Динамические системы, 2019, том 9(37), №3, 244–272

УДК 519.64

Аналитические и численные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений

И. В. Бойков

Пензенский государственный университет,
Пенза 440026. *E-mail: i.v.boykov@gmail.com*

Аннотация. В статье дан краткий обзор работ, посвященных аналитическим и численным методам решения гиперсингулярных интегральных уравнений. Рассматриваются гиперсингулярные интегральные уравнения на замкнутых и разомкнутых контурах интегрирования, полигиперсингулярные и многомерные гиперсингулярные интегральные уравнения. Основное внимание уделяется приближенным методам решения одномерных гиперсингулярных интегральных уравнений первого и второго рода с особенностями второго порядка. Рассматриваются гиперсингулярные интегральные уравнения первого рода, определенные на сегменте $[-1,1]$, решения которых имеют вид $x(t) = (1-t^2)^{\pm 1/2}\varphi(t)$, $((1-t)/(1+t))^{\pm 1/2}\varphi(t)$, где $\varphi(t)-$ гладкая функция. Рассматриваются гиперсингулярные интегральные уравнения второго рода, определенные на сегменте $[-1,1]$, для решения которых строится сплайн-коллокационный метод со сплайнами первого порядка. Отдельный раздел посвящен приближенным методам решения гиперсингулярных интегральных уравнений на замкнутых контурах.

Ключевые слова: гиперсингулярные интегральные уравнения, метод коллокаций, метод механических квадратур, итерационные методы.

Analytical and numerical methods for solving hypersingular integral equations

I. V. Boykov

Penza State University *e-mail: i.v.boykov@gmail.com.*

Abstract. The article gives a brief overview of works devoted to analytical and numerical methods for solving hypersingular integral equations. Hypersingular integral equations on closed and open integration loops, polyhypersingular and multidimensional hypersingular integral equations are considered. The main attention is paid to approximate methods for solving one-dimensional hypersingular integral equations of the first and second kinds with singularities of the second order. We consider hypersingular integral equations of the first kind defined on the segment $[-1,1]$, whose solutions have the form $x(t) = (1-t^2)^{\pm 1/2}\varphi(t)$, $((1-t)/(1+t))^{\pm 1/2}\varphi(t)$, where $\varphi(t)$ is a smooth function. Hypersingular integral equations of the second kind, defined on the segment $[-1,1]$, are considered. For solution of its the spline-collocation method with first-order splines is constructed. A separate section is devoted to approximate methods for solving hypersingular integral equations on closed circuits.

Keywords: hypersingular integral equations, collocation method, mechanical quadrature method, iterative methods.

MSC 2010: 65R20

Введение

Теория сингулярных интегральных уравнений, зародившаяся в начале прошлого века в трудах Д. Гильберта и А. Пуанкаре, в течение последующих почти 100 лет переживает бурное развитие. По-видимому, это в первую очередь связано с многочисленными приложениями сингулярных интегральных уравнений и краевой задачи Римана в физике, механике и технике. Хорошо известен спектр применения сингулярных интегральных уравнений в механике и технике: теория упругости, термоупругости, аэродинамика; сингулярные интегральные уравнения являются одним из основных аппаратов математического моделирования задач электродинамики.

Не менее широки области применения краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений в физике: квантовая теория поля, теория близкого и дальнего взаимодействия, теория солитонов.

Интересно отметить, что введенное примерно в тоже время понятие гиперсингулярного интеграла [43] в течение долгого времени не находило практического применения. Ситуация резко изменилась в конце сороковых годов прошлого века, когда было обнаружено [28], что гиперсингулярные интегральные уравнения (ГИУ) являются незаменимым математическим аппаратом при моделировании задач аэродинамики. Начиная с этого момента, круг задач, к решению которых привлекаются ГИУ, неизменно расширяется. В настоящее время ГИУ находят широкое применение при моделировании задач аэродинамики, электродинамики, микроэлектроники, геофизики, атомной и ядерной физики и ряда других областей естествознания и техники. Отметим также, что к ГИУ приводят исключительные случаи краевой задачи Римана, которая, наряду с задачей Римана-Гильберта, находит все большее применение в различных областях физики [31].

Однако вычисление сингулярных и гиперсингулярных интегралов, а также решение сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений возможно лишь в исключительных случаях и основным аппаратом в прикладных задачах являются численные методы.

В настоящее время достаточно хорошо исследованы приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов [6], [7] и можно считать завершенными многие направления в численном решении сингулярных интегральных уравнений [21], [20], [47], [24], [49], [5].

Совершенно иная ситуация сложилась в направлении, связанном с приближенными методами решения ГИУ. Ежегодно публикуются десятки статей, посвященных построению вычислительных схем для различных классов ГИУ, однако автору не известны работы, посвященные обзору и сравнительному анализу полученных к настоящему времени результатов. Представляется необходимым и своевременным дать обзор основных направлений в численных методах решения ГИУ, выделив те из них, для которых существует строгое обоснование, и провести сравнительный анализ приближенных методов и алгоритмов. Под строгим обоснованием, следуя Л. В. Канторовичу [22], Н. С. Бахвалову [3], В. В. Иванову [21], подразумевается исследование устойчивости решения, доказательство сходимости приближенного решения к точному, получение оценок величины погрешности и скорости сходимости.

1. Классы функций и обозначения

В этом разделе описаны классы функций, используемые в статье. Пусть γ — единичная окружность с центром в начале координат комплексной плоскости. Пусть $A = [a, b]$ или $A = \gamma$.

Определение 1. Класс функций Гельдера $H_\alpha(M; A)$, $0 < \alpha \leq 1$, состоит из заданных на A функций $f(x)$, удовлетворяющих во всех точках x' и x'' этого множества неравенству $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|^\alpha$, $M > 0$.

В случае, когда из текста ясно на каком множестве рассматриваются функции, вместо $H_\alpha(M; A)$ будем писать $H_\alpha(M)$. Это замечание относится и к остальным классам функций.

Определение 2. Класс $W^r(M; A)$ состоит из функций, заданных на A, имеющих непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную r-го порядка, удовлетворяющую на этом множестве неравенству $|f^{(r)}(x)| \leq M$.

Определение 3. Класс $W^r H_\alpha(M; A)$ состоит из функций $f(x)$ принадлежащих классу $W^r(M; A)$ и удовлетворяющих дополнительному условию $f^{(r)}(x) \in H_\alpha(M)$.

Пусть $L = \gamma_1 \times \gamma_2$, где γ_i — единичная окружность с центром в начале координат на плоскости комплексной переменной z_i, $i = 1, 2$. Пусть $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ или $D = L$.

Определение 4. Через $H_{\omega_1\omega_2}(D)$ обозначен класс определенных на D функций $f(x, y)$ таких, что для любых точек (x', y') и (x'', y'') из D $|f(x', y') - f(x'', y'')| \leq \omega_1(|x' - x''|) + \omega_2(|y' - y''|)$, где $\omega_1(\sigma)$ и $\omega_2(\sigma)$ — заданные модули непрерывности. В случаях, когда $\omega_i(x) = M_i x^{\alpha_i}$ $(i = 1, 2)$, используется обозначение $H_{\alpha_1\alpha_2}(M, D)$, где $M = \max(M_1, M_2)$.

Определение 5. Через $W^{r_1,r_2}(M, D)$, $0 < M < \infty$, обозначен класс определенных на D функций $f(x_1, x_2)$, имеющих частные производные $f^{(v_1,v_2)}(x_1, x_2) = \partial^{v_1+v_2} f(x_1, x_2)/\partial x_1^{v_1} \partial x_2^{v_2}$ $(0 \leq v_i \leq r_i, i = 1, 2)$, причем $\|f^{(r_1,r_2)}(x_1, x_2)\|_{C(D)} \leq M$, $\|f^{(r_1,j)}(x_1, 0)\|_{C(D)} \leq M$, $j = 0, 1, \ldots, r_2 - 1$, $\|f^{(i,r_2)}(0, x_2)\|_{C(D)} \leq M$, $i = 0, 1, \ldots, r_1 - 1$.

Пусть $A = [a, b]$ или $A = \gamma$. Пусть $f(x)$ — функция, определенная на A. Через $H(f, \alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$, обозначим функционал

$$H(f, \alpha) = \sup_{x_1 \neq x_2, x_1, x_2 \in A} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha}.$$

2. Определения гиперсингулярных интегралов

Определение 6. ([43],[2]) Пусть $A(t) \in W^p(M)$. Интеграл вида $\int\limits_a^b \frac{A(t)\,dt}{(b-t)^{p+\alpha}}$ при целом p и $0 < \alpha < 1$ определяет величину ("конечную часть") рассматриваемого интеграла как предел при $x \to b$ суммы

$$\int\limits_a^x \frac{A(t)\,dt}{(b-t)^{p+\alpha}} + \frac{B(x)}{(b-x)^{p+\alpha-1}}.$$

Здесь $B(x)$ — любая функция, на которую налагаются два условия:

а) рассматриваемый предел существует;

б) $B(x) \in W^p$.

Долгое время эти интегралы назывались интегралами Адамара. В настоящее время их называют гиперсингулярными интегралами.

Замечание. В книге [1] Ж. Адамар увлекательно рассказывает о различных сторонах творческого процесса при решении математических проблем и, в частности, останавливается (с. 104) на открытии им гиперсингулярных интегралов.

Определение 7. ([32]) Пусть $\varphi(t) \in W^p(M)$. Интегралом $\int\limits_a^b \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-c)^p}$, $a < c < b$, в смысле главного значения Коши-Адамара называется предел:

$$\int\limits_a^b \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-c)^p} = \lim_{v\to 0}\left[\int\limits_a^{c-v} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-c)^p} + \int\limits_{c+v}^b \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-c)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}}\right],$$

где $\xi(v)$ — некоторая функция, выбранная так, чтобы указанный предел существовал.

В концевых точках a и b гиперсингулярный интеграл может быть определен следующим образом.

Определение 8. Пусть $\varphi(t) \in W^p$. Интегралом $\int\limits_a^b \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-a)^p}$ называется предел

$$\int\limits_a^b \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-a)^p} = \lim_{v\to 0}\left[\int\limits_{a+v}^b \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-a)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} + \xi_1(v)\ln|v|\right],$$

где $\xi(v)$ — некоторая функция, имеющая непрерывные производные до $(p-1)$-го порядка, удовлетворяющие условию Дини-Липшица; $\xi_1(v)$ — некоторая функция, удовлетворяющая условию Дини-Липшица в окрестности от нуля. Функции $\xi(v)$ и $\xi_1(v)$ выбираются так, чтобы указанный предел существовал.

3. Аналитические методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений

В теории сингулярных интегральных уравнений известно несколько классов уравнений, которые разрешимы в замкнутом виде (в виде аналитического выражения). Помимо характеристических уравнений, такие классы описаны в статье С.Г. Самко [30] и в монографии Ф.Д. Гахова [19].

Несмотря на некоторую аналогию между сингулярными и гиперсингулярными интегральными уравнениями в настоящее время имеется только несколько разрозненных результатов, посвященных аналитическим методам решения гиперсингулярных интегральных уравнений.

Рассмотрим гиперсингулярное интегральное уравнение

$$Ax = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{x(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau = f(t),\ -1 < t < 1. \tag{3.1}$$

В предположении, что решение ищется в классе функций, обращающихся в нуль на концах сегмента $[-1, 1]$, в работе [46] (см. также [45]) представлено точное решение ГИУ (3.1):

$$x(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} f(\tau)\ln\left|\frac{\tau - t}{1 - \tau t + ((1-\tau^2)(1-t^2))^{1/2}}\right| d\tau.$$

В работе [27] получено точное решение ГИУ (3.1) в случаях, когда правая часть может быть неинтегрируемой функцией $f(t) = c/(t - q)$, $-1 < q < 1$, или дельта функцией $f(t) = \delta(t - q)$, $-1 < q < 1$.

Необходимость в решении таких уравнений возникает в задачах аэродинамики с устройством отсоса внешнего потока [24] и при расчете характеристик проволочных антенн [26].

Решение уравнения (1) ищется в классе функций $x(-1) = x(1) = 0$. Пусть $f(t) = (t - q)^{-1}$, $t, q \in (-1, 1)$.

Нетрудно видеть, что уравнение (3.1) эквивалентно следующему уравнению

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{x'(\tau)d\tau}{\tau - t} = \frac{1}{t - q},\ t, q \in (-1, 1),$$

с дополнительным условием $\int\limits_{-1}^{1} x'(\tau)d\tau = 0$.

Из свойств дельта-функции и известного свойства гиперсингулярных интегралов

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\tau^2}U_n(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau = -(n+1)U_n(t),\ t \in (-1, 1),$$

следует, что решением уравнения (3.1) будет функция $x'(t) = -\pi\delta(t-q) - (1-t^2)^{-1/2}$, первообразная для которой даст $x(t) = \arcsin t + \pi \mathrm{sgn(q-t)}/2$. Здесь использовано следующее определение [27] дельта-функции

$$\int_{-1}^{t} \psi(\tau)\delta(\tau-q)d\tau = \begin{cases} 0,\, t<q, \\ \frac{1}{2}\psi(q),\, t=q,\, q\in(-1,1) \\ \psi(q),\, t>q. \end{cases}$$

В работах [8], [35] прослеживается связь между гиперсингулярными и полигиперсингулярными интегральными уравнениями с одной стороны и обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных с другой стороны.

Рассмотрим для определенности ГИУ

$$a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_{\gamma} \frac{x(\tau)}{(\tau-t)^p}d\tau = f(t), \quad p=2,3,\ldots, \tag{3.2}$$

где γ — гладкий замкнутый контур в плоскости комплексной пременной.

Обозначим через $D^+(D^-)$ внутреннюю (внешнюю) область плоскости z относительно контура γ. Через $\bar{D}^+$ обозначим замыкание области D^+. Обозначим через G открытую область, такую, что $\bar{D}^+ \subset G$.

Пусть функции $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ являются аналитическими в области G. Будем искать решение уравнения (3.2) в классе функций, удовлетворяющих следующим условиям:

1) функции являются аналитическими в D^+,
2) функции непрерывно продолжаются, вместе с производными до $p-1$ порядка, на контур γ,
3) функции удовлетворяют условию $x(t) \in W^{p-1}H_\alpha(M,\gamma)$, $t\in\gamma$.

При этих условиях уравнение (3.2) эквивалентно следующему

$$a(t)x(t) + \frac{b(t)}{(p-1)!}\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma} \frac{x^{(p-1)}(\tau)}{\tau-t}d\tau = f(t). \tag{3.3}$$

Из условий, накладываемых на искомое решение $x(t)$ следует, что

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma} \frac{x^{(p-1)}(\tau)}{\tau-t}d\tau = x^{(p-1)}(t)$$

и, следовательно, уравнение (3.3) трансформируется в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{b(t)}{(p-1)!}\frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}}x(t) + a(t)x(t) = f(t). \tag{3.4}$$

Аналогичным образом исследуются линейные уравнения вида

$$a(t)x(t) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{h(t,\tau)x(\tau)}{(\tau - t)^p}d\tau + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma} k(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t),$$

а также нелинейные уравнения вида

$$\left(\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau - t)^p}, \ldots, \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{x(\tau)d\tau}{\tau - t}, x(t)\right) = f(t)$$

при условии, что коэффициенты, правые части и ядра уравнений (по обеим переменным) являются функциями, аналитическими в G.

Для решения уравнений вида (3.4) применяются аналитические и численные методы решения дифференциальных уравнений.

Отметим, что полигиперсингулярные интегральные уравнения сводятся к уравнениям в частных производных. Рассмотрим бигиперсингулярное интегральное уравнение

$$a(t_1,t_2)x(t_1,t_2) + \frac{b(t_1,t_2)}{\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{x(\tau_1,t_2)}{(\tau_1 - t_1)^p}d\tau_1 + \frac{c(t_1,t_2)}{\pi i}\int\limits_{\gamma_2} \frac{x(t_1,\tau_2)}{(\tau_2 - t_2)^p}d\tau_2 -$$
$$- \frac{d(t_1,t_2)}{\pi^2}\int\limits_{\gamma_1}\int\limits_{\gamma_2} \frac{x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^p(\tau_2 - t_2)^p} = f(t_1,t_2),\ (t_1,t_2) \in (\gamma_1 \times \gamma_2), \quad (3.5)$$

где $\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2, \gamma_i$ — гладкий замкнутый контур в плоскости z_i, $i = 1, 2$.

Обозначим через G область $G_1 \times G_2$, где G_i — замкнутая ограниченная область в плоскости z_i такая, что γ_i лежит внутри G_i, $i = 1, 2$. В [8], [35] показано, что если уравнение (3.5) имеет решение $x^*(t_1,t_2)$ аналитическое в области G, то функция $x^*(t_1,t_2)$ также является решением дифференциального уравнения

$$a(t_1,t_2)x(t_1,t_2) + \frac{b(t_1,t_2)}{(p-1)!}\frac{\partial^{p-1}x(t_1,t_2)}{\partial t_1^{p-1}} + \frac{c(t_1,t_2)}{(p-1!)}\frac{\partial^{p-1}x(t_1,t_2)}{\partial t_2^{p-1}} +$$
$$+ \frac{d(t_1,t_2)}{((p-1)!)^2}\frac{\partial^{2p-2}x(t_1,t_2)}{\partial t_1^{p-1}\partial t_2^{p-1}} = f(t_1,t_2),\ (t_1,t_2) \in (\gamma_1 \times \gamma_2).$$

Для обоснования перехода от бигиперсингулярных интегральных уравнений к дифференциальным уравнениям используются аналоги формул Сохоцкого-Племеля для кратных интегралов типа Коши.

4. Уравнения первого рода

Наибольшего развития в настоящее время получили приближенные методы решения ГИУ первого рода

$$Kx \equiv Ax + Hx \equiv \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau - t)^2} + \int\limits_{-1}^{1} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \ -1 < t < 1, \qquad (4.1)$$

при различных предположениях о гладкости функций $h(t,\tau)$ и $f(t)$. Для решения уравнения (4.1) предложены различные методы: метод моментов, метод ортогональных полиномов, численно-аналитический метод, метод коллокации, метод механических квадратур.

Ряд результатов, полученных для приближенного решения уравнения (4.1) был позднее перенесен на составные особые уравнения

$$aAx + bSx + cLx + Hx \equiv \frac{a}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{x(\tau)}{(\tau - t)^2}d\tau +$$

$$+ b\int\limits_{-1}^{1} \frac{x(\tau)}{\tau - t}d\tau + c\int\limits_{-1}^{1} x(\tau)\ln|\tau - t|d\tau + \int\limits_{-1}^{1} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \quad (4.2)$$

При построении вычислительных схем предполагается, что уравнение (4.1) имеет решение одного из следующих видов

$$x(t) = (1 - t^2)^{\pm 1/2}\varphi(t), \quad x(t) = ((1 - t)/(1 + t))^{\pm 1/2}\varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — гладкая функция.

Рассмотрим каждый случай в отдельности.

Пусть $x(t) = \sqrt{1 - t^2}\varphi(t)$. Вначале приведем известное [37] утверждение о разрешимости уравнения (4.1). Обозначим через $L_{2,\rho}$ пространство функций суммируемых в квадрате с весом $\rho(t)$. Скалярное произведение в $L_{2,\rho}$ вводится формулой $(u,v)_\rho = \int\limits_{-1}^{1} \rho(\tau)u(\tau)v(\tau)d\tau$. Через $L^1_{2,\rho}$ обозначим подпространство в $L_{2,\rho}$, состоящее из функций $x(t)$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)^2(x,\varphi_n) < \infty$, $\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}U_n$, со скалярным произведением $(u,v)_1 = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)^2(u,\varphi_k)_\rho(v,\varphi_k)_\rho$. Здесь U_n — полином Чебышева второго рода. Норма в пространстве $L^1_{2\rho}$ задается выражением $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)^2(x,\varphi_k)^2_\rho$. В работе [37] показано, что если $N(A) = 0$ ($N(A)$ — нулевое подпространство оператора A), то уравнение (4.1) однозначно разрешимо и оператор $K \in [L^1_{2,\rho}, L_{2\rho}]$ непрерывно обратим.

Перейдем к описанию приближенных методов. Одним из первых был метод Галеркина [37]. Приближенное решение уравнения (4.1) ищется в виде

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^n \varphi_k, \tag{4.3}$$

коэффициенты $\{\alpha_k^n\}_{k=0}^n$ находятся из системы

$$(Kx_n - f, \varphi_j)_\rho = 0, \ j = 0, 1, \ldots, n. \tag{4.4}$$

Используя формулу $AU_n = -(n+1)U_n$, систему (4.4) можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{n} -(k+1)\alpha_k^n + \sum_{k=0}^{n} a_k^n (H\varphi_k, \varphi_j)_\rho = (f, \varphi_j), \ j = 0, 1, \ldots, n.$$

В предположении, что $h(t,\tau) \in W^{r,r}([0,1]^2)$ и $f \in W^r([0,1])$, $r \geq 3$, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. ([37]) *При достаточно больших n система уравнений* (4.4) *имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\|_\infty = O(n^{-r+2})$, где x^*– решение уравнения* (4.1).

Остановимся на методе коллокаций. Приближенное решение уравнения (4.1) ищется в виде (4.3); коэффициенты α_k^n определяются из системы

$$(Kx_n - f)_{t_k} = 0, \ k = 0, 1, \ldots, n, \tag{4.5}$$

где $\{t_k\}_{k=0}^n$ нули полинома U_{n+1}.

В работе [36], в предположении что функция $h(t,\tau)$ непрерывная, доказана однозначная разрешимость системы уравнений (4.5) и сходимость x_n^* к x^* в метрике пространства $L_{2,\rho}$. Здесь x^* и x_n^* — решения уравнений (4.1) и (4.5), соответственно.

В [37] доказано более сильное утверждение.

Теорема 2. ([37]) *Пусть $h(t,\tau) \in W^{r,r}([-1,1]^2)$, $f \in W^r([-1,1])$, $r \geq 3$. Тогда система* (4.5) *однозначно разрешима при достаточно больших n и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\|_\infty = O(n^{-r+2})$.*

Численно-аналитический метод, предложенный в работе [40] для решения уравнения (4.2) при $b = 0$ заключается в следующем.

Обратимость оператора A на классе решений $x(t) = \sqrt{1-t^2}\varphi(t)$ позволяет преобразовать (4.1) в уравнение Фредгольма

$$ax(t) + c(A^{-1}Lx)(t) + (A^{-1}Hx)(t) = A^{-1}f. \tag{4.6}$$

Аппроксимация решения этого уравнения ищется в виде функции

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^n \varphi_k(t), \ \text{где } \varphi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \sqrt{1-t^2}\, U_n(t).$$

Система функций $\varphi_k(t)$ образует в пространстве H_A со скалярным произведением $[\varphi_n, \varphi_m] = (A\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}$ ортонормальный базис. Подставляя x_n в (4.6) получаем бесконечную систему уравнений

$$a\alpha_l^n + c\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^n L_{kl} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^n H_{kl} = f_l,\ l = 1, 2, \dots,$$

которая решается методом редукции.

В работе [25] исследуется в классе обобщенных функций уравнение

$$\frac{a}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x(\sigma)d\sigma}{\sin^2\frac{\sigma-s}{2}}d\tau + \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma +$$
$$+\frac{c}{\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma)\ln\left|\sin\frac{\sigma-s}{2}\right|d\sigma + \int_0^{2\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma = f(s), \quad (4.7)$$

где a, b, c — константы, $h(s,\sigma)$, $f(s)$ — гладкие функции. Решение уравнения (4.7) ищется на множестве H^λ функций $u(s)$ таких, что $\|u\|_\lambda = (\sum\limits_{n\in Z} \bar{n}^{2\lambda}|\hat{u}(n)|^2)^{1/2} < \infty, \quad \bar{n} = \max(1, |n|)$.

Здесь $u(s)$ — 2π-периодическая обобщенная функция

$$u(s) = \sum_{n\in Z}\hat{u}(n)e^{ins}, \quad \hat{u}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(s)e^{-ins}ds = (u(s), e^{-ins}).$$

Скалярное произведение в H^λ вводится формулой $(u, v) = \sum\limits_{n\in Z} n^{2\lambda}\hat{u}(n)\overline{\hat{v}(n)}$.

Исследование спектральных свойств особых операторов, входящих в уравнение (4.7), приводит к соотношениям

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\sigma-s}{2}\right| e^{in\sigma}d\sigma = \begin{cases} -\frac{1}{n}\mathrm{sign(n)e^{ins}},\ \mathrm{n} = \pm1, \pm2, \dots, \\ -2\ln 2,\ n = 0, \end{cases}$$

где

$$\mathrm{sign(n)} = \begin{cases} 1,\ n > 0, \\ 0,\ n = 0, \\ -1,\ n < 0; \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\sigma}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma = -i\mathrm{sign(n)e^{ins}},\ \mathrm{n} = 0, \pm1, \pm2;$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{in\sigma}}{\sin^2\frac{\sigma-s}{2}}d\sigma = -n\mathrm{sign(n)e^{ins}},\ \mathrm{n} = 0, \pm1, \pm2, \dots.$$

Эти соотношения позволяют записать решения частных случаев уравнения (4.7) в явном виде. Положим

$$x(s)=\sum_{n\in Z}\hat{x}(n)e^{ins},\quad f(s)=\sum_{n\in Z}\hat{f}(n)e^{ins}.$$

Пусть $a=1$, $h(t,\tau)\equiv 0$. Тогда

$$x(s)=-\frac{\hat{f}(0)}{2c\ln 2}e^{i0s}+\sum_{n\in Z,n\neq 0}(-\mathrm{sign}(n))\frac{\hat{f}(n)}{n+ib+\frac{c}{n}}e^{ins}.$$

Пусть $a=0,b=1,h(t,\tau)\equiv 0$. Тогда

$$x(s)=-\frac{\hat{f}(0)}{2c\ln 2}e^{i0s}+\sum_{n\in Z,\,n\neq 0}(-\mathrm{sign}(n))\frac{\hat{f}(n)}{i+\frac{c}{n}}e^{ins}.$$

В общем случае уравнение (4.7) решается методом моментов. В работе [25] получены оценки погрешности.

В работе [42] построен приближенный метод решения уравнения

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{x(\sigma)}{\sin^2\frac{\sigma-s}{2}}d\sigma=f(s),\ s\in(0,2\pi) \tag{4.8}$$

при дополнительном условии $\int\limits_0^{2\pi}f(\sigma)d\sigma=0$.

Вводятся две системы узлов $t_k=2\pi k/n,\ k=0,1,\ldots,n$, и $\hat{t}_k=t_{k-1}+h/2$, $k=1,2,\ldots,n$, $h=\pi/n$. Приближенное решение ищется в виде кусочно-постоянной функции

$$x_n(t)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\varphi_i(t),\ \varphi_i(t)=\begin{cases}1,\ t\in[t_{i-1},t_i],\\ 0,\ t\in[0,2\pi]\backslash[t_{i-1},t_i].\end{cases}$$

Коэффициенты $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ находятся из системы уравнений

$$\begin{cases}\gamma_{on}+\frac{1}{2\pi}\sum\limits_{l=1}^n\left(\mathrm{ctg}\,\frac{\hat{t}_k-t_l}{2}-\mathrm{ctg}\,\frac{\hat{t}_k-t_{l-1}}{2}\right)\alpha_l=f(\hat{t}_k),\ k=1,2,\ldots,n,\\ \sum\limits_{l=1}^n\alpha_l=0,\end{cases} \tag{4.9}$$

где $\gamma_{on}=\frac{1}{2\pi}\sum\limits_{k=1}^n f(\hat{t}_k)h,\ h=\frac{2\pi}{n}$.

В [42] показано, что если решение x^* уравнения (4.8) принадлежит классу функций $W^3H_\alpha[0,2\pi]$, то, при достаточно больших n, система уравнений (4.9) однозначно разрешима и справедлива оценка $\max\limits_{1\leq i\leq n}|x^*(\hat{t}_i)-x_n(\hat{t}_i)|\leq Ch^2$.

В работе [23] уравнение (4.8) решалось методом дискретных вихрей.

Для приближенного решения ГИУ первого рода применяется метод гомотопий, который восходит к классическим работам Леверье, Пуанкаре, Бернштейна. Этому методу посвящено большое число теоретических и прикладных работ. Подробный обзор метода приведен в [48].

Применительно к ГИУ метод гомотопий заключается в следующем [41]. Рассмотрим уравнение

$$Kx \equiv a_0(Ax)(t) + a(t)(Sx)(t) + (Hx)(t) = f(t), \tag{4.10}$$

в котором использованы обозначения, введенные при описании уравнения (4.2). Здесь $x(t) = \sqrt{1-t^2}\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — неизвестная функция. Вводится уравнение

$$H^*(x,p) \equiv (1-p)(a_0(Ax) - f_0) + p(a_0(Ax) + a(t)(Sx) + (Hx) - f) = 0,$$

где p — параметр, $0 \le p \le 1$. При $p = 0$ последнее уравнение вырождается в уравнение $a_0Ax - f_0 = 0$, где f_0 — функция, для которой известно решение x_0 уравнения $a_0Ax = f_0$.

Решение уравнения (4.10) ищется в виде ряда

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k x_k(t), \tag{4.11}$$

где $x_k(t)$ — последовательные приближения, получаемые из уравнения

$$a_0A(\sum_{k=0}^{\infty} p^k x_k(t)) = f_0 + p[f - a(t)S(\sum_{k=0}^{\infty} p^k x_k(t)) - H(\sum_{k=0}^{\infty} p^k x_k(t)) - f_0]:$$
$$x_0 = (a_0A)^{-1} f_0,$$
$$x_1 = (a_0A)^{-1}(f - f_0 - a(t)Sx_0 - Hx_0),$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_k = (a_0A)^{-1}(-a(t)Sx_{k-1} - Hx_{k-1}),\ k \ge 2.$$

В случае, если радиус сходимости ряда (4.11) больше 1, то при $p = 1$ $x^*(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k(t)$— решение уравнения (4.10).

Вернемся к уравнению (4.1). Исследуем построение и обоснование приближенных методов решения ГИУ в пространствах гельдеровских функций [12], [13].

Весовая функция $(1-t^2)^{1/2}$. Пусть в уравнении (4.1) $h(t,\tau) \in H_{\alpha,\alpha}, f(t) \in H_\alpha, 0 < \alpha \le 1$. Приближенное решение уравнения (4.1) будем искать в виде функции

$$x_n(t) = \sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k. \tag{4.12}$$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются из системы уравнений

$$K_n x_n \equiv T_n \left[\int\limits_{-1}^{1} \frac{x_n(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} + \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} U_n^\tau [h(t,\tau)\varphi_n(\tau)] d\tau \right] = T_n[f(t)], \qquad (4.13)$$

где $\varphi_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$, $T_n[f]-$ оператор проектирования на множество интерполяционных полиномов n-го порядка по узлам ортонормальных полиномов Чебышева первого рода; $U_n^\tau[f]-$ оператор проектирования на множество интерполяционных полиномов n-го порядка по узлам ортонормальных полиномов Чебышева второго рода.

Введем пространство X функций вида $x(t) = \sqrt{1-t^2}\varphi(t)$ с нормой $\|x(t)\| = \sum\limits_{i=0}^{1} \max\limits_{-1\le t\le 1} |\varphi^{(i)}(t)| + H(\varphi^{(1)}, \beta)$, и пространство Y функций $y(t) \in H_\beta$ с нормой $\|y(t)\| = \max\limits_{-1\le t\le 1} |y(t)| + H(y, \beta)$. Здесь $0 < \beta < min(1/2, \alpha)$.

В [12] показано, что оператор $K \in [X, Y]$.

Теорема 3. *[13]. Пусть* $h(t,\tau) \in W^{r,r} H_{\alpha\alpha}(M)$, $f(t) \in W^r H_\alpha(M)$, $r = 2, 3, \ldots, 0 < \alpha \le 1$, $M = \text{const}$. *Пусть существует линейный обратный оператор* $K^{-1} \in [Y, X]$. *Тогда при* n *таких, что* $q = Cn^{-r-\alpha+\beta} \ln n < 1$, *система уравнений* (4.13) *однозначно разрешима и справедливо неравенство* $\|x^*(t) - x_n^*(t)\|_{C[-1,1]} \le Cn^{-r-\alpha+\beta} \ln n$, *где* x^* *и* x_n^*- *решения уравнений* (4.1) *и* (4.13), *соответственно.*

Весовая функция $(1-t^2)^{-1/2}$. Пусть в уравнении (4.1) $h(t,\tau) \in H_{\alpha,\alpha}$, $f(t) \in H_\alpha, 0 < \alpha \le 1$. Будем искать приближенное решение ГИУ (4.1) на классе функций $x(t) = (1-t^2)^{-1/2}\varphi(t)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. функция $\varphi(t)$ разлагается в ряд по степеням $t : \varphi(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k t^k$,
2. $x_0 = c_0$,
3. $x_1 = c_1$.

Здесь c_0 и c_1- фиксированные константы.

Приближенное решение уравнения (4.1) будем искать в виде функции $x_n(t) = (1-t^2)^{-1/2}\varphi_n(t), \varphi_n(t) = c_0 + c_1 t + \sum\limits_{k=2}^{n} \alpha_k t^k$, коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которой определяются из системы

$$K_n x_n \equiv T_{n-2} \left[\frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi_n(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau - t)^2} + \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} T_n^\tau [h(t,\tau)\varphi_n(\tau)] d\tau \right] = \\ = T_{n-2}[f(t)], \quad (4.14)$$

где T_n- оператор проектирования на множество интерполяционных полиномов n-го порядка по узлам многочленов Чебышева первого рода; верхний индекс у оператора T_n^τ означает, что интерполяция проводится по переменной τ.

Введем пространство X функций $x(t)$ с нормой $\|x(t)\| = \sum\limits_{j=0}^{2} \max\limits_{t\in[-1,1]} |x^j(t)| + H(x^{(2)}, \beta)$, $0 < \beta < \alpha$. Обозначим через Y пространство функций $y(t) \in H(\beta, [-1,1])$. Норма в пространстве Y определяется выражением $\|y(t)\| = \max\limits_{-1\le t\le 1} |y(t)| + H(y,\beta)$.

В работе [13] показано, что оператор $K \in [X, Y]$.

Теорема 4. *[13] Пусть оператор $K \in [X,Y]$ непрерывно обратим и $h(t,\tau) \in H_{\alpha,\alpha}$, $f(t) \in H_\alpha$. Тогда при n таких, что $Cn^{-\alpha+\beta}\ln^2 n < 1$, система уравнений (4.14) однозначно разрешима и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\|_{C[-1,1]} \le Cn^{-\alpha+\beta}\ln^2 n$, где x^* и x_n^*- решения уравнений (4.1) и (4.14), соответственно.*

Весовые функции $((1+t)/(1-t))^{\pm 1/2}$. В этом пункте исследуются приближенные методы решения ГИУ (4.1), решение которых ищется в классе функций $x(t) = ((1+t)/(1-t))^{\pm 1/2}\varphi(t)$, где $\varphi(t)-$ гладкая функция. Для определенности ограничимся рассмотрением весовой функции $(1+t)/(1-t))^{1/2}$.

Приближенное решение уравнения (4.1) ищется в виде функции

$$x_n(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\varphi_n(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k t^k,$$

с заранее заданным коэффициентом $\alpha_0 = \mathrm{const}$. Это соответствует тому, что в качестве дополнительного условия, налагаемого на решение уравнения (4.1), берется значение $x^*(0) = \alpha_0$.

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ функции $x_n(t)$ находятся из системы

$$K_n x_n \equiv T_{n-1}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\frac{\varphi_n(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau + \right.$$
$$\left. + \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}T_n^\tau[(1+\tau)h(t,\tau)\varphi_n(\tau)]d\tau\right] = T_n[f(t)], \quad (4.15)$$

где T_n- оператор проектирования на множество интерполяционных полиномов n-го порядка по узлам полиномов Чебышева первого рода.

Введем пространство X функций вида $x(t) = \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\varphi(t)$, где $\varphi(t)-$ функция, входящая в класс $W^r H_\alpha(M)$, $r = 2, 3, \ldots$, $0 < \alpha \le 1$, и удовлетворяющая условию $\varphi(0) = c_0$. Норма в пространстве X определяется формулой $\|x(t)\| = \|\varphi(t)\|_{C[-1,1]} + \|\varphi'(t)\|_{C[-1,1]} + H(\varphi', \beta)$, $\beta < \alpha$. Через Y обозначим пространство функций $y(t) \in H_\beta$ с нормой $\|y(t)\| = \|y(t)\|_{C[-1,1]} + H(y,\beta)$.

По аналогии с выкладками, проведенными в [13] при исследовании решений в пространствах функций с весами $(1-t^2)^{\pm 1/2}$, можно показать, что оператор K отображает X в Y.

Теорема 5. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. $h(t,\tau) \in W^{r,r} H_{\alpha\alpha}(M)$, $f(t) \in W^r H_\alpha$;

2. *оператор* $K \in [X,Y]$ *непрерывно обратим.*

Тогда при n *таких, что* $q = Cn^{-r-\alpha+\beta} \ln n < 1$, *система уравнений* (4.15) *однозначно разрешима и справедлива оценка* $\|x^* - x_n^*\|_{C[-1,1]} \le Cn^{-r-\alpha+\beta} \ln^2 n$, *где* x^* *и* x_n^*– *решения уравнений* (4.1) *и* (4.15), *соответственно.*

5. Приближенное решение линейных гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода на замкнутых контурах

Рассмотрим гиперсингулярное интегральное уравнение

$$Kx \equiv a(t)x(t) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{h(t,\tau)x(\tau)}{(\tau-t)^p} d\tau = f(t), \tag{5.1}$$

где γ– единичная окружность с центром в начале координат, p– натуральное число, $p = 2, 3, \ldots$.

Будем считать, что выполнены следующие условия: $a(t)$, $f(t) \in W^r H_\alpha$, $h(t,\tau) \in W^{r,r+p-1} H_{\alpha,\alpha}$, $r = 0, 1, \ldots, 0 < \alpha \le 1$.

Через $Y = H_\beta$ $(0 < \beta < \alpha)$ обозначим банахово пространство функций $f(t) \in H_\beta$ с нормой $\|f(t)\|_Y = \|f(t)\|_{H_\beta} = \max\limits_{t\in\gamma} |f(t)| + H(f,\beta)$.

Через X обозначим банахово пространство функций $x \in W^{p-1} H_\beta, 0 < \beta < \alpha$, с нормой $\|x(t)\|_X = \sum\limits_{k=0}^{p-1} \max\limits_{t\in\gamma} |x^{(k)}(t)| + H(x^{(p-1)}, \beta)$.

Приближенное решение уравнения (5.1) будем искать в виде полинома

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^{k+p-1} + \sum_{k=-n}^{-1} \alpha_k t^k. \tag{5.2}$$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются из системы линейных уравнений, которая в операторной форме имеет вид

$$K_n x_n \equiv \bar{P}_n \left[a(t)x_n(t) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma P_n \left[\frac{h(t,\tau)x_n(\tau)}{(\tau-t)^p} \right] d\tau \right] = \bar{P}_n[f(t)]. \tag{5.3}$$

Здесь $P_n(\bar{P}_n)$– оператор проектирования на множество интерполяционных тригонометрических полиномов по узлам $t_k = e^{is_k}$, $s_k = 2k\pi/(2n+1)$ $(\bar{t}_k = e^{i\bar{s}_k}, \bar{s}_k = (2k+1)\pi/(2n+1))$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$.

Теорема 6. *[11]. Пусть уравнение* (5.1) *однозначно разрешимо. Тогда при n таких, что $q = A\ln^3 n/n^{r-p+1+\alpha-\beta}$, система уравнений* (5.3) *однозначно разрешима и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\|_X \le A\ln^3 n/n^{r-p+1+\alpha-\beta}$, где x^* и x_n^*— решения уравнения* (5.1) *и системы уравнений* (5.3), *соответственно.*

Доказательство теоремы проводится по следующей схеме. Пользуясь определением гиперсингулярного интеграла на гладком замкнутом контуре, точное уравнение (5.1) и приближенную систему уравнений (5.3) трансформируем в сингулярное интегро-диффренциальное уравнение и систему линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующих его. Применяя результаты [10], завершаем доказательство теоремы.

Эти результаты распространены [14] на гиперсингулярные интегро-дифференциальные уравнения.

Рассмотрим гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение

$$Kx \equiv \sum_{k=0}^{m} a_k(t)x^{(k)}(t) + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{l}\int\limits_{\gamma}\frac{h_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p} = f(t), \quad p = 2,3,\dots . \tag{5.4}$$

В качестве граничных условий в уравнении (5.4) возьмем следующие

$$\int\limits_{\gamma} x(t)t^{-k-1}dt = 0, \quad k = 0,1,\dots,s-1, \quad s = \max(m, l+p-1). \tag{5.5}$$

Будем считать, что выполнены следующие условия: $a_k(t)$, $f(t) \in W^r H_\alpha$, $k = 0,1,\dots,m$, $h_k(t,\tau) \in W^{r,r+p-1}H_{\alpha,\alpha}$, $r = 0,1,\dots, 0 < \alpha \le 1$, $k = 0,1,\dots,l$.

Исследование приближенных методов решения граничной задачи (5.4), (5.5) основано [14] на ее трансформации к граничной задаче для сингулярных интегро-дифференциальных уравнений.

В работе [14], как и в работах [10], [15], обоснование приближенных методов решения ГИУ основано на общей теории приближенных методов Л.В. Канторовича [22]. В качестве другого подхода к построению и обоснованию приближенных методов решения ГИУ может быть использована работа [4].

Через Y обозначим банахово пространство функций $y(t) \in H_\beta$ с нормой $\|y(t)\|_Y = \max_\gamma |y(t)| + H(y,\beta)$, $0 < \beta < \alpha$.

Через X обозначим банахово пространство функций $x \in W^s H_\beta$, $0 < \beta < \alpha$ с нормой $\|x(t)\|_X = \sum\limits_{k=0}^{s}\max\limits_{t\in\gamma}|x^{(k)}(t)| + H(x^{(s)},\beta)$.

Приближенное решение граничной задачи (5.4)-(5.5) будем искать в виде полинома

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k t^{k+s} + \sum_{k=-n}^{-1}\alpha_k t^k. \tag{5.6}$$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются из системы уравнений

$$K_n x_n \equiv \bar{P}_n \left[\sum_{k=0}^{m} a_k(t) x_n^{(k)}(t) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{l} \int\limits_{\gamma} P_n \left[\frac{h_k(t,\tau) x_n^{(k)}(\tau)}{(\tau - t)^p} \right] d\tau \right] = \bar{P}_n[f(t)]. \quad (5.7)$$

Здесь $P_n(\bar{P}_n)$– оператор проектирования на множество интерполяционных тригонометрических полиномов по узлам $t_k = e^{is_k}$, $s_k = 2k\pi/(2n+1)$ ($\bar{t}_k = e^{is_k}, \bar{s}_k = (2k+1)\pi/(2n+1)$), $k = 0, 1, \ldots, 2n$.

Теорема 7. *[14], [17]. Пусть краевая задача* (5.3)-(5.4) *однозначно разрешима. Тогда при n таких, что* $q = A \ln^3 n / n^{r-p+1+\alpha-\beta}$ *система уравнений* (5.7) *однозначно разрешима и справедлива оценка* $\|x^* - x_n^*\|_X \leq A \ln^3 n / n^{r-p+1+\alpha-\beta}$, *где* x^* *и* x_n^*– *решения краевой задачи (24) - (25) и системы уравнений* (5.7), *соответственно.*

В работе [11] предложена и обоснована следующая вычислительная схема для приближенного решения уравнения (5.1).

Через Y обозначим банахово пространство функций $y(t) \in H_\beta$ с нормой $\|y(t)\|_Y = \max_\gamma |y(t)| + H(y, \beta)$, $0 < \beta < \alpha$.

Через X обозначим банахово пространство функций $x \in W^{p-1} H_\beta$, $0 < \beta < \alpha$, с нормой $\|x(t)\|_X = \sum\limits_{k=0}^{p-1} \max\limits_{t \in \gamma} |x^{(k)}(t)| + H(x^{(p-1)}, \beta)$.

Приближенное решение ищется в виде функции

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{p-2} \alpha_k t^k \ln t + \sum_{k=p-1}^{n+p-1} \alpha_k t^k \ln t + \sum_{k=-n+p-1}^{-1} \alpha_k t^k,$$

коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которой определяются из системы

$$K_n x_n \equiv P_n \left[a(t) x_n(t) + \int\limits_{\gamma} \frac{h(t,\tau) x_n(\tau) d\tau}{(\tau - t)^p} \right] = P_n[f(t)]. \quad (5.8)$$

Здесь через $P_n[f]$ обозначен оператор проектирования непрерывных функций $f \in C[\gamma]$ на множество интерполяционных тригонометрических полиномов n-го порядка, построенных на узлах $t_k = e^{is_k}$, $s_k = 2k\pi/(2n+1)$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$.

Теорема 8. *[11]. Пусть оператор* $K \in [X, Y]$ *непрерывно обратим;* a, $f \in H_\alpha$, $h \in H_{\alpha,\alpha}$. *Тогда при n таких, что* $q = C n^{-\alpha+\beta} \ln^3 n < 1$, *система уравнений* (5.8) *имеет единственное решение* x_n^* *и справедлива оценка* $\|x^* - x_n^*\|_X \leq C n^{-\alpha+\beta} \ln^3 n$, *где* x^*– *решение уравнения* (5.1).

Замечание. В теоремах 6, 8 достаточно потребовать односторонней обратимости оператора K в соответствующих пространствах. Аналогичное ослабление условий возможно и в теореме 7.

6. Сплайн-коллокационный метод решения ГИУ второго рода

Рассмотрим гиперсингулярное интегральное уравнение

$$Kx \equiv a(t)x(t) + b(t)\int\limits_{-1}^{1} \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau - t)^p} + \int\limits_{-1}^{1} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \tag{6.1}$$

где $p = 2k, k = 1, 2, \dots,$ $b(t) \neq 0$, $t \in [-1, 1]$.

Введем узлы $t_k = -1 + 2k/N$, $k = 0, 1, \dots, N$, и $\bar{t}_k = t_k + 1/N$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Обозначим через Δ_k интервалы $\Delta_k = [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, \dots, N-2$, а через Δ_{N-1} сегмент $\Delta_{N-1} = [t_{N-1}, 1]$.

Приближенное решение уравнения (6.1) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \psi_k(t), \tag{6.2}$$

где

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_k \\ 0, & t \in [-1, 1] \setminus \Delta_k. \end{cases} \tag{6.3}$$

Значения $\{\alpha_k\}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$a(\bar{t}_k)\alpha_k + b(\bar{t}_k)\sum_{l=0}^{N-1}{}'\alpha_l \int\limits_{\Delta_l} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_k)^p} + \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_l \int\limits_{\Delta_l} h(\bar{t}_k, \tau)d\tau = f(\bar{t}_k), \tag{6.4}$$

$k = 0, 1, \dots, N-1$.

Здесь $\sum{}'$ означает суммирование по $l \neq k-v, k-v+1, \dots, k-1, k+1, \dots, k+v-1$, где величина $v (v \geq 1)$ зависит от абсолютной величины коэффициентов $a(t)$, $b(t)$ и от значений N. Начиная с некоторого, достаточно большого N, параметр v можно положить равным единице. Параметр v выбирается таким образом, чтобы были выполнены условия теоремы Адамара об обратимости прямоугольных матриц. В работе [16] показано, что этот выбор осуществим, если $b(t) \neq 0$, $t \in [-1, 1]$.

Теорема 9. *[16]. Пусть выполнены следующие условия:*

1. *справедливо неравенство* $|b(t)| \geq b > 0$ *при* $t \in (-1, 1)$*;*
2. *функция* $a(t), f(t), h(t, \tau)$ *непрерывны.*

Тогда существует такое $v \geq 1$, *что при достаточно больших* N *система уравнений (32) имеет единственное решение* $x_N^*(t)$.

Вычислительная схема, построенная на основе кусочно-постоянной аппроксимации решения, не гарантирует сходимости приближенного решения $x_N^*(t)$ к точному при $p \geq 2$.

Сходимость можно гарантировать только для уравнений с сингулярностью $1+\lambda, 0 < \lambda < 1$:

$$a(t)x(t) + b(t)\int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)d\tau}{|\tau - t|^{1+\lambda}} + \int_{-1}^{1} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad 0 < \lambda < 1. \tag{6.5}$$

Приближенное решение уравнения (6.5) будем искать в виде кусочно-постоянной функции (6.2),(6.3), значения $\{\alpha_k\}$ которой определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$a(\bar{t}_k)\alpha_k + \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_l \int_{\Delta_l} \frac{d\tau}{|\tau - \bar{t}_k|^{1+\lambda}} + \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_l \int_{\Delta_l} h(\bar{t}_k, \tau)d\tau = f(\bar{t}_k), \tag{6.6}$$

$k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Теорема 10. *[33]. Пусть выполнены следующие условия:*

1. *функции* $a(t)$, $b(t)$, $f(t) \in W^2(M)$, $h(t,\tau) \in W^{2,2}(M)$;
2. *уравнение* (6.5) *имеет единственное решение* $x^*(t) \in W^1 H_\alpha(M)$, $0 < \alpha \leq 1$;
3. $0 < B_* \leq |b(t)| \leq B^* < \infty$, $-1 \leq t \leq 1$.

Тогда система уравнений (6.6) *имеет единственное решение* $x_N^*(t)$ *и справедлива оценка* $\|x^*(t) - x_N^*(t)\|_{C[-1,1]} \leq CN^{-(1-\lambda)}$.

Так как при $p \geq 2$ вычислительная схема, построенная на основе кусочно-постоянной аппроксимации решения, не гарантирует сходимости приближенного решения к точному, то ее необходимо трансформировать.

При $p = 2$ и при аппроксимации решения сплайном первого порядка, можно получить оценку точности приближенного решения.

Рассмотрим уравнение

$$a(t)x(t) + \int_{-1}^{1} \frac{h(t,\tau)x(\tau)d\tau}{(\tau - t)^2} = f(t), \quad -1 \leq t \leq 1. \tag{6.7}$$

Это уравнение наиболее часто встречается в приложениях.

Отметим, что если при определении уравнения (6.7) предполагается, что переменная t может принимать значения ± 1, то гиперсингулярный интеграл в (6.7) понимается в смысле определения 2 для $t \in (-1, 1)$ и в смысле определения 2.3 для $t = \pm 1$.

Каждому узлу t_k, $k = 1, 2, \ldots, 2N-1$, поставим в соответствие базисную функцию

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} 0,\ t_{k-1} \le t \le t_{k-1} + \frac{1}{N^2}, \\ \frac{N^2}{N-2}(t - t_{k-1}) - \frac{1}{N-2},\ t_{k-1} + \frac{1}{N^2} \le t \le t_k - \frac{1}{N^2}, \\ 1,\ t_k - \frac{1}{N^2} \le t \le t_k + \frac{1}{N^2}, \\ -\frac{N^2}{N-2}(t - t_{k+1}) - \frac{1}{N-2},\ t_k + \frac{1}{N^2} \le t \le t_{k+1} - \frac{1}{N^2}, \\ 0,\ t_{k+1} - \frac{1}{N^2} \le t \le t_{k+1}, \\ 0,\ t \in [-1,1] \backslash [t_{k-1}, t_{k+1}]; \end{cases} \tag{6.8}$$

узлу t_0 поставим в соответствие базисную функцию

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1,\ -1 \le t \le -1 + \frac{1}{N^2}, \\ -\frac{N^2}{N-2}(t - t_1) - \frac{1}{N-2},\ -1 + \frac{1}{N^2} \le t \le t_1 - \frac{1}{N^2}, \\ 0,\ t_1 - \frac{1}{N^2} \le t \le t_1, \\ 0,\ [-1,1] \backslash [t_0, t_1]; \end{cases} \tag{6.9}$$

узлу t_{2N} поставим в соответствие базисную функцию

$$\varphi_{2N}(t) = \begin{cases} 0,\ -1 \le t \le t_{N-1} + \frac{1}{N^2}, \\ \frac{N^2}{N-2}(t - t_{N-1}) - \frac{1}{N-2},\ t_{N-1} + \frac{1}{N^2} \le t \le 1 - \frac{1}{N^2}, \\ 1,\ 1 - \frac{1}{N^2} \le t \le 1. \end{cases} \tag{6.10}$$

Приближенное решение уравнения (6.7) будем искать в виде кусочно-непрерывной функции

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^{2N} \alpha_k \varphi_k(t), \tag{6.11}$$

коэффициенты которой определяются из следующей системы линейных алгебраических уравнений

$$a(t_k)x_N(t_k) + \sum_{l=0}^{2N} \alpha_l h(t_k, \tau_l) \int_{-1}^{1} \frac{\varphi_l(\tau)}{(\tau - t_l)^2} d\tau = f(t_k), \tag{6.12}$$

$k = 0, 1, \ldots, 2N$.

Теорема 11. *[34] Пусть уравнение* (6.7) *однозначно разрешимо; функции* $a(t)$, $f(t)$ *имеют непрерывные производные* r*-го порядка; функция* $h(t,\tau)$ *имеет непрерывные производные* r*-го порядка по обеим переменным;* $r \ge 1$*; выполнено условие* $|h(t,t)| \ge q > 0$ *при* $t \in [-1,1]$*. Тогда система уравнений* (6.12) *однозначно разрешима и справедливо неравенство* $\max\limits_{0 \le k \le 2N} |x^*(t_k) - x_N^*(t_k)| \le AN^{-1}$*. Здесь* $x^*(t)$ *и* $x_N^*(t)$*– решения уравнений* (6.10) *и* (6.12)*, соответственно.*

7. Приближенные методы решения нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений

Большое число задач (физических и технических) сводится к нелинейным гиперсингулярным интегральным уравнениям типа Прандтля

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{x(\tau)}{(\tau-t)^2} d\tau + \gamma(t, x(t)) = f(t), \quad |t| < 1, x(\pm 1) = 0. \tag{7.1}$$

Условия разрешимости и проекционные методы решения уравнений вида (7.1) изложены в [38], [39].

Для приближенного решения уравнения

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{(\tau-t)^2} d\tau + \gamma(t, x(t)) = f(t), \tag{7.2}$$

при ряде условий на решение на бесконечности, предложен метод установления [44].

Аналог метода дискретных особенностей предложен и обоснован в [18] для приближенного решения уравнения Мультхопфа безциркулярного обтекания поверхности потоком газа.

Рассмотрим нелинейное гиперсингулярное интегральное уравнение:

$$a(t)x(t) + \int\limits_{-1}^{1} \frac{h(t, \tau, x(\tau)) d\tau}{(\tau-t)^p} = f(t) \ . \tag{7.3}$$

Будем искать приближенное решение уравнения (7.3) в виде кусочно-постоянной функции (6.2)-(6.3) с коэффициентами α_k, которые определяются следующей системой уравнения, полученной путем аппроксимации ядра $h(t, \tau)$ кусочно-постоянной функцией и применения процедуры коллокации

$$a(\bar{t}_l)\alpha_l + \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{\Delta_k} \frac{h(\bar{t}_l, \bar{t}_k, \alpha_k)}{(\tau - t_l)^p} d\tau = f(\bar{t}_l), l = 0, 1, \cdots, N-1. \tag{7.4}$$

Используя определение гиперсингулярных интегралов, можно записать систему уравнений (7.4) как

$$a(\bar{t}_l)\alpha_l - \sum_{k=0}^{N-1} h(\bar{t}_l, \bar{t}_k, \alpha_k) \frac{N^{p-1}}{p-1} \left(\frac{1}{(2l-2k+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2l-2k-1)^{p-1}} \right) =$$
$$= f(\bar{t}_l), l = 0, 1, \cdots, N-1. \tag{7.5}$$

Производная Фреше на элементах $(\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_{N-1})$ в пространстве R_N равна

$$a(\bar{t}_l)\alpha_l - \sum_{k=0}^{N-1} h'_3(\bar{t}_l, \bar{t}_k, \overline{\alpha}_k)\alpha_k \frac{N^{p-1}}{p-1}\left(\frac{1}{(2l-2k+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2l-2k-1)^{p-1}}\right),$$

$l = 0, 1, \ldots, N-1$. Нижний индекс в выражении $h'{}_3(t, \tau, u)$ означает, что производная берется по третьему аргументу.

Пусть уравнение (7.3) имеет единственное решение $x^*(t)$ внутри шара $B(x^*, \delta)$. Предположим, что функция $h'{}_3(t, \tau, \varphi(\tau)), \varphi(\tau) \in B(x^*, \delta), -1 \le t, \tau \le 1$, имеет одинаковый знак внутри шара $B(x^*, \delta)$, а также имеет диагональное преобладание: $h'{}_3(t, t, \varphi(t)) \ge h'{}_3(t, \tau, \varphi(\tau))$ при $t, \tau \in [-1, 1]$.

Предположим, что N достаточно велико, а значения $h'_3(\bar{t}_l, \bar{t}_k, \overline{\alpha}_k)$ также имеют один и тот же знак внутри шара $B(\overline{x}^*, \delta)$, где $\overline{x}^* = (\overline{\alpha}_0^*, \cdots, \overline{\alpha}_{N-1}^*)$, $\overline{\alpha}_k^* = x^*(\bar{t}_k), k = 0, 1, \cdots, N-1$.

Предположим для определенности, что функция $h'_3(t, \tau, x(\tau)))$, $(t, \tau) \in [-1, 1]$, $x \in B(x^*, \delta)$ положительна и имеется диагональное доминирование, а функция $a(t)$ неположительна. Тогда, согласно непрерывному методу решения операторных уравнений [9] решение системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_l(t)}{dt} &= a(\bar{t}_l)\alpha_l(t) - \sum_{k=0}^{N-1} h(\bar{t}_l, \bar{t}_k, \alpha_k(t))\frac{N^{p-1}}{p-1}\times \\ &\times \left(\frac{1}{(2l-2k+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2l-2k-1)^{p-1}}\right) - f(\bar{t}_l),\ l = 0, 1, \cdots, N-1, \end{aligned} \tag{7.6}$$

сходится к решению уравнения (7.3).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 12. *[34] Пусть выполняются следующие условия:*

1. *Уравнение* (7.3) *имеет единственное решение* $x^*(t)$ *внутри шара* $B(x^*, \delta)$;

2. *Знак функции* $h'_3(t, \tau, \varphi(\tau))$, $\varphi(\tau) \in B(x^*, \delta)$ *не меняется, и знаки функций* $h'_3(t, \tau, \varphi(\tau))$, *и* $a(t)$ *противоположные;*

3. $|h'_3(t, \tau, \varphi(\tau))| \ge \alpha$ *при* $(t, \tau) \in [-1, 1]$, $\varphi \in B(x^*, \delta)$;

4. *функция* $h'_3(t, \tau, \varphi(\tau))$, $(t, \tau) \in [-1, 1], \varphi(\tau) \in B(x^*, \delta)$ *имеет диагональное доминирование, т.е.* $h'_3(t, t, \varphi(t)) \ge h'_3(t, \tau, \varphi(\tau))$.

Тогда система уравнений (7.4) *имеет единственное решение внутри шара* $B(x^*, \delta)$, *и решение уравнения* (7.5) *сходится к этому решению при* $t \to \infty$.

Замечание. Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7.6) может быть использован любой численный метод.

Замечание. Для решения системы нелинейных уравнений (7.4) не требуется обратимости производной Фреше (7.5) на каждом шаге итерационного процесса.

8. Приближенные методы решения полигиперсингулярных и многомерных гиперсингулярных интегральных уравнений

Не имея возможности, из-за ограниченного размера статьи, остановиться на приближенных методах решения полигиперсингулярных и многомерных ГИУ, приведем лишь ссылки на соответствующие работы

В работе [34] сплайн-коллокационный метод со сплайнами нулевого порядка применяется для решения бигиперсингулярного интегрального уравнения

$$a(t_1,t_2)x(t_1,t_2) + b(t_1,t_2)\int\limits_{-1}^{1} \frac{x(\tau_1,t_2)}{(\tau_1-t_1)^p}d\tau_1 + c(t_1,t_2)\int\limits_{-1}^{1} \frac{x(t_1,\tau_2)}{(\tau_2-t_2)^p}d\tau_2 +$$
$$+ d(t_1,t_2)\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^p(\tau_2-t_2)^p} = f(t_1,t_2),\ p = 2,4,\ldots,$$

и многомерного ГИУ

$$a(t_1,t_2)x(t_1,t_2) + \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{h(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}} = f(t_1,t_2).$$

Приближенные методы решения последнего уравнения при $a(t_1,t_2)\equiv 0$ исследовались в [29].

В книге [18] исследовались приближенные методы решения многомерных гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода на гладких поверхностях.

Заключение

В статье дан краткий обзор работ посвященных аналитическим и численным методам решения гиперсингулярных интегральных уравнений. Не имея возможности, из-за ограниченного объема статьи, представить обзор всех известных численных методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений, автор ограничился рассмотрением классов уравнений, которые в настоящее время находят наиболее широкое применения в различных приложениях и в развитии которых он принимал участие. К сожалению, в обзор не попали многочисленные работы, посвященные применениям гиперсингулярных интегральных уравнений к задачам физики и технологий.

Поэтому я приношу свои извинения тем многочисленным авторам, чьи блестящие работы здесь не упомянуты.

Список цитируемых источников

1. *Адамар, Ж.* Исследование психологии процесса изобретения в области математики / Ж. Адамар. — М.: Советское радио, 1970. — 152 с.

   Hadamard, J. Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine math?matique. Translation from the French by M. A. Shatalova and O. P. Shatalov. Moskau: Sovetskoe Radio. 152 S. (1970). (in Russian) Zbl 0217.29806

   Hadamard, Jacques Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique. Paris: Librairie Scientifique Albert Blanchard, 1959. Zbl 0086.24206

2. *Адамар, Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. — М.: Наука, 1978. — 351 с.

   Hadamard, J. Le Probléme de Cauchy et les Équations aux Dérivées Partielles Linéaires Hyperboliques. Paris: Hermann & Cie. 542 p., 1932. Zbl 0006.20501

3. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — М.: БИНОМ, 2008. — 636 с.

   Bakhvalov, N. S.; Zhidkov, N. P.; Kobel'kov, G. M. Numerical methods. Textbook. Moscow: BINOM, 2008. (in Russian)

4. *Бойков, И. В.* Принцип компактной апроксимации в возмущенном методе Галеркина / И. В. Бойков // ДАН СССР. — 1974. — Т.215, № 1. — С.11-14.

   Bojkov, I. V. The principle of compact approximation in the perturbed Galerkin method. Sov. Math., Dokl. 15, 385-389 (1974) Zbl 0302.41015

5. *Бойков, И. В.* Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков. — Пенза: Изд-во ПГУ, 2004. — 316 с.

   Bojkov, I. V. Approximate solution of singular integral equations. Penza: Izdatel'stvo Penzenskogo Gosudarstvennogo Universiteta. 315 p. (2004). (in Russian) Zbl 1169.65001

6. *Бойков, И. В.* Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Часть первая. Сингулярные интегралы. — Пенза: Изд-во Пензенского госуниверситета, 2005. — 360 с.

   Bojkov, I. V. Approximate calculation for singular and hypersingular integrals. Part 1. Singular equations. Penza: Izdatel'stvo Penzenskogo Gosudarstvennogo Universiteta. 359 p. (2005). (in Russian) Zbl 1165.41002

7. *Бойков, И. В.* Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Часть II. Гиперсингулярные интегралы. — Пенза: Изд-во Пензенского госуниверситета, 2009. — 252 с.

   Bojkov, I. V. Approximate calculation for singular and hypersingular integrals. Part 2. Hypersingular integrals. Penza: Izdatel'stvo Penzenskogo Gosudarstvennogo Universiteta, 2009. (in Russian) Zbl 1216.41001

8. *Бойков, И. В.* Аналитические методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. Математика. — 2017. — № 2. —- С. 63-78.

   Bojkov, I. V.; Bojkova, A. I. Analytical methods for solving hypersingular integral equations. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiz.-mat. nauki. Matematika No.2, 63-78 (2017). (in Russian)

9. *Бойков, И. В.* Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т. 48, № 9. — С. 1308-1314.

Boikov, I. V. On a continuous method for solving nonlinear operator equations. Differ. Equ. 48, No. 9, 1288-1295 (2012) Zbl 1267.47094

10. *Бойков, И. В.* К приближенному решению сингулярных интегро-дифференциальных уравнений 1 [линейные уравнения] / И. В. Бойков, И. И. Жечев // Дифференциальные уравнения. — 1973. — Т.9, № 8. — С. 1493-1502.

Bojkov, I. V.; Zhechev, J. I. Approximate solution of singular integro-differential equations. I: Linear equations. Differ. Equations 9(1973), 1149-1156 (1975). (in Russian) Zbl 0302.45015

11. *Бойков, И. В.* Приближенное решение линейных гиперсингулярных интегральных уравнений методом коллокаций / И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова, М. А. Сёмов, А. А. Есафьев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико -математические науки. Математика. — 2014. — №3. — С. 101-113.

Bojkov, I. V.; Zakharova, Yu. F.; Sëmov, M. A.; Esaf'ev, A. A. An approximate solution of linear hypersingular integral equations by the collocation method. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiz.-mat. nauki. Matematika No.3, 101-113 (2014). (in Russian)

12. *Бойков, И. В.* Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода. / И. В. Бойков, А. И. Бойкова, М. А. Сёмов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. Математика. — 2015. — №3. — С. 11-27.

Bojkov, I. V.; Bojkova, A. I.; Sëmov, M. A. An approximate solution of hypersingular integral equations of the first kind. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiz.-mat. nauki. Matematika No.3, 11-27 (2015). (in Russian)

13. *Бойков, И. В.* Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода с особенностями второго порядка на классах функций с весами $(1-t^2)^{-1/2}$ / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. Математика. — 2017. — № 2. — С. 79- 90.

Bojkov, I. V.; Bojkova, A. I. Approximate methods for solving hypersingular integral equations of the first kind with second-order singularities on classes of functions with weights $(1-t^2)^{-1/2}$. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiz.-mat. nauki. Matematika No.2, 79-90 (2017). (in Russian)

14. *Бойков, И. В.* Приближенные методы решения сингулярных и гиперсингулярных интегро-дифференциальных уравнений / И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико -математические науки. Математика. — 2012. — №3 (23). — С. 99-114.

Bojkov, I. V.; Zakharova, Yu. F. Approximate methods for solving singular and hypersingular integro-differential equations. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiz.-mat. nauki. Matematika No.3(23), 99-114 (2012). (in Russian)

15. *Бойков, И. В.* К приближенному решению сингулярных интегро-дифференциальных уравнений 2 / И. В. Бойков, И. И. Жечев // Дифференциальные уравнения. — 1975. — Т.11, № 3. — С.562-571.

Bojkov, I. V.; Zhechev, J. I. Approximate solution of singular integro-differential equations. II: Nonlinear equations. Differ. Equations 11(1975), 424-431 (1976). Zbl 0328.45005

16. *Бойков, И. В.* Сплайн-коллокационный метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, , А. И. Бойкова // Вестник Харк. нац. ун-та. Сер. Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления. — 2007. — вып. 5. — С.: 36-49.

    Bojkov, I. V.; Bojkova, A. I. Spline-collocation method for solving hypersingular integral equations. Vestnik Khark. nats. un-ta. Ser. Matematicheskoye modelirovaniye. Informatsionnyye tekhnologii. Avtomatizirovannyye sistemy upravleniya. Issue 5, 36-49 (2007). (in Russian)

17. *Бойков, И. В.* Приближенное решение гиперсингулярных интегродифференциальных уравнений / И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. Математика. — 2010. — №1. — С. 80-90.

    Bojkov, I. V.; Zakharova, Yu. F. Approximate methods for solving hypersingular integro-differential equations. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiz.-mat. nauki. Matematika No.1, 80-90 (2010). (in Russian)

18. *Вайникко, Г. М.* Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения / Г. М. Вайникко, И. К. Лифанов, Л. Н. Полтавский. — М: Янус-К, 2001. — 508 с.

    Lifanov, I. K.; Poltavskii, L. N.; Vainikko, G. M. Numerical methods in hypersingular integral equations and their applications. Moscow: Yunus-K, 2001. (in Russian)

19. *Гахов, Ф. Д.* Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. — М.: Наука, 1977. — 640 с.

    Gakhov, F. D. Boundary value problems. 3rd ed., revised and augmented. Moskva: Izdatel'stvo Nauka, 1977. (in Russian) Zbl 0449.30030

20. *Гохберг, И. Ц.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения / И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман. — М.: Наука, 1971. — 352 с.

    Gohberg, I. C.; Fel'dman, I. A. Convolution equations and projection methods for their solution. Translations of Mathematical Monographs Vol. 41. Providence, R.I.: American Mathematical Society (AMS). IX, 261 p. (1974). Zbl 0278.45008

21. *Иванов, В. В.* Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений / В. В. Иванов. — Киев: Наукова думка, 1968. — 287 с.

    Ivanov, V. V. The theory of approximate methods and their application to the numerical solution of singular integral equations. Monographs and Textbooks on Mechanics of Solids and Fluids. Mechanics: Analysis. Vol. 2. Leyden: Noordhoff International Publishing. XVII, 330 p. (1976).

22. *Канторович, Л. В.* Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М.: Наука, 1977. — 750 с.

    Kantorovich, L. V.; Akilov, G. P. Functional analysis. 2nd ed. Oxford etc.: Pergamon Press,1982. XIV, 589 p. Zbl 0484.46003

23. *Лифанов, И. К.* Численное решение сингулярных интегральных уравнений Гильберта с сильной особенностью // Оптимальные методы вычислений и их применение : межвуз. сб. науч. тр. / Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1985. — Вып. 7. — С. 38-45.

Lifanov, I. K. Numerical solution of singular integral Hilbert equations with a strong singularity. Optimal'nyye metody vychisleniy i ikh primeneniye: mezhvuz. sb. nauch. tr. Penza: Penz. politekhn. in-t, issue 7, 38-45 (1985) (in Russian) Zbl 0674.65099

24. *Лифанов, И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. — М.: ТОО "Янус", 1995. — 520 с.

25. *Лифанов, И. К.* К решению составных интегральных уравнений / И. К. Лифанов // Успехи современной радиоэлектроники. — 2006. — № 8. — С. 62-67.

Lifanov, I. K. To the solution of composite integral equations. Uspekhi sovr. radioelektroniki No.8, 62-67 (2006). (in Russian)

26. *Лифанов, И. К.* Гиперсингулярные интегральные уравнения и теория проволочных антенн / И. К. Лифанов, А. С. Ненашев // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, № 1 — С. 121-127.

Lifanov, I. K.; Nenashev, A. S. Hypersingular integral equations and the theory of wire antennas. Differ. Equ. 41, No. 1, 126-145 (2005). Zbl 1092.78010

27. *Лифанов, И. К.* Исследование некоторых вычислительных схем для гиперсингулярного интегрального уравнения на отрезке / И. К. Лифанов, А. С. Ненашев // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, № 9. — С. 1270 - 1275.

Lifanov, I. K.; Nenashev, A. S. Analysis of some computational schemes for a hypersingular integral equation on an interval. Differ. Equ. 41, No. 9, 1343-1348 (2005). Zbl 1127.65101

28. *Некрасов, А. И.* Теория крыла в нестационарном потоке / А. И. Некрасов. — Изд-во АН СССР, 1947. — С. 3-65.

Nekrasov, A. I. Theory of the wing in unsteady flow. Moscow: Izdatelstvo AN SSSR, 1947. (in Russian)

29. *Оселедец, И. В.* Приближенное обращение матриц при решении гиперсингулярного интегрального уравнения / И. В. Оселедец, Е. Е. Тыртышников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2005. — Т. 45, № 2. — С. 315-326.

Oseledets, I. V.; Tyrtyshnikov, E. E. Approximate inversion of matrices at solving the hypersingular integral equation. Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 45, No.2, 315-326 (2005). Zbl 1073.65569

30. *Самко, С. Г.* О разрешимости в замкнутой форме сингулярных интегральных уравнений // ДАН СССР. — 1969. — Т. 189, № 3. — С. 483 -485.

Samko, S. G. On closed form solvability of singular integral equations. Sov. Math., Dokl. 10, 1445-1448 (1969). Zbl 0197.09102

31. *Тахтаджян, Л. А.* Гамильтонов подход в теории солитонов / Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев — М.: Наука, 1986. — 528 с.

Faddeev, Ludwig D.; Takhtajan, Leon A. Hamiltonian methods in the theory of solitons. Classics in Mathematics. Berlin: Springer. xiv, 592 p. (2007).

32. *Чикин, Л. А.* Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений / Л. А. Чикин // Уч. записки Казанского гос ун-та. — 1953. — Т.113, Кн. 10. — С. 57-105.

Chikin, l. A. Special cases of the Riemann boundary value problem and singular integral equations. Uch. zapiski Kazanskogo gos un-ta 113, Kn. 10, 57-105 (1953). (in Russian)

33. *Boykov, I. V.* An Approximate Solution of Hypersingular Integral Equations / I. V. Boykov, E. S. Ventsel, A. I. Boykova // Appl. Num. Math. — 2010. — №60. — P. 607-628.

34. *Boykov, I. V.* New iterative method for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations / I. V. Boykov, V. A. Roudnev, A. I. Boykova, O. A. Baulina // Applied Numerical Mathematics. — May 2018. — Vol. 127. — P. 280-305.

35. *Boykov, I. V.* Analytical methods for solution of hypersingular and polyhypersingular integral equations / I. V. Boykov, A. I. Boykova // arXiv:1901.04880v1 [math.NA] 15 Janury 2019. — 22 p.

36. *Golberg, M. A.* The convergence of several algorithms for solving integral equations with finite-part integrals I // Journal of Integral Equations. — 1983. — № 5. — pp. 329-340.

37. *Golberg, M. A.* The convergence of several algorithms for solving integral equations with finite-part integrals II // Journal of Integral Equations. — 1985. — No.9. — P. 267-275.

38. *Capobiano, M. R.* On the numerical solution of a nonlinear integral equations of Prandl's types / M. R. Capobiano, G. Criscuolo, P. Junghanns // Operator Theory: Advances and Applications (Birkhauser, Basel). — 2005. — V. 160. — P. 53-79.

39. *Capobiano, M. R.* Newton methods for a class of nonlinear hypersingular integral equations / M. R. Capobiano, G. Criscuolo, P. Junghanns // Numer. Algorithms. — 2010. — №55. — P. 205 -221.

40. *Eminov, S. I.,* The rate of convergence of hypersingular equations numerical computation / S. I. Eminov, S. Yu. Petrova // Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr. — 2018. — Vol. 11, iss. 2. — pp. 139-146.

41. *Eshkuvatov, Z. K.* Modified homotopy perturbation method for solving hypersingular integral equations of the first kind / Z. K. Eshkuvatov, F. S. Zulkarnain, N. M. A. Nik Long, Z. Muminov. — Springer Plus (2016) 5:1473.

42. *Feng, H.* Numerical solution of a certain hypersingular integral equation of the first kind / H. Feng,, X. Zhang, J. Li // BIT Numer. Math. — 2011. — Vol. 51. — P. 609 - 630.

43. *Hadamard, J.* Lecons sur la Propagation des Ondes et les Equations de l'Hydrodynamique. Herman. — Paris, 1903. 320 p. (reprinted by Chelsea. — New York. — 1949).

44. *Karvin, V.* Numerical solution on nonlinear hypersingular integral equations of the Peierls type in dislocation theory / V. Karvin, V. G. Maz'ya, A. B. Movchan, J. C. Willis, R. Bullouch // SIAM J. Appl. Math. — 2000. — Vol. 60, № 2. — P. 664-678.

45. *Mandal, B. N., Chakrabani A.* Applied Singular Integral Equations / B. N. Mandal, A. Chakrabani. — CRC Press, 2011. — 264 p.

46. *Martin, P. A.* Exact solution of a simple hypersingular integral equation. J. Integral Equations Appl. 4, No. 2, 197-204 (1992). Zbl 0756.45003

47. *Mikhlin S. G.* Singular Integral Operatoren / S. G. Mikhlin, S. Prossdorf. — Acad.-Verl., Berlin, 1980. — 514 p.

48. *Park, C.-H.* What is the homotopy method for a system of nonlinear equations (survey) / C.-H. Park, H.-T. Shim // J. Appl. Math. Comput. — 2005. — V. 17. № 1-2-3. — P. 689-700.
49. *Prossdorf, S.* Numerical Analysis for Integral and Related Operator Equations / S. Prossdorf, B. Silberman. — Acad.-Verl., Berlin, 1991.

Получена 02.11.2019