Динамические системы, 2019, том 9(37), №3, 213–243

УДК 517.958

К проблеме малых колебаний системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд (модельная задача)[1]

Н. Д. Копачевский

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: kopachevsky@list.ru*

Аннотация. В работе изучается скалярная задача сопряжения, модулирующая проблему малых колебаний двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд. Исследуется начально-краевая задача и методами теории полугрупп доказывается теорема о ее однозначной разрешимости на любом конечном отрезке времени. Возникающая при этом соответствующая спектральная проблема для нормальных колебаний системы исследуется методами спектральной теории оператор-функций (операторных пучков). Полученный операторный пучок обобщает как известный операторный пучок С. Г. Крейна (колебания вязкой жидкости в сосуде), так и пучок, возникающий в задаче о малых движениях вязкоупругой жидкости в частично заполненном сосуде. Рассмотрен также пример двумерной задачи, допускающей разделение переменных, и на этой основе исследован более подробно спектр нормальных движений гидросистем.

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, гидродинамическая система, ортопроектор, операторно-дифференциальное уравнение, задача Коши, спектральная задача

Normal oscillations of hydrosystem of two viscoelastic fluids in stationary container (a model problem)

N. D. Kopachevsky

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. In the paper, we consider a problem on small motions and normal oscillations of two viscoelastic fluids in a stationary container. One of models of such fluids is Oldroid's model. It is described, for example, in the book Eirich, F. R. Rheology. Theory and Applications. N.-Y.: Academic Press, 1956. It is important to notice that the present paper is devoted to the study of the scalar model problem. Also it should be noted that the present paper based on the previous author's works together with Azizov, T. Ya., Orlova L. D., Krein, S. G. Namely, problem on small movements of one or two viscoelastic fluid for generalized Oldroid's model and normal oscillations of a viscoelastic fluid in an open container were investigated in these papers. The aim of this paper is to use an operator approach of mentioned works, to prove the theorem on correct solvability for the scalar model initial boundary-value problem generated by a problem of small motions of two viscoelastic fluids in a stationary

[1]Работа выполнена при частичной поддержке гранта Российского научного фонда (16-11-10125 "Операторные уравнения в функциональных пространствах и приложения к нелинейному анализу", выполняемого в Воронежском госуниверситете).

container and to get properties of eigenvalues and eigenelements of corresponding spectral problem. This paper is organized as follows. In section 1 we describe a model of viscoelastic fluid, formulate mathematical statement of the problem: linearized equations of movements, stickiness condition, kinematic and dynamic conditions. Further, in this section we receive the law of full energy balance and choose the functional spaces generated by the problem. For applying of method of orthogonal projection we need to get orthogonal projector on corresponding space. The law of action of this projector we receive in this section. In section 2 we make transition to operator equation by using orthogonal projector received in section 1. Further, we solve some auxiliary problems and obtain the Cauchy problem for the system of integro-differential equation in some Hilbert space. Then we make transition to a system of differential equation. This system can be rewrite as operator differential equation in the sum of Hilbert spaces. Properties of main operator of this problem are studied in this section. The existence and uniqueness theorems for final operator differential equation as for original initial-boundary-value problem based on factorization, closure and accretivity property of operator matrix. Finally, in this section we consider the spectral problem on normal oscillations corresponding to the evolution problem. This means that external forces equal to zero and dependence by time for the unknown function has the form $e^{-\lambda t}$. Here we obtain the spectral problem for operator pencil and study main properties of it. Section 3 is devoted to investigating of model spectral problem in rectangular domain. The more detailed properties of eigenvalues are obtained here.

Keywords: viscoelastic fluid, hydrodynamic system, orthogonal projector, operator differential equation, Cauchy problem, spectral problem

MSC 2010: 76D05, 35Q30, 39A14, 39B42

1. Постановка скалярной модельной задачи

1.1. Введение

Одними из первых работ, связанных с применением методов функционального анализа к исследованию проблемы малых движений и нормальных колебаний вязкоупругой жидкости в частично заполненном сосуде, являются работы А. И. Милославского (см. [8, 16, 17]). В них для обобщенной модели Олдройта ($m > 1$) применён операторный подход, развивающий построения, проведённые ранее С. Г. Крейном и его учениками (см. [5, 6]), а также ([3, 15]) применительно к задаче о малых колебаниях вязкой жидкости в частично заполненном сосуде либо системы из несмешивающихся жидкостей. Случай полного заполнения полости вязкоупругой жидкости рассмотрен в [12], а также в [2]. Вариант начально-краевой задачи для сосуда, заполненного двумя несмешивающимися вязкоупругими жидкостями, изучен в [14]. Там же сформирована спектральная проблема в задаче о нормальных колебаниях гидросистемы, которая приведена к исследованию операторного пучка, обобщающего известный пучок С. Г. Крейна.

В данной работе изучается модельная спектральная задача, обладающая всеми особенностями векторной проблемы о нормальных колебаниях системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих произвольный сосуд, а также ее частный случай (двумерная проблема в прямоугольном сосуде). Для произвольного сосуда изучена начально-краевая задача и получена спектральная проблема для операторного пучка, обобщающая пучок С.Г. Крейна. Далее изучается соответствующая спектральная задача в упомянутом частном случае, допускающем разделение переменных. Характеристическое уравнение задачи позволяет проводить её исследование графически с использованием асимптотических методов. В итоге модельная задача позволяет выдвинуть гипотезу о структуре спектра в векторной гидродинамической задаче в случае, когда сосуд заполнен двумя или более несмешивающимися жидкостями.

1.2. Предварительная постановка проблемы

Будем считать, что две вязкоупругих жидкости модели Олдройта заполняют сосуд $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и в состоянии равновесия под действием гравитационного поля занимают области Ω_1 и Ω_2 соответственно с горизонтальной границей раздела Γ. Обозначим через S_1 и S_2 те части границы $\partial\Omega$, которые примыкают к первой и второй жидкостям соответственно.

Введем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, чтобы ось Ox_3 была направлена вверх, т.е. против действия однородного гравитационного поля, а начало координат O находилось на Γ. Тогда ускорение гравитационного поля $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, $g > 0$, а в состоянии покоя поле давлений в жидкостях выражаются по законам Архимеда:

$$P_{0,k}(x_3) = p_0 - \rho_k g x_3, \quad k = 1, 2, \tag{1.1}$$

где $\rho_k > 0$ — постоянные плотности жидкостей, а p_0 — давление на границе раздела Γ.

Приведём теперь постановку задачи о малых движениях системы из двух вязкоупругих жидкостей модели Олдройта (см.[14]). Пусть $\vec{u}_k(t,x)$ — поля малых скоростей, а $p_k(t,x)$ — отклонения полей давлений от их равновесных значений (1.1). Полагаем, что на гидросистему дополнительно к гравитационному действует малое поле внешних сил $\vec{f} = \vec{f}(t,x)$, $x \in \Omega$.

Тогда линеаризованные уравнения движения жидкостей имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} \rho_k \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} = -\nabla p_k + \mu_k \Delta \vec{v}_k + \rho_k \vec{f}_k, \quad \mathrm{div}\vec{u}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \\ \vec{v}_k(t,x) = \vec{u}_k(t,x) + \alpha_k \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)} \vec{u}_k(s,x)\,ds =: I_{0,k}(t)\vec{u}_k, \quad k = 1, 2, \end{gathered} \tag{1.2}$$

где $\mu_k > 0$ — динамические вязкости жидкостей, $\alpha_k \geq 0$, $\beta_k \geq 0$ — коэффициенты, характеризующие свойства вязкоупругости жидкостей модели Олдройта, $\vec{f}_k := \vec{f}\,|_{\Omega_k}$, $k = 1, 2$, а Δ — трёхмерный оператор Лапласа.

Для вязких жидкостей, как известно, на твёрдых стенках S_k сосуда должны выполняться условия прилипания, т.е.

$$\vec{u}_k = \vec{0} \ (\text{на } S_k), \ k = 1, 2, \tag{1.3}$$

а на границе Γ — условия непрерывности полей скоростей:

$$\vec{u}_1(t,x) = \vec{u}_2(t,x), \ x \in \Gamma. \tag{1.4}$$

Пусть

$$x_3 = \zeta(t,x),\ x \in \Gamma, \tag{1.5}$$

— вертикальное отклонение границы раздела между жидкостями в процессе малых движений системы. Тогда на Γ должно выполняться кинематическое условие

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \vec{u}_1 \cdot \vec{n} =: \gamma_{n,1}\vec{u}_1 = \vec{u}_2 \cdot \vec{n} =: \gamma_{n,2}\vec{u}_2, \tag{1.6}$$

а символом $\gamma_{n,k}$ обозначена операция взятия нормальной компоненты поля скорости. Заметим также, что из условия сохранения объёма каждой из жидкости имеем связь

$$\int\limits_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0. \tag{1.7}$$

Сформулируем теперь динамические условия на Γ. Они состоят в том, что на движущейся границе раздела жидкостей векторное поле напряжений при переходе из одной жидкости к другой изменяется непрерывно. Линеаризация этого условия и его снос на Γ приводит к следующим соотношениям: на Γ касательные напряжения изменяются непрерывно, а нормальное напряжение (т.е. вдоль оси Ox_3) компенсируется гравитационным скачком давлений. Имеем

$$\begin{gathered} \mu_1\tau_{j3}(\vec{v}_1) = \mu_2\tau_{j3}(\vec{v}_2),\ \vec{v}_k = I_{0,k}(t)\vec{u}_k,\ k=1,2,\ j=1,2; \\ [-p_1 + \mu_1\tau_{33}(\vec{v}_1)] - [-p_2 + \mu_2\tau_{33}(\vec{v}_2)] = -g(\rho_1-\rho_2)\zeta\ (\text{на } \Gamma). \end{gathered} \tag{1.8}$$

Здесь

$$\tau_{jl}(\vec{u}) := \frac{\partial u_j}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_j}, \quad j,l = 1,2,3, - \tag{1.9}$$

— удвоенный тензор скоростей деформаций в жидкости с полем скоростей $\vec{u}(t,x)$, а $I_{0,k}(t)$ — закон действия памяти в модели Олдройта (см. (1.2)).

Наконец, для искомых функций $\vec{u}_k(t,x)$, $p_k(t,x)$, $k=1,2$, и $\zeta(t,x)$ необходимо еще задать начальные условия:

$$\begin{gathered} \vec{u}_k(0,x) = \vec{u}_k^0(x),\ x \in \Omega_k,\ k=1,2; \quad \vec{u}_1^0(x) = \vec{u}_2^0(x),\ x \in \Gamma; \\ \zeta(0,x) = \zeta^0(x),\ x \in \Gamma. \end{gathered} \tag{1.10}$$

1.3. Формулировка модельной начально-краевой и спектральной задачи

Опираясь на постановку задачи (1.2) – (1.10), сформулируем модельную начально- -краевую задачу о малых движениях системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, разбитую на две части Ω_1 и Ω_2, как это было описано выше в п 1.2. При этом воспользуемся следующими упрощающими предположениями.

1. Векторные поля скоростей $\vec{u}_k(t,x)$ заменяем скалярными полями $u_k(t,x)$, $x \in \Omega_k$, $k = 1,2$, поля давлений $p_k(t,x)$ считаем тождественно равными нулю, а условия соленоидальности отбрасываем.

2. Кинематические условия (1.6) заменяем аналогичными соотношениями с $u_1 = u_2$ на Γ.

3. В динамических условиях (1.8), (1.9) условие равенства касательных напряжений нулю отбрасываем, а нормальные напряжения на Γ заменяем производными от $u_k(t,x)$ по внешней нормали к Ω_k.

Тогда при тех же обозначениях для остальных параметров и функций приходим к следующей начально-краевой задаче:

$$\rho_k \frac{\partial u_k}{\partial t} = \mu_k \Delta v_k + \rho_k f_k \quad (\text{в } \Omega_k), \quad k = 1,2, \tag{1.11}$$

$$v_k(t,x) := u_k(t,x) + \alpha_k \int\limits_0^t e^{-\beta_k(t-s)} u_k(s,x)ds =: I_{0,k}(t)u_k, \quad k = 1,2, \tag{1.12}$$

$$u_k(t,x) = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad k = 1,2, \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = u_1 =: \gamma_1 u_1 = u_2 =: \gamma_2 u_2 \quad (\text{на } \Gamma), \tag{1.14}$$

$$\int\limits_\Gamma \zeta d\Gamma = 0, \tag{1.15}$$

$$\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial n} - \mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial n} = -g(\rho_1 - \rho_2)\zeta \quad (\text{на } \Gamma), \ \vec{n} = \vec{e}_3, \tag{1.16}$$

$$u_k(0,x) = u_k^0(x), \ x \in \Omega_k, \ k = 1,2; \ \ \zeta(0,x) = \zeta^0(x), \ x \in \Gamma. \tag{1.17}$$

Далее будем рассматривать также задачу о нормальных движениях, т.е. о решениях однородной начально-краевой проблемы (1.11) – (1.17), зависящих от t по экспоненциальному закону:

$$\begin{gathered} u_k(t,x) = \exp(-\lambda t)u_k(x), \ x \in \Omega_k, \ k = 1,2, \\ \zeta(t,x) = \exp(-\lambda t)\zeta(x), \ x \in \Gamma, \ \lambda \in \mathbb{C}. \end{gathered} \tag{1.18}$$

При этом воспользуемся следствиями из соотношений (1.12) для модели вязкоупругой жидкости Олдройта:

$$\begin{gathered} \frac{\partial w_k}{\partial t} = \alpha_k^{1/2} u_k - \beta_k w_k, \ w_k(0) = 0, \\ w_k := \alpha_k^{1/2} \int\limits_0^t e^{-\beta_k(t-s)} u_k(s,x)ds, \ k = 1,2. \end{gathered} \tag{1.19}$$

Тогда для амплитудных функций $u_k(x)$, $k = 1, 2$, $\zeta(x)$, а также амплитудных функций $w_k(x)$, $k = 1, 2$, отвечающих связям (1.19), возникает следующая спектральная задача:

$$\begin{gathered}
-\lambda\rho_k u_k = \mu_k\Delta(u_k + \alpha_k^{1/2} w_k),\ \lambda \in \mathbb{C}, \\
-\lambda w_k = \alpha_k^{1/2} u_k - \beta_k w_k,),\ x \in \Omega_k,\ k = 1, 2, \\
u_k = 0 \ (\text{на } S_k),\ k = 1, 2,\ w_k = 0 \ (\text{на } S_k),\ k = 1, 2, \\
-\lambda\zeta = u_1 = u_2 \ (\text{на } \Gamma),\ \int\limits_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0, \\
\mu_1 \frac{\partial}{\partial n}\Big(u_1 + \alpha_1^{1/2} w_1\Big) - \mu_2 \frac{\partial}{\partial n}\Big(u_2 + \alpha_2^{1/2} w_2\Big) = -g(\rho_1 - \rho_2)\zeta \ (\text{на } \Gamma),\ \vec{n} = \vec{e}_3.
\end{gathered} \tag{1.20}$$

Далее задачу (1.11) – (1.17), а также задачу (1.20) будем исследовать методами функционального анализа и спектральной теории операторных пучков с использованием обобщённой формулы Грина для оператора Лапласа, приспособленной к изучению краевых задач в областях с липшицевой границей.

1.4. О формуле Грина для оператора Лапласа

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — область с границей $\partial\Omega$, разбитой на два куска S и Γ. Введем пространство функций $H^1(\Omega)$ с нормой, эквивалентной стандартной:

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega + \left| \int\limits_{\Gamma} u d\Gamma \right|^2. \tag{1.21}$$

Для подпространства $H^1_\Gamma(\Omega)$ функций из $H^1(\Omega)$, у которых выполнено условие

$$\int\limits_{\Gamma} u d\Gamma = 0, \tag{1.22}$$

имеем

$$\|u\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega, \tag{1.23}$$

т.е. квадрат нормы совпадает с интегралом Дирихле.

Введем далее подпространство $H^1_{0,S}(\Omega)$ функций, обращающихся в нуль на S:

$$H^1_{0,S}(\Omega) := \left\{ u \in H^1_\Gamma(\Omega) :\ u\,|_S = 0 \right\}. \tag{1.24}$$

Будем считать, что граница $\partial\Omega$ области Ω липшицева, причем ее куски S и Γ, на которые она разбита, также липшицевы. Тогда, как известно (см. [14]), след функций из $H^1(\Omega)$, вычисленный на $\partial\Omega$, принадлежит пространству $H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L_2(\partial\Omega)$. Более того, функции на его кусках, заданные на Γ и S, также принадлежат соответствующим пространствам $H^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{1/2}(S)$ соответственно (см. [1]).

Введем в $H^1_\Gamma(\Omega)$ множество функций, которые обладают следующим свойством: их следы $\gamma_\Gamma u \in H^{1/2}_\Gamma \cap L_{2,\Gamma}$ продолжимы нулём на кусок S в классе $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Обозначим соответствующее множество из $H^1_\Gamma(\Omega)$ символом $\widehat{H}^1_\Gamma(\Omega)$, а совокупность следов на Γ — через $\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma$. Тогда оказывается, что имеет место оснащение пространства $L_{2,\Gamma} = L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$ в виде

$$\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma \hookrightarrow\!\!\hookrightarrow L_{2,\Gamma} \hookrightarrow\!\!\hookrightarrow \left(\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma\right)^* = H^{-1/2}_\Gamma; \tag{1.25}$$

при этом для элементов $\varphi \in \widetilde{H}^{1/2}_\Gamma$ и $\psi \in H^{-1/2}_\Gamma$ выражение $\langle \varphi, \psi \rangle_{L_{2,\Gamma}}$ является полуторалинейной формой в $L_{2,\Gamma}$:

$$\left| \langle \varphi, \psi \rangle_{L_{2,\Gamma}} \right| \le \|\varphi\|_{\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma} \cdot \|\psi\|_{H^{-1/2}_\Gamma}. \tag{1.26}$$

Здесь $\langle \varphi, \psi \rangle_{L_{2,\Gamma}}$ — замыкание формы $(\varphi, \psi)_{L_{2,\Gamma}} := \int_\Gamma \varphi\psi d\Gamma$, заданное на гладких функциях, по соответствующим нормам.

Оказывается, для функций из $\widehat{H}^1_\Gamma(\Omega)$ имеет место следующая формула Грина для оператора Лапласа (см. [1]):

$$\begin{gathered}
(\eta, u)_{H^1_{0,S}(\Omega)} = \langle \eta, -\Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} + \left\langle \gamma_\Gamma \eta, \frac{\partial u}{\partial n} \right\rangle_{L_2(\Gamma)}, \\
-\Delta u \in (H^1_\Gamma(\Omega))^*, \ \gamma_\Gamma \eta \in \widetilde{H}^{1/2}_\Gamma, \ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma \in H^{-1/2}_\Gamma.
\end{gathered} \tag{1.27}$$

Перейдём теперь к соответствующим формулам Грина для задачи (1.11) – (1.17). Считаем, что области $\Omega_k \subset \mathbb{R}^m$, $k = 1, 2$, имеют липшицевы границы $\partial\Omega_k$, состоящие из липшицевых кусков S_k и Γ соответственно, $k = 1, 2$. Введём множества $\widehat{H}^1_{0,S_k}(\Omega_k) \subset H^1_{0,S_k}(\Omega_k)$, а также наборы пар функций $\eta = (\eta_1; \eta_2)$ и $u = (u_1; u_2)$, $\eta_k, u_k \in \widehat{H}^1_{0,S_k}(\Omega_k)$, $k = 1, 2$. Для таких наборов определим скалярные произведения

$$(\eta, u)_{L_2(\Omega)} := \sum_{k=1}^{2} \rho_k (\eta_k, u_k)_{L_2(\Omega_k)}, \tag{1.28}$$

$$(\eta, u)_{\widehat{H}^1_\Gamma(\Omega)} := \sum_{k=1}^{2} \mu_k (\eta_k, u_k)_{H^1_{0,S_k}(\Omega_k)}. \tag{1.29}$$

Тогда оказывается (см. [1]), что для таких наборов имеет место следующая обобщенная формула Грина:

$$
\begin{gathered}
(\eta,u)_{\widehat{H}^1_\Gamma(\Omega)}=\sum_{k=1}^{2}\langle\eta_k,-\mu_k\Delta u_k\rangle_{L_2(\Omega_k)}+\sum_{k=1}^{2}\left\langle\gamma_k\eta_k,\mu_k\frac{\partial u_k}{\partial n_k}\right\rangle_{L_{2,\Gamma}},\\
\eta,u\in\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega),\ \gamma_k\eta_k:=\eta_k\,|_\Gamma\in\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma,\ k=1,2,\\
\frac{\partial u_k}{\partial n_k}\in H^{-1/2}_\Gamma,\ k=1,2,
\end{gathered}
\tag{1.30}
$$

которая далее будет использоваться.

1.5. Закон баланса полной энергии

Будем считать, что начально-краевая задача (1.11) – (1.17) имеет классическое решение, т.е. все заданные и искомые функции, а также их производные, входящие в уравнения и краевые условия, являются непрерывными функциями своих переменных. Тогда, используя обобщенные формулы Грина для оператора Лапласа в областях Ω_k, $k=1,2$, можно установить, что для классического решения задачи имеет место следующее тождество:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{2}\rho_k\int_{\Omega_k}|u_k|^2d\Omega_k+g(\rho_1-\rho_2)\int_\Gamma|\zeta|^2d\Gamma\right\}=\\
=-\sum_{k=1}^{2}\mu_k\int_{\Omega_k}\nabla v_k\cdot\overline{\nabla u_k}\,d\Omega_k+\sum_{k=1}^{2}\rho_k\int_{\Omega_k}f_k\overline{u_k}\,d\Omega_k.
\end{gathered}
\tag{1.31}
$$

Это тождество — закон баланса полной энергии системы в дифференциальной форме. Оно показывает, что изменение полной энергии исследуемой системы обусловлено мощностью диссипативных и внешних сил, действующих на систему.

Тождество (1.31) показывает также, что для искомых объектов следует выбирать пары функций $u=(u_1;u_2)$ из пространства $\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)\subset\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega)$, которое определяется следующим образом:

$$
\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega):=\left\{u=(u_1;u_2)\in\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega):\ \gamma_1u_1:=u_1\,|_\Gamma=u_2\,|_\Gamma=:\gamma_2u_2\right\}. \tag{1.32}
$$

Пространство $\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ плотно в пространстве $L_2(\Omega)$ (см. (1.28)), так как оно в качестве подпространства содержит множество

$$
H^1_0(\Omega):=H^1_0(\Omega_1)\oplus H^1_0(\Omega_2):=\left\{u=(u_1;u_2)\in\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega):\ u_k=0\ (\text{на }\partial\Omega_k),\ k=1,2\right\}. \tag{1.33}
$$

Лемма 1. *Имеет место следующее ортогональное разложение:*

$$\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega) = \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega) \oplus \widehat{H}^1_h(\Omega), \tag{1.34}$$

$$\begin{gathered}\widehat{H}^1_h(\Omega) := \Big\{ u = (u_1; u_2) \in \widehat{H}^1_{0,S}(\Omega) : -\mu_k \Delta u_k = 0 \ (\textit{в } \Omega_k), \ k = 1, 2, \\ u_k = 0 \ (\textit{на } S_k), \ \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \ (\textit{на } \Gamma), \vec{n} = \vec{e}_3 \Big\}.\end{gathered} \tag{1.35}$$

Доказательство. Оно основано на формуле Грина (1.30) для областей Ω_1 и Ω_2, а также на определении (1.32). □

Опираясь на (1.33) – (1.35), получим закон действия ортопроектора

$$P_1 : \ \widehat{H}^1_{0,S}(\Omega) \to \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega). \tag{1.36}$$

Пусть $(u_1; u_2) \in \widehat{H}^1_{0,S}(\Omega)$. Тогда

$$P_1(u_1; u_2) = (u_1; u_2) - (v_1; v_2),$$

где $(v_1; v_2) \in \widehat{H}^1_h(\Omega)$ — такой элемент, который в силу (1.32) удовлетворяет условию

$$\gamma_1 u_1 - \gamma_1 v_1 = \gamma_2 u_2 - \gamma_2 v_2,$$

т.е. для искомого $v = (v_1; v_2) \in \widehat{H}^1_h(\Omega)$ возникает задача сопряжения (см. (1.35))

$$\begin{gathered} -\mu_k \Delta v_k = 0 \ (\text{в } \Omega_k), \ v_k = 0 \ (\text{на } S_k), \ k = 1, 2; \\ \gamma_1 v_1 - \gamma_2 v_2 = \gamma_1 u_1 - \gamma_2 u_2 =: \varphi \ (\text{на } \Gamma), \\ \mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial n} =: \psi \ (\text{на } \Gamma), \ \vec{n} = \vec{e}_3. \end{gathered} \tag{1.37}$$

Здесь φ — заданная функция, а ψ — неизвестная.

Будем считать, что функция ψ известна, и выразим через нее функцию φ. Это можно сделать, рассматривая слабое решение вспомогательных задач

$$\begin{gathered} -\mu_k \Delta v_k = 0 \ (\text{в } \Omega_k), \ v_k = 0 \ \ (\text{на } S_k), \\ \mu_k \frac{\partial v_k}{\partial n_k} = \pm \psi \ (\text{на } \Gamma), \ k = 1, 2, \ \vec{n}_1 = \vec{e}_3 = \vec{n}_2. \end{gathered} \tag{1.38}$$

При $k = 1$ определим на основе формулы Грина вида (1.27) для области Ω_1 слабое решение задачи (1.38) тождеством

$$\mu_1 (\eta_1, v_1)_{\widehat{H}^1_{0,S_1}(\Omega_1)} = \langle \gamma_1 \eta_1, \psi \rangle_{L_{2,\Gamma}}, \ \forall \eta_1 \in \widehat{H}^1_{0,S_1}(\Omega_1). \tag{1.39}$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости этой задачи является условие

$$\psi \in H^{-1/2}_\Gamma = \left(\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma \right)^*. \tag{1.40}$$

Тогда эта задача имеет единственное слабое решение

$$\mu_1 v_1 = V_1\psi,\ V_1 \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{-1/2}; \widehat{H}^1_{0,S_1}(\Omega_1)). \tag{1.41}$$

Аналогичным образом получаем, что слабое решение второй вспомогательной задачи (1.38) определяется из тождества

$$\mu_2(\eta_2, v_2)_{H^1_{0,S_2}(\Omega_2)} = \langle \gamma_2\eta_2, -\psi\rangle_{L_2,\Gamma},\ \forall \eta_2 \in \widehat{H}^1_{0,S_2}(\Omega_2), \tag{1.42}$$

и поэтому

$$\mu_2 v_2 = V_2(-\psi),\ V_2 \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{-1/2}; \widehat{H}^1_{0,S_2}(\Omega_2)). \tag{1.43}$$

Теперь из первого условия на Γ из (1.37) получим связь

$$\gamma_1 v_1 - \gamma_2 v_2 = (\mu_1^{-1}\gamma_1 V_1 + \mu_2^{-1}\gamma_2 V_2)\varphi;\ \varphi = \gamma_1 u_1 - \gamma_2 u_2. \tag{1.44}$$

Однако можно проверить, что оператор

$$\mu_1^{-1}\gamma_1 V_1 + \mu_2^{-1}\gamma_2 V_2 =: \mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2 \tag{1.45}$$

ограниченно действует из $H_\Gamma^{-1/2} = \left(\widetilde{H}_\Gamma^{1/2}\right)^*$ на всё $\widetilde{H}_\Gamma^{1/2}$. Поэтому по теореме Банаха существует ограниченный обратный оператор

$$(\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2)^{-1} \in \mathcal{L}\left(\widetilde{H}_\Gamma^{1/2}; H_\Gamma^{-1/2}\right). \tag{1.46}$$

Лемма 2. *Ортопроектор* $P_1 :\ \widehat{H}^1_{0,S}(\Omega) \to \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ *действует по закону*

$$\begin{aligned} P_1(u_1; u_2) = (u_1; u_2) - \big\{&\mu_1^{-1} V_1(\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2)^{-1}(\gamma_1 u_1 - \gamma_2 u_2); \\ &-\mu_2^{-1} V_2(\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2)^{-1}(\gamma_1 u_1 - \gamma_2 u_2)\big\}, \end{aligned} \tag{1.47}$$

где V_1 *и* V_2 *— операторы вспомогательных задач* (1.38).

2. Применение операторного подхода

2.1. Вспомогательные краевые задачи

Будем считать, что начально-краевая задача (1.11) – (1.17) имеет решение $u = (u_1; u_2)$, являющееся функцией переменной t со значениями в пространстве $\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, и получим уравнение, которому должно удовлетворять это решение.

С этой целью перепишем уравнение в областях Ω_1 и Ω_2 в виде пар соотношений:

$$\left\{\rho_k \frac{\partial u_k}{\partial t}\right\}_{k=1}^2 = \{-\mu_k \Delta v_k\}_{k=1}^2 + \{\rho_k f_k\}_{k=1}^2. \tag{2.1}$$

Затем представим решение $u = (u_1; u_2)$ задачи в виде суммы решений двух вспомогательных проблем:

$$u = (u_1; u_2) = w_1 + w_2 =: (w_{11}; w_{12}) + (w_{21}; w_{22}). \tag{2.2}$$

Первая проблема соответствует неоднородным уравнениям в областях Ω_k, $k = 1, 2$, а вторая — неоднородным краевым условиям.

Для первой проблемы имеем:

$$\begin{gathered}\{-\mu_k \Delta w_{1k}\}_{k=1}^2 = -\left\{\rho_k \frac{\partial u_k}{\partial t}\right\}_{k=1}^2 + \{\rho_k f_k\}_{k=1}^2, \ w_k = u_k + \alpha_k \int\limits_0^t e^{-\beta_k(t-s)} u_k(s) ds, \\ w_{11}\,|_{S_1} = 0, \ w_{12}\,|_{S_2} = 0, \ \gamma_1 w_{11} = \gamma_2 w_{12} \ (\text{на } \Gamma), \\ \mu_1 \frac{\partial w_{11}}{\partial n} - \mu_2 \frac{\partial w_{12}}{\partial n} = 0 \ (\text{на } \Gamma), \ \vec{n} = \vec{e}_3.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Для второй проблемы соответственно получаем:

$$\begin{gathered}\{-\mu_k \Delta w_{2k}\}_{k=1}^2 = 0, \ w_{2k}\,|_{S_k} = 0, \ k = 1, 2, \\ \gamma_1 w_{21} = \gamma_2 w_{22} =: \varphi \ (\text{на } \Gamma), \\ \mu_1 \frac{\partial w_{21}}{\partial n} - \mu_2 \frac{\partial w_{22}}{\partial n} = -g(\rho_1 - \rho_2)\zeta =: \psi \ (\text{на } \Gamma), \ \vec{n} = \vec{e}_3.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Рассмотрим сначала вопрос о существовании слабого решения задачи (2.4) и его представление через заданную функцию ψ. Если функция φ известна, то задача (2.4) распадается на две независимые задачи Дирихле для уравнения Лапласа. При этом для элементов $w_{2k} \in \widehat{H}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$ следы функций на Γ, т.е. элементы $\gamma_k w_{2k}$, должны принадлежать пространству $\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma$, и тогда должно выполняться необходимое условие разрешимости

$$\varphi = \gamma_1 w_{21} = \gamma_2 w_{22} \in \widetilde{H}^{1/2}_\Gamma, \tag{2.5}$$

которое является и достаточным для каждой из распадающихся задач. Так как между следами гармонических функций из $\widehat{H}^1_{0,S_k}(\Omega_k)$ и самими функциями имеется взаимно однозначное соответствие, то (см. [1]) имеем связи

$$w_{2k} = \widetilde{\gamma}_k^{-1}\varphi, \ \widetilde{\gamma}_k^{-1} \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma; \widehat{H}^1_{0,S_k}(\Omega_k)), \ k = 1, 2. \tag{2.6}$$

Учитывая еще соотношения (1.41), (1.43) (см. также (1.38)), из динамического условия на Γ в (2.4) приходим к соотношению

$$(\mu_1 C_1^{-1} + \mu_2 C_2^{-1})\varphi = \psi, \ C_k = \gamma_k V_k \in \mathcal{L}\left(H^{-1/2}_\Gamma; \tilde{H}^{1/2}_\Gamma\right), \ k = 1, 2. \tag{2.7}$$

Здесь оператор $\mu_1 C_1^{-1} + \mu_2 C_2^{-1}$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между $\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma$ и $H^{-1/2}_\Gamma$ и является ограниченным оператором. Поэтому по теореме Банаха существует ограниченный обратный оператор:

$$\varphi = (\mu_1 C_1^{-1} + \mu_2 C_2^{-1})^{-1}\psi, \ (\mu_1 C_1^{-1} + \mu_2 C_2^{-1})^{-1} \in \mathcal{L}\left(H^{-1/2}_\Gamma; \widetilde{H}^{1/2}_\Gamma\right), \ k = 1, 2. \tag{2.8}$$

Лемма 3. *Задача* (2.4) *имеет единственное слабое решение* $w_2 = (w_{21}; w_{22}) \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\zeta \in H_\Gamma^{-1/2}, \tag{2.9}$$

и это решение имеет вид

$$(w_{21}; w_{22}) = \left(\widetilde{\gamma}_1^{-1}(\mu_1 C_1^{-1} + \mu_2 C_2^{-1})^{-1}\psi; \widetilde{\gamma}_2^{-1}(\mu_1 C_1^{-1} + \mu_2 C_2^{-1})^{-1}\psi\right) =$$

$$= -g(\rho_1 - \rho_2)\left(\widetilde{\gamma}_1^{-1}(\mu_1 C_1^{-1} + \mu_2 C_2^{-1})^{-1}\zeta; \widetilde{\gamma}_2^{-1}(\mu_1 C_1^{-1} + \mu_2 C_2^{-1})^{-1}\zeta\right) =: -g(\rho_1 - \rho_2)V\zeta, \tag{2.10}$$

$$V \in \mathcal{L}\left(H_\Gamma^{-1/2}; \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)\right). \tag{2.11}$$

Рассмотрим теперь вопрос о существовании слабого решения первой вспомогательной задачи, т.е. задачи (2.3), с учетом леммы 3. При этом понадобится формула Грина (1.30), приспособленная к определению обобщенного решения задачи (2.3).

Определение 1. Назовём обобщённым решением задачи (2.3) такую функцию

$$w_1(t) = \{w_{11}(t); w_{12}(t)\} \tag{2.12}$$

со значениями в пространстве $\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, для которой выполнено тождество, следующее из (1.30), а также из уравнений и краевых условий задачи (2.3):

$$\begin{gathered}(\eta, w_1(t))_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = \left(\eta, -\frac{du_1}{dt} - \frac{du_2}{dt}\right)_{L_2(\Omega)} + (\eta, f)_{L_2(\Omega)},\\ \forall \eta \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega),\ f = \{f_k\}_{k=1}^2 \in L_2(\Omega).\end{gathered} \tag{2.13}$$

Здесь выражение

$$\widehat{f}(t) := -\frac{d}{dt}(u_1 + u_2) + f \tag{2.14}$$

считается функцией переменной t со значениями в $L_2(\Omega)$ (и потому $\dfrac{\partial}{\partial t}$ заменено на $\dfrac{d}{dt}$). Если, в частности, выполнено условие

$$\widehat{f}(t) \in C([0,T]; L_2(\Omega)), \tag{2.15}$$

то, как известно из теории слабых и обобщенных решений краевых задач, обобщенное решение $w_1(t)$ задачи (2.3) существует, единственно и является непрерывной функцией переменной t со значениями в $\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$.

Более того, так как $(\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega))$ — гильбертова пара пространств, то в сформированных условиях $w_1(t)$ — непрерывная функция t со значениями в $\mathcal{D}(\widetilde{A})$, где $\widetilde{A}$ — оператор гильбертовой пары и

$$\mathcal{D}(\widetilde{A}) \subset \mathcal{D}(\widetilde{A}^{1/2}) = \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega),\ \mathcal{R}(\widetilde{A}) = L_2(\Omega). \tag{2.16}$$

2.2. Переход к задаче Коши для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве

Опираясь на тождество (2.13), получим интегро-дифференциальное соотношение, которому должно удовлетворять сильное по переменной t решение проблемы (1.11) – (1.17). Предварительно отметим следующий факт: так как в (2.13) $\eta \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, то $P_1\eta = \eta$, где $P_1 := \widehat{H}^1_{0,S}(\Omega) \to \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ — ортопроектор (см. лемму 2). Кроме того, как уже упомянуто выше (см. (2.16)), при условии (2.15) справедливы соотношения

$$\begin{aligned}(\eta, w_1(t))_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = (P_1\eta, w_1(t))_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = (\eta, P_1 w_1(t))_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = \\ = (\widetilde{A}^{1/2}\eta, \widetilde{A}^{1/2}P_1 w_1(t))_{L_2(\Omega)} = (\eta, \widetilde{A}P_1 w_1(t))_{L_2(\Omega)}, \ \forall \eta \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega).\end{aligned} \tag{2.17}$$

Отсюда следует, что тождество (2.13) равносильно связи

$$\widetilde{A}P_1 w_1(t) = -\frac{d}{dt}(w_1 + w_2) + f(t), \tag{2.18}$$

которая имеет место в пространстве $L_2(\Omega)$. Здесь $\widetilde{A}$ — оператор гильбертовой пары $(\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega))$, P_1 — упомянутый выше ортопроектор, $w_1(t)$ —обобщенное решение первой вспомогательной задачи (см. (2.3)), а $w_2(t)$ — обобщенное решение второй краевой вспомогательной задачи (см. (2.4)).

Приведенные рассуждения приводят к следующему выводу.

Теорема 1. *Исходная начально-краевая задача* (1.11) – (1.17) *равносильна задаче Коши*

$$\begin{gathered}\frac{du}{dt} = -\widetilde{A}P_1(I_0(t)u_1) + f(t), \ w = w_1 + w_2 = I_0(t)(u_1 + u_2), \\ I_0(t)u_2 = w_2 = -g(\rho_1 - \rho_2)V\zeta, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \gamma_1 u_1 = \gamma_2 u_2 =: \widehat{\gamma}u, \quad \int_\Gamma \zeta d\Gamma = 0, \\ I_0(t)u := \left\{ u_k(t) + \alpha_k \int_0^t \exp(-\beta_k(t-s))u_k(s)ds \right\}_{k=1}^2, \\ u(0) = u^0, \ \zeta(0) = \zeta^0,\end{gathered} \tag{2.19}$$

рассматриваемой для искомых функций $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ *со значениями в* $\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ *и* $\zeta(t)$ *со значениями в* $L_{2,\Gamma}$. □

Преобразуем задачу (2.19), сведя её к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в некотором гильбертовом пространстве. Из первого уравнения имеем

$$\widetilde{A}^{-1}\frac{du}{dt} + P_1 I_0(t)u_1 = \widetilde{A}^{-1}f(t),$$

а второе уравнение даёт связь

$$w_2 = P_1 w_2 = P_1 I_0(t) u_2 = -g(\rho_1 - \rho_2) V \zeta.$$

Складывая левые и правые части, получаем начальную задачу для системы из интегродифференциального и дифференциального уравнений:

$$\begin{cases} \widetilde{A}^{-1}\dfrac{du}{dt} + P_1 I_0(t) u + g(\rho_1 - \rho_2) V \zeta = \widetilde{A}^{-1} f, \quad u(0) = u^0, \\ \dfrac{d\zeta}{dt} - \widehat{\gamma} u = 0, \quad \zeta(0) = \zeta^0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Эту систему, в свою очередь, можно привести к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений следующим образом. Используя связь между $u(t)$ и $w(t)$ (см. (2.19)), введём ещё одну искомую функцию

$$z(t) := \left\{ \alpha_k^{1/2} \int_0^t \exp(-\beta_k (t-s)) u_k(s)\, ds \right\}_{k=1}^2, \quad z(0) = 0. \tag{2.21}$$

Тогда будем иметь связь

$$\frac{dz}{dt} = \alpha^{1/2} u - \beta z, \quad \alpha^{1/2} := \left\{ \alpha_k^{1/2} \right\}_{k=1}^2, \quad \beta := \{\beta_k\}_{k=1}^2, \tag{2.22}$$

и вместо (2.20), (2.21) возникает задача Коши, которая в векторно-матричной форме переписывается в виде

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ z \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & P_1 \alpha^{1/2} & g(\rho_1 - \rho_2) V \\ -\alpha^{1/2} P_1 & \beta & 0 \\ -\widehat{\gamma} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ z \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{A}^{-1} f \\ 0 \\ \zeta^0 \end{pmatrix}, \tag{2.23}$$

$$u(0) = u^0, \quad z(0) = 0, \quad \zeta(0) = \zeta^0.$$

Эту задачу преобразуем далее к виду, удобному для дальнейшего исследования. Так как по предположению $u(t)$ является функцией переменной t со значениями в $\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega) = \mathcal{D}(\widetilde{A}^{1/2})$, то $z(t)$ — функция t со значениями в $\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2})$, где A — оператор гильбертовой пары $(\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega); L_2(\Omega))$. Отсюда следует, что

$$z(t) = A^{-1/2} \psi(t),$$

где $\psi(t)$ — функция переменной t со значениями в $L_2(\Omega)$.

Тогда вместо (2.22) возникает связь

$$\frac{d}{dt}(A^{-1/2}\psi) = \alpha^{1/2} P_1 u - \beta A^{-1/2} \psi, \quad \psi(0) = 0, \tag{2.24}$$

и взамен (2.23) приходим к задаче

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ \psi \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2} & g(\rho_1-\rho_2)V \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1 & \beta & 0 \\ -\widehat{\gamma} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \psi \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{A}^{-1}f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.25}$$

$$u(0) = u^0, \quad \psi(0) = 0, \quad \zeta(0) = \zeta^0.$$

Здесь при выводе (2.25) использован тот факт, что $u(t)$ — функция переменной t со значениями в $\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, а $\psi(t)$ — функция t со значениями в $L_2(\Omega)$; тогда правая часть в (2.24) — функция t со значениями в $\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2})$ и потому к обеим частям (2.24) можно применить оператор $A^{1/2}$.

Осуществим в (2.25) следующую замену:

$$\eta(t) = (g(\rho_1-\rho_2))^{1/2}\zeta(t) =: b\zeta, \quad b > 0, \tag{2.26}$$

и применим к обеим частям оператор $\mathrm{diag}(\widetilde{A}; I; I)$ (эта операция далее будет оправдана). В итоге возникает задача Коши вида

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ \psi \\ \eta \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} \widetilde{A}^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2} & b(\widetilde{A}^{1/2}V) \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2} & \beta & 0 \\ -b(\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{A}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \psi \\ \eta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u(0) = u^0, \quad \psi(0) = 0, \quad \eta(0) = \eta^0, \tag{2.27}$$

которая и является основной при дальнейшем изучении проблемы.

2.3. Исследование начально-краевой задачи

Перейдём к рассмотрению задачи (2.27), предварительно изучив свойства операторных коэффициентов её операторной матрицы.

Лемма 4. *Операторы*

$$\widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega), \quad A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega) \tag{2.28}$$

ограничены и взаимно сопряжены.

Доказательство. Ограниченность этих операторов проверяется непосредственно, если заметить, что в этих произведениях операторов каждый сомножитель ограничен из одного пространства в другое. В частности, $A^{-1/2} \in \mathcal{L}(L_2(\Omega); \widehat{H}^1_{0,S}(\Omega))$, $\alpha^{1/2} \in \mathcal{L}(\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega); \widehat{H}^1_{0,S}(\Omega))$, $P_1 \in \mathcal{L}(\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega); \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega))$, $\widetilde{A}^{1/2} \in \mathcal{L}(\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega))$, и отсюда следует ограниченность первого из операторов в (2.28). Для второго проверка аналогична.

Проверим теперь свойство взаимной сопряженности этих операторов. Для любых $u, v \in L_2(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned}(\widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}u, v)_{L_2(\Omega)} &= (\widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}u, \widetilde{A}^{1/2}\widetilde{A}^{-1/2}v)_{L_2(\Omega)} = \\ &= (P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}u, \widetilde{A}^{-1/2}v)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = (\alpha^{1/2}A^{-1/2}u, P_1\widetilde{A}^{-1/2}v)_{\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega)} = \\ &= (A^{-1/2}u, \alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}v)_{\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega)} = (u, A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}v)_{L_2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

(Здесь при выводе были использованы свойства

$$(u,v)_{\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega)} = (A^{1/2}u, A^{1/2}v)_{L_2(\Omega)}, \quad (u,v)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = (\widetilde{A}^{1/2}u, \widetilde{A}^{1/2}v)_{L_2(\Omega)},$$

а также тот факт, что $\alpha^{1/2}$ самосопряжён в $\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega)$.) □

Отметим ещё одно важное свойство матричных коэффициентов в (2.27).

Лемма 5. *Операторы*

$$\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2} : L_2(\Omega) \to L_{2,\Gamma}, \quad \widetilde{A}^{1/2}V : L_{2,\Gamma} \to L_2(\Omega) \quad (2.30)$$

взаимно сопряжены и компактны.

Доказательство. Покажем, что имеют место свойства

$$\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2} \in \mathcal{L}(L_2(\Omega); \widetilde{H}^{1/2}_\Gamma), \quad \widetilde{A}^{1/2}V \in \mathcal{L}(H^{-1/2}_\Gamma; L_2(\Omega)), \quad (2.31)$$

откуда в силу компактности вложений

$$\widetilde{H}^{1/2}_\Gamma \hookrightarrow\hookrightarrow L_{2,\Gamma} \hookrightarrow\hookrightarrow H^{-1/2}_\Gamma \quad (2.32)$$

(по теореме Гальярдо, см.[14], и на основе общих свойств оснащённых гильбертовых пространств) следуют свойства (2.30).

В самом деле, $\widetilde{A}^{-1/2} \in \mathcal{L}(L_2(\Omega); \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega))$, а $\widehat{\gamma} \in \mathcal{L}(\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega); \widetilde{H}^{1/2}_\Gamma)$. Аналогично имеем $V \in \mathcal{L}(H^{-1/2}_\Gamma; \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega))$ (см. (2.11)), $\widetilde{A}^{1/2} \in \mathcal{L}(\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega))$.

Докажем теперь свойство взаимной сопряжённости операторов из (2.30). Пусть $u \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ — решение вспомогательной задачи (2.4) при $\psi = \zeta \in H^{-1/2}_\Gamma$. Тогда $u = V\zeta \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ (см. (2.10), (2.11)), и если $\eta \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, то

$$\begin{aligned}(\eta, u)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} &= \mu_1 \int_{\Omega_1} \nabla\eta_1 \cdot \nabla u_1 \, d\Omega_1 + \mu_2 \int_{\Omega_2} \nabla\eta_2 \cdot \nabla u_2 \, d\Omega_2 = \\ &= < \gamma_1\eta_1, \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} >_{L_{2,\Gamma}} + < \gamma_2\eta_2, \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} >_{L_{2,\Gamma}} = < \widehat{\gamma}\eta, \zeta >_{L_{2,\Gamma}} .\end{aligned}$$

Вспоминая, что

$$(\eta, u)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = (\widetilde{A}^{1/2}\eta, \widetilde{A}^{1/2}u)_{L_2(\Omega)},$$

получаем при $\eta = \widetilde{A}^{-1/2}\psi$, $\psi \in L_2(\Omega)$, тождество

$$(\psi, \widetilde{A}^{1/2}V\zeta)_{L_2(\Omega)} =< \widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}\psi, \zeta >_{L_{2,\Gamma}}, \quad \forall\psi \in L_2(\Omega), \forall\zeta \in H_\Gamma^{-1/2}. \tag{2.33}$$

Значит, операторы $\widetilde{A}^{1/2}V$ и $\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}$ взаимно сопряжены. □

Опираясь на леммы 2.2 и 2.3, перейдём теперь к вопросу о разрешимости задачи (2.27).

Лемма 6. *Операторная матрица*

$$\mathcal{A}_0 := \mathcal{J}_{\widetilde{A}^{1/2}}\mathcal{J}_0\mathcal{J}_{\widetilde{A}^{1/2}}, \tag{2.34}$$

$$\mathcal{J}_0 := \begin{pmatrix} I & \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2} & b(\widetilde{A}^{1/2}V) \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2} & \beta & 0 \\ -b\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_{\widetilde{A}^{1/2}} := \mathrm{diag}(\widetilde{A}^{1/2}; I; I), \tag{2.35}$$

заданная на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) := \{y = (u, \psi, \eta)^\tau \in L_2(\Omega) \oplus L_2(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma} =: L_2 : \quad \widetilde{A}^{1/2}u \in L_2(\Omega),$$
$$\widetilde{A}^{1/2}u + \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\psi + b\widetilde{A}^{1/2}V\eta \in \mathcal{D}(\widetilde{A}^{1/2})\}, \tag{2.36}$$

является аккретивной в пространстве L_2 и действует в этом пространстве по закону

$$\mathcal{A}_0 y = \begin{pmatrix} \widetilde{A}^{1/2}(\widetilde{A}^{1/2}u + \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\psi + b(\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2})^*\eta) \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}u + \beta\psi \\ -b\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}u \end{pmatrix}, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0). \tag{2.37}$$

Доказательство. Достаточно проверить, что выполнено свойство

$$\mathrm{Re}(\mathcal{J}_0 y, y)_{L_2} \geq 0, \quad \forall y \in L_2, \tag{2.38}$$

так как окаймляющие множители $\mathcal{J}_{\widetilde{A}^{1/2}}$ в (2.34) обладают свойством $(\mathcal{J}_{\widetilde{A}^{1/2}})^* = \mathcal{J}_{\widetilde{A}^{1/2}}$, а $\mathcal{J}_0$ — ограничен в L_2. Имеем

$$\mathrm{Re}(\mathcal{J}_0 y, y)_{L_2} = \mathrm{Re}\{\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + (\widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\psi, u)_{L_2(\Omega)} + b((\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2})^*\eta, u)_{L_2(\Omega)} -$$
$$- (A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1A^{-1/2}u, \psi)_{L_2(\Omega)} + (\beta\psi, \psi)_{L_2(\Omega)} - b(\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}u, \eta)_{L_{2,\Gamma}}\} =$$
$$= \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\beta^{1/2}\psi\|^2_{L_2(\Omega)} \geq 0. \tag{2.39}$$

Здесь при выводе использованы утверждения лемм 2.2 и 2.3. □

Введём теперь операторную матрицы

$$\mathcal{J}_a := \mathcal{J}_0 + a\mathcal{P}_3, \quad \mathcal{P}_3 := \mathrm{diag}(0;0;I),\ a>0. \tag{2.40}$$

Из свойства (2.39) и определений (2.34)-(2.36) получаем, что, во-первых, оператор $\mathcal{J}_a$ равномерно аккретивен, т.е.

$$\mathrm{Re}(\mathcal{J}_a y, y)_{L_2} = \|u\|^2_{L_2} + \|\beta^{1/2}\psi\|^2_{L_2(\Omega)} + a\|\eta\|^2_{L_{2,\Gamma}} \geq c\|y\|^2_{L_2}, \quad c>0, \tag{2.41}$$

а во-вторых, оператор

$$\mathcal{A}_a := \mathcal{J}_{\widetilde{A}^{1/2}}\mathcal{J}_a\mathcal{J}_{\widetilde{A}^{1/2}}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_a) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_0), \tag{2.42}$$

является максимальным равномерно аккретивным оператором, так как он равен произведению операторов, каждый из которых имеет ограниченный обратный. Поэтому его область значений

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}_a) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_a^{-1}) = L_2, \tag{2.43}$$

т.е. совпадает со всем пространством. При этом

$$\mathcal{J}_a^{-1} = \begin{pmatrix} I_Q^{-1} & -I_Q^{-1}Q\beta^{-1} & -I_Q^{-1}Qa^{-1} \\ \beta^{-1}Q^*I_Q^{-1} & \beta^{-1}I - \beta^{-1}Q^*I_Q^{-1}Q\beta^{-1} & -\beta^{-1}Q^*I_Q^{-1}Q_1a^{-1} \\ a^{-1}Q_1^*I_Q^{-1} & -a^{-1}Q_1^*I_Q^{-1}Q\beta^{-1} & a^{-1}I - aQ_1^*I_Q^{-1}Q_1a^{-1} \end{pmatrix}, \tag{2.44}$$

$$\begin{cases} I_Q := I + Q^*\beta^{-1}Q + Q_1a^{-1}Q_1^*, \quad I \leq I_Q = I_Q^* \in \mathcal{L}(L_2(\Omega)), \\ Q := \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}, \quad Q^* = A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\widetilde{A}^{-1/2}, \\ Q_1 := b(\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2})^* = b(\widetilde{A}^{1/2}V)\big|_{L_{2,\Gamma}}, \\ Q_1^* = b(\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}), \end{cases} \tag{2.45}$$

см. леммы 2.2-2.4,

$$\mathcal{A}_a^{-1} := (\mathcal{J}_{\widetilde{A}^{1/2}})^{-1}(\mathcal{J}_a)^{-1}(\mathcal{J}_{\widetilde{A}^{1/2}})^{-1}, \quad (\mathcal{J}_{\widetilde{A}^{1/2}})^{-1} = \mathrm{diag}(\widetilde{A}^{-1/2};I;I). \tag{2.46}$$

Теорема 2. *Пусть в начально-краевой задаче* (2.27) *выполнены условия*

$$\begin{cases} u_0 \in \mathcal{D}(\widetilde{A}) \subset \mathcal{D}(\widetilde{A}^{1/2}) = \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega), \quad \psi(0) = \psi^0 = 0, \\ \widetilde{A}^{1/2}u^0 + b(\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2})^*\eta^0 \in \mathcal{D}(\widetilde{A}^{1/2}), \end{cases} \tag{2.47}$$

$$f \in C^1([0;T];L_2(\Omega)), \quad L_2 := L_2(\Omega)\oplus L_2(\Omega)\oplus L_{2,\Gamma}. \tag{2.48}$$

Тогда задача (2.27) *имеет единственное сильное решение* $y(t) := (u(t);\psi(t);\eta(t))^\tau$, *т.е.*

$$y(t) \in C([0;T];\mathcal{D}(\mathcal{A}_a)) \cap C^1([0;T];L_2), \tag{2.49}$$

выполнено уравнение

$$\frac{dy}{dt} = -(\mathcal{A}_a - a\mathcal{P}_3)y + (f(t);0;0)^\tau, \quad \forall t\in[0;T], \tag{2.50}$$

и начальное условие

$$y(0) = y^0 := (u^0;0;\eta^0)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_a). \tag{2.51}$$

Доказательство. Так как $\mathcal{A}_a$ является максимальным равномерно аккретивным оператором, то $\mathcal{A}_a - a\mathcal{P}_3$ — максимальный аккретивный оператор, а тогда задача (2.27) переписывается в виде задачи Коши (2.50), (2.51) в пространстве L_2. Поэтому оператор $-(\mathcal{A}_a - a\mathcal{P}_3)$ является генератором сжимающей полугруппы, действующей в L_2. Отсюда и из [4, с.166] получаем, что задача (2.50), (2.51) имеет единственное сильное (по переменной t) решение, т.е. выполнены свойства (2.49) и соотношения (2.50), (2.51). $\square$

Замечание 1. Если $\eta^0 = 0$, то из (2.47) получаем достаточное условие существования и единственности решения задач (2.27), отвечающее в модельной проблеме (1.11)-(1.17) нулевому отклонению границы раздела жидкостей:

$$\zeta^0 \equiv 0, \quad u^0 \in \mathcal{D}(\widetilde{A}) \subset \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega). \quad \square \tag{2.52}$$

Замечание 2. Из формулы (2.44) и представлений (2.42), (2.43) следует, что для сильного решения функция $\eta(t) \in C([0;T]; L_{2,\Gamma})$, и тогда потенциальная энергия является непрерывной по t функцией на отрезке $[0;T]$. $\square$

Теорема 3. *Для сильного решения $y(t)$ задачи* (2.27) *выполнены закон баланса полной энергии в следующей дифференциальной форме (сравн. с.* (1.31)*):*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + g(\rho_1-\rho_2)\|\zeta\|^2_{L_{2,\Gamma}}\right\} =$$
$$= -\mathrm{Re}(v(t), u(t))_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + \mathrm{Re}(f(t), u(t))_{L_2(\Omega)},\ \forall t \in [0;T]. \tag{2.53}$$

Доказательство. Пусть $y(t) = (u(t); \psi(t); \eta(t))^\tau$ — сильное решение задачи (2.27), т.е. выполнены все уравнения этой задачи и каждое слагаемое является непрерывной функцией t со значениями в соответствующем пространстве. Вернёмся от задачи (2.27) к проблеме (2.20) используя промежуточные формулы (2.25)-(2.21).

Умножим скалярно обе части первого уравнения (2.20) справа на функцию $u(t)$ в пространстве $\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, будем иметь соотношение

$$(\widetilde{A}^{-1}\frac{du}{dt}, u)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + (P_1 I_0(t)u, u)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + g(\rho_1-\rho_2)(V\zeta, u)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = (\widetilde{A}^{-1}f, u)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)}.$$

Вспоминая, что $(\widetilde{A}^{-1}\frac{du}{dt}, u)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = (\frac{du}{dt}, u)_{L_2(\Omega)}$, а также связи $V^* = \widehat{\gamma}$ (лемма 2.3) и $\widehat{\gamma}u = d\zeta/dt$, получим

$$\left(\frac{du}{dt}, u\right)_{L_2(\Omega)} + (I_0(t)u, u)_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + g(\rho_1-\rho_2)\left(\zeta, \frac{d\zeta}{dt}\right)_{L_{2,\Gamma}} = (f, u)_{L_2(\Omega)}.$$

Умножение слева на $u \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ даёт комплексно сопряженное выражение, и из этих двух соотношений следует закон баланса (2.53). $\square$

Требования на функцию $f(t)$ в задаче (2.27) можно ослабить, если вместо (2.34)-(2.35) использовать в исследуемой проблеме другую факторизацию операторной матрицы $\mathcal{A}_0$ из (2.27).

Теорема 4. *Пусть в задаче Коши* (2.27) *выполнены условия* (2.47) *вместо* (2.48) *— условие*

$$f(t) \in C^{\delta}([0;T];L_2(\Omega)), \quad 0<\delta\le 1. \tag{2.54}$$

Тогда эта задача имеет единственное сильное решение со свойствами (2.49).

Доказательство. Оно основано на факторизации операторной матрицы $\mathcal{A}_0$ из (2.37) по Шуру-Фробениусу:

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} \widetilde{A} & \widetilde{A}^{1/2}Q & \widetilde{A}^{1/2}Q_1 \\ -Q^*\widetilde{A}^{-1/2} & \beta & 0 \\ -Q_1^*\widetilde{A}^{-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tag{2.55}$$

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -Q^*\widetilde{A}^{-1/2} & I & 0 \\ -Q_1^*\widetilde{A}^{-1/2} & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{A} & 0 & 0 \\ 0 & \beta+Q^*Q & Q^*Q_1 \\ 0 & Q_1^*Q & Q_1^*Q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \widetilde{A}^{-1/2}Q & \widetilde{A}^{-1/2}Q_1 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \tag{2.56}$$

□

$$Q := \widetilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}, \quad Q_1 = b(\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2})^*,$$

(см. леммы 2.2 и 2.3. о свойствах Q и Q_1).

С учётом (2.55) задача (2.27) сводится к задаче Коши вида

$$\frac{dy}{dt} = -(\mathcal{J}-\mathcal{F}_1)\mathcal{A}_{00}(\mathcal{J}+\mathcal{F}_2)y + (f;0;0)^{\tau}, \quad y(0)=y^0, \tag{2.57}$$

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ Q^*\widetilde{A}^{-1/2} & 0 & 0 \\ Q_1^*\widetilde{A}^{-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1^* \in \mathfrak{S}_{\infty}(L_2), \\ \mathcal{A}_{00} := \operatorname{diag}(\widetilde{A};A_{00}), \quad A_{00} := \begin{pmatrix} \beta+Q^*Q & Q^*Q_1 \\ Q_1^*Q & Q_1^*Q_1 \end{pmatrix} = A_{00}^*. \end{cases} \tag{2.58}$$

Здесь A_{00} — матричный ограниченный неотрицательный оператор:

$$\left(\begin{pmatrix} \beta+Q^*Q & Q^*Q_1 \\ Q_1^*Q & Q_1^*Q_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = (\beta\psi,\psi)_{L_2(\Omega)} + \|Q\psi+Q_1\eta\|^2_{L_2(\Omega)} \ge 0, \ \forall(\psi;\eta)\in L_2(\Omega)\oplus L_{2,\Gamma}. \tag{2.59}$$

Осуществим в (2.57) замену искомой функции

$$(\mathcal{J}+\mathcal{F}_2)g(t) =: \omega(t). \tag{2.60}$$

Тогда для $\omega(t)$ возникает задача Коши

$$\frac{d\omega}{dt} = -(\mathcal{J} - \mathcal{F}_2)(\mathcal{J} - \mathcal{F}_1)\mathcal{A}_{00}\omega + (\mathcal{J} - \mathcal{F}_2)(f; 0; 0)^\tau, \quad \omega(0) = \omega^0, \tag{2.61}$$

где учтено, что $(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)^{-1} = \mathcal{J} - \mathcal{F}_2$.

Так как $\mathcal{A}_{00}$ является самосопряжённым неотрицательным оператором (см. (2.58), (2.59)), то $(-\mathcal{A}_{00})$ — генератор аналитической полугруппы сжимающих операторов, действующих в пространстве L_2. Поскольку операторы $\mathcal{J}_k$, $k = 1, 2,$ — компактные, то уравнение (2.61) является абстрактным параболическим и для его сильной разрешимости требуется выполнение условий (2.47) и (2.54). Опираясь на этот факт и возвращаясь к исходной задаче Коши (2.27), приходим к выводу, что эта задача имеет единственное сильное решение на отрезке $[0; T]$. □

2.4. Вывод уравнения спектральной проблемы

Рассмотрим теперь постановку задачи о малых нормальных движениях исследуемой модельной проблемы, т. е. о решениях однородной задачи (2.27), зависящих от t по закону

$$(u(t); \psi(t); \eta(t))^\tau = (u; \psi; \eta)^\tau \exp(-\lambda t), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2.62}$$

где λ — комплексный декремент затухания, а $(u; \psi; \eta)^\tau$ — искомый амплитудный элемент.

Опираясь на закон движения (2.37) операторной матрицы $\mathcal{A}_0$, для амплитудных элементов получаем спектральную задачу

$$\begin{cases} \widetilde{A}^{1/2}(\widetilde{A}^{1/2}u + Q\psi + Q_1\eta) = \lambda u, \\ -Q^*\widetilde{A}^{1/2}u + \beta\psi = \lambda\psi, \\ -Q_1\widetilde{A}^{1/2}u = \lambda\eta. \end{cases} \tag{2.63}$$

Проверим сначала, что при $\lambda = 0$ эта задача имеет лишь тривиальное решение, т.е. из соотношений

$$\widetilde{A}^{1/2}(\widetilde{A}^{1/2}u + Q\psi + Q_1\eta) = 0, \quad \beta\psi = Q^*\widetilde{A}^{1/2}u, \quad Q_1\widetilde{A}^{1/2}u = 0 \tag{2.64}$$

следует, что $u = 0, \psi = 0, \eta = 0$. В самом деле, умножим скалярно в $L_2(\Omega)$ обе части первого уравнения (2.64) на u; используя также остальные соотношения, будем иметь

$$(\widetilde{A}^{1/2}u, \widetilde{A}^{1/2}u)_{L_2(\Omega)} + (\widetilde{A}^{1/2}(Q\beta^{-1}Q^*)\widetilde{A}^{1/2}u, \widetilde{A}^{1/2}u)_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \|u\|^2_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + \|P_1\beta^{-1/2}Q^*\widetilde{A}^{1/2}u\|^2_{\widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = 0, \tag{2.65}$$

откуда следует, что $u = 0$, а потому и $\psi = 0, Q_1\eta = 0$.

Наконец, из последнего равенства имеем $(\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2})^*\eta = 0$, и тогда при любом $\widetilde{\eta} \in L_2(\Omega)$ будет

$$(\widetilde{\eta}, (\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2})^*\eta)_{L_2(\Omega)} = (\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}\widetilde{\eta}, \eta)_{L_{2,\Gamma}} = 0.$$

Так как совокупность элементов $\{\widehat{\gamma}\widetilde{A}^{-1/2}\widetilde{\eta} : \widetilde{\eta} \in L_2(\Omega)\}$ пробегает всё пространство $\widetilde{H}_\Gamma^{1/2}$, плотное в $L_{2,\Gamma}$, получаем, что $\eta = 0$.

Если ещё $\lambda \overline{\in} \sigma(\beta)$, т.е. $\lambda \neq \beta_1, \lambda \neq \beta_2$, то в системе уравнений (2.63) можно исключить переменные ψ и η и получить одно соотношение для искомого объекта u. В итоге имеем спектральную задачу

$$u + \widetilde{A}^{-1/2}Q(\beta - \lambda I)^{-1}Q^*\widetilde{A}^{1/2}u - \frac{1}{\lambda}\widetilde{A}^{-1/2}Q_1Q_1^*\widetilde{A}^{1/2}u = \lambda\widetilde{A}^{-1}u. \tag{2.66}$$

Если здесь сделать замену

$$\widetilde{A}^{1/2}u = \varphi, \quad \varphi \in L_2(\Omega), \tag{2.67}$$

то приходим к спектральной проблеме

$$L(\lambda)\varphi := (I + Q(\beta - \lambda I)^{-1}Q^* - \lambda\widetilde{A}^{-1} - \lambda^{-1}Q_1Q_1^*)\varphi = 0 \tag{2.68}$$

для операторного пучка (оператор-функции) $L(\lambda)$, действующего в $L_2(\Omega)$.

Задача (2.68) обобщает соответствующую проблемы для операторного пучка С.Г. Крейна, когда полость Ω была частично заполнена лишь одной вязкой жидкостью, т.е. $\rho_2 = 0, \mu_2 = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$, а также вариант, когда жидкости в полости вязкие, но не вязкоупругие: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$.

Подробное исследование проблемы (2.68) — это и есть дальнейшая цель рассмотрений исходной модельной задачи о нормальных колебаниях системы из двух вязкоупругих жидкостей в сосуде.

2.5. Общие свойства спектра

Приведём общие свойства решений спектральной задачи (2.68), некоторые из которых легко выводятся.

1°. Спектр задачи (2.68) расположен симметрично относительно вещественной оси.

Действительно, операторный пучок $L(\lambda)$ из (2.68) является самосопряжённым, т.е. выполнено свойства

$$(L(\bar{\lambda}))^* \equiv L(\lambda), \tag{2.69}$$

так как операторные коэффициенты уравнения самосопряжённые. Отсюда и следует свойство симметрии спектра.

2°. Собственные значения λ задачи (2.68) расположены в правой полуплоскости:

$$\mathrm{Re}\lambda > 0. \tag{2.70}$$

В самом деле, для собственного значения λ и соответствующего ему собственного элемента $\varphi \neq 0$ имеет соотношение

$$(L(\lambda)\varphi, \varphi) = 0. \tag{2.71}$$

Отсюда, вычисляя вещественную часть, приходим к формуле

$$\mathrm{Re}\lambda = \Big(\|(\beta - \bar{\lambda} I)^{-1} Q^* \varphi)\|^2 + |\lambda|^{-2} \|Q_1^* \varphi\|^2 + \|\widetilde{A}^{-1/2}\varphi\|^2\Big) / \big(\|\varphi\|^2 + \|\beta^{1/2}(\beta - \overline{\lambda} I)^{-1} Q^* \varphi)\|^2\big), \tag{2.72}$$

откуда и следует свойство (2.70).

3°. Спектр задачи дискретен с возможными предельными точками $\lambda = 0, \lambda = \infty, \lambda = \beta_k, k = 1, 2$, а также точками λ_1 и λ_2, $0 < \beta_1 < \lambda_1 < \beta_2 < \lambda_2$ (при условии, что $\beta_1 < \beta_2$). При этом точки λ_1 и λ_2 являются нулями скалярной функции

$$T(\lambda) := T_1(\lambda) + T_2(\lambda) = \mu_1 (1 + \frac{\alpha_1}{\beta_1 - \lambda}) + \mu_2 (1 + \frac{\alpha_2}{\beta_2 - \lambda}). \tag{2.73}$$

Это свойство выяснено в процессе получения асимптотических формул для ветвей собственных значений, отвечающих точкам $\lambda = 0, \lambda = +\infty, \lambda = \lambda_k (k = 1, 2)$, на основе тождества

$$\sum_{k=1}^{2} (1 + \frac{\alpha_k}{\beta_k - \lambda}) \mu_k \int\limits_{\Omega_k} \nabla u_k \cdot \overline{\nabla v_k}\, d\Omega_k - \lambda \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} u_k \overline{v_k}\, d\Omega_k - g(\rho_1 - \rho_2)\lambda^{-1} \int\limits_{\Gamma} u_1 \overline{v_1}\, d\Gamma = 0, \tag{2.74}$$

$$u = (u_1; u_2) \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega),\ \forall v = (v_1; v_2) \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega). \tag{2.75}$$

При выводе соотношения (2.74) использованы связи

$$u = (u_1; u_2) = \widetilde{A}^{-1/2}\varphi, \quad v = (v_1; v_2) = \tilde{A}^{-1/2}\eta, \tag{2.76}$$

а также тот факт, что

$$(Q(\beta - \lambda I)^{-1} Q^* \varphi, \eta)_{L_2(\Omega)} = \left(\left\{ \frac{\alpha_k}{\beta_k - \lambda} \right\}_{k=1}^{2} u, v \right)_{\widehat{H}^1_{0,S}(\Omega)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \left[\left(\frac{\alpha_k}{\beta_k - \lambda} \right) \mu_k \int\limits_{\Omega_k} \nabla u_k \cdot \overline{\nabla v_k}\, d\Omega_k \right]. \tag{2.77}$$

Отметим также, что точки β_1 и β_2 не являются предельными для ветвей собственных значений задачи (2.68).

4°. Приведём теперь без доказательства асимптотические формулы для ветвей собственных значений, отвечающих предельным точкам $\lambda = 0, \lambda = +\infty$, а также точкам λ_1 и λ_2. Эти результаты получены с помощью теоремы об асимптотике собственных значений операторных пучков и связаны с работами А. С. Маркуса и В. И. Мацаева (см. [7]), а также на основе асимптотических формул для собственных значений вариационных задач математической физики (школа М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка, см., например, [13]).

1) Предельной точке $\lambda = +\infty$ отвечает ветвь $\{\lambda_j^{(\infty)}\}_{j=1}^{\infty}$ конечнократных собственных значений; числа $\lambda_j^{(\infty)}$, $j \in \mathbb{N}$, являются последовательными минимумами вариационного отношения

$$\left(\sum_{k=1}^{2} \mu_k \int\limits_{\Omega_k} |\nabla u_k|^2 \, d\Omega_k\right) \Big/ \left(\sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} |u_k|^2 \, d\Omega_k\right), \quad u = (u_1; u_2) \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega). \tag{2.78}$$

Отсюда видно, что силы вязкоупругости не влияют на асимптотику собственных значений $\lambda_j^{(\infty)}$ при $j \to \infty$. Соответствующие нормальные колебания отвечают внутренним диссипативным волнам, как и в задаче о колебаниях двух обычных вязких жидкостей.

2) Предельной точке $\lambda = 0$ отвечает ветвь $\{\lambda_j^{(0)}\}_{j=1}^{\infty}$ конечнократных собственных значений $\lambda_j^{(0)}$, являющихся последовательными максимумами вариационного отношения задачи Стеклова:

$$\left[g(\rho_1 - \rho_2) \int\limits_{\Gamma} |u_1|^2 \, d\Gamma\right] \Big/ \sum_{k=1}^{2} \left[\left(1 + \alpha_k \beta_k{}^{-1}\right) \mu_k \int\limits_{\Omega_k} |\nabla u_k|^2 \, d\Omega_k\right], \; u = (u_1; u_2) \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega). \tag{2.79}$$

Отсюда следует, что вязкоупругие силы в жидкостях существенно влияют на асимптотику собственных значений пограничных волн, связанных с колебаниями границы раздела между жидкостями.

3) Если полость заполнена не двумя, а частично лишь одной жидкостью ($\rho_2 = 0, \mu_2 = 0$), то имеется только одна конечная предельная точка $\lambda_1 > 0$, являющаяся нулём функции $T_1(\lambda)$ (см. (2.73)). В этом случае соответствующая ветвь собственных значений $\{\lambda_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$ имеет асимптотическое поведение

$$\lambda_j^{(1)} = \lambda_1 + \varepsilon_j^{(1)}[1 + o(1)] \quad (j \to \infty), \tag{2.80}$$

где $\varepsilon_j^{(1)}$ — последовательные максимумы вариационного отношения задачи Стефана:

$$(\lambda_1 \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |u_1|^2 \, d\Omega_1 + g\rho_1 \lambda_1^{-1} \int\limits_{\Gamma} |u_1|^2 \, d\Gamma) \,/\, (\alpha_1(\beta_1 - \lambda_1)^{-2} \mu_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla u_1|^2 \, d\Omega_1), \tag{2.81}$$

$$u_1 \in \widehat{H}^1_{0,S_1}(\Omega_1), \quad 1 + \alpha_1(\beta_1 - \lambda_1)^{-1} = 0.$$

Очевидно, что в этом случае вязкоупругие силы, действующие в жидкости, заполняющей область Ω_1, приводят к появлению этой ветви собственных значений.

4) Если сосуд заполнен двумя вязкоупругими жидкостями, то конечных положительных предельных точек спектра две:

$$T(\lambda_k) = 0, \quad k = 1, 2, \quad \beta_1 < \lambda_1 < \beta_2 < \lambda_2 < \infty. \tag{2.82}$$

(см. (2.73)). При этом асимптотическое поведение ветвей собственных значений $\{\lambda_j^{(k)}\}_{j=1}^{\infty}$, $k = 1, 2$, найденное эвристическим способом, имеет вид

$$\lambda_j^{(k)} = \lambda_k + \varepsilon_j^{(k)}[1 + o(1)] \quad (j \to \infty), \tag{2.83}$$

где $\varepsilon_j^{(k)}$ — последовательные максимумы вариационного отношения задачи Стефана:

$$\left[\lambda_k \left(\sum_{m=1}^{2} \rho_m \int\limits_{\Omega_m} |u_m|^2 \, d\Omega_m\right) + g(\rho_1 - \rho_2)\lambda_k^{-1} \int\limits_{\Gamma} |u_1|^2 \, d\Gamma\right] \Big/ \sum_{m=1}^{2} \left[\alpha_m(\beta_m - \lambda_k)^{-2}\mu_m \int\limits_{\Omega_m} |\nabla u_m|^2 \, d\Omega_m\right],$$

$$u = (u_1; u_2) \in \widehat{H}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega), \quad k = 1, 2. \tag{2.84}$$

Видно, что спектр поверхностно-внутренних волн, отвечающих предельным точкам λ_1 и λ_2, порождается действием сил вязкоупругости, действующих в областях Ω_1 и Ω_2 и в окрестности границы раздела Γ.

3. Плоская задача, допускающая разделение переменных

3.1. Модельная спектральная проблема в прямоугольной области

Для уточнения характера спектра в исследуемой проблеме рассмотрим двумерный частный случай, когда область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ является прямоугольной, а граница раздела Γ — отрезок вещественной оси: $\Gamma = \{(x; 0) : \ 0 < x < \pi\}$, нижняя жидкость занимает область $\Omega_1 := \{(x, y) : \ 0 < x < \pi, \ -a_1 < y < 0\}$, а верхняя — область $\Omega_2 := \{(x, y) : \ 0 < x < \pi, \ 0 < y < a_2\}$, см. рис.1

В этом случае спектральная проблема (1.20) формулируется следующим образом. Для искомых амплитудных функций u_n и w_n, $n = 1, 2$, и ζ должны быть выполнены следующие уравнения и краевые условия:

$$\begin{gathered}
-\rho_1\lambda u_1 = \mu_1\triangle(u_1 + \alpha_1^{1/2}w_1) \quad (\text{в } \Omega_1), \quad u_1(0, y) = u_1(\pi, y) = u_1(x, -a_1) = 0, \\
-\rho_2\lambda u_2 = \mu_2\triangle(u_2 + \alpha_2^{1/2}w_2) \quad (\text{в } \Omega_2), \quad u_2(0, y) = u_2(\pi, y) = u_2(x, a_2) = 0, \\
-\lambda w_1 = \alpha_1^{1/2}u_1 - \beta_1 w_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad -\lambda w_2 = \alpha_2^{1/2}u_2 - \beta_2 w_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \\
-\lambda\zeta = u_1 = u_2 \quad (\text{на } \Gamma), \quad \triangle := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \ \lambda \in \mathbb{C}, \\
\mu_1\frac{\partial}{\partial y}(u_1 + \alpha_1^{1/2}w_1) - \mu_2\frac{\partial}{\partial y}(u_2 + \alpha_2^{1/2}w_2) = -g(\rho_1 - \rho_2)\zeta \quad (\text{на } \Gamma).
\end{gathered} \tag{3.1}$$

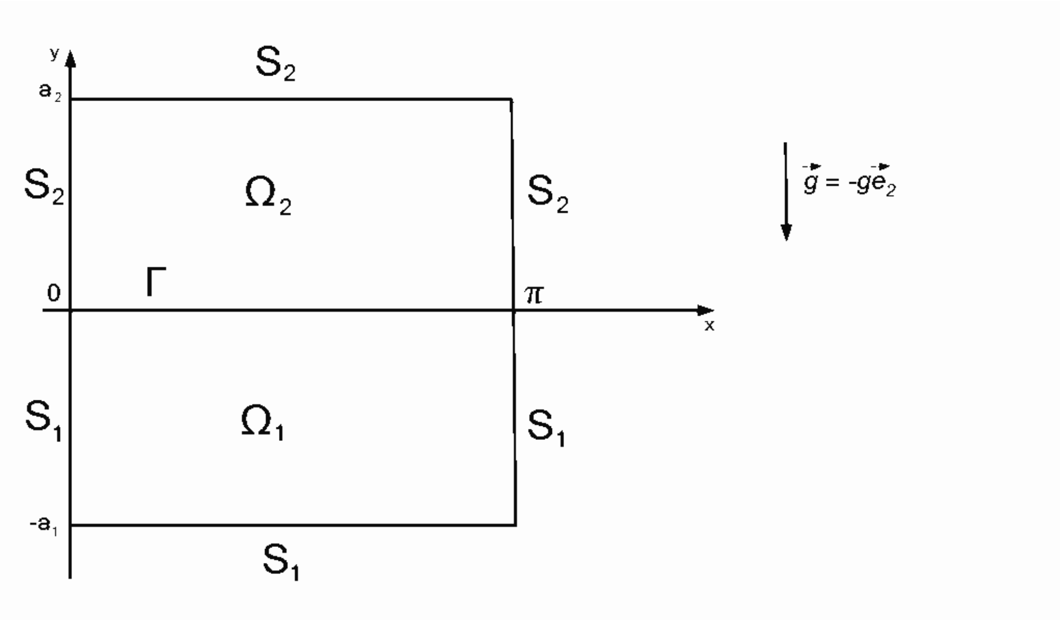

Рис. 1.

Эта задача допускает разделение переменных с использованием разложения искомых функций в ряды Фурье по системе $\{\sin kx\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда при $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \beta_n$, $n = 1, 2$, имеем

$$\begin{gathered} u_1(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} v_{1k}(y) \sin kx, \quad u_2(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} v_{2k}(y) \sin kx, \\ \zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \sin kx, \quad w_n(x,y) = \alpha_n^{1/2}(\beta_n - \lambda)^{-1} u_n(x,y), \quad n = 1, 2. \end{gathered} \tag{3.2}$$

3.2. Получение характеристического уравнения задачи

Исключая переменные $w_n(x,y)$ и $\zeta(x)$, приходим к проблеме

$$\begin{gathered} -\triangle u_1 = \delta_1(\lambda) u_1, \quad \delta_1(\lambda) := \rho_1 \lambda \mu_1^{-1} (1 + \frac{\alpha_1}{\beta_1 - \lambda})^{-1} \quad (\text{в } \Omega_1), \\ -\triangle u_2 = \delta_2(\lambda) u_2, \quad \delta_2(\lambda) := \rho_2 \lambda \mu_2^{-1} (1 + \frac{\alpha_2}{\beta_2 - \lambda})^{-1} \quad (\text{в } \Omega_2), \\ u_1 = 0 \ (\text{на } S_1) \quad u_2 = 0 \ (\text{на } S_2), \quad u_1 = u_2 \ (\text{на } \Gamma), \\ (1 + \frac{\alpha_1}{\beta_1 - \lambda}) \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} - (1 + \frac{\alpha_2}{\beta_2 - \lambda}) \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = g(\rho_1 - \rho_2) \lambda^{-1} u_1 \ (\text{на } \Gamma). \end{gathered} \tag{3.3}$$

Используя представление (3.2) для решения, получаем для функций $v_{1k}(y)$ и $v_{2k}(y)$, $k \in \mathbb{N}$, соотношения

$$\frac{d^2}{dy^2} v_{1k} - (k^2 - \delta_1(\lambda)) v_{1k} = 0, \ -a_1 < y < 0, \ v_{1k}(-a_1) = 0,$$

$$\frac{d^2}{dy^2}v_{2k} - (k^2 - \delta_2(\lambda))v_{2k} = 0,\ 0 < y < a_2,\ v_{2k}(a_2) = 0. \tag{3.4}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} v_{1k}(y) &= c_{1k}\,\mathrm{sh}(\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)}(y + a_1)), \\ v_{2k}(y) &= c_{2k}\,\mathrm{sh}(\sqrt{k^2 - \delta_2(\lambda)}(y - a_2)), \end{aligned} \tag{3.5}$$

где c_{nk}, $n = 1, 2$, $k \in \mathbb{N}$ — набор постоянных.

Для получения связей между ними используем кинематическое и динамическое условия на Γ из (3.3). Из кинематического условия получаем связь

$$c_{1k}\,\mathrm{sh}(\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)}a_1) + c_{2k}\,\mathrm{sh}(\sqrt{k^2 - \delta_2(\lambda)}a_2) = 0, \tag{3.6}$$

а динамическое условие даёт соотношение

$$\begin{gathered} (1 + \alpha_1(\beta_1 - \lambda)^{-1})\mu_1\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)}\,\mathrm{ch}(\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)}a_1)c_{1k} - \\ -(1 + \alpha_1(\beta_2 - \lambda)^{-1})\mu_2\sqrt{k^2 - \delta_2(\lambda)}\,\mathrm{ch}(\sqrt{k^2 - \delta_2(\lambda)}a_2)c_{2k} = \\ = g(\rho_1 - \rho_2)\lambda^{-1}\,\mathrm{sh}(\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)}a_1)c_{1k}. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Приравнивая нулю определитель системы линейных однородных уравнений (3.6),(3.7), приходим к характеристическому уравнению для нахождения собственных значений λ спектральной задачи (3.1):

$$\det\begin{pmatrix} \mathrm{sh}(\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)}a_1) & \mathrm{sh}(\sqrt{k^2 - \delta_2(\lambda)}a_2) \\ f_1(\lambda) & -f_2(\lambda) \end{pmatrix} = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered} f_1(\lambda) := (1 + \alpha_1(\beta_1 - \lambda)^{-1})\mu_1\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)}\,\mathrm{ch}(\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)}a_1) - g(\rho_1 - \rho_2)\lambda^{-1}\mathrm{sh}(\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)}a_1), \\ f_2(\lambda) := (1 + \alpha_2(\beta_2 - \lambda)^{-1})\mu_2\sqrt{k^2 - \delta_2(\lambda)}\,\mathrm{ch}(\sqrt{k^2 - \delta_2(\lambda)}a_2). \end{gathered} \tag{3.9}$$

Оно преобразуется к виду

$$\begin{gathered} (1 + \alpha_1(\beta_1 - \lambda)^{-1})\mu_1\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)}\,\mathrm{cth}(\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)}a_1) + \\ +(1 + \alpha_2(\beta_2 - \lambda)^{-1})\mu_2\sqrt{k^2 - \delta_2(\lambda)}\,\mathrm{cth}(\sqrt{k^2 - \delta_2(\lambda)}a_2) = \\ = g(\rho_1 - \rho_2)\lambda^{-1},\ k \in \mathbb{N}, \end{gathered} \tag{3.10}$$

если при положительных λ подкоренные выражения положительны, и к виду

$$\begin{gathered} (1 + \alpha_1(\beta_1 - \lambda)^{-1})\mu_1\sqrt{\delta_1(\lambda) - k^2}\,\mathrm{ctg}(\sqrt{\delta_1(\lambda) - k^2}a_1) + \\ +(1 + \alpha_2(\beta_2 - \lambda)^{-1})\mu_2\sqrt{\delta_2(\lambda) - k^2}\,\mathrm{ctg}(\sqrt{\delta_2(\lambda) - k^2}a_2) = \\ = g(\rho_1 - \rho_2)\lambda^{-1},\ k \in \mathbb{N}, \end{gathered} \tag{3.11}$$

если эти выражения отрицательны.

В частности, для одной жидкости, когда $\rho_2 = 0$, $\mu_2 = 0$, из (3.10) получаем уравнение

$$(1 + \alpha_1(\beta_1 - \lambda)^{-1})\mu_1\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)}\,\mathrm{cth}(\sqrt{k^2 - \delta_1(\lambda)}a_1) = g\rho_1\lambda^{-1},\ k \in \mathbb{N}, \tag{3.12}$$

а из уравнения (3.11) — соотношение

$$(1+\alpha_1(\beta_1-\lambda)^{-1})\mu_1\sqrt{\delta_1(\lambda)-k^2}\operatorname{ctg}(\sqrt{\delta_1(\lambda)-k^2}a_1)=g\rho_1\lambda^{-1},\ k\in\mathbb{N}. \tag{3.13}$$

Рассмотрим, опираясь на уравнения (3.10)-(3.13), асимптотику решений этих уравнений, отвечающих пограничным поверхностным волнам ($\lambda\to 0$), а также диссипативным внутренним волнам ($\lambda\to\infty$). Для пограничных поверхностных волн из (3.10),(3.12) приходим к формулам

$$\lambda_k^{(0)}=[g(\rho_1-\rho_2)/(\mu_1(1+\alpha_1\beta_1^{-1})+\mu_2(1+\alpha_2\beta_2^{-1}))]k^{-1}(1+o(1))\ (k\to\infty) \tag{3.14}$$

(две жидкости) и соответственно

$$\lambda_k^{(0)}=[g\rho_1/\mu_1(1+\alpha_1\beta_1^{-1})]k^{-1}(1+o(1))\ (k\to\infty) \tag{3.15}$$

для одной жидкости (сравн. с (2.79)).

Для внутренних диссипативных волн ($\lambda\to\infty$) из (3.11),(3.13) получаем асимптотические соотношения

$$\mu_1\sqrt{\rho_1\mu_1^{-1}\lambda-k^2}\operatorname{ctg}(\sqrt{\rho_1\mu_1^{-1}\lambda-k^2}a_1)+\mu_2\sqrt{\rho_2\mu_2^{-1}\lambda-k^2}\operatorname{ctg}(\sqrt{\rho_2\mu_2^{-1}\lambda-k^2}a_2)=0,\ k\in\mathbb{N}, \tag{3.16}$$

(2 жидкости) и соответственно

$$\mu_1\sqrt{\rho_1\mu_1^{-1}\lambda-k^2}\operatorname{ctg}(\sqrt{\rho_1\mu_1^{-1}\lambda-k^2}a_1)=0,\quad k\in\mathbb{N} \tag{3.17}$$

для одной жидкости.

В частности, из (3.17) приходим к выводу, что для одной жидкости асимптотика внутренних волн такова:

$$\lambda_{k0}^{(\infty)}=\mu_1\rho_1^{-1}k^2(1+o(1))\quad(k\to\infty), \tag{3.18}$$

$$\lambda_{km}^{(\infty)}=\mu_1\rho_1^{-1}[k^2+(\frac{\pi}{a_1})^2(m-\frac{1}{2})^2](1+o(1))\quad(m\to\infty),\ k\in\mathbb{N}, \tag{3.19}$$

сравните с (2.78). Для двух жидкостей асимптотика находится из (3.17) и имеет вид, подобный формулам (3.18),(3.19).

Далее, при вычислении асимптотического поведения собственных значений вязкоупругих волн заметим, что в задачах Стефана (2.81) и (2.84) главный член асимптотики определяется поверхностными волнами, т.е. вариационными соотношениями

$$g\rho_1\lambda_1^{-1}\int_{\Gamma_1}|u_1|^2d\Gamma/[\alpha_1(\beta_1-\lambda_1)^{-2}\mu_1\int_{\Omega_1}|\nabla u_1|^2d\Omega_1] \tag{3.20}$$

(для одной жидкости) и соответственно

$$g(\rho_1-\rho_2)\lambda_n^{-1}\int_{\Gamma_1}|u_n|^2d\Gamma/\sum_{m=1}^{2}[\alpha_m(\beta_m-\lambda_n)^{-2}\mu_m\int_{\Omega_m}|\nabla u_m|^2d\Omega_m],\quad n=1,2 \tag{3.21}$$

(для двух жидкостей). Вычисления на этой основе приводят к формулам

$$\varepsilon_k^{(1)} = \frac{g\rho_1}{\lambda_1\mu_1}[\frac{\alpha_1}{(\beta_1-\lambda_1)^2}]^{-1}\cdot k^{-1}[1+o(1)] \quad (k\to\infty) \tag{3.22}$$

(для одной жидкости) и

$$\varepsilon_k^{(n)} = \frac{g(\rho_1-\rho_2)}{\lambda_n}/(\sum_{m=1}^{2}\frac{\alpha_m}{(\beta_m-\lambda_n)^2}\mu_m)\cdot k^{-1}[1+o(1)] \quad (k\to\infty),\ n=1,2, \tag{3.23}$$

(для двух жидкостей).

3.3. О структуре спектра в гидродинамической проблеме

Опираясь на общие рассмотрения модельной спектральной задачи (см.(2.68)), а также примера (3.1), можно сделать предположение о свойствах решений спектральной проблемы, отвечающей начально-краевой гидродинамической проблеме (1.2)-(1.10) о малых движениях двух вязкоупругих жидкостей в сосуде. Сформулируем эти выводы.

1. Спектр гидродинамической спектральной задачи дискретен и имеет четыре предельные точки:

$$\lambda=0,\ \lambda=+\infty,\ \lambda=\lambda_n(n=1,2),$$
$$T(\lambda_n):=\mu_1(1+\frac{\alpha_1}{\beta_1-\lambda_n})+\mu_2(1+\frac{\alpha_2}{\beta_2-\lambda_n})=0,\ n=1,2.$$

2. Предельной точке $\lambda=+\infty$ отвечает ветвь положительных собственных значений $\lambda_j^{(\infty)}$, порождающих внутренние диссипативные как угодно быстро затухающие волны, причём силы вязкоупругости асимптотически на влияют на декременты затухания этих волн.

3. Предельной точке $\lambda=0$ отвечает ветвь положительных собственных значений $\{\lambda_j^{(0)}\}_{j=1}^{\infty}$, порождающих поверхностные пограничные как угодно медленно затухающие волны, причём силы вязкоупругости существенно влияют на декременты затухания этих волн.

4. Точкам $\lambda=\lambda_1$ и $\lambda=\lambda_2$ отвечает спектр поверхностно-внутренних волн $\{\lambda_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_j^{(2)}\}_{j=1}^{\infty}$, состоящий из положительных собственных значений $\lambda_j^{(n)}=\lambda_1+\varepsilon_j^{(n)}$, $0<\varepsilon_j^{(n)}\to+0$ $(j\to\infty)$, $0<\lambda_1<\lambda_2<\infty$. Силы вязкоупругости влияют на декременты затухания этих волн.

5. Спектр гидродинамической спектральной задачи расположен симметрично относительно вещественной оси и может иметь не более конечного числа невещественных собственных значений (колебательные асимптотически затухающие нормальные движения системы вязкоупругих жидкостей).

Автор благодарит Д. А. Закору за внимание к работе и полезные обсуждения.

Список цитируемых источников

1. *Копачевский, Н. Д.* Абстрактная формула Грина и некоторые её приложения: монография. — Симферополь: ООО «Форма», 2016. — 280 с.

Kopachevsky, N. D. (2016). Abstract Green's Formula and Applications. Simferopol: FLP OOO "FORMA".

2. *Копачевский, Н. Д.* К проблеме малых движений системы из двух вязкоупругих жидкостей в неподвижном сосуде. // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2018. — Т.64, № 3 — С. 547-572.

   Kopachevsky, N. D. (2018). To the Problem on Small Motions of the System of Two Viscoelastic Fluids in a Fixed Vessel. SMFN, 64:3, 547–572.

3. *Копачевский, Н. Д., Крейн, С. Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

   Kopachevsky, N. D., Krein, S. G., Ngo Zuy Kan (1989). Operator methods in linear hydrodynamic. Evolutional and Spectral problems. Moscow: Nauka.

4. *Крейн, С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

   Krein, S. G. (1967). Linear differential equations in a Banach space. Moscow: Nauka.

5. *Крейн, С. Г.* О колебаниях вязкой жидкости в сосуде. // ДАН СССР. — 1964. — Т.159, № 2 — С.262-265.

   Krein, S. G. (1964). O kolebaniyah vyazkoj zhidkosti v sosude. DAN SSSR, 159:2.

6. *Крейн, С. Г., Лаптев, Г. И.* К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде. // Функциональный анализ и его приложения. — 1968. — Т.2, № 1 — С.40-50.

   Krein, S. G.,Laptev, G., I. (1968). Motion of a viscous liquid in an open vessel. Functional Analysis and Its Applications, 2:1.

7. *Маркус, А. С., Мацаев, В. И.* Теоремы о сравнении спектров линейных операторов и спектральные асимптотики. // Труды Московского математического общества. — 1982. — Т.45 — С.133-181.

   Marcus, A. S., Matsaev, V. I. (1982). Comparison theorems for the spectra of linear operators and spectral asymptotics. Tr. Mosk. Mat. O.-va, 45.

8. *Милославский, А. И.* Спектральный анализ малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом контейнере / Институт математики НАН Украины. — Киев, 1989. — Деп. рукопись №1221.

   Miloslavskii, A. I. (1989). Spectral Analysis of Small Oscillations of Visco-elastic fluid in the open container / Institute of mathematics NAS of Ukraine. — Kiev. — Preprint №1221.

9. *Маркус, А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: «Штиинца», 1986. — 260 с.

   Marcus, A. S. (1986). Vvedenie v spectralnuyu teoriyu polinomialnih operatornih puchkov. Kishinyov: Shtiintsa.

10. *Милославский, А. И.* Спектр малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом сосуде // Успехи матем. наук. — 1989. — Т. 44. — №4.

   Miloslavskiy, A. I. (1989). Spektr malyh kolebaniy vyazkouprugoy zhidkosti v otkrytom sosude. Uspehi Matem. Nauk, 44:4.

11. *Милославский, А. И.* Спектр малых колебаний вязкоупругой наследственной среды // ДАН СССР. — 1989. — Т. 309. — №3.— С. 532 — 536.

Miloslavskiy, A. I. (1989). Spektr malyih kolebaniy vyazkouprugoy nasledstvennoy sredyi. DAN SSSR, 309:3, 532–536.

12. *Azizov, T. Ya., Kopachevskii, N. D., Orlova, L. D.* Evolution and Spectral Problems Related to Small Motions of Viscoelastic Fluid // Proceedings of the St.-Petersburg Math. Society, Vol. VI. AMS Translations (2) —2000. — Vol. 199. — P. 1–24.
13. *Birman, M. Sh., Solomyak, M. Z.* Asymptotic behavior of the spectrum of differential equations. // Journal of Soviet Mathematics — 1979. — Vol. 12., No.3. — P. 247–283.
14. *Gagliardo, E.* Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili // Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova — 1957. — Vol. 27. — P. 284–305.
15. *Kopachevsky, Nikolay D., Krein, Selim G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics.. — Vol. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids. (Operator Theory: Advances and Applications. Vol.146) — Basel, Boston, Berlin: Birkhauser Verlag, 2003. — 444 p.
16. *Miloslavskii, A. I.* Stability of a viscoelastic isotropic medium // Soviet Physics Doklady. — 1988. — Vol. 33 — P. 300.
17. *Miloslavsky, A. I.* Stability of certain classes of evolution equations // Siberian Mathematical Journal. —1985. — Vol. 26, No.5. — P. 723–735.

Получена 09.10.2019