, G.L. Extension of averaging theory to differential equations containing rapidly oscillating terms with large amplitudes. The problem of periodic solutions. Russian Math. (Iz. VUZ), 50, No6, 33–45 (2006).

13. *Симоненко, И.Б.* Обоснование метода осреднения для задачи конвекции в поле быстро осциллирующих сил и для других параболических уравнений. Мат.сб., 87, №2, 236-253 (1972).

    Simonenko, I.B. A justification of the averaging method for a problem of convection in a field of rapidly oscillating forces and for other parabolic equations. Math. USSR-Sb., 16, No2, 245–263, (1972).

14. *Юдович, В.И.* Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями. Успехи механики, 4, №3, 26-158 (2006).

    Yudovich, V.I. Vibrodinamika i vibrogeometriya mekhanicheskikh sistem so svyazyami. Uspekhi mekhaniki, 4, No3. S.26-158 (2006). (In Russian)

15. *N. Ivleva, V. Levenshtam* Asymptotic analysis of the generalized convection problem, Eurasian Math. J., 6, No 1, 41–55, (2015).

Получена 27.10.2019

РЕФЕРАТЫ

УДК 517.958

Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ. **К проблеме малых колебаний системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд (модельная задача)** (русский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №3. — С. 213–243.

В работе изучается скалярная задача сопряжения, модулирующая проблему малых колебаний двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд. Исследуется начально-краевая задача и методами теории полугрупп доказывается теорема о ее однозначной разрешимости на любом конечном отрезке времени. Возникающая при этом соответствующая спектральная проблема для нормальных колебаний системы исследуется методами спектральной теории оператор-функций (операторных пучков). Полученный операторный пучок обобщает как известный операторный пучок С. Г. Крейна (колебания вязкой жидкости в сосуде), так и пучок, возникающий в задаче о малых движениях вязкоупругой жидкости в частично заполненном сосуде. Рассмотрен также пример двумерной задачи, допускающей разделение переменных, и на этой основе исследован более подробно спектр нормальных движений гидросистем.

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, гидродинамическая система, ортопроектор, операторно-дифференциальное уравнение, задача Коши, спектральная задача

Ил. 1. Библиогр. 17 назв.

УДК 519.64

И. В. БОЙКОВ. **Аналитические и численные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений** (русский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №3. — С. 244–272.

В статье дан краткий обзор работ, посвященных аналитическим и численным методам решения гиперсингулярных интегральных уравнений. Рассматриваются гиперсингулярные интегральные уравнения на замкнутых и разомкнутых контурах интегрирования, полигиперсингулярные и многомерные гиперсингулярные интегральные уравнения. Основное внимание уделяется приближенным методам решения одномерных гиперсингулярных интегральных уравнений первого и второго рода с особенностями второго порядка. Рассматриваются гиперсингулярные интегральные уравнения первого рода, определенные на сегменте $[-1, 1]$, решения которых имеют вид $x(t) = (1-t^2)^{\pm 1/2}\varphi(t)$, $((1-t)/(1+t))^{\pm 1/2}\varphi(t)$, где $\varphi(t)-$ гладкая функция. Рассматриваются гиперсингулярные интегральные уравнения второго рода, определенные на сегменте $[-1, 1]$, для решения которых строится сплайн-коллокационный метод со сплайнами первого порядка. Отдельный раздел посвящен приближенным методам решения гиперсингулярных интегральных уравнений на замкнутых контурах.

Ключевые слова: гиперсингулярные интегральные уравнения, метод коллокаций, метод механических квадратур, итерационные методы.

Библиогр. 49 назв.

УДК 314.15.926

G. J. SÖDERBACKA, A. S. PETROV. **Исследование поведения в системе: много хищников – одна жертва** (английский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №3. — С. 273–288.

Рассматривается известная система хищник – жертва, где хищники питаются на одной жертве. В основном рассматривается система с двумя хищниками. Приведен обзор общих результатов, среди них условия для вымирания одного хищника и изучение разных типов сосуществования.

В невырожденных случаях хищники в этой системе не могут сосуществовать у состояния равновесия. Однако циклические и более сложные сосуществования возможны. Предлагаются результаты многих численных экспериментов. Одномерное модельное отображение для отображения Пуанкаре приведена при некоторых условиях на систему. Самые интересные случаи, где модельное отображение не работает и когда присутствует кое-что подобное спиральному аттрактору, мало изучены и сформулируем открытие вопросы. Обсуждаем бифуркации и существование многих аттракторов одной и той же системе.

Ключевые слова: бифуркация, хаос, хищник-жертва.

Ил. 9. Библиогр. 18 назв.

УДК 517.938.5+523.947

О. ПОЧИНКА, С. ЗИНИНА. **Динамика топологических потоков и гомеоморфизмов с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством на n-мерных многообразиях** (английский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №3. — С. 289–296.

Начиная с размерности 4 появляются так называемые несглаживаемые многообразия, многообразия, не допускающие триангуляцию и другие препятствия, не дающие возможности использовать технику гладких многообразий для исследования многомерных многообразий. Кроме того, все методы изучения гладких динамических систем на многомерных многообразиях основаны на аппроксимации всех подмножеств кусочно линейными или топологическими объектами. В связи с этим совершенно естественной является идея рассмотрения на многомерных многообразиях динамических систем, не использующих понятия гладкости в своем определении. Так уже прочно вошли в научный обиход гомеоморфизмы и топологические потоки Морса-Смейла, которые также прочно связаны с топологией объемлющего многообразия, как и их гладкие аналоги. В настоящей статье мы исследуем общие динамические свойства гомеоморфизмов и топологических потоков с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством.

Ключевые слова: топологический поток, цепно рекуррентное множество, гиперболическое множество

Библиогр. 5 назв.

УДК 517.957

Н. С. ИВЛЕВА. **Задачи с быстро осциллирующими данными. Два примера построения асимптотик** (русский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №3. — С. 297–310.

Для двух конкретных задач с быстро осциллирующими по времени данными — полулинейной параболической системы с двумя пространственными переменными и системы Навье-Стокса, моделирующей течение жидкости в плоском случае, — решается вопрос о построении асимптотических разложений их периодических по времени решений. Обе задачи рассматриваются в бесконечном по времени цилиндре, осью которого служит временная числовая ось, а основанием — двумерный единичный круг. В качестве краевых условий взяты условия Дирихле. В основе построения указанных асимптотичесвких разложений лежат два алгоритма, разработанных, обоснованных и полученных ранее Н.С. Ивлевой и В.Б. Левенштамом (2010, 2015 гг.).

Ключевые слова: параболическая система, задача Навье-Стокса, высокочастотные коэффициенты, метод усреднения, асимптотика.

Библиогр. 15 назв.

ABSTRACTS

MSC 2010: 76D05, 35Q30, 39A14, 39B42

N. D. KOPACHEVSKY. **Normal oscillations of hydrosystem of two viscoelastic fluids in stationary container (a model problem)** (Russian). Dinamicheskie Sistemy **9(37)**, no.3, 213–243 (2019).

In the paper, we consider a problem on small motions and normal oscillations of two viscoelastic fluids in a stationary container. One of models of such fluids is Oldroid's model. It is described, for example, in the book Eirich, F. R. Rheology. Theory and Applications. N.-Y.: Academic Press, 1956. It is important to notice that the present paper is devoted to the study of the scalar model problem. Also it should be noted that the present paper based on the previous author's works together with Azizov, T. Ya., Orlova L. D., Krein, S. G. Namely, problem on small movements of one or two viscoelastic fluid for generalized Oldroid's model and normal oscillations of a viscoelastic fluid in an open container were investigated in these papers. The aim of this paper is to use an operator approach of mentioned works, to prove the theorem on correct solvability for the scalar model initial boundary-value problem generated by a problem of small motions of two viscoelastic fluids in a stationary container and to get properties of eigenvalues and eigenelements of corresponding spectral problem. This paper is organized as follows. In section 1 we describe a model of viscoelastic fluid, formulate mathematical statement of the problem: linearized equations of movements, stickiness condition, kinematic and dynamic conditions. Further, in this section we receive the law of full energy balance and choose the functional spaces generated by the problem. For applying of method of orthogonal projection we need to get orthogonal projector on corresponding space. The law of action of this projector we receive in this section. In section 2 we make transition to operator equation by using orthogonal projector received in section 1. Further, we solve some auxiliary problems and obtain the Cauchy problem for the system of integro-differential equation in some Hilbert space. Then we make transition to a system of differential equation. This system can be rewrite as operator differential equation in the sum of Hilbert spaces. Properties of main operator of this problem are studied in this section. The existence and uniqueness theorems for final operator differential equation as for original initial-boundary-value problem based on factorization, closure and accretivity property of operator matrix. Finally, in this section we consider the spectral problem on normal oscillations corresponding to the evolution problem. This means that external forces equal to zero and dependence by time for the unknown function has the form $e^{-\lambda t}$. Here we obtain the spectral problem for operator pencil and study main properties of it. Section 3 is devoted to investigating of model spectral problem in rectangular domain. The more detailed properties of eigenvalues are obtained here.

Keywords: viscoelastic fluid, hydrodynamic system, orthogonal projector, operator differential equation, Cauchy problem, spectral problem

Fig. 1. Ref. 17.

MSC 2010: 65R20

I. V. BOYKOV. **Analytical and numerical methods for solving hypersingular integral equations** (Russian). Dinamicheskie Sistemy **9(37)**, no.3, 244–272 (2019).

The article gives a brief overview of works devoted to analytical and numerical methods for solving hypersingular integral equations. Hypersingular integral equations on closed and open integration loops, polyhypersingular and multidimensional hypersingular integral equations are considered. The main attention is paid to approximate methods for solving one-dimensional hypersingular integral equations of the first and second kinds with singularities of the second order. We consider hypersingular integral equations of the first kind defined on the segment $[-1, 1]$, whose solutions have the form $x(t) = (1-t^2)^{\pm 1/2}\varphi(t)$, $((1-t)/(1+t))^{\pm 1/2}\varphi(t)$, where $\varphi(t)$ is a smooth function. Hypersingular integral equations of the second kind, defined on the segment $[-1, 1]$, are considered. For solution of its the spline-collocation method with first-order splines is constructed. A separate section is devoted to approximate methods for solving hypersingular integral equations on closed circuits.

Keywords: hypersingular integral equations, collocation method, mechanical quadrature method, iterative methods.

Ref. 49.

MSC 2010: 34C60, 92D25, 34C25, 37C05

G. J. SÖDERBACKA, A. S. PETROV. **Review on the behaviour of a many predator–one prey system** (English). Dinamicheskie Sistemy **9(37)**, no.3, 273–288 (2019).

We consider a known predator-prey system, where more than one predator compete for the same prey. Mainly the case with two predators is considered. A review of general results is given, among them conditions for the extinction of one predator and an investigation of the different types of coexistence of predators. In non-degenerate cases the predators in this model cannot coexist at an equilibrium, but there can be a cyclic or more complicated coexistence. Many numerical results are presented. A model map for a Poincaré map is given under some conditions. But the most interesting case where there can arise "spiral-like" attractors is not well known here, and we pose open questions. We discuss some bifurcations and the existence of systems with several attractors.

Keywords: bifurcation, chaos, predator-prey.

Fig. 9. Ref. 18.

MSC 2010: 37D15

O. POCHINKA, S. ZININA. **Dynamics of topological flows and homeomorphisms with a finite hyperbolic chain-recurrent set on n-manifolds** (English). Dinamicheskie Sistemy **9(37)**, no.3, 289–296 (2019).

Starting from dimension 4, so-called non-smoothed manifolds, manifolds that do not allow triangulation and other obstacles that prevent the use of the technique of smooth manifolds for the study of multidimensional manifolds appear. In addition, all methods for studying smooth dynamical systems on multidimensional manifolds are based on the approximation of all subsets by piecewise linear or topological objects. In this regard, the idea of consideration of dynamical systems on multidimensional manifolds that do not use the concept of smoothness in their definition is completely natural. So homeomorphisms and topological Morse-Smale flows, which are also firmly connected with the topology of the ambient manifold, as well as their smooth analogues, have already entered into scientific usage. In the present paper we investigate general dynamical properties of homeomorphisms and topological flows with a finite hyperbolic chain recurrent set.

Keywords: topological flow, chain-recurrent set, hyperbolic set

Ref. 5.

MSC 2010: 35K40, 76E06, 35B10, 58J37, 76D05

N. S. IVLEVA. **Tasks with fast oscillating data. Two examples of asymtotics construction** (Russian). Dinamicheskie Sistemy **9(37)**, no.3, 297–310 (2019).

For two specific problems with rapidly oscillating data in time — the semilinear parabolic system with two spatial variables and the Navier-Stokes system that simulates the fluid flow in the flat case — the question of constructing asymptotic expansions of their time-periodic solutions is solved. Both problems are considered in the cylinder, infinite in time, the axis of which is the temporary numerical axis, and the basis is the two-dimensional unit circle. The Dirichlet conditions are taken as boundary

conditions. The construction of these asymptotic expansions is based on two algorithms developed, justified and obtained earlier by N. S. Ivleva and V. B. Levenstam (2010, 2015).

Keywords: parabolic system, the Navier-Stokes problem, high-frequency terms, averaging method, asymptotics.

Ref. 15.