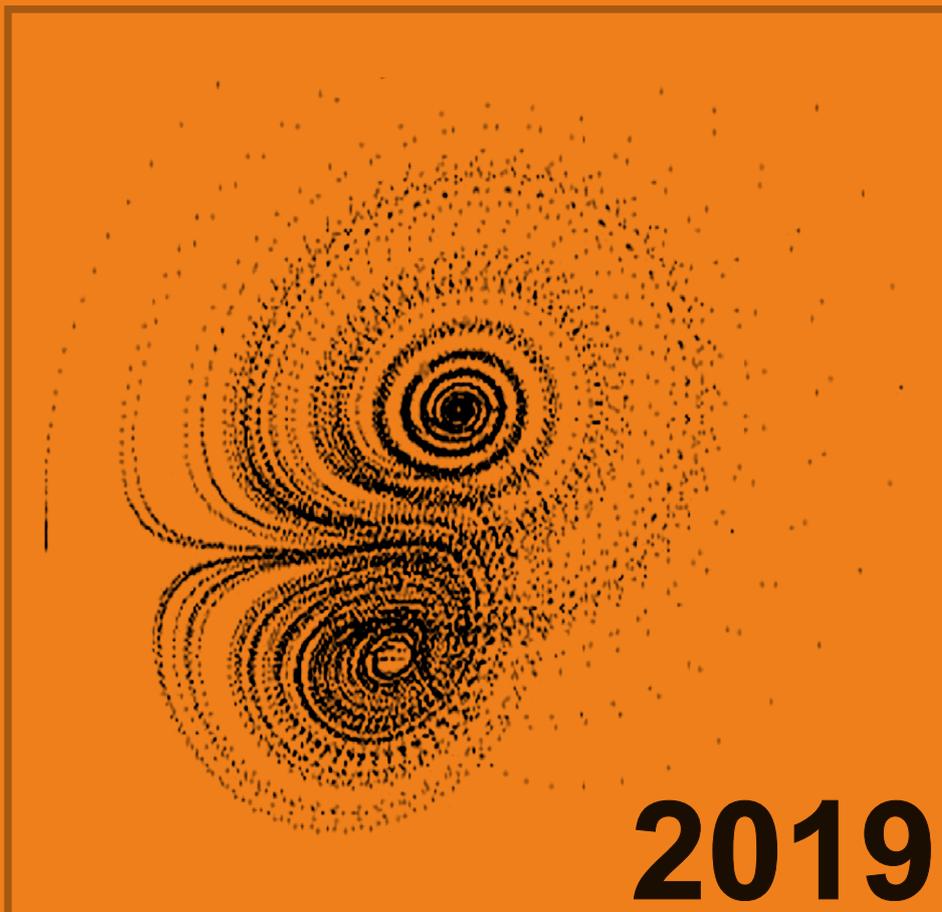


ISSN 0203-3755

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Том 9 (37), №2



ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Министерство образования и науки Российской Федерации
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского

Математический журнал

Главный редактор: д-р физ.-мат. наук О. В. Анашкин, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь.

Заместитель главного редактора: д-р физ.-мат. наук О. В. Починка, Национальный исследовательский ун-т «Высшая школа экономики» (нижегородский филиал), Нижний Новгород.

Редакционная коллегия:

А. О. Ватульян, д-р физ.-мат. наук, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону;

В. З. Гринес, д-р физ.-мат. наук, Национальный исследовательский ун-т «Высшая школа экономики» (нижегородский филиал), Нижний Новгород;

Г. В. Демиденко, д-р физ.-мат. наук, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;

А. В. Карапетян, д-р физ.-мат. наук, МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва;

С. А. Кашенко, д-р физ.-мат. наук, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль;

Н. Д. Копачевский, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;

Н. В. Кузнецов, д-р физ.-мат. наук, Санкт-Петербургский университет, Санкт-Петербург;

В. Б. Левенштам, д-р физ.-мат. наук, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону;

В. А. Лукьяненко, канд. физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;

М. А. Муратов, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;

И. В. Орлов, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;

Г. С. Осипенко, д-р физ.-мат. наук, Севастопольский филиал МГУ им. М. В. Ломоносова, Севастополь;

Н. О. Седова, д-р физ.-мат. наук, Ульяновский государственный университет;

В. Н. Тхай, д-р физ.-мат. наук, Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова, Москва;

И. А. Финогенко, д-р физ.-мат. наук, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск;

В. Н. Чехов, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;

V. Kravchenko, PhD, Center for Research and Advanced Studies of the National Polytechnic Institute (Cinvestav), Queretaro, Mexico;

T. Krisztin, DSc, Corresponding member of the Hungarian Academy of Sciences, Bolyai Institute, University of Szeged, Szeged, Hungary;

A. Shiriaev, PhD, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway.

A. L. Zuev, DSc, Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems, Magdeburg, Germany.

Том 9(37), №2, 101-210.

Печатается по решению Научно-технического Совета КФУ протокол №5 от 26.06.2019.

ISSN 0203–3755

Адрес редакционной коллегии: Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, к. 203В, пр-т Вернадского, 4, Симферополь 295007, Россия.
Тел. +7 978 7715582. E-mail: dynsys2011@yandex.ru

© Крымский федеральный ун-т, 2019

Свидетельство о регистрации средства массовой информации — ПИ №ФС77-61810, выдано 18.05.15.

УДК 517.544+517.968

Уравнения в свертках 1–го и 2–го рода на конечном интервале и краевые задачи для аналитических функций¹

А. Ф. Воронин

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск 630090. *E-mail: voronin@math.nsc.ru*

Аннотация. Сделан обзор новых результатов по исследованию уравнений в свертках 1–го и 2–го рода на конечном интервале и краевых задач для аналитических функций, связанных с этими уравнениями. В работе найдена взаимосвязь между задачей Маркушевича и уравнениями в свертках и, как следствие, получены новые условия корректной разрешимости задачи Маркушевича и усеченного уравнения Винера – Хопфа. Рассмотрены краевые задачи Римана, являющиеся аналогами задачи Маркушевича. Приведены достаточные условия корректной разрешимости усеченного уравнения Винера – Хопфа с симметричным ядром.

Ключевые слова: уравнения в свертках 1–го и 2–го рода, конечный интервал, обобщенная краевая задача Римана, векторная краевая задача Римана–Гильберта, корректная разрешимость задачи.

Convolution equations of the first and second kind on a finite interval and boundary value problems for analytic functions

A. F. Voronin

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Novosibirsk 630090.

Abstract. A review of new results on the study of convolution equations of the 1-st and 2-nd kind on a finite interval and related boundary value problems for analytical functions is made. In the work, the relationship between the Markushevich problem and convolution equations is found, and, as a result, new conditions for the correct solvability of the Markushevich problem and the truncated Wiener–Hopf equation are obtained. Riemann boundary value problems that are analogues of the Markushevich problem are considered. Sufficient conditions for the correct solvability of the truncated Wiener–Hopf equation with a symmetric kernel are given.

Keywords: Convolution equations, finite interval, Markushevich problem, Riemann boundary value problems, factorization of matrix functions, factorization indices, stability, unique.

MSC 2010: 34K20, 34K60

¹Работа выполнена при финансовой поддержке комплексной Программы фундаментальных научных исследований СО РАН II.1 (проект № 0314-2018-0010).

Введение

В работе сделан обзор новых результатов по исследованию уравнений в свертках 1-го и 2-го рода на конечном интервале и краевых задач для аналитических функций, связанных с этими уравнениями.

Изучаются следующие уравнения в свертках первого и второго рода на конечном интервале $(0, \tau)$:

$$\lambda u(t) - \int_0^{\tau} k(t-s)u(s) ds = f(t), \quad t \in (0, \tau), \quad (0.1)$$

где

$$k \in L_1(-\tau, \tau), \quad f \in L_1(0, \tau), \quad \tau > 0, \quad \lambda = 0, 1. \quad (0.2)$$

Легко видеть, что значения функции $k(t)$ вне интервала $(-\tau, \tau)$ не влияют на решения уравнений (0.1). Для удобства считаем, что $k(t)$ — заданная функция при $t \in (-\tau, \tau)$ и произвольная при $t \notin (-\tau, \tau)$ ($k \in L_1(\mathbb{R})$).

Вместе с уравнениями (0.1) будут рассматриваться следующие краевые задачи для аналитических функций. Векторная краевая задача Римана (которую также называют векторной краевой задачей Римана – Гильберта) с коэффициентами определенного вида и обобщенная краевая задача Римана (известная также под названием задачи Маркушевича и задачи \mathbb{R} -линейного сопряжения).

Заметим, что если для уравнения в свертках второго рода на полубесконечном интервале (уравнения Винера – Хопфа) и (эквивалентной к нему) скалярной краевой задачи Римана существует развитая теория (см., например, [10], [13]), то для усеченного уравнения Винера – Хопфа (уравнения (0.1) при $\lambda = 1$) и отмеченных выше краевых задач, общей теории к настоящему времени не существует. Взаимосвязь между уравнением Винера – Хопфа и краевой задачей Римана была найдена в середине прошлого века. Лишь, сравнительно недавно, найдена взаимосвязь (и условия эквивалентности) между уравнениями в свертках на конечном интервале и краевой задачей Римана [16], [9], [6] и задачей \mathbb{R} -линейного сопряжения [3], [4] в алгебре Винера.

Отметим следующие частные случаи исследования усеченного уравнения Винера – Хопфа: норма интегрального оператора меньше единицы; ядро интегрального оператора является периодической функцией с периодом τ [10, §26.2], [7]; длина интервал τ — достаточно большое положительное число [11, гл. 2, §7]; вырожденный случай, когда образ Фурье ядра является рациональной функцией [12, гл. 8 §11].

Теория уравнений 1-го рода в (0.1) при условии (0.2) существенно беднее чем теория усеченного уравнения Винера – Хопфа. Здесь можно отметить следующие случаи содержательного исследования уравнения: ядро интегрального оператора является периодической функцией с периодом τ [8] и вырожденный случай, когда образ Фурье ядра является рациональной функцией [12, гл. 8, §11].

1. Связь уравнений в свертках с краевыми задачами для аналитических функций

Пусть $1 \leq n, m \leq 2$, \mathbb{R} — расширенная вещественная прямая. Введем следующие обозначения:

$L_{n \times m}$ — пространство $n \times m$ матриц-функций с элементами из $L_1(\mathbb{R})$;

$\mathcal{F}f: x \mapsto \mathcal{F}f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt} dt$ — образ Фурье матрицы-функции $f \in L_{n \times m}$, $x \in \mathbb{R}$;

$W^{n \times n}$ — алгебра Винера непрерывных матриц-функций вида $C + \mathcal{F}f$, где C — постоянная матрица порядка n и $f \in L_{n \times n}$;

$W_+^{n \times n}$ ($W_-^{n \times n}$) — подалгебра в $W^{n \times n}$, состоящая из матриц-функций вида $C + \mathcal{F}f$ таких, что $f(t) = 0$ при $t < 0$ (при $t > 0$). При $C = 0$ соответствующие алгебры и подалгебры будем снабжать нижним индексом 0 ($W_0^{n \times n}$, $W_{0\pm}^{n \times n}$). При $n = 1$ верхний индекс $n \times n$ при W будем опускать;

$\mathcal{G}A$ — группа из обратимых элементов алгебры A .

Рассмотрим \mathbb{R} -линейную задачу сопряжения (известную также под названием задачи Маркушевича и обобщенной краевой задачи Римана) о нахождении функций $\varphi^\pm \in W_{0\pm}$ по краевому условию на \mathbb{R} :

$$\varphi^+(x) = a(x)\varphi^-(x) + b(x)\overline{\varphi^-(x)} + c(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

где

$$a, b \in W, \quad a(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in W_0. \quad (1.2)$$

Изучению задачи (1.1), (1.2) посвящено много работ (библиографию см. в [4], [15]). На настоящий момент нет общей теории этой задачи, известны лишь отдельные результаты, которые в основе получены еще в середине прошлого века на начальном пути изучения задачи. Корректность задачи (1.1), (1.2) исследована для частного случая: $|a| > |b|$, а также в вырожденных случаях: $|a| = |b|$ и $b \in W_+$, здесь b — рациональная функция.

Ниже, для простоты, краевую задачу (1.1), (1.2) будем называть задачей Маркушевича.

В работах [3], [4] найдена взаимосвязь между задачей Маркушевича и уравнениями в свертках (0.1). Как следствие такой связи, в работе [2] получены новые условия корректной разрешимости задачи Маркушевича и усеченного уравнения Винера – Хопфа при следующем условии симметрии на ядро k :

$$k(t) = k_+(t) + \overline{k_+(-t)}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \left(\mathcal{F}k = \mathcal{F}k_+ + \overline{\mathcal{F}k_+} \right). \quad (1.3)$$

где $k_+(t) = \theta(t)k(t)$, θ — функция Хевисайда. Другими словами, в [2] результаты исследования усеченного уравнения Винера – Хопфа (задачи Маркушевича) в перечисленных выше частных случаях были перенесены на задачу Маркушевича (усеченное уравнение Винера – Хопфа). Кроме того, были найдены новые условия корректной разрешимости усеченного уравнения Винера-Хопфа (задачи Маркушевича), которые не следуют из известных результатов для задачи Маркушевича (уравнения Винера – Хопфа).

Рассмотрим теперь две краевые задачи Римана, являющиеся аналогами задачи Маркушевича и уравнений в свертках (0.1), соответственно.

В первой краевой задаче Римана на \mathbb{R} (аналог задачи Маркушевича) требуется определить вектор-функцию $\Psi^+ \in W_{0+}^{2 \times 1}$ из краевого условия:

$$\Psi^+(x) = M(x)\overline{\Psi^+(x)} + q(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

где

$$M \in W^{2 \times 2}, \quad q \in W_0^{2 \times 1}, \quad M = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} b & |a|^2 - |b|^2 \\ 1 & -\bar{b} \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

$$q_1 = \frac{\bar{a}c - b\bar{c}}{a}, \quad q_2 = -\frac{\bar{c}}{a}. \quad (1.6)$$

Здесь и далее классы функций $W_0^{2 \times 1}$ и $W_{0\pm}^{2 \times 1}$ определены по аналогии с классами $W_0^{2 \times 2}$ и $W_{0\pm}^{2 \times 2}$ соответственно. Например, условие $\Psi^+ \in W_{0+}^{2 \times 1}$ означает, что

$$\Psi^+ = (\Psi_1^+, \Psi_2^+)^T, \quad \Psi_j^+ \in W_{0+}, \quad j = 1, 2,$$

где T — знак транспонирования.

Лемма 1. *Для существования решения задачи Маркушевича (1.1), (1.2) необходимо и достаточно существование решения краевой задачи Римана (1.4)–(1.6). Эквивалентность этих двух задач устанавливается равенствами*

$$\varphi^+(x) = \Psi_1^+(x), \quad \varphi^-(x) = \overline{\Psi_2^+(x)}.$$

Приведем теперь вторую краевую задачу Римана (аналог уравнений в свертках (0.1) при условии (0.2)). Для вектор-функций $\Phi^\pm \in W_{0\pm}^{2 \times 1}$ рассмотрим на расширенной прямой \mathbb{R} краевую задачу Римана:

$$\Phi^+(x) = G(x)\Phi^-(x) + g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.7)$$

где

$$G(x) = -\frac{1}{\Lambda^-(x)} \begin{pmatrix} 1 & -e^{ix\tau} \mathcal{F}k_-(x) \\ e^{-ix\tau} (\mathcal{F}k_+(x) + 1 - \lambda) & \lambda - \mathcal{F}k_-(x) - \mathcal{F}k_+(x) \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

$$k_\pm(t) = \theta(\pm t)k(t), \quad \mathcal{F}k_\pm(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} k_\pm(t) dt, \quad \Lambda^\pm(x) = 1 - \mathcal{F}k_\pm(x), \quad (1.9)$$

$$g_1(x) = \frac{\mathcal{F}f(x)}{\Lambda^-(x)} \mathcal{F}k_-(x), \quad g_2(x) = \frac{\mathcal{F}f(x)}{\Lambda^-(x)} e^{-ix\tau} \mathcal{F}k_+(x).$$

Определим на алгебре W_0 дополнительные друг к другу проекторы P_0^+ и P_0^- по формулам

$$P_0^\pm : W_0 \rightarrow W_{0\pm}, P_0^\pm \mathcal{F}g_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} g_0(t) \theta(\pm t) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $g_0 \in L_1(\mathbb{R})$.

В следующей теореме (см. [9, лемма 1.1], [6, теорема 1]) найдена взаимосвязь (и условия эквивалентности) краевой задачи Римана (1.7)–(1.9) и уравнений в свертках (0.1) (задачи (0.1), (0.2)).

Теорема 1. *Задача (0.1), (0.2) эквивалентна краевой задаче Римана (1.7)–(1.9) с дополнительным условием*

$$\hat{u}_1(x) := \Phi_1^+(x) + e^{ix\tau} \Phi_2^-(x) + \mathcal{F}f(x) \in W_{0+}, \quad e^{-ix\tau} \hat{u}_1(x) \in W_{0-}. \quad (1.10)$$

Решения задачи (0.1), (0.2) и краевой задачи Римана (1.7)–(1.10) связаны равенствами

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= \mathcal{F}k_-(x) \mathcal{F}u(x), \quad \Phi_2(x) = e^{-ix\tau} (\mathcal{F}k_+(x) + 1 - \lambda) \mathcal{F}u(x), \\ \mathcal{F}u(x) &= \Phi_1^+(x) + e^{ix\tau} \Phi_2^-(x) + \mathcal{F}f(x), \quad (\hat{u}_1(x) = \mathcal{F}u(x)), \end{aligned}$$

где

$$\Phi = \Phi^+ + \Phi^-, \quad \Phi^\pm(x) = P_0^\pm \Phi(x).$$

Кроме того, если $\lambda = 1$ и выполнено неравенство

$$\Lambda^\pm(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

то матрица $G(x) \in \mathcal{GW}^{2 \times 2}$ и допускает левую и правую стандартные факторизации с суммарным индексом α_0 :

$$\alpha_0 = \text{Ind det } G(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \Delta_{\mathbb{R}} \arg \det G(x) = \text{Ind} \frac{\Lambda^+(x)}{\Lambda^-(x)} \geq 0.$$

Замечание 1. При $\lambda = 1$ легко видеть, что в теореме 1 условие (1.10) заведомо выполнено, если $\|k_\pm\|_{L_1} < 1$, кроме того, если $k(t) = 0$, $|t| > \tau$ или функция $k(t)$ экспоненциально убывает на бесконечности, то не уменьшая общности можно считать, что $\Lambda^\pm(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, (см. [9, замечание 1.1]).

Укажем взаимосвязь (и условия эквивалентности) краевой задачи Маркушевича и усеченного уравнения Винера – Хопфа с симметричным ядром (при условии (1.3)).

Для простоты считаем, что коэффициенты задачи Маркушевича имеют следующий вид:

$$a = 1, \quad b(x) := b^-(x) = \int_{-\infty}^0 e^{itx} \beta(t) dt, \quad (1.11)$$

где $\beta \in L_1(-\infty, 0)$.

Сформулируем теперь теорему и следствие из нее, которые доказаны в [3, теорема 1, следствие 1] при более общих условиях на коэффициенты a и b .

Теорема 2. Пусть для задачи (0.1), (0.2) при $\lambda = 1$ выполнено условие симметрии (1.3) и

$$\Lambda^+(x) \equiv 1 - \mathcal{F}k_+(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{Ind } \Lambda^+(x) = 0, \quad (1.12)$$

а для задачи Маркушевича выполнено условие (1.11) и коэффициент b имеет следующий общий вид:

$$b(x) = P_0^- \left\{ e^{-ix\tau} \frac{\mathcal{F}k_+(x)}{1 - \mathcal{F}k_+(x)} \right\}. \quad (1.13)$$

Тогда матричные коэффициенты краевых задач Римана (1.7)–(1.9) и (1.4)–(1.6), матрицы $G(x)$ и $M(x)$, имеют одинаковый набор (левых) частных индексов.

Более того, справедливо равенство

$$M(x) = - \left\{ \frac{1}{\Lambda^+(x)}, 1 \right\} I_1 G(x) \{ \overline{\Lambda^+(x)}, 1 \}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.14)$$

где

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что для доказательства теоремы 2 достаточно обосновать равенство (1.14). Справедливость последнего устанавливается непосредственным перемножением матриц в правой части (1.14).

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда задача Маркушевича (1.1), (1.2) корректно разрешима (решение существует, единственно и устойчиво по отношению к коэффициентам задачи a , b , c в норме алгебры Винера) тогда и только тогда, когда однородное усеченное уравнение Винера – Хопфа имеет лишь тривиальное решение.

2. Достаточные условия корректной разрешимости усеченного уравнение Винера – Хопфа с симметричным ядром

В [1], (см. также [14]) было показано, что задача Маркушевича (1.1), (1.2) корректно разрешима, если выполнены условия: $|a| > |b|$, $\text{Ind } a(x) = 0$. Можно видеть, что используя этот результат по теореме 1 (и следствию 1) можно получить следующие две теоремы (см. [2]).

Положим

$$\|k_+\|_1 := \int_0^\infty |k_+(s)| ds.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия (0.2), (1.3) и

$$k(t) = 0, \quad |t| < \tau/2. \quad (2.1)$$

Если

$$\|k\|_1 \equiv \int_{-\tau}^{\tau} |k(s)| ds < 2, \quad (2.2)$$

то усеченное уравнение Винера – Хопфа в (0.1) корректно разрешимо.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (0.2), (1.3) и

$$|1 - \mathcal{F}k_+(x)| > \|k_+\|_1. \quad (2.3)$$

Тогда оба частных индекса матрицы $G(x)$ (в теореме 1) равны 0, и усеченное уравнение Винера – Хопфа в (0.1) корректно разрешимо.

Приведем (см. [2]) достаточные условия корректной разрешимости усеченного уравнения Винера – Хопфа, полученные из других соображений (без использования задачи Маркушевича).

Теорема 5. Пусть справедливы условия (0.2), (1.3), и выполнены неравенства

$$1 - \mathcal{F}k(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

$$1 - \mathcal{F}k_+(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Тогда оба частных индекса матрицы $G(x)$ равны 0, и усеченное уравнение Винера – Хопфа в (0.1) корректно разрешимо.

Легко видеть, что неравенство в (2.4) заведомо выполнено, если

$$\mathcal{F}k_+(x) + \overline{\mathcal{F}k_+(x)} < 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим два примера к теореме 5.

1. Пусть $\|k_+\|_1 < 1/2$. Тогда оба неравенства (2.4) и (2.5) будут выполнены. По теореме 5 усеченное уравнение Винера – Хопфа (при ограничении (1.3)) корректно разрешимо. С другой стороны, из неравенства $\|k\|_1 < 1$ по теореме Банаха об обратном операторе получим, что усеченное уравнение Винера – Хопфа имеет единственное решение в $L_1(0, \tau)$, представимое в виде абсолютно сходящегося ряда Неймана. Следовательно, искомое уравнение второго рода в (0.1) корректно разрешимо.

2. Пусть τ — достаточно большое число. Тогда из неравенства в (2.4) (неравенство в (2.5) может не выполняться) по теореме 7.2 из [11] получим существование и единственность решения усеченного уравнения Винера – Хопфа при условии (1.3).

3. Применение усеченного уравнение Винера–Хопфа с симметричным ядром для исследования задачи Маркушевича

В работах [2], [3] найдены условия корректной разрешимости задачи Маркушевича, которые вытекают из хорошо известных результатов для усеченного уравнения Винера – Хопфа и настоящей теоремы 2.

В данном параграфе предполагается, что коэффициенты a и b задачи Маркушевича (1.1), (1.2) удовлетворяют условиям (1.11)–(1.13). Следующие теоремы получены в [2], [3] (при общих условиях на коэффициент a).

Рассмотрим сначала случай, когда

$$\|k\|_1 \equiv \int_{-\tau}^{\tau} |k(s)| ds < 1. \quad (3.1)$$

Теорема 6. Пусть выполнено неравенство (3.1). Тогда оба частных индекса матрицы $M(x)$ равны 0 и задача Маркушевича (1.1), (1.2) корректно разрешима.

Если, кроме того,

$$c(x) = b(x)\mathcal{F}f(x), \quad f(t) = -\overline{f(\tau - t)}, \quad t \in (0, \tau),$$

то решение задачи Маркушевича имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi^-(x) &= \frac{1}{2} \left(\overline{\Phi_1^+(x)} - \Phi_2^-(x) \right), \\ \varphi^+(x) &= \frac{1}{2\Lambda^+(x)} \left(\Phi_2^+(x) - \overline{\Phi_1^-(x)} \right) + b^+(x)\overline{\varphi^-(x)}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\Phi_1(x) = \overline{\mathcal{F}k_+(x)}\mathcal{F}u(x), \quad \Phi_2(x) = e^{-ix\tau}\mathcal{F}k_+(x)\mathcal{F}u(x), \quad \Phi^\pm(x) = P_0^\pm\Phi(x),$$

u — решение усеченного уравнение Винера – Хопфа при ограничениях (0.2), (1.3).

В следующем случае считаем, что ядро $k(t)$ является периодической функцией на интервале $(-\tau, \tau)$ с периодом τ .

Пусть \mathcal{N} — множество целых чисел. Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0 &:= \{m \in \mathcal{N} : \Lambda^+(x_m) = 0, \text{ где } x_m = 2m\pi/\tau, \} \\ \left(\Lambda^+(x) &= 1 - \int_0^\tau e^{ixt}k_+(t) dt, \quad x \in R, \quad k(t) := 0, \quad |t| > \tau \right). \end{aligned}$$

Из соотношения

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Lambda^+(x) = 1$$

и явного вида для целой аналитической функции Λ^+ следует, что $\mathcal{N} \supset \mathcal{N}_0$ — конечное множество (с числом элементов n_0). Ясно, что $n_0 = 0$ при $\mathcal{N}_0 = \emptyset$ — пустое множество.

Теорема 7. Пусть функция $k_+(t)$ удовлетворяет следующему равенству:

$$k_+(t) = \overline{k_+(\tau - t)}, \quad t \in (0, \tau). \quad (3.3)$$

Тогда задача Маркушевича (1.1), (1.2) корректно разрешима тогда и только тогда, когда $\mathcal{N}_0 = \emptyset$.

В противном случае, если $\mathcal{N}_0 \neq \emptyset$, то общее решение однородной ($c = 0$) задача Маркушевича (1.1), (1.2) вычисляется по формулам (3.2), где

$$\mathcal{F}u(x) = Q_0^+(x)(1 - e^{ix\tau}),$$

$$Q_0^+(x) = \sum_{j=1}^{n_0} c_j(x - x_j)^{-1}, \quad x_j = 2m_j\pi/b, \quad m_j \in \mathcal{N}_0,$$

c_j — произвольные комплексные постоянные, $j = 1, \dots, n_0$.

В случае, когда τ — достаточно большое число в [3, теорема 3] получен следующий результат.

Теорема 8. Пусть

$$1 - \mathcal{F}k_+(x) - \overline{\mathcal{F}k_+(x)} \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда существует такое (достаточно большое) $\tau_0 > 0$, что для всех $\tau > \tau_0$ задача Маркушевича (1.1), (1.2) корректно разрешима.

Рассмотрим теперь случай, когда для уравнения в свертках 2-го рода выполнены условия теоремы 5.

Положим

$$b(x) := \int_{-\tau}^{\infty} e^{itx} \beta(t) dt, \quad H_b^+(x) := 1 + e^{ix\tau} b(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.4)$$

где $\beta \in L_1(-\tau, \infty)$.

Теорема 9. Пусть выполняется неравенство в (3.4), $\text{Ind } H_b^+(x) = 0$ и, кроме того,

$$1 - \mathcal{F}k_+(x) - \overline{\mathcal{F}k_+(x)} \neq 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

где

$$\mathcal{F}k_+(x) = \frac{e^{ix\tau} b(x)}{H_b^+(x)}.$$

Тогда задача Маркушевича (1.1), (1.2) корректно разрешима.

4. Векторная краевая задача Римана (задача Римана–Гильберта) и уравнения в свертках первого и второго рода на конечном интервале

В теореме 1 получена взаимосвязь между векторной краевой задаче Римана (1.7)–(1.9) с коэффициентами G , g и уравнениями в свертках (0.1) при условии (0.2).

Легко видеть, что из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие 2. Пусть $\|k_{\pm}\|_{L_1} < 1$. Тогда матрица $G(x)$ допускает каноническую факторизацию в алгебре Винера (другими словами, матрица $G(x)$ имеет только нулевые частные индексы) тогда и только тогда, когда усеченное уравнение Винера – Хопфа (0.1) при условии (0.2) имеет единственное решение в $L_1(0, \tau)$.

Положим

$$A(x) = \begin{pmatrix} e^{-ix\tau} \mathcal{F}k(x) & -1 - \mathcal{F}k(x) \\ 1 - \mathcal{F}k(x) & e^{ix\tau} \mathcal{F}k(x) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Для сравнения со следствием 2 приведем из [16, теорема 2] следующую теорему.

Теорема 10. Матрица $A(x)$ допускает каноническую факторизацию в алгебре Винера тогда и только тогда, когда усеченное уравнение Винера – Хопфа (0.1) при условии (0.2) имеет единственное решение в $L_1(0, \tau)$.

Отметим, что с помощью теоремы 1 (и следствия 2) найдены новые условия корректной разрешимости усеченного уравнения Винера – Хопфа с симметричным ядром и также краевой задачи Маркушевича (см. пп. 2–3). Кроме того, теорема 1 использовалась в построении теории уравнений в свертках (0.1) с периодическими ядрами [7], [8]. Эффективного же применения теоремы 10 не выявлено.

Перейдем непосредственно к уравнению 1-го рода в свертках. Рассмотрим случай симметричного ядра, когда выполнено условие (1.3). В [3] получена взаимосвязь между уравнением 1-го рода (0.1) при условиях (0.2), (1.3) и задачи Маркушевича (1.1):

Теорема 11. Пусть для уравнения в свертках первого рода (0.1) выполнены ограничения (0.2), (1.3) и правая часть уравнения удовлетворяет условию

$$f(t) = -\overline{f(\tau - t)}, \quad t \in (0, \tau).$$

А в задаче Маркушевича (1.1) $a = 1$, коэффициент $b(x)$ имеет следующий общий вид:

$$b(x) = e^{-ix\tau} \frac{\mathcal{F}k_+(x) + 1/2}{\Lambda_0^+(x)} + F^+(x),$$

где

$$\Lambda_0^+(x) \equiv 1/2 - \mathcal{F}k_+(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad F^+ \in W_{0+}.$$

Кроме того, правые части уравнения (0.1) и задачи Маркушевича связаны равенством

$$c(x) = b(x) \mathcal{F}f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда, если $u \in L_1(0, \tau)$ – решение уравнения первого рода (0.1), то функции $\varphi^{\pm}(x)$, заданные следующими двумя формулами:

$$\begin{aligned} \varphi^-(x) &= \frac{1}{2} \left(\overline{\Phi_1^+(x)} - \Phi_2^-(x) \right), \\ \varphi^+(x) &= \frac{1}{2\Lambda_0^+(x)} \left(\Phi_2^+(x) - \overline{\Phi_1^-(x)} \right) + F^+(x) \overline{\varphi^-(x)} \end{aligned}$$

(функции Φ_1^\pm, Φ_2^\pm определены в теореме 1), являются решением задачи Маркушевича (1.1).

С другой стороны, если $\varphi^\pm \in W_{0\pm}$ — решение задачи Маркушевича (1.1) и выполнено условие

$$e^{-ix\tau} \overline{\varphi^-(x)} \in W_{0-},$$

то функция

$$u(t) = f(t) + \mathcal{F}^{-1}\{\overline{\varphi^-(x)} - e^{ix\tau} \varphi^-(x)\}(t)$$

является решением уравнения первого рода (0.1).

Заключение

Установлена связь между краевыми задачами для аналитических функций и интегральными уравнениями в свертках на конечном промежутке, позволяющая получить новые результаты как для краевых задач, так и для интегральных уравнений. Дальнейшее исследование направлено на развитие полученных методов для исследования уравнений в свертках 1-го рода и других интегральных уравнений типа свертки.

Список цитируемых источников

1. Боярский Б. В. Об обобщенной граничной задаче Гильберта // Сообщения АН Груз. ССР. — 1960. — Т. 25, № 4. — С. 385–390.
 Wojarski B. V. On the generalized boundary value problem of Hilbert. Communications of the Academy of Sciences of the Georgian SSR, T. 25, № 4, 385–390 (1960). (in Russian)
2. Воронин А. Ф. Исследование задачи \mathbb{R} -линейного сопряжения и усеченного уравнения Винера – Хопфа // Математические труды. — 2019. — Т. 22, №2. — С. 21-23.
 Voronin A. F. Study of the \mathbb{R} -linear conjugation problem and the truncated Wiener – Hopf equation. Siberian Advances in Mathematics 22, №2, 21-23 (2019).
3. Воронин А. Ф. Обобщенная краевая задача Римана и интегральные уравнения в свертках первого и второго рода на конечном интервале // Сибирские электронные математические известия. — 2018. — Т. 15. — С. 611–623.
 Voronin A. F. A generalized Riemann boundary value problem and integral convolutions equations of the first and second kind. Siberian Electronic Mathematical Reports 15, 412–421 (2018). (in Russian)
4. Воронин А. Ф. О связи обобщенной краевой задачи Римана и усеченного уравнения Винера – Хопфа // Сибирские электронные математические известия. — 2018. — Т. 15. — С. 412–421.
 Voronin A. F. On the connection between the generalized Riemann boundary value problem and the truncated Wiener – Hopf equation. Siberian Electronic Mathematical Reports 15, 412–421 (2018). (in Russian).

5. *Воронин А. Ф.* Условия устойчивости и единственности решения задачи Маркушевича // Сибирские электронные математические известия. — 2017. — Т. 14. — С. 511–617.

Voronin A. F. Conditions for the stability and uniqueness of the solution of the Markushevich problem. Sib. Elektron. Matem. Izv. 14, 511–517 (2017). (in Russian)

6. *Воронин А. Ф.* Системы уравнений в свертках 1-го и 2-го рода на конечном интервале и факторизация матриц-функций // Сиб. матем. журн. — 2012. — Т. 35 № 5. — С. 978–990.

Voronin A. F. Systems of convolution equations of the first and second kind on a finite interval and factorization of matrix-functions. Siberian Math. J., 53:5, 781–791 (2012).

7. *Воронин А. Ф.* Исследование интегрального уравнения 2-го рода в свертках на конечном интервале с периодическим ядром // Сиб. журнал индустр. мат-ки. — 2009. — Т.12, №1(37). — С. 31–39.

A. F. Voronin. (2010) Analysis of a convolution integral equation of the second kind with periodic kernel on a finite interval. J. Appl. Industr. Math., 4:2, 282–289.

8. *Воронин А. Ф.* Интегральное уравнения первого рода в свертках на конечном интервале с периодическим ядром // Сиб. журн. индустр. матем., 11:1. — С. 46–56.

A. F. Voronin. (2009) An integral convolution equation of the first kind on a finite interval with a periodic kernel. J. Appl. Industr. Math. — 2008. — 3:3, 409–418.

9. *Воронин А. Ф.* Полное обобщение метода Винера – Хопфа для интегральных уравнений в свертках на конечном интервале с интегрируемыми ядрами // Диф. уравнения. — 2004. — Т. 40, № 9. — С. 1153–1160.

A. F. Voronin, (2004). A complete generalization of the Wiener – Hopf method to convolution integral equations with integrable kernel on a finite interval. Differ. Equ., 40:9, 1259–1267

10. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. Наука, М., 1978.

Gakhov F. D, Cherskii Yu. I. (1978) Equations of Convolution Type. Nauka, Moscow. (Russian).

11. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971.

I. S. Gohberg and I. A. Fel'dman. (1971). Convolution equations and projection methods for their solution, Nauka, Moscow. (Russian)

12. *Забрейко П. П., Кошелев А. И. и др.* Интегральные уравнения, Наука, М., 1968.

Zabreiko P. P., Koshelev A. I. and others. (1968) Integral equations, Nauka, M. (Russian)

13. *Крейн М. Г.*, Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи мат. наук. — 1958. — Т 13, № 5 (83), — С. 3–120.

Krein M. G. (1958). Integral equations on the half-line with kernel depending on the difference of the arguments. Uspehi Mat. Nauk (N. S.) V. 13, Issue: 5, 3–120. (Russian)

14. *Литвинчук Г. С.* Две теоремы об устойчивости частных индексов краевой задачи Римана и их приложение // Изв. вузов. Математика. — 1967. — Т. 67, № 12. — С. 47–57

15. *B. Bojarski, V. Mityushev.* (2013). \mathbb{R} -linear problems for multiply connected domains and alternating method of Schwarz // Journal of Mathematical Sciences. Vol. 189, No. 1. P. 68–77.
16. *Feldman I., Gohberg I., Krupnik N.* (2000). Convolution equations on finite intervals and factorization of matrix function. Integral equations and operator theory. V. 36. P. 201–211.

Получена 29.05.2019

MSC 2010: 37A05, 37B10

On the entropy of symbolic image of a dynamical system¹

G. S. Osipenko*, N. B. Ampilova**

*Sebastopol Branch of Lomonosov Moscow State University, Sebastopol 299001

E-mail: george.osipenko@mail.ru

**Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg 199034.

E-mail: n.ampilova@spbu.ru

Abstract. We consider the estimation of the entropy of a discrete dynamical system by using a symbolic image that is a directed graph constructed by means of a finite covering of phase space. Trajectories of the system are coded by paths on the graph. Flows on a symbolic image approximate invariant measures of the system. The maximal metric entropy of a symbolic image is estimated by the logarithm of the maximal eigenvalue of the symbolic image adjacency matrix. There is the flow on which this entropy is achieved. The invariant measure of the maximal entropy is estimated by using this flow.

Keywords: symbolic image, dynamical systems, invariant measure, entropy.

1. Symbolic image of a dynamical system

Let $f: M \rightarrow M$ be a homeomorphism of a compact manifold M generating a discrete dynamical system

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (1.1)$$

and $\rho(x, y)$ be a distance on M . In what follows we use the concept of symbolic image of a dynamical system [16], which brings together symbolic dynamics [1, 13] and numerical methods [9]. Let $C = \{M(1), \dots, M(n)\}$ be a finite closed covering of a manifold M . The set $M(i)$ is called cell with index i .

Definition 1. [15] Symbolic image of the dynamical system (1.1) for a covering C is a directed graph G with vertices $\{i\}$ corresponding to cells $\{M(i)\}$. The vertices i and j are connected by the edge $i \rightarrow j$ iff

$$f(M(i)) \cap M(j) \neq \emptyset.$$

Symbolic image is a tool for a space discretization and graphic representation of the dynamic of a system under study, which allows the obtaining useful information about the global structure of the system dynamics. Symbolic image depends on a covering C . The existence of an edge $i \rightarrow j$ guaranties the existence of a point $x \in M(i)$ such that

¹This research was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research (grant A no. 19-01-00388)

$f(x) \in M(j)$. In other words, an edge $i \rightarrow j$ is the trace of the mapping $x \rightarrow f(x)$, where $x \in M(i)$, $f(x) \in M(j)$. If there isn't an edge $i \rightarrow j$ on G then there are not the points $x \in M(i)$ such that $f(x) \in M(j)$.

We do not place special restrictions on a covering C , but basing on the theorem about the triangulation of a compact manifold [18] we may without loss of generality assume that cells $M(i)$ are polyhedrons intersecting on their boundary disks. In practice M is a compact in R^d , and $M(i)$ are cubes or parallelepipeds. Let C be a covering of M by polyhedrons intersecting on their boundary disks. In what follows we also use a measurable partition C^* , such that a boundary disk belongs only one of adjoining cells. We assume that cells-polyhedrons are closures of their interiors.

Definition 2. A vertex of a symbolic image G is said to be recurrent if there is a periodic path passing through it. The set of recurrent vertices is denoted by RV . The recurrent vertices i and j are called equivalent if there exists a periodic path passing through i and j .

Thus, the set of recurrent vertices RV is split into equivalence classes $\{H_k\}$. In the graph theory such classes are called strong connectivity components.

Let

$$diam M(i) = \max(\rho(x, y) : x, y \in M(i))$$

be the diameter of a cell $M(i)$ and $d = diam(C)$ be the maximum of the diameters of the cells. The number d is called the diameter of the covering C .

A directed graph G is uniquely defined by its adjacency matrix (matrix of admissible transitions) Π . The matrix $\Pi = (\pi_{ij})$ has sizes $n \times n$, where n is the number of vertices of G , and $\pi_{ij} = 1$ iff there exists the edge $i \rightarrow j$, else $\pi_{ij} = 0$. Hence an i -th row in Π corresponds to the vertex i (cell $M(i)$), and on the place j in this row there is 1 or 0 depending on the existence (or nonexistence) of nonempty intersection $f(M(i))$ and $M(j)$. Matrix of admissible transitions depends on the numbering of vertices (cells of the covering), so that a change of numeration leads to a change of matrix Π . Note that there exists a numeration transforming the matrix of admissible transitions to a canonical form.

Proposition 1. [1] Vertices of a symbolic image G may be numbered such that the adjacency matrix has the form

$$\Pi = \begin{pmatrix} (\Pi_1) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \ddots & & & \\ 0 & & (\Pi_k) & \dots & \dots \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & 0 & & (\Pi_s) \end{pmatrix},$$

where every diagonal block Π_k corresponds either an equivalence class H_k of recurrent vertices or a nonrecurrent vertex and consists of one zero. Under diagonal blocks are only zeroes (upper triangular matrix)

2. Entropy

In 1865 R. Clausius [4] introduced the most important in thermodynamics concept entropy. To explain the irreversibility of macroscopic states L. Boltzmann in 1872 [3] first introduced statistical approach in thermodynamics : he proposed to describe a state of a system by using its microstates. The Boltzmann entropy S is statistical entropy for the equiprobable distribution of a system over P states, it is defined as

$$S = k \log(P),$$

where k is the Boltzmann constant.

In 1948 C. Shannon [19, 20] introduced the notion of capacity (C) for an information channel as follows

$$C = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log_2 N(T)}{T},$$

where $N(T)$ is the number of admissible signals for the time T . He also defined information entropy as follows

$$h = - \sum_i p_i \log_2 p_i,$$

where p_i is a probability of i -th signal (message), $i \in 1, \dots, n$, and n is the number of signals. A. N. Kolmogorov in 1958 [11] introduced entropy in the theory of dynamical systems. Entropy is a fine invariant of a dynamical system, it may be interpreted as a measure of the system chaoticity. Comprehensive information on entropy in dynamical systems is given in [6, 10]. It turns out that entropy characteristics may be obtained both for a system described analytically and for its phase portraits. The application of such characteristics to digital image analysis is given in [2].

Motivation Consider a discrete dynamical system $x_{n+1} = f(x_n)$ on a compact manifold M , where $f : M \rightarrow M$ is a homeomorphism. Let $C = \{M(1), \dots, M(n)\}$ be a finite covering of M and the sequence $\{x_k = f^k(x), k = 0, \dots, N-1\}$ be the N -length part of the trajectory of a point x . The covering C generates a coding of this part via a finite sequence $\xi(x) = \{i_k, k = 0, \dots, N-1\}$, where $x_k \in M(i_k)$. In other words, i_k is the index of the cell from C which contains the point $x_k = f^k(x)$. Generally speaking, the mapping $x_k \rightarrow i_k$ is multivalued. The sequence $\xi = \{i_k\}$ is said to be (admissible) encoding of the trajectory $\{x_k = f^k(x)\}$ with respect to the covering C . Assume that we know all admissible N -length encodings, and there is a need to predict subsequent p -length encodings, i. e. to find admissible encodings of length $N+p$.

Let the number of admissible encodings $K(N)$ grows exponentially depending on N . We estimate the rate of growth of encodings by the number

$$h = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\log_b K(N)}{N}, \quad (2.1)$$

where b may be any real number greater than 1. The bases $b = 2$ (following to Shannon) or $b = e$ are in common use. The existence of the limit in (2.1) follows from the Polya lemma [1, 13].

Lemma 1 ([13], p.103). *If a sequence of non-negative numbers a_n satisfies the inequality*

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m,$$

then there exists $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$.

For the number of admissible encodings we have

$$K(n+m) \leq K(n)K(m),$$

hence for the sequence $a_n = \log_b K(n)$ there exists the limit (2.1).

Thus, for the number of encodings $K(N)$ we obtain the estimation

$$K(N) \sim Bb^{hN},$$

where B is a constant. If $h \neq 0$ then

$$\frac{K(N+p)}{K(N)} \sim b^{hp}.$$

This relation means that for any N the uncertainty of future encodings grows with the exponent hp regardless the knowledge of previous encodings.

If the growth of the number of different encodings is not exponential (i. e. $h = 0$), for example as

$$K(N) \sim BN^A,$$

where A is a positive number (may be large), then

$$\frac{K(N+p)}{K(N)} \sim \left(1 + \frac{p}{N}\right)^A \rightarrow 1,$$

when $N \rightarrow \infty$. In other words, the uncertainty of the future decreases when the length N of known encodings increases.

Thus, if the growth of the number of different encodings is exponential, the uncertainty does not depend on N , in other case it decreases as N increases. Value h may be interpreted as a characteristics of uncertainty (chaoticity) of the dynamic of the system considered.

Topological entropy. Let f be a continuous mapping defined on a manifold M and $C = \{M(1), \dots, M(n)\}$ be an open covering of M . For an integer positive number N consider a sequence

$$\omega = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_N,$$

where ω_k is a number from 1 to n . Construct the intersection of the form

$$|M(\omega) = M(\omega_1) \cap f^{-1}(M(\omega_2)) \cap \cdots \cap f^{-N+1}(M(\omega_N)), \quad (2.2)$$

which is an open set. The admissible encoding ω corresponds to the nonempty intersection $M(\omega)$, i.e. there exists $x \in M(\omega_1)$ such that $f^k(x) \in M(\omega_{k+1})$. The

sequence ω codes the segment of the trajectory $\{f^k(x), k = 1, 2, \dots, N\}$. Consider all the admissible N -length encodings $\{\omega\}$ and the collection of sets $C^N = \{M(\omega)\}$, which is an open covering. Choose in C^N a minimal by the number of elements (denoted further by $|C_N|$) finite subcovering C_N .

Then according to the Polya lemma there exists the limit

$$H(C) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log |C_N|}{N}. \quad (2.3)$$

Definition 3. The number

$$h(f) = \sup_C H(C),$$

where supremum is taken over all open coverings C , is called *topological entropy* of the mapping $f: M \rightarrow M$.

It is easy to see that there is little point in using this definition for practical calculation of the entropy, so we consider some other methods.

A covering C_2 is said to be *refined* in a covering C_1 , if any $A \in C_2$ lies in a set $B \in C_1$. A sequence of open coverings C_n is called *exhaustive* if for any open covering C there exists the number n^* such that the covering C_n is refined in C for $n \geq n^*$.

Proposition 2 ([1] p. 122). (1) If C_n is a sequence of open coverings with diameters

$$d_n = \max_{A \in C_n} \text{diam} A$$

tending to zero, then C_n is an exhaustive sequence. (2) The entropy of the mapping f is calculated as follows

$$h(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(C_n).$$

Consider coverings C_1 and C_2 , and construct for each of them nonempty intersections of the form (2.2). Denote the obtained collections of sets by C_1^N and C_2^N respectively. In each collection choose the minimal (by the number of elements) subcovering, and denote them C_{N1} and C_{N2} .

Proposition 3. If C_2 is refined in C_1 , then

$$|C_{N1}| \leq |C_{N2}|,$$

where $|C_{Ni}|$ denotes the number of elements in the set considered.

Proof. If $A_1 \subset B_1$ and $A_2 \subset B_2$, then $A_1 \cap f^{-1}(A_2)$ lies in $B_1 \cap f^{-1}(B_2)$. By the same way one can prove that elements of C_2^N are in corresponding elements of C_1^N . Consider C_{N1} and C_{N2} . Take from C_1^N all the elements which contain corresponding elements of C_{N2} , and form the covering C_{N1}^* .

Then $|C_{N1}| \leq |C_{N1}^*| \leq |C_{N2}|$, because C_{N1} is a minimal subcovering for C_1^N . The proposition is proved.

Corollary 1. *Assume that C_2 is refined in C_1 , and the numbers $H(C_1)$, $H(C_2)$ are calculated by (2.3). Then*

$$H(C_1) \leq H(C_2).$$

3. Entropy of a symbolic image

Let G be a graph with the adjacency matrix Π . Denote by b_n the number of admissible n -length paths on G .

Definition 4. The number

$$h(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln b_n}{n}$$

is called the *entropy of the graph G* .

Remember that if (Π^n) is the power of Π then the element $(\Pi^n)_{ij}$ equals the number of admissible n -length paths from i to j and

$$b_n = \sum_{ij} (\Pi^n)_{ij}.$$

Subdivision process. We will apply a process of adaptive subdivision to coverings and construct a sequence of symbolic images. At first, let us consider a main step of the process a subdivision of covering. Let $C = \{M(i)\}$ be a covering of M and G be the symbolic image with respect to C . Suppose a new covering NC is a subdivision of C . It is convenient to designate cells of the new covering as $m(i, k)$. This means that each cell $M(i)$ is subdivided by cells $m(i, k)$, $k = 1, 2, \dots$ which form a subdivision of the cell $M(i)$, i.e.,

$$\bigcup_k m(i, k) = M(i).$$

Denote by NG the symbolic image for the new covering NC . The vertices of the new symbolic image are denoted by (i, k) . It is possible that some cells will not be subdivided, i.e. $m(i, 1) = M(i)$, and the vertex i in G is the vertex $(i, 1)$ in NG . The subdivision just described generates a natural mapping s from NG onto G which takes the vertices (i, k) onto the vertex i . From $f(m(i, k)) \cap m(j, l) \neq \emptyset$ it follows that $f(M(i)) \cap M(j) \neq \emptyset$, so the edge $(i, k) \rightarrow (j, l)$ is mapped onto the edge $i \rightarrow j$. Hence, the mapping s takes the directed graph NG onto the directed graph G .

Theorem 1. *Let C_n be a sequence of subdivisions of a closed covering, such that cells are polyhedrons intersecting on boundary disks, and diameters d_n of C_n tend to zero. Denote by G_n the symbolic images constructed for a mapping $f : M \rightarrow M$ in accordance with the sequence C_n . Then for the entropy of f the following inequality holds*

$$h(f) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} h(G_n).$$

Proof. Let $C_n = \{M(i)\}$ be a closed covering from the sequence described above, and G_n be a symbolic image of the mapping f constructed according to C_n . Consider the set P_N of encodings of N -length segments of trajectories. It is obvious that P_N is not greater than the number of admissible N -length paths (denoted by b_N) on G_n .

Hence the number $|C^N|$ of nonempty intersections of the form

$$M(\omega) = M(\omega_1) \cap f^{-1}(M(\omega_2)) \cap \dots \cap f^{-N+1}(M(\omega_N))$$

is not greater than b_N . Thus,

$$H(C_n) \leq h(G_n).$$

If C is an open covering then there exists the number n^* such that the covering C_n is refined in C for $n \geq n^*$. Then in accordance with Proposition 3 we have

$$H(C) \leq H(C_n) \leq h(G_n).$$

Now consider an exhausting sequence of open coverings $\{\tilde{C}_m\}$. Let $n(m)$ be the number n^* constructed for the covering \tilde{C}_m , then

$$H(\tilde{C}_m) \leq H(C_{n(m)}) \leq h(G_{n(m)}),$$

where $n \geq n(m)$. If $m \rightarrow \infty$, then according to Proposition 2 we have

$$h(f) = \lim_{m \rightarrow \infty} H(\tilde{C}_m) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} h(G_n).$$

□

Remember that a matrix $A(n \times n)$ is called decomposable if it admits an invariant subspace with dimension less than n , and a matrix A is called nonnegative (positive) if it has nonnegative (positive) elements. If for a nonnegative matrix A there is an integer $s > 0$ such that all the elements of A^s are positive, then A is called primitive. In particular the matrix of admissible transitions Π is nonnegative. It is nondecomposable if the symbolic image consists of one class of equivalent recurrent vertices.

Theorem 2. (*Perron-Frobenius*) [7, 13]

- If A is a decomposable nonnegative matrix then it has an eigenvector e with positive coordinates and the eigenvalue λ with multiplicity 1, and the other eigenvalues μ satisfy the inequality $|\mu| \leq \lambda$.
- If A is a decomposable nonnegative matrix and $|\mu| < \lambda$, then A is primitive.
- If A is a decomposable nonnegative matrix and it has $h > 1$ eigenvalues which are equal in modulus λ , then A is not primitive, and by an agreed renumeration of rows and columns it may be transformed to the form

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{h-1h} \\ A_{h1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

where A_{ij} are square blocks, and A^h consists of h primitive blocks.

Theorem 3. *The entropy of the graph G is equal to the logarithm of the maximal eigenvalue of the adjacency matrix*

$$h(G) = \ln \lambda.$$

Proof. 1. Consider the case when G consists of one class of equivalent recurrent vertices. Let e be a positive eigenvector for the maximal eigenvalue λ , i.e.

$$\Pi e = \lambda e.$$

In the coordinate form we have

$$\sum_j (\Pi^n)_{ij} e_j = \lambda^n e_i. \quad (3.1)$$

Let $c = \min\{e_i\}$ and $d = \max\{e_i\}$. In accordance with the Perron-Frobenius theorem $c > 0$. Then the following inequalities hold

$$c \sum_j (\Pi^n)_{ij} \leq \sum_j (\Pi^n)_{ij} e_j \leq d \lambda^n.$$

It follows that

$$\sum_j (\Pi^n)_{ij} \leq \frac{d}{c} \lambda^n$$

for any i . Summing by i we obtain

$$b_n = \sum_{ij} (\Pi^n)_{ij} \leq \frac{dr}{c} \lambda^n,$$

where r is the number of rows in the matrix Π . It follows from (3.1) that

$$c \lambda^n \leq \lambda^n e_i = \sum_j (\Pi^n)_{ij} e_j \leq d \sum_j (\Pi^n)_{ij} \leq d \sum_{ij} (\Pi^n)_{ij}.$$

Hence we have the estimation

$$\frac{c}{d} \lambda^n \leq \sum_{ij} (\Pi^n)_{ij} = b_n,$$

and the inequalities

$$\frac{c}{d} \lambda^n \leq b_n \leq \frac{dr}{c} \lambda^n.$$

The required equality follows from it.

2. Consider the case when there are several classes of equivalent recurrent vertices, i.e. the matrix Π is decomposable. According to Proposition 1, by a renumbering of vertices this matrix may be transformed to the form

$$\Pi = \begin{pmatrix} (\Pi_1) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \ddots & & & \\ 0 & & (\Pi_k) & \cdots & \cdots \\ & & \ddots & & \\ 0 & & 0 & & (\Pi_s) \end{pmatrix},$$

where each diagonal block Π_k corresponds to either one of the classes of equivalent recurrent vertices H_k or some non-recurrent vertex, and consists of one zero. Under diagonal blocks are zeroes. Each class H_k has the entropy

$$h(H_k) = \ln \lambda_k,$$

where λ_k is the maximal eigenvalue of Π_k . By the definition the entropy of a symbolic image G equals

$$h(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln b_n}{n}.$$

Consider an admissible n -length path ω . Assume that on G there are s classes of equivalence H_k . The path ω passes both through the vertices from H_k and non-recurrent vertices not belonging to these classes. Denote by ω_k the parts of ω which lie in the class H_k . If we delete from ω all the ω_k it will contain only different paths σ_l passing through non-recurrent vertices. Thus, ω is the sum ω_k and σ_l . Combine all the paths σ_l into a sequence σ , which is not necessarily is an admissible path. Let K be the number of non-recurrent vertices in G . The sequence σ contains nonrecurrent vertices without repetition. Hence the number of the sequences σ is not greater than the number of permutations of K elements, i.e. $K!$.

Denote by $n(k)$ the length of the path ω_k from H_k . Then $n(1) + n(2) + \cdots + n(s) \leq n$. According to item 1 for every class H_k there is a number d such that the number $b_k(n(k))$ of different $n(k)$ -length paths ω_k is estimated as follows

$$b_k(n(k)) \leq d\lambda_k^{n(k)} \leq d\lambda^{n(k)},$$

where $\lambda = \max \lambda_k$. Then for the number of different paths ω_k lying in ω we have the estimation

$$\prod_k b_k(n(k)) \leq d^s \lambda^{n(1)+n(2)+\cdots+n(s)} \leq d^s \lambda^n.$$

Summing the above results we have

$$b_n \leq K! d^s \lambda^n.$$

Thus, we obtain an upper estimation for the entropy of G :

$$h(G) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(K! d^s \lambda^n) = \ln \lambda.$$

Prove the opposite inequality. Note that the number of admissible paths on G is greater than the number of admissible paths in a class H_k . Then $h(G) \geq h(H_k) = \ln \lambda_k$ for any k , which gives the low estimation

$$h(G) \geq \ln \lambda.$$

Hence we have

$$h(G) = \ln \lambda,$$

and the proof is completed.

4. Flows on a symbolic image

Let $f: M \rightarrow M$ be a homeomorphism of a compact manifold M . A measure μ defined on M is said to be f -invariant, if for any measurable set $A \subset M$ the equality

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A) = \mu(f(A))$$

holds. In what follows we assume that all measures considered are the Borel ones. The Krylov-Bogoliubov theorem [12, 10] guaranties the existence of an invariant measure μ which is normed on M : $\mu(M) = 1$. Denote by $\mathcal{M}(f)$ the set of all f -invariant normed measures. This set is a convex closed compact in weak topology (see [14], p.511). The convergence $\mu_n \rightarrow \mu$ in this topology means that

$$\int_M \phi d\mu_n \rightarrow \int_M \phi d\mu$$

for any continuous function $\phi: M \rightarrow R$.

To understand how a distribution of a measure may appear on a symbolic image, consider the following observation. Assume that there exists a f -invariant normed measure μ on M , and the cells of a covering C are polyhedrons intersecting by boundary disks. Construct a measurable partition $C^* = \{M^*(i)\}$ such that a boundary disk belongs to one of adjoining cells. Then, to every edge $i \rightarrow j$ of a symbolic image G we can assign the measure

$$m_{ij} = \mu(M^*(i) \cap f^{-1}(M^*(j))) = \mu(f(M^*(i)) \cap M^*(j)), \quad (4.1)$$

where the last equality follows from the invariance of μ . Besides that, the invariance of μ leads to the equalities

$$\begin{aligned} \sum_k m_{ki} &= \sum_k \mu(f(M^*(k)) \cap M^*(i)) = \mu(M^*(i)) = \\ &= \sum_j \mu(M^*(i) \cap f^{-1}(M^*(j))) = \sum_j m_{ij}. \end{aligned}$$

The value $\sum_k m_{ki}$ is called the flow incoming in the vertex i , and the $\sum_j m_{ij}$ is called the flow outgoing from i . The equality

$$\sum_k m_{ki} = \sum_j m_{ij} \quad (4.2)$$

may be interpreted as Kirchoff's law: for any vertex the incoming flow equals the outgoing one. Furthermore, we have

$$\sum_{ij} m_{ij} = \mu(M) = 1. \quad (4.3)$$

It means that the distribution m_{ij} is normed (probabilistic). Thus, a f -invariant measure μ generates on a symbolic image a distribution m_{ij} which satisfies the conditions (4.2) and (4.3). The above reasoning leads to the following definition.

Definition 5. Let G be a directed graph. The distribution $\{m_{ij}\}$ on edges $\{i \rightarrow j\}$ such that

- $m_{ij} \geq 0$;
- $\sum_{ij} m_{ij} = 1$;
- for any vertex i

$$\sum_k m_{ki} = \sum_j m_{ij}$$

is called flow on G .

The last property may be called the invariance of a flow. The norming condition may be written as $m(G) = 1$, where the measure of G is the sum of measures of all edges. Sometimes in the graph theory for such a distribution the term "closed flow" is used.

For the flow $\{m_{ij}\}$ on G we may define the measure of a vertex i as

$$m_i = \sum_k m_{ki} = \sum_j m_{ij}.$$

Then $\sum_i m_i = m(G) = 1$.

Thus, a f -invariant measure generates a flow on a symbolic image. Now we consider the inverse construction. Let on a symbolic image G a flow $m = \{m_{ij}\}$ be given, then we can construct the measure μ on M as follows

$$\mu(A) = \sum_i \frac{m_i(v(A \cap M(i)))}{v(M(i))}, \quad (4.4)$$

where A is a measurable set. Here v is a normed on M Lebesgue's measure, and on the assumption $v(M(i)) \neq 0$. In this case the measure of a cell $M(i)$ coincides with

the measure of the vertex i : $\mu(M(i)) = m_i$. As v is the Lebesgue measure, the measure of boundary disks is equal to zero and the measure of a cell does not depend on the measure of its boundary. In general, the constructed measure μ is not f -invariant. But it is an approximation to an invariant measure in the sense that μ converges in weak topology to an invariant measure if the diameter of the covering tends to zero.

Theorem 4. [17] *Let on a sequence of symbolic images $\{G_t\}$ of a homeomorphism f a sequence of flows $\{m^t\}$ be defined, and the maximal diameter d_t of coverings tends to zero when $t \rightarrow \infty$. Then*

- *there exists the subsequence of measures μ_{t_k} (constructed according to (4.4)) which converges in weak topology to a f -invariant measure μ ;*
- *if a subsequence of measures μ_{t_i} converges in weak topology to a measure μ^* , then μ^* is f -invariant.*

Theorem 5. [17] *For any neighborhood (in weak topology) U of the set $\mathcal{M}(f)$ there is a positive number d_0 such that for any covering C with the diameter $d < d_0$ and any flow m on a symbolic image G with respect to C , the measure μ constructed according to (4.4) by m , lies in U .*

5. Metric entropy

Let μ be a normed invariant measure of a homeomorphism $f : M \rightarrow M$ and $C = \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$ a measurable partition of the manifold M .

Definition 6. The entropy of the partition C is defined as

$$H(C) = - \sum_i \mu(M_i) \ln \mu(M_i).$$

Construct a covering C^N which consists of nonempty intersections of the form

$$A_{i_1} \cap f^{-1}(A_{i_2}) \cap \dots \cap f^{-N+1}(M_{i_N}).$$

If such an intersection is nonempty then the sequence i_1, i_2, \dots, i_N is admissible coding with respect to the covering C .

The metric entropy of f for the covering C is defined as

$$H(f, C) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} H(C^N).$$

The existence of the limit follows from the Polya lemma.

Definition 7. The entropy of f for an invariant measure μ is defined as

$$h(f, \mu) = \sup_C H(f, C),$$

where sup is taken over all measurable finite partitions.

The connection between topological and metric entropy is given by the following theorem.

Theorem 6. [5, 8] *The topological entropy of a homeomorphism f is the least upper bound of metric entropies*

$$h(f) = \sup_{\mu} h(f, \mu).$$

6. Stochastic Markov chains

Stochastic Markov chain [7, 13] is defined by a set of states of a system $\{i = 1, 2, \dots, n\}$ and the matrix of transition probabilities P_{ij} from a state i to state j . Such a matrix is called stochastic if it satisfies the conditions $P_{ij} \geq 0$ and $\sum_j P_{ij} = 1$ for every i . A probabilistic distribution $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $\sum_i p_i = 1$ is said to be stationary if

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix} = (p_1, p_2, \dots, p_n),$$

i.e. p is a left eigenvector of P .

We show that there is a one-to-one correspondence between a Markov chain and a flow on a graph in which vertices correspond to the states with positive measure.

Let $m = \{m_{ij}\}$ be a flow on a graph G . The measure of a vertex i equals $m_i = \sum_j m_{ij} = \sum_k m_{ki}$. If $m_i \neq 0$ then the vertex $\{i\}$ is necessary recurrent. It is easy to verify that any flow $m = \{m_{ij}\}$ on G generates a stochastic Markov chain in which the states are vertices with nonzero measures, and the transition probabilities from i to j are calculated as

$$P_{ij} = \frac{m_{ij}}{m_i}.$$

In this case the stochastic matrix $P = (m_{ij}/m_i)$ has the stationary distribution coinciding with the distribution of the measure m over the vertices (m_1, m_2, \dots, m_n) . This follows from the equality

$$(m_1, m_2, \dots, m_n) \begin{pmatrix} \frac{m_{11}}{m_1} & \frac{m_{12}}{m_1} & \dots & \frac{m_{1n}}{m_1} \\ \frac{m_{21}}{m_2} & \frac{m_{22}}{m_2} & \dots & \frac{m_{2n}}{m_2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{m_{n1}}{m_n} & \frac{m_{n2}}{m_n} & \dots & \frac{m_{nn}}{m_n} \end{pmatrix} = (m_1, m_2, \dots, m_n).$$

Thus, any flow $m = \{m_{ij}\}$ on a graph G generates a stochastic Markov chain for which the distribution of the measure (m_i) on vertices is stationary.

Now we prove the inverse fact: for any stochastic matrix $P = (P_{ij})$ and its stationary distribution $p = (p_i)$ there exists a flow $m = \{m_{ij}\}$ on a graph G for which the

distribution of the measure on vertices coincides with the stationary distribution, i.e. $m_i = p_i$.

Actually, let P be a stochastic matrix and $pP = p$. Consider a graph G which has n vertices $\{i\}$, and the edge $i \rightarrow j$ there exists if $P_{ij} > 0$. Construct the distribution on edges $m_{ij} = P_{ij}p_i$ and show that the distribution is a flow on G . As P is stochastic then $\sum_j P_{ij} = 1$ for any i . Hence

$$\sum_j m_{ij} = \sum_j P_{ij}p_i = p_i \sum_j P_{ij} = p_i.$$

As $pP = p$ then $\sum_k p_k P_{ki} = p_i$, so

$$\sum_k m_{ki} = \sum_k p_k P_{ki} = p_i = \sum_j m_{ij},$$

i.e. for the distribution m_{ij} the Kirchoff law holds. Moreover, $\sum_{ij} m_{ij} = \sum_i p_i = 1$.

From the above it follows that the construction of a flow on a graph results in obtaining a Markov chain.

7. Flow entropy

The developed technique may be applied to estimate metric entropy. Let for a mapping f and a covering C a symbolic image G and a flow $m = \{m_{ij}\}$ be constructed. Any flow m may be considered as the approximation to an invariant measure μ , if the diameter of C is small enough. The flow m on G generates the Markov chain in which the states coincide with vertices of G , and transition probabilities are defined as

$$p_{ij} = \frac{m_{ij}}{m_i}.$$

The matrix $P = (p_{ij})$ has the stationary distribution (m_1, m_2, \dots, m_n) for which entropy is calculated by the formula (see [13], p. 443)

$$h_m = - \sum_i m_i \sum_j p_{ij} \ln p_{ij}.$$

Substituting $p_{ij} = m_{ij}/m_i$ we obtain

$$\begin{aligned} h_m &= - \sum_i m_i \sum_j \frac{m_{ij}}{m_i} \ln \left(\frac{m_{ij}}{m_i} \right) = - \sum_{ij} m_{ij} \ln \left(\frac{m_{ij}}{m_i} \right) = \\ &= - \sum_{ij} m_{ij} \ln m_{ij} + \sum_{ij} m_{ij} \ln m_i = - \sum_{ij} m_{ij} \ln m_{ij} + \sum_i m_i \ln m_i. \end{aligned}$$

By this means entropy can be calculated by the flow m_{ij} as

$$h_m = - \sum_{ij} m_{ij} \ln m_{ij} + \sum_i m_i \ln m_i. \quad (7.1)$$

The last equality allows estimating the entropy of f for the invariant measure μ , where the flow m is an approximation of μ .

8. Flow with maximal entropy

Let Π be the matrix of admissible transitions for a graph G . Our objective is to construct the flow which has maximal entropy among all the flows on G . As any flow is grouped on a component of recurrent vertices, it may be thought that G consists from one component.

Theorem 7. *There is a flow m on G such that:*

$$h_m = h(G) = \ln \lambda.$$

Proof. 1. Eigenvalues of any real matrix $A = (a_{ij})$ coincide with the eigenvalues of the transposed (conjugate) matrix A^* . Really, as $\det A = \det A^*$, then

$$\det(A - \lambda E) = \det(A - \lambda E)^* = \det(A^* - \bar{\lambda} E).$$

Hence to an eigenvalue λ of A corresponds the conjunctive eigenvalue $\bar{\lambda}$ of A^* . The roots of a real characteristic polynomial are either real or complex-conjugate, hence the eigenvalues of the matrices A and A^* coincide.

2. Let A be the matrix of admissible transitions of a graph G and λ be the maximal eigenvalue from the Perron-Frobenius theorem. Then for A there exists a left eigenvector e with nonnegative coordinates e_i , $\sum_i e_i = 1$, such that

$$eA = \lambda e, \quad A^*e = \lambda e.$$

Hence for every i we have

$$\sum_j a_{ji} e_j = \lambda e_i, \quad (8.1)$$

which leads to the equality

$$\sum_j \frac{a_{ji} e_j}{\lambda e_i} = 1$$

for every i . Hence a matrix of the form

$$P = \left(p_{ij} = \frac{a_{ji} e_j}{\lambda e_i} \right)$$

is the stochastic matrix for which vector e is a stationary distribution:

$$eP = e.$$

The distribution on edges $i \rightarrow j$ defined by

$$m_{ij} = p_{ij}e_i = \frac{a_{ji}e_j}{\lambda}$$

is the flow m on the graph G such that the measure m_i of the vertex i equals e_i . The entropy of m is calculated by the formula

$$h_m = - \sum_{ij} m_{ij} \ln m_{ij} + \sum_i m_i \ln m_i.$$

Hence

$$h_m = - \sum_{ij} \frac{a_{ji}e_j}{\lambda} \ln \frac{a_{ji}e_j}{\lambda} + \sum_i e_i \ln e_i.$$

Here we assume that $0 \ln 0 = 0$. That means that the sum is taken over i, j for which $a_{ij} = 1$. Thus we obtain

$$\begin{aligned} h_m &= - \sum_{ij} \frac{a_{ji}e_j}{\lambda} (\ln a_{ij} + \ln e_i - \ln \lambda) + \sum_i e_i \ln e_i = \\ &= \sum_i \left(\sum_j \frac{a_{ji}e_j}{\lambda} \right) \ln \lambda - \sum_i \left(\sum_j \frac{a_{ji}e_j}{\lambda} \right) \ln e_i + \sum_i e_i \ln e_i = \\ &= \ln \lambda \sum_i e_i - \sum_i e_i \ln e_i + \sum_i e_i \ln e_i = \ln \lambda. \end{aligned}$$

□

References

1. *Alekseev, V.* Symbolic dynamics, 11 mathematical school, Institut matematiki AN SSSR, Kiev, 1976. (in Russian)
2. *Ampilova, N., Soloviev, I.* Entropies in investigation of dynamical systems and their application to digital image analysis. Journal of Measurements in Engineering, 6, No. 2, 107-118 (2018). <https://doi.org/10.21595/jme.2018.19891>
3. *Boltzmann, L.* Sitzungsber. Kaiserl. Akad. Wiss. 66 (2) 275 (1872).
4. *Clausius, R.* Ueber verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie. Annalen der Physik und Chemie 125, No.7, 353-400 (1865).
5. *Dinaburg, E. I.* On the relations among various entropy characteristics of dynamical systems. Math. USSR, Izv. 5(1971), 337-378 (1972).
6. *Downarowicz, T.* Entropy in dynamical systems. Cambridge: CUP, 2011.
7. *Gantmacher, F. R.* The theory of matrices. Vol. 1, 2. Transl. from the Russian by K. A. Hirsch. Reprint of the 1959 translation. Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, 1998.
8. *Goodman, T.* Relating topological entropy and measure theoretic entropy. Bulletin of London Math. Soc. 3, No. 2, 176-180 (1971).

9. *Hsu, C. S.* Cell-to-Cell Mapping, N.Y.: Springer-Verlag, 1987.
10. *Katok, A., Hasselblat, B.* Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems, Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
11. *Kolmogorov, A.* New metric invariants of transitive dynamical systems and automorphisms of the Lebesgue spaces, Doklady AN SSSR, 119, No.5, 861–864 (1958).
12. *Kryloff, N., Bogoluboff, N.* La theorie generale de la mesure dans son application a l'etude des systemes dynamiques de la mecanique non lineaire, Ann. Math., 38, No.1, 65–113 (1937).
13. *Lind, D., Marcus, B.* An introduction to symbolic dynamics and coding. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
14. *Nemytskii, V. V. and Stepanov, V. V.* Qualitative Theory of Dynamical Systems, Princeton University Press, 1960.
15. *Osipenko, G.* On symbolic image of a dynamical system. Kraevye zadachi (Sb. trudov), Perm (pp. 101–105) 1983. (in Russian)
16. *Osipenko, G.* Dynamical systems, Graphs, and Algorithms. Lectures Notes in Mathematics, 1889, Berlin: Springer, 2007.
17. *Osipenko, G.* Symbolic images and invariant measures of dynamical systems. Ergodic Theory and Dynamical Systems 30, 1217–1237 (2010).
18. *Prasolov, V. V.* Elements of Combinatorial and Differential Topology. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 74, 2006.
19. *Shannon, C.* A Mathematical Theory of Communication. Bell System Technical Journal, 27, No.3, 379–423 (July 1948). doi:10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x. hdl:11858/00-001M-0000-002C-4314-2.
20. *Shannon, C.* A Mathematical Theory of Communication. Bell System Technical Journal, 27, No.4, 623–666 (October 1948). doi:10.1002/j.1538-7305.1948.tb00917.x. hdl:11858/00-001M-0000-002C-4314-2.

Получена 02.06.2019

УДК 517.929

Об условиях осцилляции решений дифференциальных уравнений с последействием¹

В. В. Малыгина*, К. М. Чудинов*,**

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет,

**Пермский государственный национальный исследовательский университет,
Пермь 614990. E-mail: mavera@list.ru, cyril@list.ru

Аннотация. Исследуются возможности получения эффективных условий осцилляции решений линейных неавтономных дифференциальных уравнений первого порядка с последействием. Для уравнения с несколькими сосредоточенными запаздываниями производится сопоставление нескольких достигнутых в последние годы результатов и приводятся новые доказательства и примеры, обосновывающие эффективность некоторых разрабатываемых методов и их преимуществ перед более ранними подходами. Получены новые эффективные условия осцилляции решений уравнений с распределенным запаздыванием.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с запаздыванием, осцилляция, эффективные признаки.

On oscillation conditions for solutions to delay differential equations

V. V. Malygina, K. M. Chudinov

Perm National Research Polytechnic University, Perm 614990,

Perm State National Research University, Perm 614990.

Abstract. The possibilities of obtaining effective oscillation conditions for solutions to linear non-autonomous first-order differential equations with aftereffect are investigated. We consider estimates, on the functional of the equation parameters, guaranteeing the oscillation of all solutions. These estimates are results of the development of known sufficient oscillation conditions for a linear equation with one concentrated delay, in the form of an estimate of the integral of the coefficient over the delay length. For an equation with several concentrated delays, several results achieved in recent years are compared and new proofs and examples are given that justify the effectiveness of some of the developed methods and their advantages over earlier approaches. A new approach is applied to equations with distributed delay, for which new effective conditions for the oscillation of solutions are obtained.

Keywords: delay differential equation, oscillation, explicit test.

MSC 2010: 34K11

¹Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (задание № 1.5336.2017/8.9) при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00928).

Введение

Еще в первой половине прошлого столетия было отмечено, что линейные дифференциальные уравнения с последствием первого порядка, в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, могут иметь осциллирующие решения [4]. Это свойство решений уравнений с последствием хорошо объясняет ряд процессов в биологии, химии, теории автоматического регулирования, поэтому его исследование получило развитие.

Если ориентироваться на получение эффективных необходимых и достаточных условий осцилляции в терминах параметров уравнения, то выбор объектов исследования практически исчерпывается автономными уравнениями и сводится к изучению характеристической функции на наличие либо отсутствие вещественных корней [4, 16, 6, 19]. Для неавтономных уравнений задача резко усложняется и речь можно вести только о достаточных условиях. Лучшими из таковых естественно считать те, в которых показана как существенность всех наложенных требований, так и точность входящих в ограничения постоянных.

В настоящей работе рассмотрим основные достижения на пути уточнения и обобщения двух классических результатов для уравнения устойчивого типа.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + a(t)x(h(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (0.1)$$

где $a(t) \geq 0$, $h(t) \leq t$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = +\infty$. В приведенных ниже двух теоремах можно считать, как это традиционно делалось начиная с работ А. Д. Мышкиса, что функции a и h непрерывны на \mathbb{R}_+ , а решением является удовлетворяющая уравнению (0.1) непрерывно дифференцируемая функция $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. При этом предполагается, что $x(\xi) = \varphi(\xi)$ при $\xi \leq 0$, где φ — некоторая непрерывная функция. В дальнейшем уравнение (0.1) будет изучаться в более общих предположениях.

Теорема 1 ([18, 6]). *Если функция $h(t)$ не убывает на \mathbb{R}_+ и справедливо неравенство*

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{h(t)}^t a(s) ds > 1, \quad (0.2)$$

то все решения уравнения (0.1) осциллируют.

Теорема 2 ([3]). *Если справедливо неравенство*

$$\underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \int_{h(t)}^t a(s) ds > 1/e,$$

то все решения уравнения (0.1) осциллируют.

1. О переносе условий осцилляции на уравнения с несколькими запаздываниями

Рассмотрим дифференциальное уравнение с несколькими запаздываниями

$$\dot{x}(t) + \sum_{k=1}^n a_k(t)x(h_k(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1.1)$$

в следующих предположениях: функции a_k локально суммируемы, функции h_k измеримы по Лебегу и $h_k(t) \leq t$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$, $k = \overline{1, n}$. Решением уравнения (1.1) будем называть локально абсолютно непрерывную функцию $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую уравнению (1.1) почти всюду. Как известно [1, гл. 1], при заданной ограниченной борелевской начальной функции $\varphi: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ и условии $x(\xi) = \varphi(\xi)$, $\xi \leq 0$, уравнение (1.1) однозначно разрешимо в классе локально абсолютно непрерывных функций и его решение бесконечно продолжаемо на всю положительную полуось.

Далее всюду будем считать выполненными следующие условия: $a_k(t) \geq 0$ для почти всех $t \geq 0$ и $\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow \infty} h_k(t) = +\infty$, $k = \overline{1, n}$.

Определение 1. Непрерывную на полуоси $\{t: t \geq t_0\}$ функцию будем называть *осциллирующей*, если она имеет неограниченную справа последовательность нулей.

Определение 2. Уравнение (1.1) будем называть *осциллирующим*, если любое его решение является осциллирующим.

Поскольку уравнение (0.1) есть частный случай уравнения (1.1) при $n = 1$, естественно желание обобщить теоремы 1 и 2 на уравнение (1.1). Простейший способ такого обобщения — выбрать достаточно малый общий для всех коэффициентов промежуток интегрирования. Результаты такого типа легко выводятся из следующего частного случая теоремы Мышкиса о сравнении решений [5, с. 177].

Теорема 3. Рассмотрим наряду с уравнением (1.1) уравнение

$$\dot{x}(t) + \sum_{k=1}^n a_k(t)x(\tilde{\tau}_k(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1.2)$$

где $\tilde{\tau}_k(t) \geq \tau(t)$, $k = \overline{1, n}$. Если уравнение (1.2) является осциллирующим, то уравнение (1.1) тоже является осциллирующим.

Замечание 1. Теоремы о сравнении решений функционально-дифференциальных уравнений выводятся из свойств функционально-дифференциальных неравенств. Соответствующая аналитическая техника развивалась в ряде работ Л. Березанского, Е. Браверман и А. Домошницкого; результаты систематизированы в монографии [10].

Теорема 4 ([10, с. 44]). Обозначим $g(t) = \sup_{s \leq t} h(s)$. Пусть

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{g(t)}^t \sum_{k=1}^n a_k(s) ds > 1.$$

Тогда уравнение (1.1) является осциллирующим.

Теорема 5 ([15]). Пусть непрерывная функция $h^*: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что $h_k(t) \leq h^*(t) \leq t$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$. Если при этом

$$\underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{h^*(t)}^t \sum_{k=1}^n a_k(s) ds > 1/e,$$

то уравнение (1.1) является осциллирующим.

С учетом теоремы 3 теоремы 4 и 5 следуют из теоремы 2. Недостаток этих результатов бросается в глаза: влияние относительно больших запаздываний на осцилляцию не учитывается, хотя именно оно наиболее велико; в частности, если $h_k(t) = t$ для некоторого k , то теоремы 4 и 5 полностью теряют силу.

Таким образом, основная проблема нетривиального обобщения теорем 1 и 2 на уравнение (1.1) состоит в том, чтобы учесть влияние всех запаздываний.

2. Итерационные уточнения условий осцилляции

Теорема 1 доказывается крайне просто. Требование неубывания функции $h(t)$ в ней отменить нельзя, но можно заменить $h(t)$ функцией $g(t) = \sup_{s \leq t} h(s)$. Пример из работы [6] показывает, что константа 1 в правой части неравенства (0.2) не уменьшаема, однако применение теоремы 2 к автономному случаю $a(t) \equiv a$, $t - h(t) \equiv r$, для которого условие $ar > 1/e$ является необходимым и достаточным для осцилляции [4], показывает, что теорема 1 — в некотором смысле более грубый результат, чем теорема 2.

В 1994 г. в работе [17] было представлено замечательное усиление теоремы 1, суть которого состоит в итерационном ослаблении условия (0.2). Обобщение этой идеи и ее применение к уравнению (1.1) было предложено в статье [11] в 2016 г.

Обозначим $P_0(t, s) = 1$ и

$$P_m(t, s) = \exp \left\{ \int_s^t \sum_{k=1}^n a_k(\zeta) P_{m-1}(\zeta, h_k(\zeta)) d\zeta \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Лемма 1 ([11]). Если x — положительное при $t \geq t_0$ решение уравнения (1.1), то найдется такое $t_1 \geq t_0$, что для всех $m \in \mathbb{N}_0$ и $t \geq s \geq t_1$ имеем

$$x(t)P_m(t, s) \leq x(s). \quad (2.1)$$

Положим $g(t) = \max_{k=1, \dots, n} \sup_{s \leq t} h_k(t)$.

Теорема 6 ([11]). *Если при некотором $t \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{g(t)}^t \sum_{k=1}^n a_k(s) P_m(g(t), h_k(s)) ds > 1,$$

то уравнение (1.1) является осциллирующим.

Сопоставление теорем 1, 2 и 6 наводит на мысль, что должно существовать усиление теоремы 2 с использованием вспомогательных функций, роль которых аналогична роли функций P_m в теореме 6. В работе [11] была предпринята попытка получить результат такого типа: утверждалось, что имеет место следующий факт.

Утверждение 1. *Если при некотором $t \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{g(t)}^t \sum_{k=1}^n a_k(s) P_m(g(t), h_k(s)) ds > 1/e,$$

то уравнение (1.1) является осциллирующим.

В работе [7] было замечено, что утверждение 1 неверно в применении даже к автономному уравнению с одним запаздыванием. Действительно, применим утверждение 1 к уравнению

$$\dot{x}(t) + e^{-1}x(t-1) = 0, \quad t \geq 0, \tag{2.2}$$

при $m = 1$. Имеем: $n = 1$, $a_1(t) = 1/e$, $h_1(t) = g(t) = t - 1$, $P_1(t-1, s-1) = e^{(t-s)/e}$,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{t-1}^t (1/e) e^{(t-s)/e} ds = e^{1/e} - 1.$$

В силу известного неравенства $e > (1 + 1/e)^e$ получаем, что $e^{1/e} - 1 > 1/e$. Таким образом, условия утверждения 1 выполнены, уравнение (2.2) должно быть осциллирующим, что неверно.

В той же работе [7] показано, что в формулировку утверждения 1 можно внести небольшое изменение так, что утверждение станет верным.

Теорема 7. *Если при некотором $t \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{g(t)}^t \sum_{k=1}^n a_k(s) P_m(g(s), h_k(s)) ds > 1/e, \tag{2.3}$$

то уравнение (1.1) является осциллирующим.

Приведенное в [11] доказательство утверждения 1 можно исправить, но в этом нет необходимости: в [7] приведено более простое рассуждение, основанное на применении леммы о дифференциальном неравенстве [2, с. 65] к вспомогательному уравнению с одним запаздыванием.

Ниже приводится новое, максимально простое, доказательство теоремы 7, отчетливо показывающее причины успеха уточнения теоремы 2: применительно к уравнению (0.1) расширяющие область применимости утверждения итерации возможны благодаря очевидному равенству

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \int_{h(t)}^t a(s) ds = \liminf_{t \rightarrow +\infty} \int_{g(t)}^t a(s) ds,$$

которое показывает, что уравнение не теряет осцилляции при замене $h(t)$ на $g(t)$, а это дает возможность воспользоваться оценкой отношения $\frac{x(h(s))}{x(g(s))}$.

Доказательство теоремы 7. Допустим, условия теоремы выполняются, но уравнение (1.1) имеет неосциллирующее решение (без ограничения общности, положительное) $x = x(t)$. Зафиксируем $t_0 \geq 0$ и рассмотрим уравнение

$$\dot{y}(t) + b(t)y(g(t)) = 0, \quad t \geq t_0, \quad (2.4)$$

где $b(t) = \sum_{k=1}^n a_k(t) \frac{x(h_k(t))}{x(g(t))}$. Применяя лемму 1, получаем:

$$\int_{g(t)}^t b(s) ds = \int_{g(t)}^t \sum_{k=1}^n a_k(s) \frac{x(h_k(s))}{x(g(s))} ds \geq \int_{g(t)}^t \sum_{k=1}^n a_k(s) P_m(g(s), h_k(s)) ds.$$

Поэтому из теоремы 2 и условий теоремы следует, что все решения уравнения (2.4) осциллируют. Но функция $x(t)$, очевидно, является решением уравнения (2.4). Следовательно, исходное предположение неверно. \square

Отметим, что в работах [12, 13] получены условия осцилляции уравнения (1.1), являющиеся усилениями теоремы 2, основанным, как и теорема 7, на оценке отношений $\frac{x(h_k(s))}{x(g(s))}$. Удивительно, но это не мешает авторам работы [13] в очередной раз сослаться на утверждение 1 в обзоре известных результатов! Впрочем, в публикациях последних нескольких лет по рассматриваемой теме допущено немало ошибок. На некоторые из них указано в работах [7, 8, 9], но частота публикации исправлений существенно уступает частоте публикации новых ошибок.

3. Новые множества интегрирования

В работе [14] был предложен новый выбор множества интегрирования коэффициентов уравнения (1.1), который не только усиливал теорему 4, но и давал подход к решению проблемы учета всех запаздываний.

Определим для $k = \overline{1, n}$ семейства множеств

$$H_k(t) = \{s \geq t : h_k(s) \leq t\}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Теорема 8 ([14]). *Пусть*

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{H_k(t)} a_k(s) ds > 1.$$

Тогда уравнение (1.1) является осциллирующим.

Доказательство теоремы 8 почти столь же просто, как доказательство теоремы 1. Для уравнения (0.1) в случае монотонной функции h эти теоремы равносильны, в противном случае теорема 8 всегда дает большее значение интеграла в левой части неравенства, чем теорема 1. Более того, в [9] показано, что теорема 8 в некоторых ситуациях более эффективна, чем итерационная теорема 6.

Существенно более тонким результатом является перенос возможности интегрирования по новому множеству на условия осцилляции, являющиеся развитием идеи теоремы 2.

Определим для $k = \overline{1, n}$ семейства множеств

$$E_k(t) = \{s \geq t : h_k(s) < t\}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Теорема 9 ([8]). *Пусть*

$$\underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{E_k(t)} a_k(s) ds > 1/e,$$

Тогда уравнение (1.1) является осциллирующим.

Сравним силу теорем 7 и 9 — максимальных полученных обобщений теоремы 2.

Несложно убедиться, что области применимости теорем 7 и 9 не совпадают. Действительно [7], осцилляция автономного уравнения с двумя запаздываниями

$$\dot{x}(t) + a_1 x(t) + a_2 x(t-1) = 0, \quad t \geq 0,$$

не устанавливается теоремой 7, но теорема 9 показывает, что при $a_2 > 1/e$ оно является осциллирующим. Столь же нетрудно привести пример неавтономного уравнения с одним запаздыванием (0.1), осцилляция которого устанавливается

теоремой 9, но не устанавливается теоремой 7: например, если $t - h(t)$ периодически обращается в ноль, то теорема 7 неприменима. Таким образом, область применимости теоремы 9 не уже области применимости теоремы 7 (даже для уравнения с одним запаздыванием).

Ответить на вопрос, верно ли обратное, по-видимому, существенно труднее. Авторам настоящей статьи видится правдоподобной **гипотеза**: не существует уравнения, осцилляция которого устанавливается теоремой 7, но не устанавливается теоремой 9.

Замечание 2. Применить к теореме 9 итерационное уточнение, подобное уточнению теоремы 2, приведшему к теореме 7, представляется невозможным. Как было отмечено выше, теорема 2 допускает итерационное уточнение благодаря тому, что она нечувствительна к немонотонности функции $h(t)$; для теоремы 9 это не так.

4. Уравнения с распределенным запаздыванием

Изложенные в предыдущих разделах подходы допускают распространение на некоторые классы уравнений с распределенным запаздыванием. Обладая рядом общих свойств с уравнениями с сосредоточенным запаздыванием, они не являются их частным случаем и имеют свою специфику.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + \int_{h_1(t)}^{h_2(t)} k(t, s)x(s) ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (4.1)$$

где h_1, h_2 — измеримые на \mathbb{R}_+ функции, причем $h_1(t) \leq h_2(t) \leq t$, а k — неотрицательная локально суммируемая по второму аргументу функция. Пусть, далее, $\rho(t) = \int_{h_1(t)}^{h_2(t)} k(t, s) ds$ — локально суммируемая функция, а $\lim_{t \rightarrow \infty} h_1(t) = +\infty$.

Обозначим $P_0(t, s) = 1$ и

$$P_m(t, s) = \exp \left\{ \int_s^t \int_{h_1(\zeta)}^{h_2(\zeta)} k(\zeta, \tau) P_{m-1}(\zeta, \tau) d\tau d\zeta \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Лемма 2. Если x — положительное при $t \geq t_0$ решение уравнения (4.1), то найдется такое $T \geq t_0$, что при любых t и s таких, что $t \geq s \geq T$, справедлива оценка

$$x(t)P_m(t, s) \leq x(s). \quad (4.2)$$

Доказательство проведем индукцией по $m \in \mathbb{N}$. Пусть x — положительное при $t \geq t_0$ решение уравнения (4.1), тогда существует $t_1 \geq t_0$, такое что $x(t)$ монотонно убывает для всех $t \geq t_1$.

Перепишем уравнение (4.1) в виде

$$\dot{x}(t) + \rho(t)x(t) = \int_{h_1(t)}^{h_2(t)} k(t, \tau)(x(t) - x(\tau)) d\tau, \quad (4.3)$$

и выберем T так, чтобы для всех $t \geq T$ было $h_1(t) \geq t_1$. Тогда $x(t) \leq x(\tau)$ при всех $\tau \in [h_1(t), h_2(t)]$ и по формуле Коши из (4.3) следует, что

$$x(t) \leq x(s)e^{-\int_s^t \rho(\tau) d\tau},$$

то есть

$$P_1(t, s)x(t) \leq x(s),$$

и при $m = 1$ утверждение доказано.

Пусть неравенство (4.2) выполнено для некоторого $m \geq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + x(t) \int_{h_1(t)}^{h_2(t)} k(t, \tau)P_m(t, \tau) d\tau &= \\ &= x(t) \int_{h_1(t)}^{h_2(t)} k(t, \tau)P_m(t, \tau) d\tau - \int_{h_1(t)}^{h_2(t)} k(t, \tau)x(\tau) d\tau = \\ &= \int_{h_1(t)}^{h_2(t)} k(t, \tau)(x(t)P_m(t, \tau) - x(\tau)) d\tau \leq 0. \end{aligned}$$

Еще раз применяя формулу Коши, получаем

$$x(t) \leq x(s)e^{-\int_s^t \int_{h_1(\zeta)}^{h_2(\zeta)} k(\zeta, \tau)P_m(\zeta, \tau) d\tau d\zeta}$$

или, с учетом определения P_{m+1} ,

$$x(t)P_{m+1}(t, s) \leq x(s). \quad \square$$

Теорема 10. Если при некотором $m \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{h_2(t)}^t \int_{h_1(s)}^{h_2(s)} k(s, \tau)P_m(h_2(s), \tau) d\tau ds > 1/e, \quad (4.4)$$

то уравнение (4.1) является осциллирующим.

Доказательство. Обозначим

$$\alpha(s) = \int_{h_1(s)}^{h_2(s)} k(s, \tau) P_m(h_2(s), \tau) d\tau.$$

Не нарушая общности, можно считать, что $\alpha(s) > 0$. Тогда функция

$$\zeta = \varphi(t) = \int_0^t \alpha(s) ds$$

является непрерывной и монотонно возрастающей, то есть имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(\zeta)$. Из (4.4) следует, что $\alpha \notin L_1(\mathbb{R}_+)$, значит, φ^{-1} взаимно-однозначно отображает \mathbb{R}_+ на \mathbb{R}_+ , причем $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \varphi^{-1}(\zeta) = \infty$.

Положим $r(\zeta) = \int_{h_2(\varphi^{-1}(\zeta))}^{\varphi^{-1}(\zeta)} \alpha(s) ds$ и $r = \varliminf_{\zeta \rightarrow \infty} r(\zeta)$.

Пусть неравенство (4.4) выполнено, но уравнение (4.1) имеет неосциллирующее решение x . Тогда существует t_0 , начиная с которого функция x положительна и монотонно убывает.

Построим функцию $v(\zeta) = x(\varphi^{-1}(\zeta))$, которая тоже является положительной и монотонно убывающей начиная с некоторого ζ_0 .

Рассмотрим автономное уравнение

$$(Ly)(\zeta) \equiv y'(\zeta) + y(\zeta - r) = 0, \quad \zeta \geq \zeta_0. \quad (4.5)$$

Легко видеть, что

$$(Lv)(\zeta) \equiv v'(\zeta) + v(\zeta - r) \leq v'(z) + v(\zeta - r(\zeta)).$$

В силу определения функции φ

$$\begin{aligned} \zeta - r(\zeta) &= \int_0^{\varphi^{-1}(\zeta)} \alpha(s) ds - \int_{h_2(\varphi^{-1}(\zeta))}^{\varphi^{-1}(\zeta)} \alpha(s) ds = \int_0^{h_2(\varphi^{-1}(\zeta))} \alpha(s) ds = \\ &= \varphi(h_2(\varphi^{-1}(\zeta))) = \varphi(h_2(t)). \end{aligned}$$

Учитывая очевидное неравенство $\frac{dv}{d\zeta} = \frac{1}{\alpha(t)} \frac{dx}{dt}$ и оценку (4.2), получаем:

$$\begin{aligned} (Lv)(\zeta) &\leq \frac{1}{\alpha(t)}(\dot{x}(t) + \alpha(t)x(h_2(t))) \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha(t)}\left(\dot{x}(t) + \int_{h_1(t)}^{h_2(t)} k(t, s)P_m(h_2(t), s)x(h_2(t)) ds\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha(t)}\left(\dot{x}(t) + \int_{h_1(t)}^{h_2(t)} k(t, s)x(s) ds\right) = 0. \end{aligned}$$

Из леммы о дифференциальном неравенстве следует, что уравнение (4.5) имеет положительное решение. Но уравнение (4.5) — автономное, для него известен критерий неосцилляции: $r \leq 1/e$. По условию теоремы $r > 1/e$. Противоречие. \square

В качестве следствия из теоремы 10 при $m = 0$ получаем известный результат.

Следствие 1 ([19]). *Если*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{h_2(t)}^t \int_{h_1(s)}^{h_2(s)} k(s, \zeta) d\zeta ds > 1/e, \tag{4.6}$$

то уравнение (4.1) является осциллирующим.

Покажем, что постоянная $1/e$ в неравенствах (4.6) и (4.4) является точной, несмотря на то, что автономное уравнение $\dot{x}(t) + ax(t-r) = 0$ не является частным случаем уравнения (4.1).

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{e(e^{\varepsilon(t)} - 1)} \int_{t-1-\varepsilon(t)}^{t-1} x(s) ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{4.7}$$

где ε — положительная измеримая ограниченная функция, причем $\int_0^\infty \varepsilon(t) dt < \infty$.

Так как $\left| \frac{e^{\varepsilon(s)} - 1 - \varepsilon(s)}{e^{\varepsilon(s)} - 1} \right| < \frac{\varepsilon(s)}{2}$, то, с учетом свойств функции ε ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \int_{t-1}^t \frac{e^{\varepsilon(s)} - 1 - \varepsilon(s)}{e^{\varepsilon(s)} - 1} ds \right| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-1}^t \frac{\varepsilon(s)}{2} ds = 0.$$

Из равенства

$$\frac{\varepsilon(s)}{e^{\varepsilon(s)} - 1} = 1 + \frac{\varepsilon(s) + 1 - e^{\varepsilon(s)}}{e^{\varepsilon(s)} - 1}$$

следует

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-1}^t \int_{s-1-\varepsilon(s)}^{s-1} \frac{d\zeta}{e(e^{\varepsilon(s)} - 1)} ds &= \frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-1}^t \frac{\varepsilon(s)}{e^{\varepsilon(s)} - 1} ds = \\ &= \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-1}^t \frac{\varepsilon(s) + 1 - e^{\varepsilon(s)}}{e^{\varepsilon(s)} - 1} ds = \frac{1}{e}, \end{aligned}$$

то есть для уравнения (4.7) неравенство (4.6) обращается в равенство. С другой стороны, несложно убедиться, что функция $y(t) = e^{-t}$ является решением уравнения (4.7):

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{e(e^{\varepsilon(t)} - 1)} \int_{t-1-\varepsilon(t)}^{t-1} y(s) ds = -e^{-t} - \frac{e^{-(t-1)} - e^{-(t-1-\varepsilon(t))}}{e(e^{\varepsilon(t)} - 1)} = 0,$$

то есть уравнение (4.7) имеет неосциллирующее решение.

Приведенный пример показывает, что в неравенстве (4.6) нельзя даже заменить строгое неравенство нестрогим.

Список цитируемых источников

1. *Азбелев, Н. В., Максимов, В. П., Рахматуллина, Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
Azbelev, N. V., Maksimov, V. P., Rakhmatullina, L. F. Vvedeniye v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy [Introduction to the theory of functional-differential equations]. Moscow: Nauka, 1991. (in Russian, with an English summary)
2. *Азбелев, Н. В., Симонов П. М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: изд-во Пермск. ун-та, 2001.
Azbelev, N. V., Simonov, P. M. Stability of Differential Equations with Aftereffect. London: CRC Press, 2002.
3. *Коплатадзе, Р. Г., Чантурия, Т. А.* О колеблющихся и монотонных решениях дифференциальных уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом. Дифференц. уравн. 18, №8, 1463-1465 (1982).
Koplatadze, R. G., Chanturiya, T. A. Oscillating and monotone solutions of first-order differential equations with deviating argument. (Russian) Differentsial'nye Uravneniya 18, No. 8, 1463-1465 (1982). (in Russian)
4. *Мышкис А. Д.* О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом. Матем. сб. 28 (70), №3, 641-658 (1951).
Myshkis, A. D. On solutions of linear homogeneous differential equations of the first order of stable type with a retarded argument. Mat. Sb., N. Ser. 28 (70), 641-658 (1951). (in Russian)

5. *Мышкис, А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.
Myshkis, A. D. Linear differential equations with a retarded argument. Moscow: Nauka, 1972. (in Russian)
6. *Трамов, М. И.* Условия колеблемости решений дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом. Изв. вузов. Матем. №3, 92-96 (1975).
Tramov, M. I. Conditions for the oscillation of the solutions of first order differential equations with retarded argument. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Matematika No. 3 (154), 92-96 (1975). (in Russian)
7. *Чудинов, К. М., Малыгина, В. В.* Об осцилляции линейных дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями. Вестник Пермск. ун-та. Математика. Механика. Информатика. №4, 11-18 (2017).
<http://vestnik.psu.ru/docs/2017/4/3/20174344.pdf>
Chudinov, K. M., Malygina, V. V. On oscillation of linear differential equations with several delays, Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science. No. 4, 11-18 (2017). (in Russian)
8. *Чудинов, К. М.* О точных достаточных условиях осцилляции решений линейных дифференциальных и разностных уравнений первого порядка с последствием. Изв. вузов. Матем. №5, 93-98 (2018).
Chudinov, K. M. On exact sufficient oscillation conditions for solutions of linear differential and difference equations of the first order with aftereffect. Russ. Math. 62, No. 5, 79-84 (2018).
9. *Чудинов, К. М., Малыгина, В. В.* Признаки осцилляции решений дифференциальных уравнений первого порядка с последствием. Изв. вузов. Матем. №7, 72-85 (2019).
Chudinov, K. M. Malygina, V. V. Oscillation Criteria for Solutions of Delay Differential Equations of the First Order Russ. Math. 63, No. 7, 62-74 (2019).
10. *Agarwal R.P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A.* Nonoscillation theory of functional differential equations with applications. New York: Springer, 2012.
11. *Braverman E., Chatzarakis G. E., Stavroulakis I. P.* Iterative oscillation tests for differential equations with several non-monotone arguments. Adv. Difference Equ. 2016:87, 18 p. (2016).
12. *Chatzarakis, G. E., Purnaras, I. K., Stavroulakis, I. P.* Oscillation tests for differential equations with deviating arguments. Adv. Math. Sci. Appl. 27, No. 1, 1-28 (2018).
13. *Chatzarakis, G. E., Jadlovska, I., Li, T.* Oscillations of differential equations with non-monotone deviating arguments. Adv. Difference Equ. 2019:233, 20 p. (2019).
14. *Chudinov, K.* Note on oscillation conditions for first-order delay differential equations. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2016, Paper No. 2, 10 p. (2016).
15. *Fukagai, N., Kusano, T.* Oscillation theory of first order functional-differential equations with deviating arguments. Ann. Mat. Pura Appl. 136, No. 4, 95-117 (1984).
16. *Gyóri, I., Ladas, G.* Oscillation theory of delay differential equations. New York: The Clarendon Press, Oxford University Press, 1991.
17. *Koplatadze, R., Kvinikadze, G.* On the oscillation of solutions of first-order delay differential inequalities and equations. Georgian Math. J. 1, No. 6, 675-685 (1994).

18. *Ladas, G., Lakshmikantham, V., Papadakis, J. S.* Oscillations of higher-order retarded differential equations generated by the retarded argument. In: Delay and functional differential equations and their applications (Proc. Conf., Park City, Utah, 1972) (pp. 219-231) New York: Academic Press, 1972.
19. *Malygina, V., Sabatulina, T.* On oscillation of solutions of differential equations with distributed delay. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2016, Paper №.116., 15 p. (2016).

Получена 01.06.2019

УДК 519.6

О решениях дифференциальных включений с почти выпуклой правой частью

Р. А. Хачатрян

Ереванский государственный университет,
Ереван 0025. E-mail: Khachatryan.rafik@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается вопрос существования решения включения вида $Dx(t) \subseteq a(x(t))$ при начальном условии $x(t_0) = x_0$, где $Dx(t)$ — паратингентная производная функции $x(t)$. Предполагается, что многозначное отображение a непрерывно, а множества $a(x)$ почти выпуклы.

Ключевые слова: многозначное отображение, почти выпуклость, дифференциальное включение.

On solutions of differential inclusions with almost convex right-hand side

R. A. Khachatryan

Yerevan State University, Yerevan 0025.

Abstract. In the paper, the question of the existence of a differential inclusion $\dot{x}(t) \in a(x)$ under the initial condition $x(t_0) = x_0$ is considered. It is assumed that a multivalued mapping a is upper semicontinuous and the sets $a(x)$ are almost convex.

Keywords: set-valued mapping, almost convex mapping, differential inclusion.

MSC 2010: 49-XX

Введение

Рассмотрим вопрос существования решения дифференциального включения

$$\frac{dx}{dt} \in a(x) \quad (1)$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$. В зависимости от свойств многозначного отображения (непрерывность в том или ином смысле) решения дифференциального включения обладают различными дифференциальными свойствами.

Пусть вектор-функция $x(t)$ определена на интервале или отрезке J , $t_0 \in J$ и $x(t_0) = x_0$. Она называется *классическим решением* дифференциального включения (1), если всюду на J имеет непрерывную производную и удовлетворяет включению (1).

Вектор-функция $x(t)$ называется *решением Каратеодори* дифференциального включения (1) на интервале J , если на интервале J $x(t)$ абсолютно непрерывна и почти всюду удовлетворяет включению (1).

Решение включения (1) с выпуклозначной правой частью при предположении полунепрерывности сверху многозначного отображения впервые было рассмотрено Зарембой (S. K. Zaremba) в статье [14]. *Паратингентной производной* $Dx(t_0)$ функции $x(t)$ в точке t_0 называется совокупность всех пределов

$$\lim_{\substack{t_n \rightarrow t_0 \\ s_n \rightarrow t_0}} \frac{x(t_n) - x(s_n)}{t_n - s_n}, \quad s_n \neq t_n.$$

Заремба определял решение как непрерывную функцию, паратингентная производная $Dx(t)$ которой всюду удовлетворяет включению

$$Dx(t) \subseteq a(x(t)). \quad (2)$$

Верна следующая теорема.

Теорема 1 [14]. Пусть многозначное отображение $a : R^n \rightarrow 2^{R^n}$ с выпуклыми замкнутыми значениями полунепрерывно сверху и существует число $C > 0$ такое, что $\|y\| \leq C$, $\forall y \in a(x)$, $x \in R^n$. Тогда существует липшицева функция $x(t)$ с начальным условием $x(0) = x_0$, паратингентная производная $Dx(t)$ которой всюду удовлетворяет включению

$$Dx(t) \subseteq a(x(t)) \quad t \in [0, 1].$$

Дифференциальное включение с обобщенными производными (контингентными производными) было рассмотрено Важевским (T. Ważewski) [13]. Доказано, что если для любого x множество $a(x)$ — выпуклый компакт и отображение a непрерывно, то включение (2) равносильно включению в контингентных и дифференциальному включению (1).

Для дифференциальных включений с невыпуклой правой частью первая теорема существования классического локального решения была доказана А. Ф. Филипповым, при условии, что правая часть удовлетворяет условию Липшица [2]. Затем им же была доказана теорема о существовании решения Каратеодори для уравнения с непрерывной правой частью [3]. В настоящее время имеются достаточно содержательные и подробные монографии и статьи, целиком или в значительной степени излагающие проблемы существования решений (классических или в смысле Каратеодори) дифференциальных включений (1). К числу таких работ можно отнести: Ж. П. Обен (J. P. Aubin) [10], А. А. Толстоногов [6], Е. С. Половинкин [5], А. Д. Иоффе [12], В. И. Благадастких [1], Б. Д. Гельман [4].

Однако, в литературе мало работ, посвященных дифференциальным включениям с обобщенными производными.

В настоящей статье рассматривается вопрос о существовании функций $x(t)$, $t \in [0, 1]$, с начальным условием $x(0) = x_0$, паратингентная производная которой

удовлетворяет всюду включению (2). Предполагается, что множества $a(x)$ являются **почти выпуклыми** множествами, а отображение a **непрерывно**. Этот результат аналогичен теореме Зарембы при ослабленных условиях выпуклости множеств $a(x)$. Понятие почти выпуклости было введено в работах [8, 7]. Потребность изучения таких множеств возникла в теории дифференциальных игр [9].

Введем обозначения: $B_r(a)$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке a , $M \subseteq R^n$ — замкнутое множество.

Определение 1 [7]. Множество $M \subseteq R^n$ удовлетворяет условию *почти выпуклости* с константой $\theta \geq 0$, если для любых

$$x_j \in M, \lambda_j \geq 0, j \in J,$$

где J — конечное множество индексов, таких что $\sum_{j \in J} \lambda_j = 1$, выполняется включение

$$\sum_{j \in J} \lambda_j x_j \in M + \theta r^2 B_1(0),$$

где $r = \max_{i, j \in J} \|x_i - x_j\|$.

Заметим, что если $\theta = 0$, то M — выпуклое множество. Класс почти выпуклых множеств достаточно широк.

Пример 1. Множество $M = \{a, b\}$, состоящее из двух точек, почти выпукло. Действительно, имеем

$$\text{conv}\{a, b\} \subseteq M + \frac{1}{2\|a - b\|} \|a - b\|^2 B_1(0),$$

т. е. в этом случае константу почти выпуклости θ можно выбрать равной $1/(2\|a - b\|)$.

В дальнейшем мы используем следующее свойство почти выпуклых множеств.

Предложение 1 [8, Теорема 3, Следствие 3]. *Если M — почти выпуклое множество с константой θ , то для любого $\epsilon < 1/(16\theta)$ множество $M + B_\epsilon(0)$ почти выпукло с константой 4θ .*

Напомним теперь некоторые определения теории многозначных отображений. Пусть 2^{R^m} есть совокупность всех непустых подмножеств из R^m .

Отображение $a: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ называется *полунепрерывным снизу* в точке $x_0 \in R^n$, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$a(x_0) \subseteq a(x) + B_\epsilon(0), \forall x \in B_\delta(0).$$

Отображение $a: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ называется *полунепрерывным сверху* в точке $x_0 \in R^n$, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$a(x) \subseteq a(x_0) + B_\epsilon(0), \forall x \in B_\delta(0).$$

Если отображение полунепрерывно снизу и сверху в точке x_0 , то оно называется непрерывным в этой точке (см. [4, Определение 1.2.43, стр. 38]: определение непрерывности в смысле Хаусдорфа).

Верна следующая теорема, которая обобщает результат Зарембы на невыпуклые случаи.

Теорема 2. Пусть

- 1) многозначное отображение a с компактными значениями непрерывно;
- 2) множества $a(x)$ почти выпуклы с постоянной $\theta \geq 0$;
- 3) существует константа $C > 0$ такая, что

$$\|a(x)\| \leq C(1 + \|x\|), \quad \forall x \in R^n.$$

Тогда существует липшицевая функция $x(t)$, паратингентная производная $Dx(t)$ которой всюду удовлетворяет включению

$$Dx(t) \subseteq a(x(t)), \quad t \in [0, 1]$$

с начальным условием $x(0) = x_0$.

Доказательство. Доказательство аналогично теореме Зарембы. Отметим ключевые моменты доказательства, чтобы показать отличие от теоремы Зарембы.

Разобьем отрезок на m равных частей и положим $\delta = 2^{-m}$. Запишем вместо соотношения (1) разностные включения

$$x_\delta(t + \delta) \in x_\delta(t) + \delta a_\delta(t), \quad t = 0, \delta, 2\delta, \dots, (2^m - 1)\delta. \quad (3)$$

Решение $x_\delta(t)$ разностного включения (3) построим шаг за шагом следующим образом:

Положим $x_\delta(0) = x_0$. В первом шаге в качестве $x_\delta(\delta)$ выберем произвольный элемент множества $x_\delta(0) + \delta a(x_\delta(0))$. Во втором шаге в качестве $x_\delta(2\delta)$ выберем такой элемент множества $x_\delta(\delta) + \delta a(x_\delta(\delta))$, что

$$\left\| \frac{x_\delta(\delta) - x_\delta(0)}{\delta} - \frac{x_\delta(2\delta) - x_\delta(\delta)}{\delta} \right\| = \min_{u \in x_\delta(\delta) + a(x_\delta(\delta))} \left\| \frac{x_\delta(\delta) - x_\delta(0)}{\delta} - \frac{u - x_\delta(\delta)}{\delta} \right\| \quad (4)$$

Аналогично, построим $x_\delta(3\delta), \dots, x_\delta(1)$.

Как и в теореме Зарембы [14] (выпуклый случай) здесь можно показать, что существует число $L > 0$ такое, что

$$\|x_\delta(t + \delta) - x_\delta(t)\| \leq \delta L \quad t = 0, \delta, \dots$$

Доопределим $x_\delta(t)$ для всех $[0, 1]$, построив линейную интерполяцию. Согласно теореме Арцелы из последовательности $\{x_\delta(t)\}$ функций можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Можно доказать, что предельная $x_0(t)$ функция удовлетворяет условию Липшица с константой L . Покажем, что паратингентная производная $Dx(t)$ удовлетворяет включению всюду на отрезке $[0, 1]$. Пусть $t_0 \in (0, 1)$.

Так как отображение a полунепрерывно сверху, то для любого $\epsilon > 0$ существуют числа $\gamma > 0$, $\delta_0 > 0$ такие, что

$$a(x_\delta(t)) \subseteq a(x_0(t_0)) + \epsilon B_1(0),$$

если $|t - t_0| < \gamma$, $\delta < \delta_0$. Пусть t_1, T_2 — фиксированные точки, имеющие вид $t_1 = k_1\delta_1$, $t_2 = k_2\delta_1$, $\delta_1 < \delta$, причем

$$t_1 < t_0 < t_2, |t_1 - t_2| < \gamma.$$

Так как $\delta = 2^{-m}$, то при $\delta < \delta_1$ точки t_1, t_2 будут входить в разбиение отрезка $[0, 1]$. Имеем

$$\frac{x_\delta(t_2) - x_\delta(t_1)}{t_2 - t_1} = \sum_{t=t_1, t_1+\delta, \dots, t_2-\delta} \frac{\delta}{t_2 - t_1} \frac{x_\delta(t + \delta) - x_\delta(t)}{\delta}.$$

Для достаточно малых δ получим

$$(y_t \equiv \frac{x_\delta(t + \delta) - x_\delta(t)}{\delta} \in a(x_0(t_0)) + \epsilon B_1(0)) \forall t = t_1, t_1 + \delta, \dots, t_2 - \delta.$$

Так как множество $a(x_0(t_0))$ почти выпукло с константой θ , то по предложению 1 при $\epsilon < 1/(16\theta)$ множество $a(x_0(t_0)) + \epsilon B_1(0)$ почти выпукло с константой 4θ . Поэтому согласно определению почти выпуклости имеем

$$\frac{x_\delta(t_2) - x_\delta(t_1)}{t_2 - t_1} \in a(x_0(t_0)) + \epsilon B_1(0) + 4\theta \max_{t,p} \|y_t - y_p\|^2. \quad (5)$$

Из соотношения получим, что для произвольных $t, p = t_1, t_1 + \delta, \dots, t_2 - \delta$ имеет место неравенство

$$\|y_t - y_p\| \leq (t_2 - t_1)\epsilon.$$

Поэтому, если $\gamma < \epsilon$, то

$$\|y_t - y_p\|^2 \leq (t_2 - t_1)^2 \epsilon^2 < \epsilon^4. \quad (6)$$

Имеем

$$\frac{x_0(t_2) - x_0(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{x_0(t_2) - x_\delta(t_2)}{t_2 - t_1} + \frac{x_\delta(t_2) - x_\delta(t_1)}{t_2 - t_1} + \frac{x_\delta(t_1) - x_0(t_1)}{t_2 - t_1}. \quad (7)$$

Выберем теперь число δ настолько малым, чтобы первое и третье слагаемое в (7) были по модулю меньше ϵ . Учитывая соотношения (5)-(7), получим

$$\frac{x_0(t_2) - x_0(t_1)}{t_2 - t_1} \in a(x_0(t_0)) + 3\epsilon B_1(0) + 4\theta\epsilon^4 B_1(0).$$

Отсюда, поскольку ϵ произвольно, получим искомое включение

$$Dx_0(t_0) \subseteq a(x_0(t_0)).$$

□

Замечание 1. Если ослабить условие непрерывности отображения a , то утверждение теоремы 2 неверно. Действительно, пусть

$$x \in R^1, a(0) = \{-1, 1\}, a(x) = -\text{sign } x.$$

Тогда отображение a полунепрерывно сверху, множества $a(x)$ почти выпуклы (пример 1), но решение с начальным условием не существует при $t > 0$ (см. пример [1, стр. 243]).

Замечание 2. Отметим, что в условиях теоремы 2 включение 2 в паратингенциях не равносильно дифференциальному включению (1). Действительно, пусть $a(x) = [-1, 1] \cup 2, \forall x \in R^1$. Отображение a непрерывно и для каждого x множество $a(x)$ почти выпукло с константой $\theta = 1/2$. Рассмотрим дифференциальное включение (1) с начальным условием $x(0) = 1$ на отрезке $[0, 3]$. Липшицева функция

$$x(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t \in [0, 1], \\ 2 - t, & \text{если } t \in [1, 2], \\ 2t - 4 & \text{если } t \in [2, 3] \end{cases}$$

почти всюду на отрезке $[0, 3]$ удовлетворяет дифференциальному включению

$$\frac{d}{dx}x(t) \in a(x).$$

Однако включение (2) всюду не выполняется, поскольку, например $1.5 \in Dx(2)$, и поэтому $Dx(2) \not\subseteq a(x(2))$.

Решением включения (2) в паратингенциях будет, например, функция

$$y(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t \in [0, 1], \\ 2 - t, & \text{если } t \in [1, 3], \end{cases}$$

Действительно,

$$Dy(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [0, 1), \\ -1, & \text{если } t \in (1, 3], \\ [-1, 1], & \text{если } t = 1. \end{cases}$$

и поэтому всюду на отрезке $[0, 3]$ имеет место включение $Dy(t) \subseteq a(y(t))$, $y(0) = 1$.

Список цитируемых источников

1. *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальные управления. Тр. МИАН СССР 169, 194-252 (1985).
Blagodatskikh V. I., Filippov A. F. Differential inclusions and optimal controls. Tr. MIAN USSR, 169, 194-252 (1985). (in Russian)
2. *Филиппов А. Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью. Вестник Моск. ун-та, Матем., механ., №3, 16-26 (1967).
Filippov A. F. Classical solutions of differential equations with multivalued right-hand side., Vestn. Mosk. Univ., Ser. matem., mekhan., No.3, 16-26 (1967). (in Russian)

3. *Филлипов А. Ф.* О существовании решений многозначных дифференциальных уравнений. Математические заметки 10, №19, 307-319 (1971).
Filippov A. F. Über die Existenz von Lösungen mehrdeutiger Differentialgleichungen. Mat. Zametki 10, 307-319 (1971). (in Russian)
4. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений, Москва: КомКнига, 2005.
Borisovich Yu. G., Gelman B. D., Myshkis A.D., Obukhov V. V. Introduction to the theory of multivalued maps and differential inclusions, Moscow: Komkniga, 2005. (in Russian)
5. *Половинкин Е. С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. Москва: Физматлит, 2014.
Polovinkin E. S. Multivalued analysis and differential inclusions. Moscow: Fizmatlit, 2014. (in Russian)
6. *Толстоногов А. А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве, Новосибирск: Наука, 1987.
Tolstonogov A. A. Differential Inclusions in Banach Space. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
7. *Остапенко В. В.* Приближенное решение задач сближения-уклонения, Препринт-82-16, Институт Кибернетики АН УССР, Киев, 1982.
Ostapenko V. V. Approximate solution of convergence-evasion problems, Preprint-82-16, Institute of Cybernetics of the USSR Academy of Sciences, Kiev, 1982. (in Russian)
8. *Остапенко В. В.* Об одном условии почти выпуклости. Украинский мат. журнал 35, №2, 169-172 (1983).
Ostapenko V. V., On one condition of almost convexity. Ukrainian mat. journal 35, No.2, 169-172 (1983). (in Russian)
9. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры преследования, Мат. сб., Новая сер. 112, №3, 307-330 (1980).
Pontryagin L. S. Linear differential pursuit games. Mat. sat., New ser. 112, No. 3, 307-330 (1980). (in Russian)
10. *Aubin J. P., Cellina A.* Differential inclusions. N.-Y., Berlin: Springer, 1984, 342p.
11. *Davi J. L.* Properties of the solutions set a generalised differential equation. Bull. Austral. Math. Soc. 6, No.3, 379-398 (1972).
12. *Ioffe A. D.* Variational Analysis of Regular Mappings, Theory and Applications. Cham: Springer, 2017, 476 p.
13. *Ważewski, T.* Sur une condition équivalente à l'équation au contingent. Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys. 9, 865-867 (1961).
14. *Zaremba S. K.* Sur une extension de la notion d'équation différentielle. C. R. Acad. Sci., Paris 199, 545-548 (1934).

Получена 04.05.2019

УДК 531.36

Эффект трансгрессии в задаче о движении почти голономного маятника¹

А. С. Кулешов, И. И. Улятовская

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Москва 119991. E-mail: kuleshov@mech.math.msu.su, ira4599@mail.ru

Аннотация. В 1986 году Я.В. Татаринов заложил основы теории слабо неголономных систем. Рассматриваются механические системы с неголономными связями, содержащими малый параметр. Предполагается, во-первых, что при нулевом значении параметра связи такой системы интегрируемы, то есть получается семейство голономных систем, зависящее от нескольких произвольных констант интегрирования. Во-вторых, эти голономные системы должны быть вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами.

При ненулевом значении малого параметра поведение таких систем можно рассматривать при помощи асимптотических методов, представляя его как трансгрессию: сочетание движения слегка модифицированной голономной системы с медленным изменением былых констант. В данной работе описан эффект трансгрессии в задаче о движении почти голономного маятника.

Ключевые слова: слабо неголономные системы; почти голономный маятник; трансгрессия.

The Transgression Effect in the Problem of Motion of an Almost Holonomic Pendulum

A. S. Kuleshov, I. I. Ulyatovskaya

M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991.

Abstract. In 1986 Ya. V. Tatarinov presented the basis of the theory of weakly nonholonomic systems. Mechanical systems with nonholonomic constraints depending on a small parameter are considered. It is assumed that when the value of this parameter is zero, the constraints of such a system become integrable, i.e. in this case we have a family of holonomic systems depending on several arbitrary integration constants. We will assume that these holonomic systems are integrable hamiltonian systems. When the small parameter is not zero, the methods of perturbation theory can be used to represent, to a first approximation, the motion of the system with nonzero parameter values, as a combination of the motion of a slightly modified holonomic system with slowly varying previous integration constants (transgression effect). In this paper we describe the transgression effect in the problem of motion of an almost holonomic pendulum.

Keywords: weakly nonholonomic systems, almost holonomic pendulum, transgression.

MSC 2010: 70F25; 70K60; 70K70

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант No. 19-01-00140.

1. Введение

В 1986 году Я. В. Татаринев в докладе [1] ввёл понятие “слабо неголономные системы”. Дальнейшее развитие теория слабо неголономных систем получила в работах [2]-[3].

Пусть уравнения связей некоторой механической системы имеют вид:

$$\sum_{i=1}^{n+m} a_{si}(\mathbf{x}, \varepsilon) \dot{x}_i = 0, \quad s = 1, \dots, m, \quad \text{rank}(a_{si}) = n, \quad (1.1)$$

где ε — малый параметр. Предположим, что при $\varepsilon = 0$ эти уравнения интегрируются:

$$\sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^{n+m} k_{rs}(\mathbf{x}) a_{si}(\mathbf{x}, 0) \dot{x}_i = \frac{d}{dt} \varphi_r(\mathbf{x}), \quad \det k_{rs} \neq 0, \quad r = 1, \dots, m.$$

Тогда при $\varepsilon \neq 0$ связи будем называть “слабо неголономными”.

Выберем такие координаты q_1, \dots, q_{n+m} что

$$q_{n+\mu} = \varphi_\mu(\mathbf{x}), \quad \mu = 1, \dots, m.$$

Тогда при $\varepsilon = 0$ уравнения связей (1.1) имеют вид $\dot{q}_{n+\mu} = 0$, $\mu = 1, \dots, m$, а при $\varepsilon \neq 0$ — вид:

$$\dot{q}_{n+\mu} = \varepsilon \sum_{\lambda=1}^n c_{s\lambda}(\mathbf{q}, \varepsilon) \dot{q}_\lambda. \quad (1.2)$$

Будем считать, что задана также функция Лагранжа $L = L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \varepsilon)$. Тогда при $\varepsilon = 0$ получаем семейство гамильтоновых систем с параметрами $R_{n+\mu} \equiv q_{n+\mu}$, возникающими после интегрирования связей (1.2). Функция Гамильтона $H_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{R})$ стандартным образом получается из функции Лагранжа:

$$\begin{aligned} L_0(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, q_1, \dots, q_n, R_{n+1}, \dots, R_{n+m}) = \\ = L(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, 0, \dots, 0, q_1, \dots, q_n, R_{n+1}, \dots, R_{n+m}, 0) \end{aligned}$$

При $\varepsilon \neq 0$ величины $R_{n+\mu}$ могут начать эволюционировать. Этот эффект будем называть трансгрессией.

Ниже эффект трансгрессии описан в задаче о движении почти голономного маятника.

2. Постановка задачи. Основной результат

Пусть в вертикальной плоскости Oxy движется невесомая пластинка, несущая два Т-образно расположенных лезвия, из которых поперечное медленно смещается вдоль себя; на линии продольного лезвия к пластинке прикреплен точечная масса M . Введем неподвижную систему координат $Oxyz$, а также подвижную систему $M\xi\eta\zeta$, жестко связанную с пластинкой. Пусть начало подвижной системы

находится в точке M (где расположена точечная масса), направление оси $M\xi$ совпадает с направлением поперечного лезвия A , а направление оси $M\eta$ совпадает с направлением продольного лезвия B . Ось $M\zeta$ сонаправлена с осью Oz . Тогда радиусы – векторы точек A и B в системе координат $M\xi\eta\zeta$ имеют вид:

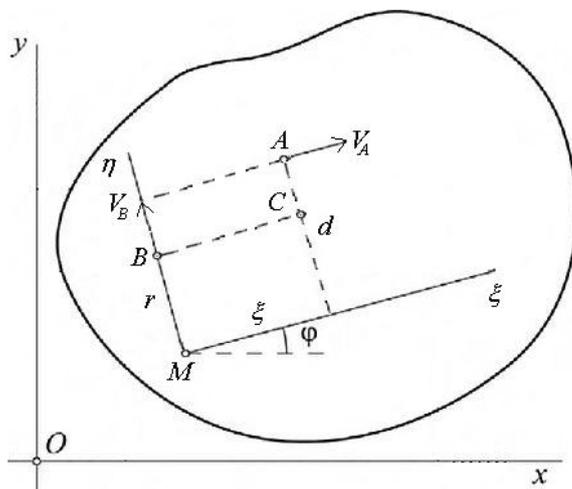


Рис. 1. Почти голономный маятник

$$\mathbf{r}_A = \overrightarrow{MA} = \xi \mathbf{e}_\xi + d \mathbf{e}_\eta, \quad d = \text{const}, \quad \mathbf{r}_B = \overrightarrow{MB} = r \mathbf{e}_\eta, \quad r = \text{const}.$$

Будем считать, что переменная ξ меняется по закону $\xi = \xi_0 + \varepsilon vt$, где ε – малый параметр. Обозначим через C мгновенный центр скоростей пластинки. В системе $M\xi\eta\zeta$ радиус – вектор \overrightarrow{MC} точки C имеет вид:

$$\mathbf{r}_C = \overrightarrow{MC} = \xi \mathbf{e}_\xi + r \mathbf{e}_\eta = (\xi_0 + \varepsilon vt) \mathbf{e}_\xi + r \mathbf{e}_\eta.$$

В качестве переменных, определяющих положение данной системы, выберем координаты x и y точки C относительно неподвижной системы координат $Oxyz$ и угол φ поворота пластинки (угол между осями Ox и $M\xi$). Тогда уравнения неголономных связей, наложенных на систему, будут иметь вид:

$$\dot{x} = \dot{\xi} \cos \varphi = \varepsilon v \cos \varphi, \quad \dot{y} = \dot{\xi} \sin \varphi = \varepsilon v \sin \varphi.$$

Эти уравнения можно переписать следующим образом:

$$x' = \frac{dx}{d\xi} = \cos \varphi, \quad y' = \frac{dy}{d\xi} = \sin \varphi \quad (2.1)$$

(здесь переменная ξ играет роль медленного времени). Предположим, что на точку M действует сила $\mathbf{F} = -Mg \mathbf{e}_y$.

Динамические уравнения движения данной системы запишем в форме уравнений Аппеля. Для этого найдем сначала энергию ускорений данной системы. Она определяется формулой

$$S = \frac{M}{2} \mathbf{a}_M^2,$$

где \mathbf{a}_M — ускорение точки M . В явном виде данное выражение записывается следующим образом:

$$S = \frac{M}{2} \left((\xi^2 + r^2) (\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4) + \xi^2 \dot{\varphi}^2 + 2\xi \dot{\xi} \dot{\varphi} \ddot{\varphi} - 2r \dot{\xi} \dot{\varphi}^3 \right).$$

Потенциальная энергия системы имеет вид:

$$V = Mg(y - \xi \sin \varphi - r \cos \varphi).$$

Уравнение, описывающее изменение угла φ , записывается следующим образом:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\varphi}} = - \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

или, в явном виде,

$$(\xi^2 + r^2) \ddot{\varphi} + \xi \dot{\xi} \dot{\varphi} + gr \sin \varphi - g\xi \cos \varphi = 0. \quad (2.2)$$

Сделаем теперь в уравнении (2.2) замену переменных по формуле

$$\varphi = \psi + \arctan \frac{\xi}{r}$$

и отбросим в полученном уравнении члены порядка ε^2 и выше. В результате получим

$$(\xi^2 + r^2) \ddot{\psi} + \xi \dot{\xi} \dot{\psi} + g\sqrt{\xi^2 + r^2} \sin \psi = 0,$$

то есть

$$\ddot{\psi} + \frac{\varepsilon v \xi}{\xi^2 + r^2} \dot{\psi} + \frac{g}{\sqrt{\xi^2 + r^2}} \sin \psi = 0. \quad (2.3)$$

Отсюда следует, что невозмущенная система (соответствующая значению параметра $\varepsilon = 0$) может интерпретироваться как математический маятник длины

$$l = \sqrt{\xi_0^2 + r^2}.$$

При этом медленными переменными в задаче являются ξ , x , y , а также полная механическая энергия h невозмущенной системы, которая определяется формулой

$$h = 1 - \cos \psi + \frac{\dot{\psi}^2 \sqrt{\xi^2 + r^2}}{2g} \quad (2.4)$$

и для которой в соответствии с (2.3) имеет место уравнение

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\xi \dot{\xi}}{(\xi^2 + r^2)} (h - 1 + \cos \psi)$$

или, аналогично (2.1),

$$h' = \frac{dh}{d\xi} = -\frac{\xi}{(\xi^2 + r^2)} (h - 1 + \cos \psi). \quad (2.5)$$

Для качественного описания движения данной системы осредним уравнения (2.1), (2.5) для x' , y' и h' по периоду невозмущенного колебания $\psi(t)$, $\xi = \text{const}$ с энергией (2.4). При этой процедуре

$$\langle \sin \psi \rangle = 0, \quad \langle \cos \psi \rangle = f(h) = \frac{2E\left(\sqrt{\frac{h}{2}}\right)}{K\left(\sqrt{\frac{h}{2}}\right)} - 1,$$

где K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Следовательно, осредненные уравнения (2.1), (2.5) имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &= \frac{r}{\sqrt{\xi^2 + r^2}} f(h), & \frac{dy}{d\xi} &= \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + r^2}} f(h), \\ \frac{dh}{d\xi} &= -\frac{\xi}{(\xi^2 + r^2)} (h + f(h) - 1). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Функция $E(k)/K(k)$ с ростом $k \in [0, 1)$ монотонно убывает от 1 до 0. При этом модуль ее производной неограниченно растет, но не быстрее, чем $k/\sqrt{1-k^2}$.

Следовательно, при росте $h \in [0, 2)$ функция $f(h)$ изменяется от +1 до -1, но ее производная неограничена и оценивается неравенством

$$|f'(h)| \leq \frac{1}{2\sqrt{4-2h}}.$$

Равномерной близости решений осредненной системы к решениям точной системы нет. Однако при значениях h , близких к нулю, решения точной системы будут близки к решениям осредненной системы. Раскладывая правые части уравнений (2.6) в ряд по h , из первых двух уравнений получаем:

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{r}{\sqrt{\xi^2 + r^2}}, \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + r^2}}. \quad (2.7)$$

Интегрирование системы (2.7) дает следующие выражения для $x(\xi)$ и $y(\xi)$:

$$x(\xi) = r \ln \left(\frac{\sqrt{\xi^2 + r^2} + \xi}{r} \right), \quad y(\xi) = \sqrt{\xi^2 + r^2}.$$

Отсюда находим зависимость между x и y :

$$y = r \cosh \frac{x}{r}. \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) представляет собой уравнение цепной линии.

Таким образом, движение почти голономного маятника можно представить себе как колебания около медленно поворачивающегося направления закрепленного лезвия; мгновенный центр скоростей смещается по цепной линии (трансгрессия), а энергия качания убывает.

Список цитируемых источников

1. *Татаринов, Я. В.* Слабо неголономные системы. В кн. Г.К. Михайлов, В.А. Полянский (Ред.). Шестой Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Ташкент, 24-30 сентября 1986 года. Аннотации докладов (стр. 592). Ташкент: ФАН, 1986.

Tatarinov Ya. V. Weakly nonholonomic systems. In G.K. Mikhailov, V.A. Polyansky (Eds.). Proceedings of the Sixth All-Union Conference on Theoretical and Applied Mechanics. Tashkent, September 24-30, 1986 (pp. 592). Tashkent: FAN, 1986. (in Russian)

2. *Татаринов, Я. В.* Слабо неголономное представление задачи о качении твердого тела и возможности усреднения по фазовым торам. Механика твердого тела. №1, 538–545 (1988).

Tatarinov, Ya. V. Weakly nonholonomic representation of the problem of the rolling of a solid and the possibility of averaging over phase tori. Mechanics of Solids, 23, No.1, 25–33 (1988).

3. *Татаринов, Я. В.* Следствия неинтегрируемого возмущения интегрируемых связей: нелинейные эффекты вблизи многообразия равновесий. Прикладная математика и механика. 56, Вып. 4, 604–614 (1992)

Tatarinov, Ya. V. Consequences of nonintegrable perturbations of integrable constraints: nonlinear effect of motion near the equilibrium. J. Appl. Math. Mech. 56, 507–517 (1992).

Получена 21.10.2019

УДК 517.968

Интегральные и интегро-дифференциальные уравнения типа криволинейной свертки

А. И. Песчанский

Севастопольский государственный университет,
Севастополь 299053. E-mail: peschansky_sntu@mail.ru

Аннотация. Приводится обзор результатов исследований интегральных и интегро-дифференциальных уравнений типа криволинейной свертки, которая является обобщением обычной свертки в случае замены прямой или окружности на криволинейный контур в комплексной плоскости. На замкнутом контуре ядра криволинейных сверток зависят от отношения аргументов, а в случае бесконечного контура — от разности аргументов. В обзор включены следующие классы уравнений: уравнения с сингулярными свертками, которые являются полными сингулярными уравнениями с ядром Коши и вполне непрерывными операторами специального вида; уравнение с сингулярными свертками и сдвигом; интегральные и интегро-дифференциальные уравнения с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах.

Ключевые слова: криволинейная свертка, интегральное уравнение, решение в квадратурах, краевая задача Римана, гипергеометрическая функция Гаусса.

Integral and Integro-differential Equations of Curvilinear Convolution Type

A. I. Peschansky

Sevastopol State University, Sevastopol 299053.

Abstract. A review of the results of studies of integral and integro-differential equations of curvilinear convolution type, which is a generalization of the customary convolution in the case of replacing a circle for a curvilinear contour in the complex plane. On the circumference, the kernels of curvilinear convolutions depend on the ratio of the arguments, and in the case of infinite circumference — on the difference of arguments. The following classes of equations are included in the review: equations with singular convolutions, which are complete singular equations with Cauchy kernel and completely continuous operators of a special kind; equation with singular convolutions and a shift; integral and integro-differential equations with hypergeometric Gaussian function in kernels.

Keywords: curvilinear convolution, integral equation, solution in quadratures, Riemann boundary value problem, Gaussian hypergeometric function.

MSC 2010: 45E10

Введение

Профессор Юрий Иосифович Черский (1929-2015) проявлял большой интерес к аналитическим методам решения интегральных уравнений. Им была предложена обширная программа исследований в этом направлении, одним из пунктов которой является изучение интегральных уравнений типа свертки на криволинейных контурах в комплексной плоскости, заменяющих прямую или окружность [1]. Строгое определение криволинейной свертки с использованием аппарата обобщенных функций предложено Ю. И. Черским [2].

Пусть Γ — простая гладкая замкнутая ориентированная кривая на комплексной плоскости, которая лежит в кольце $T = \{z \mid r < |z| < R\}$ и разбивает плоскость на две области: G^+ ($0 \in G^+$) и G^- ($\infty \in G^-$). Оператором криволинейной свертки в пространстве $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, называется оператор вида

$$(Kf)(t) = (\mathbf{L} k_n \mathbf{L}^{-1} f)(t),$$

где \mathbf{L} — преобразование Лорана, которое вводится с помощью обобщенных функций, а последовательность комплексных чисел $\{k_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ — мультипликатор этого преобразования [2]. Для оператора криволинейной свертки K справедливо представление

$$(Kf)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} K^+ \left(\frac{t}{\tau} \right) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} K^- \left(\frac{t}{\tau} \right) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau},$$

где $K^{\pm}(t/\tau)$ понимаются как граничные значения соответственно функций $K^{\pm}(z/\tau)$ при $z \rightarrow t \in \Gamma$, аналитических соответственно в областях G^+ и G^- .

Если мультипликатор $\{k_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ преобразования Лорана удовлетворяет условию $|k_n| \geq c > 0$, $c = \text{const}$, $|n| \geq n_0 \geq 0$, то криволинейная свертка называется сингулярной. В частности, оператор $(S_{\Gamma} f)(t) = (\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} (\tau - t)^{-1} f(\tau) d\tau$ сингулярного интегрирования с ядром Коши является сингулярной криволинейной сверткой, соответствующей мультипликатору вида $k_n = \text{sgn}(n + 1/2)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Сделаем краткий обзор изученных уравнений с криволинейными свертками.

1. Интегральные и интегро-дифференциальные уравнения на замкнутой кривой

1. Уравнение с сингулярными криволинейными свертками на замкнутом контуре

$$\begin{aligned} & [a(t)c(t) + b(t)d(t)] f(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{a(t)c(\tau) - b(t)d(\tau)}{\tau - t} f(\tau) d\tau + \\ & + \lambda \frac{a(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} K^+ \left(\frac{t}{\tau} \right) c(\tau) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau} + \lambda \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} K^- \left(\frac{t}{\tau} \right) d(\tau) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = g(t), \quad t \in \Gamma, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ — заданные непрерывные, не обращающиеся в нуль на Γ функции; $\lambda \in C$; $\sum_{-\infty}^{\infty} k_n z^n = K^+(z) + K^-(z) = K(z)$ — аналитическая в кольце $r/R < |z| < R/r$ функция. Уравнение (1) является полным сингулярным уравнением с вполне непрерывным оператором специального вида и обобщает уравнение, исследованное Ю. И. Черским [3]. Решение (1) в замкнутой форме получается в результате сведения этого уравнения к двум задачам Римана и обращению оператора сингулярной криволинейной свертки

$$\phi(t) + \frac{\lambda}{2\pi i} \int_{\Gamma} K\left(\frac{t}{\tau}\right) \phi(\tau) \frac{d\tau}{\tau}.$$

2. *Интегральное уравнение с сингулярными свертками и сдвигом на замкнутом контуре*

$$\begin{aligned} & [a(t)c(t) + b(t)d(t)] f(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{a(t)c(\tau)\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{b(t)d(\tau)}{\tau - t} \right] f(\tau) d\tau + \\ & + a(t) \int_{\Gamma} K^+ \left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)} \right) c(\tau) f(\tau) \frac{d\alpha(\tau)}{\alpha(\tau)} + b(t) \int_{\Gamma} K^- \left(\frac{t}{\tau} \right) d(\tau) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = g(t), \quad t \in \Gamma, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где заданные функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $d(t)$ удовлетворяют условию Гельдера и не обращаются в нуль на Γ функции; $\alpha(t)$ — заданная функция сдвига контура Γ на аналогично расположенный в кольце T контур γ . Заданные функции $K^+(z)$ и $K^-(z)$ аналитические соответственно в областях $|z| < R/r$ и $|z| > r/R$, причем коэффициенты разложения этих функций в ряды Тейлора соответственно в окрестности $z = 0$ и $z = \infty$ удовлетворяют условиям

$$|k_n(R/r)^n| \leq \text{const}, \quad n \geq 0; \quad |k_n(r/R)^n| \leq \text{const}, \quad n < 0.$$

Решение уравнения (2) в квадратурах удается в результате представления оператора в левой части уравнения в виде композиции трех нетеровых операторов, один из которых является оператором сингулярной криволинейной свертки [2].

3. *Интегральное уравнение с криволинейными свертками и гипергеометрической функцией в ядре* [4]

$$\frac{a(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} F\left(\alpha, 1; \gamma; \frac{t}{\tau}\right) c(\tau) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau} + \frac{b(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} F\left(\alpha, 1; \gamma; \frac{\tau}{t}\right) d(\tau) f(\tau) \frac{d\tau}{t} = g(t), \quad t \in \Gamma, \quad (1.3)$$

где $\gamma \geq \alpha$; $\alpha, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$. Под $F(\alpha, 1; \gamma; t/\tau)$ ($t, \tau \in \Gamma$) понимается граничное значение на Γ ветви гипергеометрической функции Гаусса, определяемой в окрестности $z = 0$ рядом

$$F\left(\alpha, 1; \gamma; \frac{z}{\tau}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} \left(\frac{z}{\tau}\right)^n \quad (\tau \in \Gamma);$$

$F(\alpha, 1; \gamma; \tau/t)$ ($t, \tau \in \Gamma$) — граничное значение на Γ аналогично выбранной ветви функции $F(\alpha, 1; \gamma; \tau/z)$ ($z \in G^-$). При $\alpha = \gamma$ (1) есть особое интегродифференциальное уравнение с ядром Коши. Если $\gamma = 1$, $0 < \alpha < 1$, то (3) есть уравнение типа Абеля с весом на замкнутой кривой

$$\frac{a(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(\tau)f(\tau)}{(1-t/\tau)^\alpha} \frac{d\tau}{\tau} + \frac{b(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d(\tau)f(\tau)}{(1-\tau/t)^\alpha} \frac{d\tau}{t} = g(t).$$

Другим частным случаем уравнения (3) ($F(1, 1; 2; \varsigma) = -\varsigma^{-1} \ln(1-\varsigma)$) является уравнение с логарифмическим ядром

$$\frac{a(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) c(\tau)f(\tau) \frac{d\tau}{t} + \frac{b(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln\left(1 - \frac{\tau}{t}\right) d(\tau)f(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = g(t).$$

Для корректной постановки вопроса о нетеровости таких уравнений в случае $\gamma > \alpha$ используется метод нормализации оператора с незамкнутым образом. Пространство $L_p^\eta(\Gamma)$, $\eta = \gamma - \alpha$, правых частей уравнений, описывается как образ некоторого оператора криволинейной свертки, играющего роль оператора дробного интегрирования на замкнутой кривой:

$$L_p^\eta(\Gamma) = \left\{ f(t) \mid f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[\tau^{-1} F\left(1, 1; 1 + \eta; \frac{t}{\tau}\right) + t^{-1} F\left(1, 1; n1 + \eta; \frac{\tau}{t}\right) \right] \phi(\tau) d\tau, \right\},$$

$$\phi(t) \in L_p(\Gamma).$$

Описание пространства $L_p^\eta(\Gamma)$ в терминах модифицированных производных Маршо для случая $0 < \eta < 1$ дано в [5], а для показателя $\eta > 1$ — в [6].

Решение уравнения (3) в явном виде получается в результате решения двух характеристических сингулярных уравнений с ядром Коши и обращения оператора криволинейной свертки $F_{\alpha, \gamma}$, определяемой выражением

$$(F_{\alpha, \gamma} \phi)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F\left(\alpha, 1; \gamma; \frac{t}{\tau}\right) \phi(\tau) \frac{d\tau}{\tau} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F\left(\alpha, 1; \gamma; \frac{\tau}{t}\right) \phi(\tau) \frac{d\tau}{t}.$$

Обратный оператор $F_{\alpha, \gamma}^{-1}$ находится по формуле

$$\begin{aligned} (F_{\alpha, \gamma}^{-1} g)(t) &= \frac{1}{2\pi i} \left(t \frac{d}{dt} + \gamma - 1 \right) \int_{\Gamma} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{m+1} F\left(\gamma, 1; \alpha + m + 1; \frac{t}{\tau}\right) (D_m^{(1)} g)(\tau) \frac{d\tau}{\tau} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \left(t \frac{d}{dt} - \gamma + 2 \right) \int_{\Gamma} \left(\frac{\tau}{t} \right)^{m+1} F\left(\gamma, 1; \alpha + m + 1; \frac{\tau}{t}\right) (D_m^{(2)} g)(\tau) \frac{d\tau}{t} + (T_m^{(1)} + T_m^{(2)}) g(t), \end{aligned}$$

где

$$(T_m^{(2)}g)(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^m \frac{(\gamma)_n}{(\alpha)_n} t^{-n-1} \int_{\Gamma} g(\tau) \tau^n d\tau,$$

$$(D_m^{(2)})(t) = \frac{(-1)^{m+1}}{(\alpha)_{m+1}} \prod_{i=3}^{m+2} \left(t \frac{d}{dt} - \gamma + i \right) g(t), \quad m \geq 1; \quad (D_0^{(2)}g)(t) = -\frac{1}{\alpha} g(t).$$

На функциях $g(t)$ из пространства С. Л. Соболева $W_p^{m+1}(\Gamma)$ выражение для оператора $F_{\alpha, \gamma}^{-1}$ преобразуется к виду

$$(F_{\alpha, \gamma}^{-1}g)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F\left(\gamma, 1; \alpha + m + 1; \frac{t}{\tau}\right) \left[\prod_{j=0}^m \left(1 + \frac{1}{\alpha + j} \tau \frac{d}{d\tau} \right) \right] g(\tau) \frac{d\tau}{\tau} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F\left(\gamma, 1; \alpha + m + 1; \frac{\tau}{t}\right) \left[\prod_{j=0}^m \left(1 - \frac{1}{\alpha + j} \left(\tau \frac{d}{d\tau} + 1 \right) \right) \right] g(\tau) \frac{d\tau}{t}.$$

4. Интегро-дифференциальное уравнение с криволинейными свертками и гипергеометрической функцией в ядре [7]

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^m a_k(t) \int_{\Gamma} F\left(\alpha, 1; \gamma; \frac{t}{\tau}\right) c_k(\tau) f^{(k)}(\tau) \frac{d\tau}{\tau} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^s b_k(t) \int_{\Gamma} F\left(\alpha, 1; \gamma; \frac{\tau}{t}\right) d_k(\tau) f^{(k)}(\tau) \frac{d\tau}{t} = g(t), \quad (1.4)$$

где $\gamma \geq \alpha$; $\alpha, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$. Уравнение (4) сводится к эквивалентному уравнению без производных в пространстве $L_p(\Gamma)$ с помощью оператора криволинейной свертки $K_{m,s}$, который определяется формулой

$$(K_{m,s}\phi)(t) = \left(\mathbf{L} \frac{1}{P_m(n)} (L^{-1}P^+\phi)_n \right) (t) + \left(\mathbf{L} \frac{1}{Q_s(n)} (L^{-1}P^-\phi)_n \right) (t) \quad (1.5)$$

Здесь $P_m(x)$ и $Q_s(x)$ — многочлены степени m и s соответственно; P^{\pm} — проекционные операторы, связанные с оператором S сингулярного интегрирования с ядром Коши: $2P^{\pm} = (I \pm S)$, I — единичный оператор. Между известными интегральными представлениями кусочно-аналитических функций, которые используются при исследовании интегро-дифференциальных уравнений, и оператором свертки $K_{m,s}$ существует связь. Если в формуле (5) положить $P_m(x) = (x+1)^m$, $Q_s(x) = x^s$, то оператор $K_{m,s}$ принимает вид изоморфизма $K_{m,s}\phi = [\Lambda^+]^m \phi + [\Lambda^-]^s \phi$,

$$(\Lambda^+\varphi)(t) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \varphi(\tau) \frac{d\tau}{t}, \quad (\Lambda^-\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \varphi(\tau) \frac{d\tau}{t},$$

с помощью которого Р. С. Сакс исследует системы интегро-дифференциальных уравнений [8]. В случае $P_m(x) = (x + 1) \cdot \dots \cdot (x + m)$; $Q_s(x) = x \cdot \dots \cdot (x - s + 1)$ оператор криволинейной свертки тесно связан с интегральными представлениями Ю. М. Крикунова, Р. С. Исаханова, В. С. Рогожина, Н. П. Векуа и В. И. Жегалова [9-14].

2. Интегральные уравнения на бесконечном контуре

Ядра интегральных уравнений типа криволинейной свертки на бесконечной кривой зависят от разности аргументов. Пусть Γ — бесконечный замкнутый контур Ляпунова, лежащий в полосе $-\nu + \varepsilon \leq \operatorname{Im} z \leq \mu - \varepsilon$, $\mu > \varepsilon > 0$, $\nu > \varepsilon > 0$, причем угол наклона касательной к кривой с действительной осью по абсолютной величине не больше $\pi/2 - \delta$, $\delta > 0$.

5. *Интегральные уравнения с сингулярными криволинейными свертками*

$$[a(t) + b(t)] f(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{a(\tau) - b(t)}{\tau - t} f(\tau) d\tau + \\ + \int_{\Gamma} K^+(t - \tau) a(\tau) f(\tau) d\tau - b(t) \int_{\Gamma} K^-(t - \tau) df(\tau) d\tau = g(t), \quad t \in \Gamma, \quad (2.1)$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ — заданные непрерывные, не обращающиеся в нуль на Γ функции; $K^+(z)$ и $K^-(z)$ — функции, аналитические при $\operatorname{Im} z > -\nu$ и $\operatorname{Im} z < \mu$ соответственно;

$$[a(t) + \alpha b(t)] f(t) + a(t) \int_{\Gamma} K(t - \tau) f(\tau) d\tau + b(t) \int_{\Gamma} N(t - \tau) f(\tau) d\tau = g(t), \quad t \in \Gamma, \quad (2.2)$$

где $a(t)$, $b(t)$ — заданные непрерывные функции на Γ , не имеющие нулей; $K(z) = \alpha/\pi z + K_0(z)$, $\alpha \in C$, $K_0(z)$ — такая аналитическая в полосе $|\operatorname{Im} z| < \mu + \nu$ функция, что $|k_0(t)| \leq B \exp[-(\mu + \nu)|t|]$, где B — постоянная, а

$$k_0(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_R K_0(x) \exp(-ixt) dx, \quad N(z) = -(\pi z)^{-1} + N_0(z)$$

$N_0(x)$ — преобразование Гильберта функции $K_0(x)$: $N_0(x) = i (S_R K_0)(x)$, $x \in R$.

В пространстве $L_2(\Gamma)$ уравнения (6) и (7) решаются с помощью задач Римана и обращению операторов сингулярной криволинейной свертки [15, 16].

Заключение

Использование понятия криволинейной свертки позволяет получить в явном виде решение интегральных уравнений на замкнутом контуре, которые обобщают такие известные уравнения, как характеристическое сингулярное с ядром Коши,

со степенными и логарифмическими ядрами, а также может быть полезным при исследовании краевых задач типа задачи Римана с краевыми условиями, содержащими производные. Методы обращения операторов и полученные формулы решения соответствующих уравнений можно использовать при приближенном решении широкого класса линейных интегральных уравнений на криволинейном контуре в комплексной плоскости.

Список цитируемых источников

1. *Черский Ю. И.* Уравнения, разрешимые в квадратурах // Научные труды Юбилейного семинара по краевым задачам, посвященного 75-летию со дня рождения академика АН БССР Ф. Д. Гахова. — Минск: Изд-во Университетское, 1985. — С. 120-128.
Chersky Yu. I. Equations solvable in quadratures // Scientific works of the Jubilee seminar on boundary value problems dedicated to the 75th anniversary of the birth of academician of the Academy of Sciences of the BSSR F. D. Gakhov. — Minsk: Izd. Universitetskoe, 1985. 120-128 (in Russian)
2. *Песчанский А. И., Черский Ю. И.* Интегральное уравнение с криволинейными свертками на замкнутом контуре // Украинский математический журнал. — 1984. — Т. 36. — № 3. — С. 335-340.
Peschanskij, A. I.; Cherskij, Yu. I. An integral equation with curvilinear convolutions on a closed contour. Ukr. Math. J. 36, 301-305 (1984).
3. *Черский, Ю. И.* Интегральные уравнения, сводящиеся к двум задачам Римана // Доклады АН СССР. — 1979. — Т. 248. — № 4. — С. 802-805.
Cherskij, Yu. I. Integral equations reducing to two Riemann problems. Sov. Math. Dokl. 20, 1076-1079 (1979).
4. *Песчанский, А. И.* Интегральные уравнения типа криволинейной свертки с гипергеометрической функцией в ядре // Известия вузов. Математика. — 2019. — № 9. — С. 50-62.
Peschanskii, A. I. Integral Equations of Curvilinear Convolution Type with Hypergeometric Function in a Kernel. Russian Mathematics 63, No.9, 43-54 (2019).
5. *Песчанский, А. И.* Об описании пространства дробных интегралов типа криволинейной свертки // Известия вузов. Математика. — 1989. — № 7. — С. 29-39.
Peschanskij, A. I. Description of the space of fractional integrals of curvilinear convolution type. Sov. Math. 33, No. 7, 37-50 (1989).
6. *Песчанский А. И.* Об описании пространства $L_p^\eta(\Gamma)$ дробных интегралов типа криволинейной свертки // Материалы XXV междунар. науч.-техн. конф. «Прикладные задачи математики, Севастополь, 18-22 сентября 2017» — Севастополь: Изд-во СевГУ, 2017. — С. 104-108.
Peschansky A. I. on the description of the space $L_p^\eta(\Gamma)$ of fractional integrals of the curvilinear convolution type // Materials of XXV international. science.-tech. Conf. «Applied problems of mathematics, Sevastopol, September 18-22, 2017»— Sevastopol: publishing house of Sevstu, 2017. — Pp. 104-108.
7. *Песчанский А. И.* Интегро-дифференциальные уравнения на замкнутом контуре с функцией Гаусса в ядрах // Известия вузов. Математика (в печати).

- Peschanskii A. I. Integro-differential Equations over a Closed Circuit with Gaussian Function in a Kernel // Russian Mathematics (to be published).
8. *Сакс Р. С.* Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1975. – 164 с.
- Sachs R. S. Boundary value problems for elliptic systems of differential equations. – Novosibirsk: NSU Publishing house, 1975. – 164 p.
9. *Крикунов Ю. М.* О решении обобщенной краевой задачи Римана и линейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения // Уч. зап. Казанск. ун-та. – 1952. – Т. 112. № 10. – С. 191-199.
- Krikunov Yu. M. on the solution of the generalized Riemann boundary value problem and the linear singular integro-differential equation // Uch. Zap. Kazan. UN-TA. – 1952. Т. 112. No. 10. – Pp. 191-199.
10. *Исаханов Р. С.* Дифференциальная граничная задача линейного сопряжения и ее применение к теории интегро-дифференциальных уравнений // Сообщ. АН ГрузССР. – 1958. – Т. 20. № 6. – С. 659-666.
- Isakhanov, R. S. Differential boundary value problem of linear conjugation and its application to the theory of integro-differential equations // Post. An Georgian. – 1958. – V. 20. No. 6. – Pp. 659-666.
11. *Векуа Н. П.* Об одной системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и ее приложениях в граничных задачах линейного сопряжения // Тр. Тбилисс. матем. ин-та АН ГрузССР. – 1957. – Т. 24. – С. 135-147.
- Vekua, N. P. On a system of singular integro-differential equations and its applications in boundary value problems of linear conjugation // Tr. Tbilisi. mod. in-TA an Georgian. – 1957. – Vol. 24. – Pp. 135-147.
12. *Жегалов В. И.* О задачах с производными в краевых условиях // Тр. семин. по краевым задачам. – 1973. – Вып. 10. – С. 38-52.
- Zhegalov, V. I. on problems with derivatives in boundary conditions // Tr. seminar. on boundary value problems. – 1973. – Vol. 10. – Pp. 38-52.
13. *Рогожин В. С.* Новое интегральное представление кусочно-голоморфной функции и его приложения // Доклады АН СССР. – 1960. – Т. 135. № 4. – С. 791-793.
- Rogozhin, V. S. a New integral representation of a piecewise holomorphic function and its applications // Reports of the USSR Academy of Sciences. – 1960. Т. – 135. No. 4. – Pp. 791-793.
14. *Товмасын Н. Е.* К теории сингулярных интегральных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т.3, №1. – С. 69-80.
- Tovmasyan, N. E. On the theory of singular integral equations // Differential equations. – 1967. – Vol. 3. No. 1. – Pp. 69-80.
15. *Песчанский А. И.* Интегральное уравнение с сингулярными свертками // Доклады АН УССР, серия «А». – 1981. – №10. – С. 15-18.
- Peschanskij, A. I. An integral equation with singular convolutions. Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR, Ser. A, No. 10, 15-18 (1981).

16. *Песчанский, А. И.* Интегральные уравнения с сингулярными криволинейными свертками // Дифференциальные уравнения. – 1983. — №11. — С. 2007-2009.
Peschanskij, A. I. Integral equations with singular curvilinear convolutions. Differ. Uravn. 19, No. 11, 2007-2009 (1983). (in Russian)

Получена 07.06.2019

УДК 535.338.1+519.6+519.853.6

О методе производных разделения большого числа перекрывающихся компонент при наличии шума

В. С. Сизиков, А. В. Лавров

Санкт-Петербургский университет ИТМО,

Санкт-Петербург 197101. E-mail: sizikov2000@mail.ru, lavrov@itmo.ru

Аннотация. Рассмотрена эффективность метода производных для разделения (сепарации) большого числа перекрывающихся спектральных линий-компонент в условиях зашумленности. Линии моделируются гауссианами или лоренцианами. Выведены аналитические формулы для производных 1-4 порядков, а также для амплитуд и полуширин линий. Найденные число и параметры линий уточняются путем минимизации функционала невязки с ограничениями на решение. Путем моделирования спектра из 7 компонент с использованием 1-4 производных показано, что количество и значения параметров линий хорошо восстанавливаются при отсутствии шумов и при использовании аналитических выражений для производных. При наличии шумов (даже слабых) производные определяются (численно) с большими погрешностями. В этом случае эффективным является использование сглаживающих сплайнов. Однако если использовать сплайн лишь один раз для сглаживания спектра и вычисления 1-й производной, то погрешности резко возрастают с ростом порядка производной от 2-го до 4-го. Поэтому в работе предложено сглаживать сплайнами перед расчетом каждой производной. В этом случае значения производных получаются мало отличающимися от производных при отсутствии помех, а число линий и их параметры определяются достаточно точно.

Ключевые слова: разделение (сепарация) перекрывающихся спектральных линий, метод производных, гауссианы и лоренцианы, число линий, параметры линий, сглаживающие сплайны.

On the derivative method for separating large number of overlapping components in the presence of noise

V. S. Sizikov, A. V. Lavrov

Saint-Petersburg ITMO University, Saint-Petersburg 197101.

Abstract. The efficiency of the derivatives method for separation of an increased number of overlapping spectral lines (components) is considered, in addition, under noisy conditions. The lines are modeled by Gaussians or Lorentzians. Analytical formulas are derived for derivatives of 1-4 orders, as well as for amplitudes and half-widths of lines. Then, the number and the parameters of the lines are refined by minimizing the discrepancy functional. By modeling a spectrum of 7 components using 1-4 derivatives, it is shown that the number and parameters of the lines are well restored in the noise absence and when using analytical expressions for derivatives. And in the presence of noise (even weak), the derivatives are determined (numerically) with large errors. In this case, the use of smoothing splines is very effective. However, if the spline is used only once to smooth the spectrum and calculate the 1st derivative, then the errors will increase sharply with increasing order of the derivative from 2 to 4. Therefore, in this paper, it is proposed to use a spline before calculating each

derivative. In this case, the derivatives are slightly different from the derivatives in the absence of noises, and the number of lines and their parameters are determined quite accurately.

Keywords: separation of overlapping spectral lines, derivative method, Gaussian and Lorentzian, number of lines, line parameters, smoothing splines.

MSC 2010: 41A15, 65D07, 65Z05

Введение

Одной из актуальных задач спектроскопии является задача о разделении (сепарации) непрерывных перекрывающихся спектральных линий (см. [12, 9, 10, 1, 7, 2] и др.). Необходимо определить количество линий N , входящих в суммарный измеренный спектр Z , и параметры линий-компонент z . Данная задача, строго говоря, имеет множество решений. Поэтому математически её решают обычно путем моделирования линий гауссианами или лоренцианами (у каждой линии по 3 искомым параметра, см. дальше). А количество линий N и параметры линий, как правило, определяют методом производных (методом дифференцирования), а именно, находят производные от суммарного спектра Z до 4-го порядка и по значениям производных оценивают N и параметры линий. Затем параметры линий уточняют путем минимизации функционала невязки [2, 3, 4, 5].

Многие численные результаты [9, 10, 7, 2, 3, 4, 5], демонстрируют хорошее восстановление спектров методом производных. Однако это имеет место лишь в отсутствии шумов и при использовании аналитических выражений для производных. При наличии же шумов (даже слабых) производные определяются (численно) с большими погрешностями [2, 4, 5] и особенно при большом (порядка 10) количестве линий N . В работах [2, 4, 5] показано, что весьма эффективным при наличии шумов является использование сглаживающих сплайнов (о сплайнах см. [6, с. 215–224]). Однако в этих работах сплайн использован лишь один раз, а именно, для сглаживания экспериментального зашумленного суммарного спектра \tilde{Z} и вычисления 1-й производной \tilde{Z}' , а для устойчивого вычисления производных более высоких порядков сглаживающие сплайны не используются. В данной работе предлагается использовать сглаживающий сплайн перед расчетом каждой производной. Кроме того, акцент в работе сделан на большом (порядка 10) количестве линий N , как, например, в работе [9]. При этом не используется дополнительная информация о структуре вещества и его спектре, как в работе [8], и не применяется метод Фурье само-деконволюции [12], так как он искусственно занижает ширины линий (до 5 раз), что уже отмечалось в работах [2, 3, 4, 5].

1. Постановка задачи

Пусть в спектре присутствуют N непрерывных линий с профилями интенсивности $z_j(\lambda)$, $j = \overline{1, N}$, где j – номер линии, а λ – длина волны. Считаем, что линии налагаются друг на друга в той или иной степени. Полагаем, что измеряется за-

шумленный суммарный спектр-профиль $\tilde{Z}(\lambda)$, равный сумме N линий-компонент:

$$\tilde{Z}(\lambda) = \sum_{j=1}^N z_j(\lambda) + \delta z, \quad a \leq \lambda \leq b, \quad (1.1)$$

где $[a, b]$ – пределы суммарного спектра, а δz – шум.

Ставится **задача**: на основе измеренного зашумленного суммарного спектра $\tilde{Z}(\lambda)$ определить количество N линий-компонент и их профили $z_j(\lambda)$. Такая задача в её общей постановке имеет множество решений, поскольку задана лишь одна функция $\tilde{Z}(\lambda)$, а нужно определить N функций $z_j(\lambda)$. Поэтому для корректности задачи допускается моделирование профилей линий некоторыми функциями (гауссианами, лоренцианами и т.д.) и использование дополнительной (априорной) информации о линиях (начальные приближения параметров линий, диапазоны изменения параметров и т.д.).

2. Моделирование линий гауссианами, их дифференцирование и оценка параметров линий по производным

Представим каждую линию $z_j(\lambda)$ гауссианом:

$$z_j(\lambda) = A_j \exp\left(-\frac{(\lambda - \bar{\lambda}_j)^2}{2\sigma_j^2}\right), \quad a \leq \lambda \leq b, \quad (2.1)$$

где A_j – амплитуда линии, $\bar{\lambda}_j$ – координата максимума, σ_j^2 – дисперсия, при этом $\tau_j = \sqrt{2 \ln 2} \sigma_j = 1.1773 \sigma_j$ – полуширина гауссиана по уровню 0.5 [4]. На рис. 1 представлен пример спектра из $N = 7$ спектральных линий в виде гауссиан.

В работе [11] впервые предложен метод производных для оценки параметров линий. В этой работе была использована производная лишь 1-го порядка, а в дальнейшем в работах [9, 10, 7, 2, 3, 4, 5] и др. использованы производные до 4-го порядка. Воспользуемся методом производных.

Производные порядков $l = 1, 2, 3, 4$ от $z_j(\lambda)$ по λ равны (ср. [7, 4])

$$z_j'(\lambda) = -\frac{A_j}{\sigma_j} \exp\left(-\frac{(\lambda - \bar{\lambda}_j)^2}{2\sigma_j^2}\right) \left(\frac{\lambda - \bar{\lambda}_j}{\sigma_j}\right), \quad (2.2)$$

$$z_j''(\lambda) = -\frac{A_j}{\sigma_j^2} \exp\left(-\frac{(\lambda - \bar{\lambda}_j)^2}{2\sigma_j^2}\right) \left(-\frac{(\lambda - \bar{\lambda}_j)^2}{\sigma_j^2} + 1\right), \quad (2.3)$$

$$z_j'''(\lambda) = \frac{A_j}{\sigma_j^3} \exp\left(-\frac{(\lambda - \bar{\lambda}_j)^2}{2\sigma_j^2}\right) \left(-\frac{(\lambda - \bar{\lambda}_j)^2}{\sigma_j^2} + 3\right) \left(\frac{\lambda - \bar{\lambda}_j}{\sigma_j}\right), \quad (2.4)$$

$$z_j^{IV}(\lambda) = \frac{A_j}{\sigma_j^4} \exp\left(-\frac{(\lambda - \bar{\lambda}_j)^2}{2\sigma_j^2}\right) \left(\frac{(\lambda - \bar{\lambda}_j)^4}{\sigma_j^4} - 6\frac{(\lambda - \bar{\lambda}_j)^2}{2\sigma_j^2} + 3\right). \quad (2.5)$$

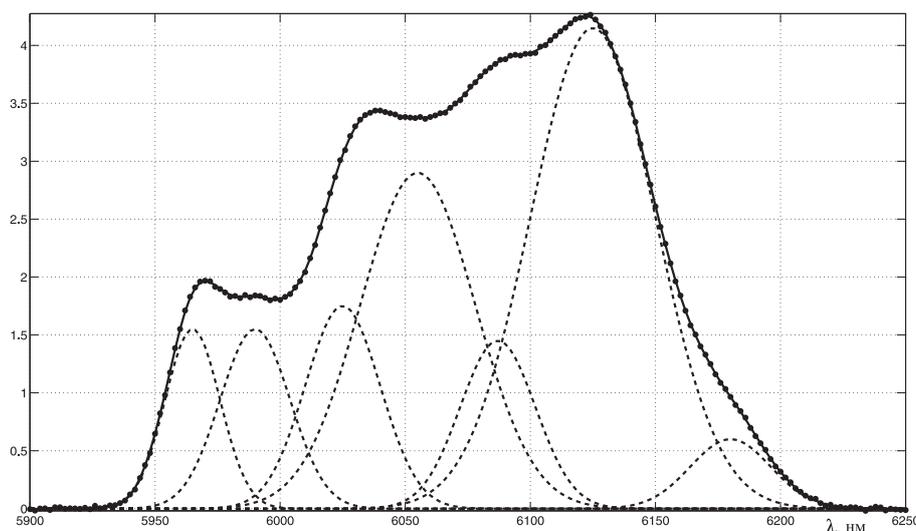


Рис. 1. Семь линий $z_j(\lambda)$ (пунктирные кривые), суммарный спектр $\tilde{Z}(\lambda)$ с шумом (точки) и сглаживающий сплайн (непрерывная кривая, проходящая гладко через точки)

Из условий экстремума и формул (2.2)–(2.5) имеем:

$$z'_j(\bar{\lambda}_j) = 0, \quad z''_j(\bar{\lambda}_j) = -\frac{A_j}{\sigma_j^2} < 0, \quad z'''_j(\bar{\lambda}_j) = 0, \quad z_j^{IV}(\bar{\lambda}_j) = 3\frac{A_j}{\sigma_j^4} > 0. \quad (2.6)$$

Из соотношений (2.6) следуют важные **выводы**:

- 1) нулевые значения 1-й и 3-й производных при условии, что $z''_j(\bar{\lambda}_j) < 0$, $z_j^{IV}(\bar{\lambda}_j) > 0$, указывают на координату $\bar{\lambda}_j$ максимума j -й линии;
- 2) отрицательный минимум 2-й производной и положительный максимум 4-й производной также указывают на j -ю линию.

Более того, из выражений для $z''_j(\bar{\lambda}_j)$ и $z_j^{IV}(\bar{\lambda}_j)$ в (2.6) можно определить A_j и σ_j , решая систему двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_j}{\sigma_j^2} &= -z''_j(\bar{\lambda}_j), \\ \frac{A_j}{\sigma_j^4} &= \frac{1}{3} z_j^{IV}(\bar{\lambda}_j), \end{aligned} \right\}$$

откуда получаем:

$$A_j = 3 \frac{[z''_j(\bar{\lambda}_j)]^2}{z_j^{IV}(\bar{\lambda}_j)}, \quad \sigma_j = \sqrt{3 \frac{-z''_j(\bar{\lambda}_j)}{z_j^{IV}(\bar{\lambda}_j)}}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (2.7)$$

Однако реальный (не модельный) измеренный спектр обычно зашумлен и его численное (не по аналитическим формулам (2.2)–(2.5)) дифференцирование выполняется со значительными погрешностями (см. [2, 4]). Можно отфильтровать

шумы, например, путем аппроксимации спектра сглаживающим сплайном [6, с. 223] и дифференцировать сплайн, как это сделано в работах [2, 4]. Однако, как сказано выше, в этих работах сплайн использован лишь для устойчивого вычисления 1-й производной. В данной работе сплайн использован для устойчивого вычисления каждой производной (см. далее).

3. Численная иллюстрация

Рассмотрим пример типа примера из статьи [9, Fig. 3, левый верхний рис.]. В суммарный спектр (1.1) входят $N = 7$ линий-компонент в виде гауссиан (2.1).

Параметры линий:

амплитуды (в условных единицах) $A_j = 1.55, 1.55, 1.75, 2.9, 1.45, 4.15, 0.6$;
 центральные длины волн $\bar{\lambda}_j$, нм = 5965, 5990, 6025, 6055, 6087, 6125, 6180;
 СКО σ_j , нм = 11, 14, 15, 23, 15, 25, 16.

Параметры примера:

$\lambda_{\min} = a = 5900$ нм, $\lambda_{\max} = b = 6250$ нм, шаг дискретизации $h = 2$ нм, число узлов дискретизации $n = (b - a)/h + 1 = 176$.

На рис. 1 представлены 7 линий-компонент в виде гауссиан (2.1) (пунктир).

На рис. 2 представлены производные порядков $l = 1, 2, 3, 4$ от $Z(\lambda)$ по λ в отсутствие шума, вычисленные численно (не по аналитическим формулам (2.2)–(2.5)) с помощью m-функции `diff.m` системы MatLab.

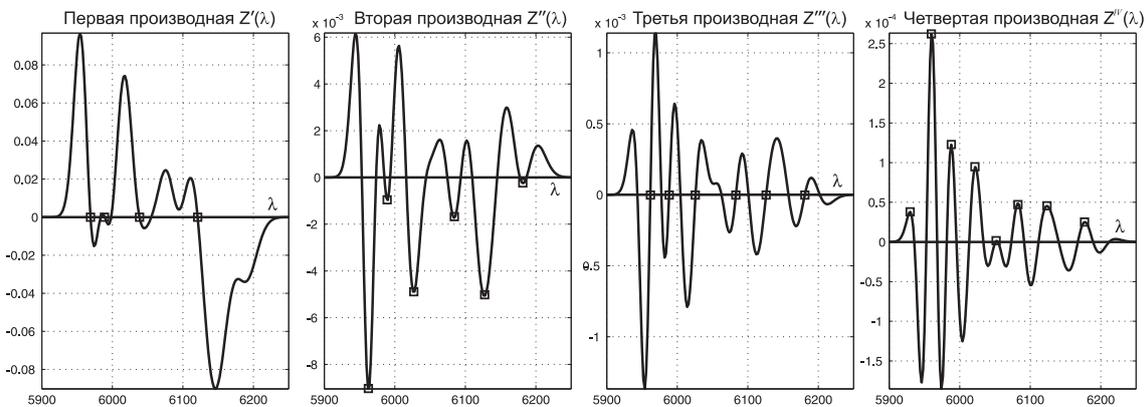


Рис. 2. Производные 1–4 порядков без шума (λ в нм)

Для определения количества линий N по производным использованы следующие критерии (согласно выше приведенным выводам): отрицательный экстремум 2-й производной и положительный экстремум 4-й производной соответствуют максимуму j -й линии, а нулевое значение 1-й и 3-й производных (при условии: $z_j''(\bar{\lambda}_j) < 0$, $z_j^{IV}(\bar{\lambda}_j) > 0$) также указывают на j -ю линию.

На кривых рис. 2 квадратиками (\square) отмечены точки, удовлетворяющие сформулированным критериям. На основе этих критериев по рис. 2 определено: по 1-й производной критериям удовлетворяют 4 точки, т.е. $N = 4$; по 2-й производной

$N = 6$; по 3-й производной $N = 6$; по 4-й производной $N = 8$. Видим, что точность определения количества линий N по производным растет с повышением порядка производной l – неожиданный результат. Поэтому необходимо в методе производных доходить до $l = 4$, а не ограничиваться значением $l = 2$, как в ряде публикаций. В данном примере заключаем, что $N = 7$ (если проигнорировать нереальную точку при $\lambda \approx 5930$ на кривой $Z^{IV}(\lambda)$).

Далее, на суммарный спектр $Z(\lambda)$ наложен шум (точки на рис. 1). Через зашумленные значения $\tilde{Z}(\lambda)$ проведен сглаживающий кубический сплайн (непрерывная линия на рис. 1), по которому получена 1-я производная $\tilde{Z}'(\lambda)$ путем численного дифференцирования (рис. 3).

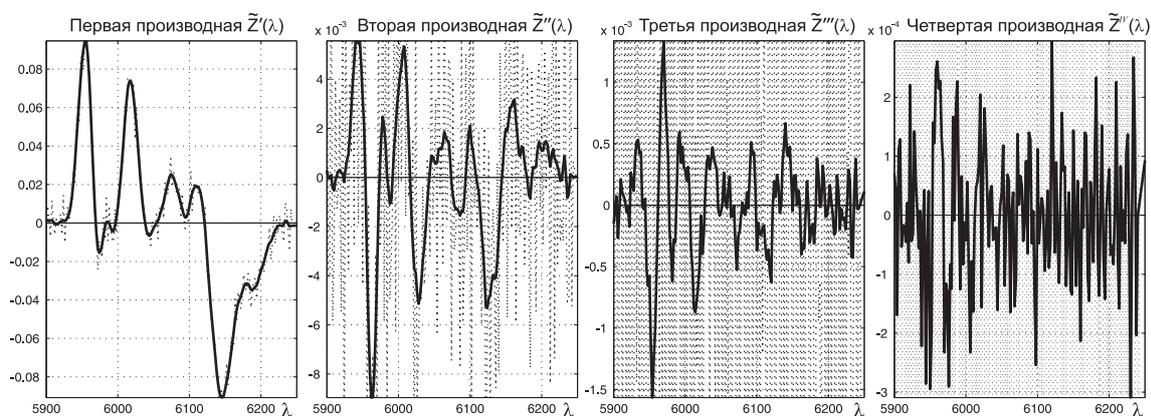


Рис. 3. Производные 1–4 порядков с шумом без сглаживания (пунктир) и с однократным применением сглаживающего сплайна (непрерывные линии)

В предыдущих публикациях [2, 3, 4, 5] для получения 2-й производной $\tilde{Z}''(\lambda)$ мы дифференцировали численно 1-ю производную $\tilde{Z}'(\lambda)$, а сплайн не использовался (как для получения 2-й, так и 3-й и 4-й производных). В данном примере такой подход дал большие искажения 2-й, 3-й и 4-й производных (рис. 3) в виде так называемой знакопеременной "пилой" большой амплитуды (ср. [6, с. 182]).

Чтобы повысить точность численного дифференцирования, мы в данном примере для вычисления производных каждый раз используем сплайн-сглаживание. Это значительно улучшило результаты, как видно из рис. 4, где сплайны 2-й, 3-й и 4-й производных практически такие же, как на рис. 2 без шума.

На рис. 2 точки, отмеченные квадратиками, дают нам значения $\bar{\lambda}_j$ – координат максимумов (центральных длин волн) линий. По ним можно получить значения 2-й и 4-й производных $Z_j''(\bar{\lambda}_j)$ и $Z_j^{IV}(\bar{\lambda}_j)$. Аналогично можно снять значения $\bar{\lambda}_j$, а также производных $\tilde{Z}_j''(\bar{\lambda}_j)$ и $\tilde{Z}_j^{IV}(\bar{\lambda}_j)$ с кривых на рис. 4. Далее, используя формулу (2.7) и заменяя в ней z на Z и \tilde{Z} , можно вычислить параметры линий A_j и σ_j .

Однако параметры линий $\bar{\lambda}_j$, A_j и σ_j были оценены по результатам дифференцирования не непосредственно линий z , а суммарного спектра Z или \tilde{Z} , поэтому необходимо уточнить значения параметров линий. Для этого в работах [2, 3, 4, 5] использована разработанная модификация метода координатного спуска

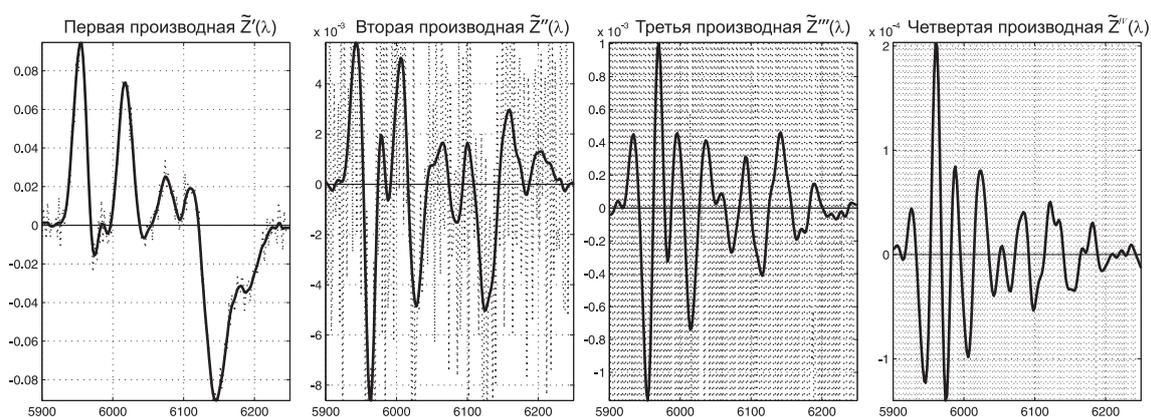


Рис. 4. Производные 1–4 порядков с шумом без сглаживания (пунктир) и с четырехкратным применением сглаживающего сплайна (непрерывные линии)

(КС) и (для сравнения) симплекс-метод Нелдера–Мида, сводящиеся к минимизации функционала невязки с ограничениями на решение. Однако в цели данной работы не входили оценка и уточнение параметров линий. Цель работы была показать большие возможности использования сглаживающих сплайнов при аппроксимации сильно неустойчивых, зашумленных функций (производных на рис. 3 и 4) и рис. 4 это подтвердил.

Заключение

Рассмотрен метод производных (дифференцирования спектра) для разделения большого числа перекрывающихся спектральных линий при наличии шума. Линии промоделированы гауссианами. Выведены аналитические формулы для производных 1–4 порядков от спектра по длине волны, а также для амплитуд и полуширин линий. Путем моделирования спектра из 7 линий с использованием 1–4 производных показано, что число и параметры линий восстанавливаются достаточно надежно в отсутствии шумов. При наличии же шумов производные определяются (численно) с большими погрешностями. В этом случае весьма эффективным является использование сглаживающих сплайнов. Однако если использовать сплайн лишь один раз для сглаживания спектра и вычисления 1-й производной, то погрешности будут резко возрастать с ростом порядка производной от 2-го до 4-го. В данной работе предложено использовать сплайн перед расчетом каждой производной. В этом случае значения производных почти не отличаются от производных в отсутствие помех, а число линий и их параметры определяются достаточно точно.

Список цитируемых источников

1. Михайленко В. И., Михальчук В. В. Методы разложения спектров с неразрешенной структурой // Журнал прикл. спектроскопии. – 1987. – Т. 46, № 4. – С. 535–543.
Mikhailenko V. I., Mikhal'chuk V. V. Method of expanding spectra with unresolved structure. J. Appl. Spectrosc. 46, no.4, 327-335 (1987).

2. *Сизиков В. С., Лавров А. В.* Исследование погрешностей некоторых методов разделения перекрывающихся спектральных линий в условиях воздействия помех // Научно-техн. вестник ИТМО. – 2017. – Т. 17, №5. – С. 879–889.
Sizikov V. S., Lavrov A. V. Study of errors of some methods for separating overlapped spectral lines under noise effect. Sci. Techn. J. ITMO 17, no.5, 879–889 (2017).
3. *Сизиков В. С., Лавров А. В.* Сепарация непрерывных линий, взаимно перекрывающихся и сглаженных аппаратной функцией // Опт. и спектроск. – 2017. – Т. 123, № 5. – С. 678–688.
Sizikov V. S., Lavrov A. V. Separation of continuous lines mutually overlapping and smoothed by the instrumental function. Opt. Spectrosc. 123, no.5, 682–691 (2017).
4. *Сизиков В. С., Лавров А. В.* Сравнение различных методов разделения непрерывных перекрывающихся спектральных линий. // Опт. и спектроск. – 2018. – Т. 124, №6. – С. 723–731.
Sizikov V. S., Lavrov A. V. A comparison of different methods of separation of continuous overlapping spectral lines // Opt. Spectrosc. 124, no. 6, 753–762 (2018).
5. *Сизиков В. С., Лавров А. В.* Современные устойчивые математические и программные методы восстановления искаженных спектров. Обзорная статья // Научно-техн. вестник ИТМО. – 2018. – Т. 18, № 6. – С. 911–931.
Sizikov V. S., Lavrov A. V. Modern stable mathematical and software-based methods for distorted spectra restoration. Review article. Sci. Techn. J. ITMO 18, no. 6, 911–931 (2018).
6. *Сизиков В. С.* Математические методы обработки результатов измерений. – СПб.: Политехника, 2001. – 240 с.
Sizikov V. S. Mathematical methods for processing the results of measurements. – St. Petersburg: Polytechnika Publ., 2001. – 240 p. (in Russian)
7. *Сирвидас С. И., Заруцкий И. В., Ларионов А. М., Манойлов В. В.* Обнаружение, разделение и оценка параметров масс-спектрометрических пиков методом свертки экспериментальных данных с производными гауссовых функций. // Научное приборостроение. – 1999. – Т. 9, № 2. – С. 71–75.
Sirvidas S. I., Zarutsky I. V., Larionov A. M., Manoilov V. V. The convolution of a signal with derivatives of gaussians as an approach suitable for detection, separation and estimation of mass spectrometer peaks. Sci. Instrum. 9, no. 2, 71–75 (1999).
8. *Усольцев Д. А., Ситникова В. Е., Носенко Т. Н., Олехнович Р. О., Успенская М. В.* Сравнение методик расчета вторичной структуры белков на основе деконволюции инфракрасных спектров // Научно-техн. вестник ИТМО. – 2019. – Т. 19, № 4. – С. 586–593.
Usoltsev D. A., Sitnikova V. E., Nosenko T. N., Olekhovich R. O., Uspenskaya M. V. Comparison of protein secondary structure calculation methods based on infrared spectra deconvolution. Sci. Techn. J. ITMO 19, no. 4, 586–593 (2019).
9. *Byler D. M., Susi H.* Examination of the secondary structure of proteins by deconvolved FTIR spectra. // Biopolymers. – 1986. – Vol. 25. – P. 469–487.
10. *Cameron D. G., Moffatt D. J.* A generalized approach to derivative spectroscopy // Appl. Spectrosc. – 1987. – Vol. 41, no. 4. – P. 539–544.

11. *Giese A. T., French C. S.* The analysis of overlapping spectral absorption bands by derivative spectrophotometry // *Appl. Spectrosc.* – 1955. – Vol. 9, no. 2. – P. 78–96.
12. *Kauppinen J. K., Moffatt D. J., Mantsch H. H., Cameron D. G.* Fourier self-deconvolution: a method for resolving intrinsically overlapped bands. // *Appl. Spectrosc.* – 1981. – Vol. 35, no. 3. – P. 271–276.

Получена 01.06.2019

УДК 519.63

Моделирование высокочастотных полей в нерегулярных волноводах через граничные потенциалы

А. Д. Юнаковский

Институт прикладной физики РАН,
Нижний Новгород 603950. E-mail: yun@appl.sci-nnov.ru

Аннотация. Работа посвящена исследованию возможностей создания математических моделей широкополосных волноводных модовых преобразователей и систем в миллиметровом и терагерцевом диапазонах. Их модели должны позволять описывать и изучать процессы распространения СВЧ с использованием существенно (на два порядка) больших дифракционных элементов.

Для построения преобразователей от гироскопа-БВТ к излучателям, а также для исследования влияния локальных возмущений используется модель, учитывающая только огибающие высокочастотных составляющих сигнала, распространяющегося в многомодовом волноводе (так называемое параболическое приближение). Огибающая в этом случае вместо уравнения Гельмгольца удовлетворяет уравнению Шредингера.

Основная идея заключается в определении решения уравнения Шредингера как граничного потенциала относительно внешней границы цилиндрической области, охватывающей нерегулярный волновод, и граничные условия должны быть проверены на реальность — т. е. фактически желаемую границу. Внутри заключающей цилиндрической области колебаний ядра представления решения уже доступны для расчетов.

Ключевые слова: нерегулярный волновод, граничный потенциал, уравнение Шредингера.

Modeling of high-frequency fields in irregular waveguides through boundary potentials

A. D. Yunakovsky

Institute of Applied Physics RAS, Nizhny Novgorod 603950.

Abstract. The work is devoted to the study of the possibilities of creating mathematical models broadband waveguide systems and mode converters in the millimeter and terahertz ranges. Their models should allow describing and studying the processes of microwave propagation using substantially (two orders of magnitude) large diffraction elements. To construct converters from gyro-BWT to emitters, as well as to study the influence of local disturbances, a model is used that takes into account only the envelopes of the high-frequency components of the signal propagating in a multimode waveguide (the so-called parabolic approximation). The envelope in this case, instead of the Helmholtz equation, satisfies the Schredinger equation. The main idea is to define the solution of the Schredinger equation as a boundary potential with respect to the external the boundary of the cylindrical region enclosing the irregular waveguide, and the boundary conditions should be checked for real – i.e. actually the desired border. Inside the enclosing cylindrical oscillation region of the core, the representations of the solution are already available for calculations.

Keywords: irregular waveguide, boundary potential, Schredinger equation.

MSC 2010: 35K20, 35K59, 35Q60, 78A60, 37L10, 34O12

Введение

Работа посвящена исследованию возможностей создания математических моделей широкополосных волноводных систем и преобразователей мод в миллиметровом и терагерцовом диапазонах. Они должны позволять описывать и изучать процессы распространения СВЧ волн, используя существенно (на два порядка) большие по размерам дифракционные элементы.

Развитие современных электронных СВЧ приборов сопровождается повышением их мощности и эффективности, расширением частотных диапазонов, использованием новых режимов работы. Электродинамические системы таких приборов характеризуются наличием сложной геометрии. Оптимизация профилей для улучшения эффективности приборов приводит к перебору большого количества значений параметров. Поэтому задача поиска математических моделей и численных методов, обеспечивающих проведение оптимизации, является актуальной.

Для конструирования преобразователей от гиро-ЛОВ к излучателям, а также для изучения влияния локальных возмущений используется модель, учитывающая лишь огибающие высокочастотных компонент сигнала, распространяющегося в многомодовом волноводе (так называемое параболическое приближение) [1]. Огибающая в этом случае вместо уравнения Гельмгольца удовлетворяет уравнению Шредингера. Задача состоит в том, чтобы подаваемая на вход преобразователя волна должна на выходе трансформироваться в гауссову форму.

Основная идея состоит в том, чтобы задать представление решения уравнения Шредингера в виде граничного потенциала [4, 5] по границе цилиндрической (объемлющей преобразователь, т.е. нерегулярный волновод) области, а граничные условия проверять на реальной — т.е. фактически искомой, границе.

Поиск неизвестной границы и значений весовых функций граничных потенциалов на объемлющей цилиндрической границе можно вести, модифицируя метод Л. И. Шатровского [7, 8] постепенного улучшения управлений, используя в качестве управления разложение весовых функций в ряд Фурье.

Коэффициенты разложения решения уравнения Шредингера в двойной ряд Фурье по угловой и продольной («временной») координатам, получаются в виде быстроосциллирующих интегралов. Основная трудность их вычисления преодолевается с помощью обобщения на двухмерный случай метода Е. Е. Тыртышниковой [6] с использованием рекуррентных соотношений.

1. Математическая модель высокочастотных полей в нерегулярных волноводах

Рассмотрим случай волновода с плавной гофрировкой. Профиль волновода в цилиндрических координатах описывается уравнением:

$$F(r, \varphi, z) = r - f(\varphi, z) = 0; f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi); -\infty < z < +\infty; 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (1.1)$$

где функция $f(\xi)$ непрерывно дифференцируемая и периодическая с периодом 2π . Поля в волноводе удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла

$$\vec{E} = ik \operatorname{rot} \vec{H}, \quad \vec{H} = -ik \operatorname{rot} \vec{E}, \quad (1.2)$$

В случае цилиндрической симметрии электромагнитное поле выражается через электрическую u и магнитную v функции Борнгиса, эквивалентные введению электрического и магнитного векторов Герца с единственными отличными от нуля z -компонентами:

$$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_m, \quad \vec{H} = \vec{H}_e + \vec{H}_m, \quad (1.3)$$

$$\vec{E}_e = \operatorname{rot} \operatorname{rot} (u \vec{i}_z), \quad \vec{H}_e = -i\chi \operatorname{rot} (u \vec{i}_z), \quad (1.4)$$

$$\vec{E}_m = i\chi \operatorname{rot} (v \vec{i}_z), \quad \vec{H}_m = \operatorname{rot} \operatorname{rot} (v \vec{i}_z). \quad (1.5)$$

Функции u и v удовлетворяют уравнению Гельмгольца.

$$\Delta u + \chi^2 u = 0, \quad \Delta v + \chi^2 v = 0. \quad (1.6)$$

«Электрическая» и «магнитная» составляющие электрического поля запишутся в виде

$$\vec{E}_e = \begin{cases} E_{er} = \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} \\ E_{e\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial z} \\ E_{ez} = \chi^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{cases}, \quad \vec{E}_m = \begin{cases} E_{mr} = \frac{i\chi}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ E_{m\varphi} = -i\chi \frac{\partial v}{\partial r} \\ E_{mz} = 0 \end{cases}. \quad (1.7)$$

Граничное условие на внутренней поверхности волновода является условием равенства нулю тангенциальной составляющей электрического поля на металлической поверхности и записывается в форме

$$\vec{E}_\tau \Big|_S = 0, \quad S = \{F = r - f(\varphi, z) = 0; f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi); 0 < z < +\infty; 0 \leq \varphi < 2\pi\} \quad (1.8)$$

$$T_s : \left\{ \frac{1}{r} f'_\varphi E_r + E_\varphi \right\} \Big|_S = 0, \quad (1.9)$$

$$T_k : \{f'_z E_r + E_z\} \Big|_S = 0. \quad (1.10)$$

Вектор нормали к поверхности имеет вид

$$\operatorname{grad} F = \left(1, -\frac{1}{r} f'_\varphi, -f'_z \right), \quad \vec{\nu} = \frac{1}{|n|} \operatorname{grad} F, \quad |n| = \sqrt{1 + (f'_\varphi)^2 / r^2 + (f'_z)^2}.$$

Вектора

$$\vec{s} = \frac{1}{|s|} \left(\frac{1}{r} f'_\varphi, 1, 0 \right), \quad |s| = \sqrt{1 + (f'_\varphi)^2 / r^2},$$

$$\vec{k} = \frac{1}{|k|} (f'_z, 0, 1), \quad |k| = \sqrt{1 + (f'_z)^2}, \quad (1.11)$$

лежат в касательной к поверхности плоскости, но не ортогональны между собой.

Введем новые функции $u_1 = ue^{-i\omega z}$, $v_1 = ve^{-i\omega z}$ в предположении, что они медленно меняются по координате z . Тогда уравнение Гельмгольца после сокращения на $e^{i\omega z}$ приобретет вид

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + 2i\omega \frac{\partial u_1}{\partial z} + \Delta_{\perp} u_1 + (\varkappa^2 - \omega^2) u_1 = 0.$$

При наших предположениях мы можем пренебречь второй производной по z .

$$2i\omega \frac{\partial u_1}{\partial z} + \Delta_{\perp} u_1 + (\varkappa^2 - \omega^2) u_1 = 0.$$

Теперь с помощью замены $u = u_1 e^{i(\varkappa^2 - \omega^2)z/2\omega}$ мы можем избавиться от свободного члена и получить классическое «нестационарное» уравнение Шредингера

$$2i \frac{\partial u}{\partial z} + \Delta_{\perp} u = 0.$$

После проведенных замен и сокращения на соответствующие экспоненциальные множители «медленные» компоненты полей приобретут вид

$$\vec{E}_e = \begin{cases} E_{er} = \omega \left[\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{i}{2} \left(1 + \frac{\varkappa^2}{\omega^2} \right) \frac{\partial u}{\partial r} \right], \\ E_{e\varphi} = \frac{\omega}{r} \left[\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial z} + \frac{i}{2} \left(1 + \frac{\varkappa^2}{\omega^2} \right) \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right], \\ E_{ez} = 2i\omega \frac{\partial u}{\partial z}. \end{cases}$$

Здесь мы можем также пренебречь вторыми производными, так как они по порядку малости в $1/\omega^2$ меньше второго слагаемого. Поделив все компоненты на ω окончательно получаем

$$\vec{E}_e = \begin{cases} E_{er} = \frac{i}{2} \left(1 + \frac{\varkappa^2}{\omega^2} \right) \frac{\partial u}{\partial r} \\ E_{e\varphi} = \frac{i}{2r} \left(1 + \frac{\varkappa^2}{\omega^2} \right) \frac{\partial u}{\partial \varphi} \\ E_{ez} = 2i \frac{\partial u}{\partial z} \end{cases}, \quad \vec{E}_m = \begin{cases} E_{mr} = \frac{i\varkappa}{r\omega} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ E_{m\varphi} = -i \frac{\varkappa}{\omega} \frac{\partial v}{\partial r} \\ E_{mz} = 0 \end{cases}. \quad (1.12)$$

В дальнейшем перейдем к привычному обозначению t вместо z .

Решение нестационарного уравнения Шредингера для огибающей сигнала в случае, когда задано значение u только на границе области, можно искать в виде граничных потенциалов типа граничных тепловых потенциалов или в виде функционалов Ляпунова:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-i(x-\xi(\tau))^2/2(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau, \quad (1.13)$$

где $\xi(\tau)$ – уравнение границы.

Основная идея состоит в том, чтобы задать представление решения уравнения Шредингера в виде граничного потенциала по границе цилиндрической, объемлющей нерегулярный волновод, области, а граничные условия проверять на реальной – т. е. фактически искомой, границе. Внутри объемлющей цилиндрической области осцилляции ядра представления решения уже доступны для вычислений. Отметим, что это представление решения автоматически дает $u(r, \varphi, 0) = 0$.

2. Обоснование возможности использования быстроосциллирующего ядра

Из-за осцилляторного поведения ядра оператора более подробно распишем получение производной по t . Трудность заключается в дифференцировании интеграла по переменному верхнему пределу.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-i(x-\xi(\tau))^2/2(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau - \right. \\ \left. - \int_0^{t-\Delta t} \frac{1}{\sqrt{t-\Delta t-\tau}} e^{-i(x-\xi(\tau))^2/2(t-\Delta t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau \right] = \\ = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-i(x-\xi(\tau))^2/2(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau + \\ + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{t-\Delta t} \left[\frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-i(x-\xi(\tau))^2/2(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau - \right. \\ \left. - \int_0^{t-\Delta t} \frac{1}{\sqrt{t-\Delta t-\tau}} e^{-i(x-\xi(\tau))^2/2(t-\Delta t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau \right]. \quad (2.1) \end{aligned}$$

Второе слагаемое дает нам производную под знаком интеграла, то есть полную аналогию с обычным параболическим уравнением

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{t-\Delta t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{t}-\tau}} e^{-i(x-\xi(\tau))^2/2(\tilde{t}-\tau)} \sigma(\tau) \right) + O(\Delta t) \right] d\tau = \\ = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-i(x-\xi(\tau))^2/2(t-\tau)} \sigma(\tau) \right) d\tau. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно первое слагаемое

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-i(x-\xi(\tau))^2/2(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau. \quad (2.2)$$

Сделаем замену переменной интегрирования $t - \tau = \frac{\Delta t}{2s}$. Получим

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\Delta t}} \int_2^\infty \frac{1}{s^{3/2}} e^{-i(x-\xi(t-\Delta t/2s))^2 s/\Delta t} \sigma\left(t - \frac{\Delta t}{2s}\right) ds.$$

Введем функцию $q(s, \Delta t) = (x - \xi(t - \Delta t/2s))^2 s$ и проведем интегрирование по частям

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} i \frac{\sqrt{2\Delta t}}{q'_s(s, \Delta t)} e^{-i(x-\xi(t-\Delta t/2s))^2 s/\Delta t} \sigma\left(t - \frac{\Delta t}{2s}\right) \frac{1}{s^{3/2}} \Big|_2^\infty - \\ - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} i \sqrt{2\Delta t} \int_2^\infty \frac{1}{q'_s(s, \Delta t) s^{3/2}} e^{-i(x-\xi(t-\Delta t/2s))^2 s/\Delta t} \times \\ \times \left[-\frac{3}{2s} \sigma\left(t - \frac{\Delta t}{2s}\right) - \frac{q''_{ss}(s, \Delta t)}{q'_s(s, \Delta t)} \sigma\left(t - \frac{\Delta t}{2s}\right) + \frac{\Delta t}{2s^2} \sigma'\left(t - \frac{\Delta t}{2s}\right) \right] ds.$$

Здесь

$$q'_s(s, \Delta t) = (x - \xi(t - \Delta t/2s))^2 - (x - \xi(t - \Delta t/2s)) \xi'(t - \Delta t/2s) \frac{\Delta t}{s},$$

$$q''_{ss}(s, \Delta t) = 2(x - \xi(t - \Delta t/2s)) \xi'(t - \Delta t/2s) \frac{\Delta t}{s^2} + (\xi'(t - \Delta t/2s))^2 \frac{(\Delta t)^2}{2s^3} - \\ - (x - \xi(t - \Delta t/2s)) \xi''(t - \Delta t/2s) \frac{(\Delta t)^2}{2s^3}.$$

Очевидно, что при $\Delta t \rightarrow 0$ подынтегральное выражение ограничено по модулю при ограниченных ξ' и ξ'' и сам интеграл абсолютно сходится. За счет множителя $\sqrt{\Delta t}$ мы имеем достаточно медленное стремление первого слагаемого в I к нулю.

В случае двух пространственных переменных, когда задано значение u на границе цилиндра радиуса ρ решение можно искать в виде

$$u(r, \varphi, t) = \int_0^t \int_0^{2\pi} \frac{1}{t-\tau} e^{-i(r^2-2r\rho \cos(\varphi-\psi)+\rho^2)/2(t-\tau)} \sigma(\psi, \tau) d\psi d\tau. \quad (2.3)$$

Воспользуемся известным разложением

$$e^{ia \cos \psi} = e^{ia \sin(\pi/2-\psi)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n/2} J_n(a) e^{-in\psi}.$$

Подставив его в u и поменяв порядок суммирования и интегрирования, получим

$$\begin{aligned} u(r, \varphi, t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^t \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\pi n/2}}{t-\tau} e^{-i(r^2+\rho^2)/2(t-\tau)} J_n(r\rho/(t-\tau)) e^{-in(\varphi-\psi)} \sigma(\psi, \tau) d\psi d\tau = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\pi/2-\varphi)} \int_0^t \frac{1}{t-\tau} e^{-i(r^2+\rho^2)/2(t-\tau)} J_n(r\rho/(t-\tau)) \sigma_n(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $\sigma_n(\tau)$ — коэффициент разложения функции $\sigma(\psi, \tau)$ в ряд Фурье. При дифференцировании получившихся в (16) интегралов по переменному верхнему пределу возникают те же трудности, что и в одномерном случае. Найдем предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^t \frac{1}{t-\tau} e^{-i(r^2+\rho^2)/2(t-\tau)} J_n(r\rho/(t-\tau)) \sigma_n(\tau) d\tau.$$

Воспользовавшись асимптотическим представлением функции Бесселя, выделим главную часть рассматриваемого выражения

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^t \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi r \rho (t-\tau)}} e^{-i(r^2+\rho^2)/2(t-\tau)} \cos(r\rho/(t-\tau) - \pi/4) \sigma_n(\tau) d\tau.$$

Легко видеть, что получившееся выражение аналогично (2.2).

3. Численная модель

Преобразуем представление решения (2.4) к виду

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\pi/2-\varphi)} \int_0^t \frac{1}{\tau} e^{-i(r^2+\rho^2)/2\tau} J_n(r\rho/\tau) \sigma_n(t-\tau) d\tau.$$

Считая, что $0 \leq \tau \leq t \leq T$, зададим функции $\sigma_n(t-\tau)$ с помощью рядов Фурье:

$$\sigma_n(t-\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sigma_{n,m} e^{i2\pi mt/T} e^{-i2\pi m\tau/T}. \quad (3.1)$$

Сделаем замену переменной интегрирования $\tau = t/s$ и обозначим

$$u_{n,m}(r, t) = (i)^n e^{i2\pi mt/T} \int_1^{\infty} \frac{1}{s} e^{-i(r^2+\rho^2)s/2t} J_n(r\rho s/t) e^{2\pi mt/Ts} ds. \quad (3.2)$$

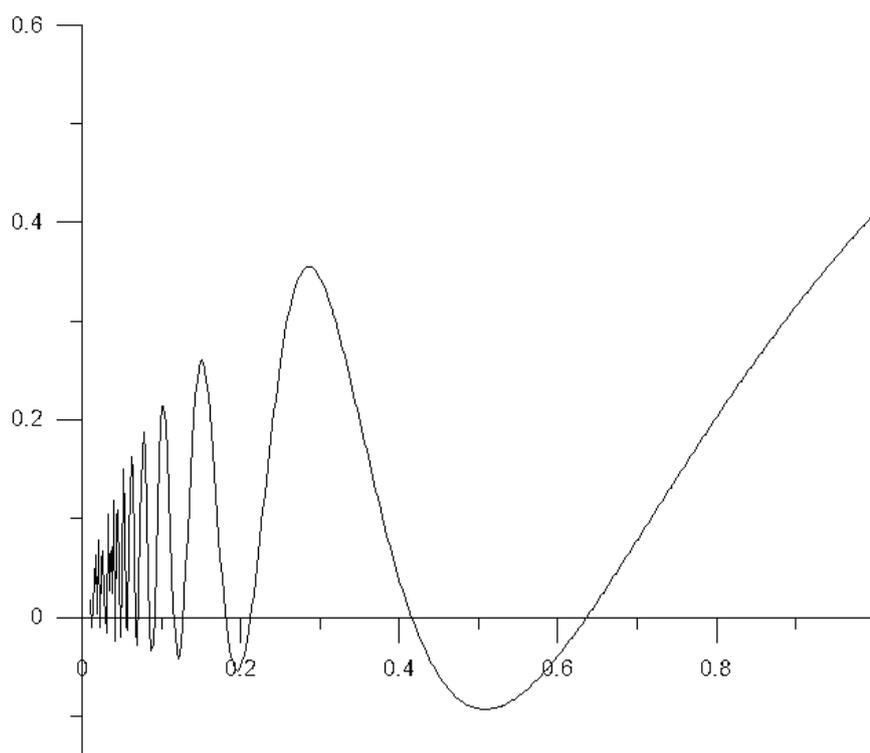


Рис. 1. Рисунок быстро осциллирующего ядра граничного потенциала.

Окончательно получаем

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in\varphi} \sigma_{n,m} u_{n,m}(r, t). \quad (3.3)$$

Введем обозначение:

$$A_{n,m,l}(a, b, c) = \int_1^{\infty} \frac{1}{s^l} e^{-i(as+b/s)} J_n(cs) ds, \quad (3.4)$$

где

$$a = (r^2 + \rho^2)/2t, \quad b = 2\pi mt/T, \quad c = r\rho/t. \quad (3.5)$$

Проинтегрировав это выражение по частям, получим рекуррентное соотношение

$$A_{n,m,l}(a, b, c) = \frac{1}{c} e^{-i(a+b)} J_{n-1}(c) - i \frac{a}{c} A_{n-1,m,l}(a, b, c) + \\ + \frac{n-1-l}{c} A_{n-1,m,l+1}(a, b, c) + i \frac{b}{c} A_{n-1,m,l+2}(a, b, c). \quad (3.6)$$

Здесь удобно ввести обозначения:

$$a/c = \frac{1}{2} \left(\frac{r}{\rho} + \frac{\rho}{r} \right), \quad b/c = \frac{2\pi mt^2}{Tr\rho}, \quad 1/c = \frac{t}{r\rho}. \quad (3.7)$$

Выпишем отдельно эти соотношения для $n = 0$ и $n = 1$ при фиксированных a, b, c :

$$A_{0,m,l} = -\frac{1}{c}e^{-i(a+b)}J_1(c) + i\frac{a}{c}A_{1,m,l} + \frac{l+1}{c}A_{1,m,l+1} - i\frac{b}{c}A_{1,m,l+2},$$

$$A_{1,m,l} = \frac{1}{c}e^{-i(a+b)}J_0(c) - i\frac{a}{c}A_{0,m,l} - \frac{l+1}{c}A_{0,m,l+1} + i\frac{b}{c}A_{0,m,l+2}.$$

Из этой пары соотношений находим

$$\left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right)A_{0,m,l} = -\frac{1}{c}e^{-i(a+b)}J_1(c) + i\frac{a}{c^2}e^{-i(a+b)}J_0(c) +$$

$$+ \frac{l+1}{c}A_{1,m,l+1} - i\frac{b}{c}A_{1,m,l+2} - i\frac{a(l+1)}{c^2}A_{0,m,l+1} - \frac{ab}{c^2}A_{0,m,l+2}, \quad (3.8)$$

$$\left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right)A_{1,m,l} = \frac{1}{c}e^{-i(a+b)}J_0(c) + i\frac{a}{c^2}e^{-i(a+b)}J_1(c) +$$

$$+ \frac{l+1}{c}A_{0,m,l+1} + i\frac{b}{c}A_{0,m,l+2} - i\frac{a(l+1)}{c^2}A_{1,m,l+1} - \frac{ab}{c^2}A_{1,m,l+2}. \quad (3.9)$$

Посчитав $A_{0,m,l}(a, b, c)$ и $A_{1,m,l}(a, b, c)$ при $l = l_{max}$ и $l = l_{max} - 1$, что позволяет взять за верхний предел интегрирования $s_{max} = 2$, мы можем с достаточной точностью по рекуррентному соотношению (3.6) посчитать $A_{n,m,1}(a, b, c)$ и $A_{n,m,0}(a, b, c)$. Чтобы найти $A_{n_{max},m,0}(a, b, c)$ при $n_{max} = 32$ по рекуррентному соотношению (3.6), нужно знать $A_{n_{max}-1,m,2}(a, b, c)$, и так далее, при уменьшении n на единицу, l прибавляется на две единицы. Таким образом, при $n = 0, 1$ нужно иметь $l_{max} = 2n_{max} = 64$.

Теперь найдем производные от $u_{n,m}(r, t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_{n,m}(r, t) = (i2\pi m/T)u_{n,m}(r, t), \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}u_{n,m}(r, t) = (i)^n e^{i2\pi mt/T} \int_1^\infty e^{-i(r^2+\rho^2)s/2t} \left[-i\frac{r}{t}J_n(r\rho s/t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho}{2t}(J_{n-1}(r\rho s/t) - J_{n+1}(r\rho s/t)) \right] e^{2\pi mt/Ts} ds. \quad (3.11)$$

Распишем функцию $u_{n,m}(r, t)$ и ее производные через наши обозначения:

$$u_{n,m}(r, t) = (i)^n e^{i2\pi mt/T} A_{n,m,1}(a, b, c),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_{n,m}(r, t) = (i2\pi m/T)(i)^n e^{i2\pi mt/T} A_{n,m,1}(a, b, c),$$

$$\frac{\partial}{\partial r}u_{n,m}(r, t) = (i)^n e^{i2\pi mt/T} \left[-i\frac{r}{t}A_{n,m,0}(a, b, c) + \frac{\rho}{2t}(A_{n-1,m,0} - A_{n+1,m,0}) \right]. \quad (3.12)$$

Естественно, что случай $n = 0$ расписывается отдельно.

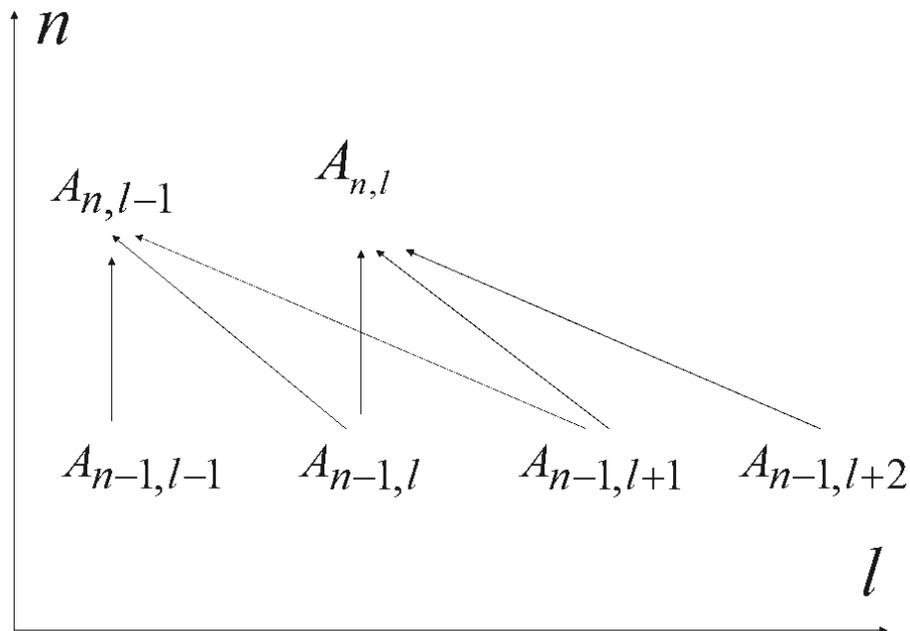


Рис. 2. Схема расчета коэффициентов $A_{n,m,l}$. Чтобы не загромождать рисунок, индекс m опущен.

Поля внутри преобразователя образуются падающей при $t = 0$ модой $\vec{E}_{in}(r, \varphi)$, $\vec{H}_{in}(r, \varphi)$ не обладающей азимутальной симметрией. Она генерирует отраженные поверхностью преобразователя электрическую и магнитную составляющие поля, описываемые граничными потенциалами вида (1.13) для электрической u и магнитной v функций Борнуса. На выходе преобразователя при $t = T$ мы хотим получить азимутально симметричное поле, представляющее собой гауссов пучок.

Подставляя разность этих полей в граничные условия (1.9), (1.10) при заданной граничной поверхности (1.8), мы получаем линейную систему уравнений для коэффициентов разложения функций σ_u , σ_v в двойные ряды Фурье по φ и t . Решив эту систему, мы находим электромагнитное поле в точке $t = T$.

Таким образом, мы получили задачу управления: варьируя границу преобразователя — функцию $f(r, t)$ из (1.8), мы стремим поле в точке $t = T$ к гауссову пучку.

Заключение

Задавая значения полей и их производных на поверхности (1.1), мы получаем линейную алгебраическую систему уравнений для коэффициентов из (3.3) на объемлющей цилиндрической поверхности. Мы избавлены от решения нестационарного уравнения Шредингера в трехмерной области сложной формы и от нахождения решения вольтерровского интегрального уравнения на сложной поверхности с быстроосциллирующим ядром.

Кроме того, мы получили возможность быстро считать матричные элементы системы линейных уравнений для коэффициентов разложения функций σ_u , σ_v в двойные ряды Фурье. Как хорошо известно [3], счет матричных коэффициентов занимает основное время счета в задачах электродинамики.

Список цитируемых источников

1. *Landau L. D., Lifshits E. M.* 2005 Теоретическая физика, Vol. 8 (М.: Fizmatlit) p. 656
2. *Юнаковский А. Д.* Моделирование нелинейного уравнения Шредингера // Н. Новгород: 1996 г. 160 с.
<http://libgen.io/ads.php?md5=E3B7C9412BD4D71AF6A18786E479F77B>
 Yunakovsky A. D. Modeling of the nonlinear Schrodinger equation // N. Novgorod: 1996 160 p.
3. *Ильин В. П.* Численные методы решения задач электрофизики. – М.: Наука, 1985. – 336 с.
 Ilyin V. P. Numerical methods for solving problems of Electrophysics. – Moscow: Nauka, 1985. – 336 p.
4. *Юнаковский А. Д.* Моделирование высокочастотных полей в нерегулярных волноводах через граничные потенциалы // Труды XIV научной конференции по радиофизике, ННГУ, 2010. – С. 271-273.
 Yunakovsky A. D. Modeling of high-frequency fields in irregular waveguides through boundary potentials // Proceedings of the XIV scientific conference on Radiophysics, NNSU, 2010. – Pp. 271-273.
5. *Юнаковский А. Д.* Моделирование высокочастотных полей в нерегулярных волноводах через граничные потенциалы // International Conference KROMSH-2010 "The Twenty First Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Book of Abstracts, Crimea, Laspi-Batiliman, September 17-19, pp. 55-56.
 Yunakovsky A. D. Modeling of high-frequency fields in irregular waveguides through boundary potentials // International Conference KROMSH-2010 "The Twenty First Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Book of Abstracts, Crimea, Laspi-Batiliman, September 17-19, Pp. 55-56.
6. *Тыртышников Е. Е.* Модификации методов вычисления интегралов Чебышева-Лагерра и Гаусса-Лежандра // ЖВМ и МФ (2004).
 Tyrtysnikov E. E. Modifications of methods for calculating Chebyshev-Laguerre and Gauss-Legendre integrals // ZhVM and MF (2004).
7. *Шатровский Л. И.* Об одном численном методе решения задач оптимального управления // ЖВМ и МФ, 1962, №2.
 Shatrovsky L. I. On a numerical method for solving optimal control problems // ZhVM and MF, 1962, No. 2.
8. *Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Математическая теория конструирования систем управления / Учеб. для студентов вузов, обучающихся по специальности «Прикладная математика». – М.: Высш. шк., 2003. – 614 с.

Afanasyev V.N., Kolmanovsky V.B., Nosov V.R. Mathematical theory of control systems design / Studies. for University students studying in the specialty «Applied mathematics». – М.: No. SHK., 2003. – 614 p.

Получена 21.05.2019

УДК 517.983.24

Построение J -самосопряжённой дилатации линейного оператора

Ю. Л. Кудряшов

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. E-mail: kudryashov_2889@mail.ru

Аннотация. В статье, используя понятие операторного узла для линейного ограниченного оператора и преобразование Кэли, вводится понятие операторного узла для линейного оператора с непустым множеством регулярных точек. С помощью этого понятия производится явное построение J -самосопряжённой дилатации линейного, плотно заданного в гильбертовом пространстве оператора, у которого $-i$ является регулярной точкой. Построенные ранее дилатации являются частным случаем этой дилатации или ей изоморфны.

Ключевые слова: дилатация, J -самосопряжённый оператор, операторный узел.

Constructing the J -self-adjoint dilatation of a linear operator

Yu. L. Kudryashov

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. Using the notion of an operator node for a bounded linear operator and the Cayley transform, the article introduces the notion of an operator node for a linear operator with a nonempty set of regular points. Using this concept, an explicit construction of a J -self-adjoint dilatation of a linear operator densely defined in a Hilbert space is carried out for which $-i$ is a regular point. The dilations constructed earlier are a special case of this dilatation or are isomorphic to it.

Keywords: dilatation, J -selfadjoint operator, operator knot.

MSC 2010: 47A20, 47A48

1. Введение

Определение 1. Ограниченный оператор B , действующий в гильбертовом пространстве H , называется дилатацией ограниченного оператора A , который действует в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H} \subset H$, если

$$A^n h = P B^n h \quad (\forall n \in \mathbb{N} \wedge \forall h \in \mathfrak{H}), \quad (1.1)$$

где P — оператор ортогонального проектирования в H на \mathfrak{H} . При этом условие (1.1) эквивалентно любому из следующих условий:

$$1) (A^n h, g) = (B^n h, g) \quad (\forall \{h, g\} \subset \mathfrak{H} \wedge \forall n \in \mathbb{N});$$

$$2) (A - \lambda I)^{-1}h = P(B - \lambda I)^{-1}h \quad (\forall h \in \mathfrak{H} \wedge \forall \lambda \in W(\lambda_0, \epsilon) \subset \rho(A) \cap \rho(B)),$$

где $W(\lambda_0, \epsilon)$ — ϵ -окрестность точки λ_0 ;

$$3) R^n(A, \alpha)h = PR^n(B, \alpha)h \quad (\forall h \in \mathfrak{H} \wedge \forall n \in \mathbb{N} \wedge \alpha \in \rho(A) \cap \rho(B)), \quad \text{где} \\ R(T, \alpha) = (T - \alpha I)^{-1}.$$

Последние два условия имеют смысл и в случае неограниченных операторов и, таким образом, любое из них можно принять в качестве определения дилатации произвольного линейного оператора A , у которого $\rho(A) \neq \emptyset$.

Определение 2. Дилатации B_1 и B_2 оператора A , действующие соответственно в пространствах H_1 и H_2 , называются изоморфными, если существует унитарное отображение U пространства H_1 на H_2 такое, что

$$1) Uh = h \quad (\forall h \in \mathfrak{H}),$$

$$2) B_2 = UB_1U^{-1}.$$

Пусть A — линейный, плотно заданный оператор, действующий в гильбертовом пространстве \mathfrak{H} , $-i \in \rho(A)$.

Рассмотрим операторы

$$R = (A + iI)^{-1}, B = iR - iR^* - 2R^*R, \tilde{B} = iR - iR^* - 2RR^*. \quad (1.2)$$

Используя понятие операторного узла для ограниченного оператора, введённое в [1, 2, 3], и учитывая преобразование Кэли, дадим определение операторного узла для линейного оператора.

Определение 3. Совокупность гильбертовых пространств \mathfrak{H} , E_- и E_+ и операторов

$$\Phi \in [E_-, \mathfrak{H}], \Psi \in [\mathfrak{H}, E_+], K \in [E_-, E_+],$$

$$J_- \in [E_-, E_-], J_+ \in [E_+, E_+], A : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H},$$

где $J_{\pm} = J_{\pm}^{-1} = J_{\pm}^*$, которые удовлетворяют соотношениям:

$$B = \Psi^* J_+ \Psi, \quad (1.3)$$

$$T^* \Phi + \Psi^* J_+ K = 0, \quad (1.4)$$

$$2\Phi^* \Phi + K^* J_+ K = J_-, \quad (1.5)$$

$$\tilde{B} = \Phi J_- \Phi^*, \quad (1.6)$$

$$T\Psi^* + \Phi J_- K^* = 0, \quad (1.7)$$

$$2\Psi\Psi^* + K J_- K^* = J_+, \quad (1.8)$$

называется операторным узлом для оператора A .

Из (1.4), получаем

$$\Phi^*T + K^*J_+\Psi = 0. \quad (1.9)$$

Из (1.7), получаем

$$\Psi T^* + KJ_-\Phi^* = 0. \quad (1.10)$$

2. Построение дилатации

При доказательстве основной теоремы будем использовать следующие леммы.

Лемма 1. Если $\tilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$ и $h_+(0) = -Kh_-(0) + i\Psi(A + iI)\tilde{h}$, то $\hat{h} = h_0 + \Psi^*J_+h_+(0) \in \mathfrak{D}(A^*)$ и

$$(A + iI)\tilde{h} - (A^* - iI)\hat{h} = 2ih_0 \quad (2.1)$$

Доказательство.

$$h_+(0) = -Kh_-(0) + i\Psi(A + iI)\tilde{h}.$$

Поддействуем на это равенство оператором Ψ^*J_+

$$\Psi^*J_+h_+(0) = -\Psi^*J_+Kh_-(0) + i\Psi^*J_+\Psi(A + iI)\tilde{h}.$$

Используем соотношение (1.3)

$$\Psi^*J_+h_+(0) = -\Psi^*J_+Kh_-(0) + (-R + R^* - 2iR^*R)(A + iI)\tilde{h},$$

$$\Psi^*J_+h_+(0) = -\Psi^*J_+Kh_-(0) - \tilde{h} + R^*(A + iI)\tilde{h} - 2iR^*\tilde{h},$$

или

$$\Psi^*J_+h_+(0) + \Psi^*J_+Kh_-(0) + \tilde{h} = R^*(A + iI)\tilde{h} - 2iR^*\tilde{h}. \quad (2.2)$$

Преобразуем левую часть равенства, используя (1.4)

$$\begin{aligned} & \Psi^*J_+h_+(0) - T^*\Phi h_-(0) + h_0 + \Phi h_-(0) = \\ & = \Psi^*J_+h_+(0) + h_0 - 2iR^*\Phi h_-(0) = \hat{h} - 2iR^*\Phi h_-(0). \end{aligned}$$

Подставляя в (2.2), получим

$$\Psi^*J_+h_+(0) + h_0 = 2iR^*\Phi h_-(0) + R^*(A + iI)\hat{h} - 2iR^*\hat{h}. \quad (2.3)$$

Следовательно, вектор $\hat{h} = \Psi^*J_+h_+(0) + h_0 \in \mathfrak{D}(A^*)$.

Поддействуем на равенство (2.3) оператором $(A^* - iI)$.

$$(A^* - iI)\hat{h} = 2i\Phi h_-(0) + (A + iI)\tilde{h} - 2i\tilde{h},$$

$$(A^* - iI)\hat{h} = 2i\Phi h_-(0) + (A + iI)\hat{h} - 2ih_0 - 2i\Phi h_-(0).$$

и получаем (2.1). □

Лемма 2. Если $\hat{h} = h_0 + \Psi^*h_+(0) \in \mathfrak{D}(A^*)$ и $h_-(0) = -K^*h_+(0) - i\Phi^*(A^* - iI)\hat{h}$, то $h' = h_0 + \Phi J_-h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$ и

$$(A + iI)h' - (A^* - iI)\hat{h} = 2ih_0, \quad (2.4)$$

Доказательство.

$$h_-(0) = -K^*h_+(0) - i\Phi^*(A^* - iI)\hat{h}$$

и подействуем на это равенство оператором ΦJ_-

$$\Phi J_-h_-(0) = -\Phi J_-K^*h_+(0) - i\Phi J_- \Phi^*(A^* - iI)\hat{h}.$$

Используя равенства (1.6) и (1.7), получаем

$$\Phi J_-h_-(0) = T\Psi^*h_+(0) - i(iR - iR^* - 2RR^*)(A - iI)\hat{h},$$

$$\Phi J_-h_-(0) = \Psi^*h_+(0) - 2iR\Psi^*h_+(0) + R(A^* - iI)\hat{h} - \hat{h} + 2iR\hat{h}. \quad (2.5)$$

Тогда $h' = h_0 + \Phi J_-h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$.

Подействуем на равенство (2.5) оператором $(A + iI)$

$$(A + iI)h' = -2i\Psi^*h_+(0) + (A^* - iI)\hat{h} + 2i(h_0 + \Psi^*h_+(0)),$$

$(A + iI)h' - (A^* - iI)\hat{h} = 2ih_0$ и (2.4) доказано.

□

Используя введённое понятие операторного узла построим J -самосопряжённую дилатацию S линейного оператора A следующим образом.

Пусть $H_- = L_2((-\infty; 0], E_-)$, $H_+ = L_2([0; \infty), E_+)$, $H = H_- \oplus \mathfrak{H} \oplus H_+$.

Введём в H индефинитную метрику:

$$Jh = J \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_-h_-(t) \\ h_0 \\ J_+h_+(t) \end{pmatrix}.$$

Вектор $h = \begin{pmatrix} h_+ \\ h_0 \\ h_- \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}(S)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:

- 1) $\{h_{\pm}, \frac{dh_{\pm}(t)}{dt}\} \subset H_{\pm}$,
- 2) $\tilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$,
- 3) $h_+(0) = -Kh_-(0) + i\Psi(A + iI)\tilde{h}$.

$$S \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \frac{dh_-(t)}{dt} \\ -ih_0 + (A + iI) \tilde{h} \\ i \frac{dh_+(t)}{dt} \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Оператор S является J-самосопряженной дилатацией оператора A.*

Доказательство. Найдём сопряжённый оператор S^* .

Обозначим $\Gamma_{\pm} h_{\pm}(t) = i \frac{dh_{\pm}(t)}{dt}$.

Используя свойства оператора дифференцирования, получим

$$\begin{aligned} (\Gamma_{\pm} f, \varphi)_{H_{\pm}} - (f, \Gamma_{\pm} \varphi)_{H_{\pm}} &= \mp i (f(0), \varphi(0))_{\mathfrak{H}}, \\ (Sh, g)_H &= (h_-, \Gamma_- g_-)_{H_-} + (h_+, \Gamma_+ g_+)_{H_+} - i (h_+(0), g_+(0))_{E_+} \\ &\quad + i (h_-(0), g_-(0))_{E_-} - i (h_0, g_0)_{\mathfrak{H}} + ((A + iI) \hat{h}, g_0)_{\mathfrak{H}}, \end{aligned}$$

где $\hat{h} = h_0 + \Phi h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$.

Введем обозначение

$$C = (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} - i (h_+(0), g_+(0))_{E_+} + i (h_-(0), g_-(0))_{E_-} + ((A + iI) \hat{h}, g_0)_{\mathfrak{H}}.$$

Используем условие 3) на $\mathfrak{D}(S)$.

$$\begin{aligned} C &= (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} - i (-Kh_-(0) + i\Psi(A + iI)\hat{h}, g_+(0))_{E_+} + \\ &\quad + i (h_-(0), g_-(0))_{E_-} + ((A + iI)\hat{h}, g_0)_{\mathfrak{H}}. \end{aligned}$$

Положим $h_-(0) = 0$, тогда $\hat{h} = h_0$ и

$$\begin{aligned} C &= (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} + (\Psi(A + iI)h_0, g_+(0))_{E_+} + ((A + iI)h_0, g_0)_{\mathfrak{H}} = \\ &= (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} + ((A + iI)h_0, \Psi^* g_+(0))_{E_+} + ((A + iI)h_0, g_0)_{\mathfrak{H}} = \\ &= (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} + ((A + iI)h_0, g_0 + \Psi^* g_+(0))_{\mathfrak{H}}. \end{aligned}$$

Если $g' = g_0 + \Psi^* g_+(0) \in \mathfrak{D}(A^*)$, то

$$C = (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} + (h_0, (A^* - iI)g')_{\mathfrak{H}} = (h_0, ig_0 + (A^* - iI)g')_{\mathfrak{H}}.$$

Теперь

$$\begin{aligned} C &= (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} + i (h_-(0), K^* g_+(0))_{E_-} + ((A + iI)\hat{h}, g_0 + \\ &\quad + \Psi^* J_+ g_+(0))_{\mathfrak{H}} + i (h_-(0), g_-(0))_{E_-} = \\ &= (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} + i (h_-(0), K^* g_+(0))_{E_-} + (h_0 + \Phi h_-(0), (A^* - iI)g')_{\mathfrak{H}} + \\ &\quad + i (h_-(0), g_-(0))_{E_-} = \\ &= (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} + (h_-(0), -iK^* g_+(0))_{E_-} + (h_0, (A^* - iI)g')_{\mathfrak{H}} + \\ &\quad + (\Phi h_-(0), (A^* - iI)g')_{\mathfrak{H}} + i (h_-(0), g_-(0))_{E_-} = \\ &= (h_0, ig_0 + (A^* - iI)g')_{\mathfrak{H}} + (h_-(0), -iK^* g_+(0) + \Phi^*(A^* - iI)g' - ig_-(0))_{E_-}, \end{aligned}$$

тогда

$$-iK^*g_+(0) + \Phi^*(A^* - iI)g' - ig_-(0) = 0,$$

т.е.

$$g_-(0) = -K^*g_+(0) - i\Phi^*(A^* - iI)g'.$$

Таким образом оператор S^* определяется следующим образом.

Вектор $h = \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}(S^*)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия

- 1) $\{h_{\pm}, \Gamma_{\pm}h_{\pm}\} \subset H_{\pm}$,
- 2) $h' = h_0 + \Psi^*h_+(0) \in D(A^*)$,
- 3) $h_-(0) = -K^*h_+(0) - i\Phi^*(A^* - iI)h'$.

$$S^* \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_-h_-(t) \\ ih_0 + (A^* - iI)h' \\ \Gamma_+h_+(t) \end{pmatrix}.$$

Докажем равенство

$$S = JS^*J, \text{ где} \tag{2.6}$$

$$J \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_-h_-(t) \\ h_0 \\ J_+h_+(t) \end{pmatrix}.$$

Пусть $h \in \mathfrak{D}(S)$ и $Jh \in \mathfrak{D}(S^*)$, тогда

$$S^*Jh = S^* \begin{pmatrix} J_+h_+ \\ h_0 \\ J_-h_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \frac{J_+dh_+(t)}{dt} \\ ih_0 + (A^* - iI)\hat{h} \\ i \frac{J_-dh_-(t)}{dt} \end{pmatrix},$$

где $\hat{h} = h_0 + \Psi J_+h_+(0) \in \mathfrak{D}(A^*)$. Используя (2.1), получаем

$$S^*Jh = \begin{pmatrix} iJ_+ \frac{dh_+(t)}{dt} \\ -ih_0 + (A + iI)\tilde{h} \\ iJ_- \frac{J_-dh_-(t)}{dt} \end{pmatrix},$$

$$JS^*Jh = \begin{pmatrix} i \frac{J_+dh_+(t)}{dt} \\ -ih_0 + (A + iI)\tilde{h} \\ i \frac{dh_-(t)}{dt} \end{pmatrix} = Sh.$$

Надо доказать, что

$$\mathfrak{D}(S^*) = J\mathfrak{D}(S). \quad (2.7)$$

Равенство (2.6) было доказано в предположении (2.7). Пусть $h \in \mathfrak{D}(S)$, докажем что $Jh \in \mathfrak{D}(S^*)$.

$$h_+(0) = -Kh_-(0) + i\Psi(A + iI)\tilde{h}, \quad (2.8)$$

где $\tilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$. Надо доказать, что

$$J_-h_-(0) = -K^*J_+h_+(0) - i\Phi^*(A^* - iI)\hat{h},$$

где $\hat{h} = h_0 + \Psi^*J_+h_+(0) \in \mathfrak{D}(A^*)$. Из (2.1) получим

$$(A + iI)\tilde{h} = 2ih_0 + (A^* - iI)\hat{h}.$$

Поддействуем на равенство (2.8) оператором K^*J_+ и применим равенства (1.5) и (1.9), получаем:

$$K^*J_+h_+(0) = -K^*J_+Kh_-(0) + iK^*J_+\Psi(2ih_0 + (A^* - iI)\hat{h}),$$

$$K^*J_+h_+(0) = (2\Phi^*\Phi - J_-)h_-(0) - i\Phi^*T(2ih_0 + (A^* - iI)\hat{h}),$$

$$K^*J_+h_+(0) + J_-h_-(0) = 2\Phi^*\Phi h_-(0) - iT(2ih_0 + (A^* - iI)\hat{h}).$$

Преобразуем правую часть равенства.

$$2\Phi^*\Phi h_-(0) - i\Phi^*(I - 2iR)(2ih_0 + (A^* - iI)\hat{h}) =$$

$$= 2\Phi^*\Phi h_-(0) + 2\Phi^*Th_0 - i\Phi^*(A^* - iI)\hat{h} - 2\Phi^*R(A^* - iI)\hat{h}.$$

Вычислим

$$2\Phi^*\Phi h_-(0) + 2\Phi^*Th_0 - 2\Phi^*R(A^* - iI)\hat{h} =$$

используя (2.1), получаем

$$= 2\Phi^*\Phi h_-(0) + 2\Phi^*(I - 2iR)h_0 - 2\Phi^*R((A + iI)\hat{h} - 2ih_0) =$$

$$= \Phi^*(2\Phi h_-(0) + 2h_0 - 4iRh_0 - 2h_0 - 2\Phi h_-(0) + 4iRh_0) = 0,$$

таким образом

$$J_-h_-(0) = K^*J_+h_+(0) - i\Phi^*(A^* - iI)\hat{h}.$$

Пусть $Jh \in \mathfrak{D}(S^*)$ и докажем, что $h \in \mathfrak{D}(S)$,

$$h = \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix}, Jh = \begin{pmatrix} J_-h_- \\ h_0 \\ J_+h_+ \end{pmatrix}, Jh \in \mathfrak{D}(S^*).$$

Это означает, что

$$\begin{aligned}\hat{h} &= h_0 + \Psi^* J_+ h_+(0) \in \mathfrak{D}(A^*) \text{ и} \\ J_- h_-(0) &= -K^* J_+ h_+(0) - i\Phi^*(A^* - iI)\hat{h}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Из равенства (2.1), если $Jh \in \mathfrak{D}(S^*)$, получаем

$$(A + iI)\tilde{h} - (A^* - iI)\hat{h} = 2ih_0,$$

$$\begin{aligned}\hat{h} &\in \mathfrak{D}(A^*), \tilde{h} \in \mathfrak{D}(A), \\ \hat{h} &= h_0 + \Psi^* J_+ h_+(0), \tilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0) \in \mathfrak{D}(A),\end{aligned}$$

т.е. условие 2) на $\mathfrak{D}(S)$ выполняется.

Проверим выполнение условия 3) на $\mathfrak{D}(S)$ для вектора h . Надо доказать равенство

$$h_+(0) = -Kh_-(0) + i\Psi(A + iI)\tilde{h},$$

где $\tilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$. Подействуем на равенство (2.9) оператором KJ_- , получим

$$Kh_-(0) = -KJ_-K^*J_+h_+(0) - iKJ_- \Phi^*(A^* - iI)\hat{h}.$$

Используя (1.8) и (1.10), получаем

$$\begin{aligned}Kh_-(0) &= (2\Psi\Psi^* - J_+)J_+h_+(0) + i\Psi(I + 2iR^*)(A^* - iI)\hat{h}, \\ Kh_-(0) + h_+(0) &= 2\Psi\Psi^*J_+h_+(0) + i\Psi(I + 2iR^*)(A^* - iI)\hat{h}.\end{aligned}$$

Преобразуем правую часть равенства

$$\begin{aligned}2\Psi\Psi^*J_+h_+(0) + i\Psi(A^* - iI)\hat{h} - 2\Psi(h_0 + \Psi^*J_+h_+(0)) &= \\ = 2\Psi\Psi^*J_+h_+(0) + i\Psi((A + iI)\tilde{h} - 2ih_0) - 2\Psi h_0 - 2\Psi\Psi^*J_+h_+(0) &= \\ = i\Psi(A + iI)\tilde{h}.\end{aligned}$$

$$h_+(0) = -Kh_-(0) + i\Psi(A + iI)\tilde{h}, \text{ где } \tilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0).$$

Докажем, что S -дилатация оператора A .

Обозначим

$$\Gamma_0 = \Gamma_+|_M, \text{ где } M = \{h_+(t) \in \mathfrak{D}(\Gamma_+) | h_+(0) = 0\}.$$

Рассмотрим в пространстве $H = H_- \oplus \mathfrak{H} \oplus H$ оператор R .

$$Rh = R \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Gamma_- - \lambda I)^{-1}h_- \\ R_\lambda h_0 - (I + \mu R_\lambda)\Phi v_-(0) \\ (\Gamma_0 - \lambda I)^{-1}h_+ + e^{-i\lambda t}v_+(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_- \\ v_0 \\ v_+ \end{pmatrix},$$

где $\lambda \in \rho(\Gamma_-) \cap \rho(\Gamma_0) \cap \rho(A) = \rho(\lambda)$. Так как $-i \in \rho(\lambda)$, то λ принадлежит некоторой окрестности точки $-i$, которая содержится в $\rho(\lambda)$.

$$(\Gamma_0 - \lambda I)^{-1}h_+(x) = \frac{1}{i} \int_0^x e^{-i\lambda(x-t)}h_+(t)dt,$$

$$(\Gamma_- - \lambda I)^{-1}h_-(t) = \frac{1}{i} \int_{-\infty}^x e^{-i\lambda(x-t)}h_-(t)dt.$$

При этом

$$\begin{aligned} v_-(0) &= [(\Gamma_- - \lambda I)^{-1}h_-(t)]_{t=0}, \\ v_+(0) &= -Kv_-(0) + i\Psi^*(I + \mu R_\lambda)(h_0 - \mu\Phi v_-(0)), \\ \mu &= \lambda + i, R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}. \end{aligned}$$

Пусть $h \in \mathfrak{D}(S)$, тогда

$$(S - \lambda I) \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Gamma_- - \lambda I)h_- \\ -\mu h_0 + (A + iI)\tilde{h} \\ (\Gamma_+ - \lambda I)h_+ \end{pmatrix}.$$

Докажем, что $R = (S - \lambda I)^{-1}$.

$$R(S - \lambda I) \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} (\Gamma_- - \lambda I)h_- \\ (A - \lambda I)\tilde{h} + \mu\Phi h_-(0) \\ (\Gamma_+ - \lambda I)h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_- \\ y_0 \\ y_+ \end{pmatrix}.$$

Докажем, что $y_0 = h_0, y_+ = h_+$.

$$\begin{aligned} y_0 &= R_\lambda((A - \lambda I)\tilde{h} + \mu\Phi h_-(0)) - (I + \mu R_\lambda)\Phi v_-(0) = \\ &= \tilde{h} + \mu R_\lambda\Phi h_-(0) - \Phi h_-(0) - \mu R_\lambda\Phi v_-(0) = h_0, \end{aligned}$$

т.к. $v_-(0) = h_-(0)$.

$$\begin{aligned} v_+(0) &= -Kv_-(0) + i\Psi^*(I + \mu R_\lambda)((A - \lambda I)\tilde{h} - \mu\Phi h_-(0) - \mu\Phi v_-(0)) = \\ &= -Kh_-(0) + i\Psi^*(I + \mu R_\lambda)(A - \lambda I)\tilde{h} = \\ &= -Kh_-(0) + i\Psi^*(A - \lambda I)\tilde{h} + i\mu\Psi^*\tilde{h} = \\ &= -Kh_-(0) + i\Psi^*(A + iI)\tilde{h} = h_+(0), \end{aligned}$$

таким образом $y_+ = h_+$.

Теперь докажем, что $\forall h \in H, Rh \in \mathfrak{D}(S)$.

Действительно,

- 1) очевидно, что $v_\mp \in H_\mp$.
- 2) $\tilde{h} = v_0 + \Phi v_-(0) = R_\lambda h_0 - (I + \mu R_\lambda)\Phi v_-(0) + \Phi v_-(0) = R_\lambda(h_0 - \mu\Phi v_-(0)) \in \mathfrak{D}(A)$
- 3) Проверим равенство

$$\begin{aligned}
 v_+(0) &= -Kv_-(0) + i\Psi^*(A + iI)(v_0 + \Phi v_-(0)). \\
 -Kv_-(0) + i\Psi^*(A + iI)(v_0 + \Phi v_-(0)) &= \\
 &= -Kv_-(0) + i\Psi^*(A + iI)(R_\lambda h_0 - (I + \mu R_\lambda)\Psi^*v_-(0) + \Psi^*v_-(0)) = \\
 &= -Kv_-(0) + \Psi^*(I + \mu R_\lambda)(h_0 - \mu\Phi v_-(0)) = v_+(0).
 \end{aligned}$$

Таким образом $Rh \in \mathfrak{D}(S)(\forall h \in H)$.

Теперь докажем, что $(S - \lambda I)Rh = h, \forall h \in H$.

$$(S - \lambda I)Rh = (S - \lambda I) \begin{pmatrix} v_- \\ v_0 \\ v_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Gamma_- - \lambda I)v_- \\ (A - \lambda I)(v_0 + \Phi v_-(0)) + \mu\Phi v_-(0) \\ (\Gamma_+ - \lambda I)v_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_- \\ \Theta_0 \\ \Theta_+ \end{pmatrix} = \Theta.$$

Докажем, что $\Theta = h$.

$$\begin{aligned}
 \Theta_- &= (\Gamma_- - \lambda I)(\Gamma_- - \lambda I)^{-1}h_- = h_-, \\
 \Theta_0 &= (A - \lambda I)(v_0 + \Phi v_-(0)) + \mu\Phi v_-(0) = \\
 &= (A - \lambda I)(R_\lambda h_0 - (I + \mu R_\lambda)\Phi v_-(0) - \Phi v_-(0)) + \mu\Phi v_-(0) = h_0, \\
 \Theta_+ &= (\Gamma_+ - \lambda I)[(\Gamma_0 - \lambda I)^{-1}h_0 + e^{-i\lambda t}v_+(0)],
 \end{aligned}$$

где

$$v_+(0) = -Kv_-(0) + i\Psi^*(I + \mu R_\lambda)(h_0 - \mu\Phi v_-(0)).$$

Т.к. $(\Gamma_+ - \lambda I)e^{-i\lambda t}v_-(0) = 0$, то $\Theta_+ = h_+$.

Как легко видеть оператор R ограничен и определен на всем пространстве H .

□

Следствие 1. Самосопряженная дилатация диссипативного оператора A из [4, 5] является частным случаем дилатации из теоремы 1, если положить $Q = \sqrt{B}$, $\tilde{Q} = \sqrt{\tilde{B}}$, $E_- = \overline{\tilde{Q}\mathfrak{H}}$, $E_+ = \overline{Q\mathfrak{H}}$, $\Psi = Q$, $\Phi = \tilde{Q}$, $J = I$.

Следствие 2. J -самосопряженная дилатация линейного оператора A из [6] является частным случаем дилатации из теоремы 1, если положить $Q = \sqrt{|B|}$, $\tilde{Q} = \sqrt{|\tilde{B}|}$, $E_- = \overline{\tilde{Q}\mathfrak{H}}$, $E_+ = \overline{Q\mathfrak{H}}$, $J_- = \text{sign}\tilde{B}$, $J_+ = \text{sign}B$, $\Psi = Q$, $\Phi = \tilde{Q}$.

Список цитируемых источников

1. *Temme D.* The point spectrum of unitary dilation in krein space. *Mathematische Nachrichten*, 1-20 (1995).
2. *Золотарёв В. А.* Аналитические методы спектральных представлений несамосопряжённых и неунитарных операторов. Харьков: ХНУ, 343 с., 2003.
Zolotaryov V. A. Analytic Methods of Spectral Representations of Nonself-adjoint and Nounitary Operators, Kharkov University, 2003. (in Russian)

3. *Биданец А. В., Кудряшов Ю. Л. J -изометрические и J -унитарные дилатации операторного узла. Таврический вестник информатики и математики КФУ, №3, 21-30 (2016).*

Bidanets A. V., Kudryashov Yu. L. J -isometric and J -unitary dilations operator knot. Taurida Journal of Computer Science theory and Mathematics, Crimea Federal University, №3, 21-30 (2016).

4. *Кудряшов Ю. Л. Симметрические и самосопряжённые дилатации диссипативных операторов. — Сб.: Теория функций, функц. анализ и их прил., вып. 37, с. 51 – 54 (1982).*

Kudryashov Yu. L. Symmetric and self-adjoint dilations of dissipative operators. Function theory, functional analysis and their applications. vol. 37. pp. 51-54 (1982). (in Russian)

5. *Кузель А. В., Кудряшов Ю. Л. Симметрические и самосопряжённые дилатации диссипативных операторов. Докл. АН СССР, т. 253, №4, с 812 –815 (1980).*

Kuzhel A. V., Kudryashov Yu. L. Symmetric and selfadjoint dilations of dissipative operators. Science, Reports of the USSR Academy of Science, vol. 253, №4, pp. 812-815 (1980).

6. *Кудряшов Ю. Л. J -эрмитовы и J -самосопряжённые дилатации линейных операторов. Динам. системы, вып. 3, 94-98 (1984).*

Kudryashov Yu. L. J -hermitian and J -selfadjoint dilations of linear operators. Dinamicheskie sistemy 3, 94-98 (1984).

Получена 03.04.2019

РЕФЕРАТЫ

УДК 517.544+517.968

А. Ф. ВОРОНИН. **Уравнения в свертках 1–го и 2–го рода на конечном интервале и краевые задачи для аналитических функций** (русский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №2. — С. 103–115.

Сделан обзор новых результатов по исследованию уравнений в свертках 1–го и 2–го рода на конечном интервале и краевых задач для аналитических функций, связанных с этими уравнениями. В работе найдена взаимосвязь между задачей Маркушевича и уравнениями в свертках и, как следствие, получены новые условия корректной разрешимости задачи Маркушевича и усеченного уравнения Винера – Хопфа. Рассмотрены краевые задачи Римана, являющиеся аналогами задачи Маркушевича. Приведены достаточные условия корректной разрешимости усеченного уравнения Винера – Хопфа с симметричным ядром.

Ключевые слова: уравнения в свертках 1–го и 2–го рода, конечный интервал, обобщенная краевая задача Римана, векторная краевая задача Римана–Гильберта, корректная разрешимость задачи.

Библиогр. 16 назв.

УДК 517.9

Г.С.ОСИПЕНКО. **Об энтропии символического образа динамической системы** (английский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №2. — С. 116–132.

Рассматривается оценка энтропии дискретной динамической системы с использованием символического изображения, представляющего собой ориентированный граф, построенный с помощью конечного покрытия фазового пространства. Траектории системы кодируются путями на графе. Потоки на символическом изображении приближают инвариантные меры системы. Максимальная метрическая энтропия символического изображения оценивается по логарифму максимального собственного значения матрицы смежности символического изображения. Существует поток, на котором достигается эта энтропия. Инвариантная мера максимальной энтропии оценивается с помощью этого потока.

Ключевые слова: символический образ, динамические системы, инвариантная мера, энтропия

Библиогр. 20 назв.

УДК 517.929

В. В. МАЛЫГИНА, К. М. ЧУДИНОВ. **Об условиях осцилляции решений дифференциальных уравнений с последствием** (русский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №2. — С. 133–146.

Исследуются возможности получения эффективных условий осцилляции решений линейных неавтономных дифференциальных уравнений первого порядка с последствием. Для уравнения с несколькими сосредоточенными запаздываниями производится сопоставление нескольких достигнутых в последние годы результатов и приводятся новые доказательства и примеры, обосновывающие эффективность некоторых разрабатываемых методов и их преимуществ перед более ранними подходами. Получены новые эффективные условия осцилляции решений уравнений с распределенным запаздыванием.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с запаздыванием, осцилляция, эффективные признаки.

Библиогр. 19 назв.

УДК 519.6

Р. А. ХАЧАТРЯН. **О решениях дифференциальных включений с почти выпуклой правой частью** (русский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №2. — С. 147–153.

В статье рассматривается вопрос существования решения включения вида $Dx(t) \subseteq a(x(t))$ при начальном условии $x(t_0) = x_0$, где $Dx(t)$ — паратингентная производная функции $x(t)$. Предполагается, что многозначное отображение a непрерывно, а множества $a(x)$ почти выпуклы.

Ключевые слова: многозначное отображение, почти выпуклость, дифференциальное включение.

Библиогр. 14 назв.

УДК 531.36

А. С. КУЛЕШОВ, И. И. УЛЯТОВСКАЯ. **Эффект трансгрессии в задаче о движении почти голономного маятника** (русский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №2. — С. 154–159.

В 1986 году Я.В. Татаринов заложил основы теории слабо неголономных систем. Рассматриваются механические системы с неголономными связями, содержащими малый параметр. Предполагается, во-первых, что при нулевом значении параметра связи такой системы интегрируемы, то есть получается семейство голономных систем, зависящее от нескольких произвольных констант интегрирования. Во-вторых, эти голономные системы должны быть вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами.

При ненулевом значении малого параметра поведение таких систем можно рассматривать при помощи асимптотических методов, представляя его как трансгрессию: сочетание движения слегка модифицированной голономной системы с медленным изменением былых констант. В данной работе описан эффект трансгрессии в задаче о движении почти голономного маятника.

Ключевые слова: слабо неголономные системы; почти голономный маятник; трансгрессия.

Ил. 1. Библиогр. 3 назв.

УДК 517.968

А. И. ПЕСЧАНСКИЙ. **Интегральные и интегро-дифференциальные уравнения типа криволинейной свертки** (русский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №2. — С. 160–168.

Приводится обзор результатов исследований интегральных и интегро-дифференциальных уравнений типа криволинейной свертки, которая является обобщением обычной свертки в случае замены прямой или окружности на криволинейный контур в комплексной плоскости. На замкнутом контуре ядра криволинейных сверток зависят от отношения аргументов, а в случае бесконечного контура — от разности аргументов. В обзор включены следующие классы уравнений: уравнения с сингулярными свертками, которые являются полными сингулярными уравнениями с ядром Коши и вполне непрерывными операторами специального вида; уравнение с сингулярными свертками и сдвигом; интегральные и интегро-дифференциальные уравнения с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах.

Ключевые слова: криволинейная свертка, интегральное уравнение, решение в квадратурах, краевая задача Римана, гипергеометрическая функция Гаусса.

Библиогр. 16 назв.

УДК 535.338.1+519.6+519.853.6

В. С. СИЗИКОВ, А. В. ЛАВРОВ. **О методе производных разделения большого числа перекрывающихся компонент при наличии шума** (русский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №2. — С. 169–177.

Рассмотрена эффективность метода производных для разделения (сепарации) большого числа перекрывающихся спектральных линий-компонент в условиях зашумленности. Линии моделируются гауссианами или лоренцианами. Выведены аналитические формулы для производных 1-4 порядков, а также для амплитуд и полуширин линий. Найденные число и параметры линий уточняются путем минимизации функционала невязки с ограничениями на решение. Путем моделирования спектра из 7 компонент с использованием 1-4 производных показано, что количество и значения параметров линий хорошо восстанавливаются при отсутствии шумов и при использовании аналитических выражений для производных. При наличии шумов (даже слабых) производные определяются (численно) с большими погрешностями. В этом случае эффективным является использование сглаживающих сплайнов. Однако если использовать сплайн лишь один раз для сглаживания спектра и вычисления 1-й производной, то погрешности резко возрастают с ростом порядка производной от 2-го до 4-го. Поэтому в работе предложено сглаживать сплайнами перед расчетом каждой производной. В этом случае значения производных получаются мало отличающимися от производных при отсутствии помех, а число линий и их параметры определяются достаточно точно.

Ключевые слова: разделение (сепарация) перекрывающихся спектральных линий, метод производных, гауссианы и лоренцианы, число линий, параметры линий, сглаживающие сплайны.

Библиогр. 12 назв.

УДК 519.63

А. Д. ЮНАКОВСКИЙ. **Моделирование высокочастотных полей в нерегулярных волноводах через граничные потенциалы** (русский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №2. — С. 178–189.

Работа посвящена исследованию возможностей создания математических моделей широкополосных волноводных модовых преобразователей и систем в миллиметровом и терагерцовом диапазонах. Их модели должны позволять описывать и изучать процессы распространения СВЧ с использованием существенно (на два порядка) больших дифракционных элементов.

Для построения преобразователей от гироскопа-БВТ к излучателям, а также для исследования влияния локальных возмущений используется модель, учитывающая только огибающие высокочастотных составляющих сигнала, распространяющегося в многомодовом волноводе (так называемое параболическое приближение). Огибающая в этом случае вместо уравнения Гельмгольца удовлетворяет уравнению Шредингера.

Основная идея заключается в определении решения уравнения Шредингера как граничного потенциала относительно внешней границы цилиндрической области, охватывающей нерегулярный волновод, и граничные условия должны быть проверены на реальность — т. е. фактически желаемую границу. Внутри заключающей цилиндрической области колебаний ядра представления решения уже доступны для расчетов.

Ключевые слова: нерегулярный волновод, граничный потенциал, уравнение Шредингера.

Ил. 2. Библиогр. 8 назв.

УДК 517.983.24

Ю. Л. КУДРЯШОВ. **Построение J -самосопряжённой дилатации линейного оператора** (русский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №2. — С. 190–200.

В статье, используя понятие операторного узла для линейного ограниченного оператора и

преобразование Кэли, вводится понятие операторного узла для линейного оператора с непустым множеством регулярных точек. С помощью этого понятия производится явное построение J -самосопряжённой дилатации линейного, плотно заданного в гильбертовом пространстве оператора, у которого $-i$ является регулярной точкой. Построенные ранее дилатации являются частным случаем этой дилатации или ей изоморфны.

Ключевые слова: дилатация, J -самосопряжённый оператор, операторный узел.

Библиогр. 6 назв.

ABSTRACTS

MSC 2010: 34K20, 34K60

A. F. VORONIN. **Convolution equations of the first and second kind on a finite interval and boundary value problems for analytic functions** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **9(37)**, no.2, 103–115 (2019).

A review of new results on the study of convolution equations of the 1-st and 2-nd kind on a finite interval and related boundary value problems for analytical functions is made. In the work, the relationship between the Markushevich problem and convolution equations is found, and, as a result, new conditions for the correct solvability of the Markushevich problem and the truncated Wiener–Hopf equation are obtained. Riemann boundary value problems that are analogues of the Markushevich problem are considered. Sufficient conditions for the correct solvability of the truncated Wiener–Hopf equation with a symmetric kernel are given.

Keywords: onvolution equations, finite interval, Markushevich problem, Riemann boundary value problems, factorization of matrix functions, factorization indices, stability, unique.

Ref. 16.

MSC 2010: 37A05, 37B10

G. S. OSIPENKO, N. B. AMPILOVA. **On the entropy of symbolic image of a dynamical system** (English). *Dinamicheskie Sistemy* **9(37)**, no.2, 116–132 (2019).

We consider the estimation of the entropy of a discrete dynamical system by using a symbolic image that is a directed graph constructed by means of a finite covering of phase space. Trajectories of the system are coded by paths on the graph. Flows on symbolic image approximate invariant measures of the system. The maximal metric entropy of a symbolic image is estimated by the logarithm of the maximal eigenvalue of the symbolic image adjacency matrix. There is the flow on which this entropy is achieved. The invariant measure of the maximal entropy is estimated by using this flow.

Keywords: symbolic image, dynamical systems, invariant measure, entropy.

Ref. 20.

MSC 2010: 34K11

V. V. MALYGINA, K. M CHUDINOV. **On oscillation conditions for solutions to delay differential equations** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **9(37)**, no.2, 133–146 (2019).

The possibilities of obtaining effective oscillation conditions for solutions to linear non-autonomous first-order differential equations with aftereffect are investigated. We consider estimates, on the functional of the equation parameters, guaranteeing the oscillation of all solutions. These estimates are results of the development of known sufficient oscillation conditions for a linear equation with one concentrated delay, in the form of an estimate of the integral of the coefficient over the delay length. For an equation with several concentrated delays, several results achieved in recent years are compared and new proofs and examples are given that justify the effectiveness of some of the developed methods and their advantages over earlier approaches. A new approach is applied to equations with distributed delay, for which new effective conditions for the oscillation of solutions are obtained.

Keywords: delay differential equation, oscillation, explicit test.

Ref. 19.

MSC 2010: 49-XX

R. A. KHACHATRYAN. **On solutions of differential inclusions with almost convex right-hand side** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **9(37)**, no.2, 147–153 (2019).

In the paper, the question of the existence of a differential inclusion $\dot{x}(t) \in a(x)$ under the initial condition $x(t_0) = x_0$ is considered. It is assumed that a multivalued mapping a is upper semicontinuous and the sets $a(x)$ are almost convex.

Keywords: set-valued mapping, almost convex mapping, differential inclusion.

Ref. 14.

MSC 2010: 70F25; 70K60; 70K70

A. S. KULESHOV, I. I. ULYATOVSKAYA. **The Transgression Effect in the Problem of Motion of an Almost Holonomic Pendulum** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **9(37)**, no.2, 154–159 (2019).

In 1986 Ya. V. Tatarinov presented the basis of the theory of weakly nonholonomic systems. Mechanical systems with nonholonomic constraints depending on a small parameter are considered. It is assumed that when the value of this parameter is zero, the constraints of such a system become integrable, i.e. in this case we have a family of holonomic systems depending on several arbitrary integration constants. We will assume that these holonomic systems are integrable hamiltonian systems. When the small parameter is not zero, the methods of perturbation theory can be used to represent, to a first approximation, the motion of the system with nonzero parameter values, as a combination of the motion of a slightly modified holonomic system with slowly varying previous integration constants (transgression effect). In this paper we describe the transgression effect in the problem of motion of an almost holonomic pendulum.

Keywords: weakly nonholonomic systems, almost holonomic pendulum, transgression.

Fig. 1. Ref. 3.

MSC 2010: 45E10

A. I. PESCHANSKY. **Integral and Integro-differential Equations of Curvilinear Convolution Type** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **9(37)**, no.2, 160–168 (2019).

A review of the results of studies of integral and integro-differential equations of curvilinear convolution type, which is a generalization of the customary convolution in the case of replacing a circle for a curvilinear contour in the complex plane. On the circumference, the kernels of curvilinear convolutions depend on the ratio of the arguments, and in the case of infinite circumference — on the difference of arguments. The following classes of equations are included in the review: equations with singular convolutions, which are complete singular equations with Cauchy kernel and completely continuous operators of a special kind; equation with singular convolutions and a shift; integral and integro-differential equations with hypergeometric Gaussian function in kernels.

Keywords: curvilinear convolution, integral equation, solution in quadratures, Riemann boundary value problem, Gaussian hypergeometric function.

Ref. 16.

MSC 2010: 41A15, 65D07, 65Z05

V. S. SIZIKOV, A. V. LAVROV. **On the derivative method for separating large number of overlapping components in the presence of noise** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **9(37)**, no.2, 169–177 (2019).

The efficiency of the derivatives method for separation of an increased number of overlapping spectral lines (components) is considered, in addition, under noisy conditions. The lines are modeled

by Gaussians or Lorentzians. Analytical formulas are derived for derivatives of 1-4 orders, as well as for amplitudes and half-widths of lines. Then, the number and the parameters of the lines are refined by minimizing the discrepancy functional. By modeling a spectrum of 7 components using 1-4 derivatives, it is shown that the number and parameters of the lines are well restored in the noise absence and when using analytical expressions for derivatives. And in the presence of noise (even weak), the derivatives are determined (numerically) with large errors. In this case, the use of smoothing splines is very effective. However, if the spline is used only once to smooth the spectrum and calculate the 1st derivative, then the errors will increase sharply with increasing order of the derivative from 2 to 4. Therefore, in this paper, it is proposed to use a spline before calculating each derivative. In this case, the derivatives are slightly different from the derivatives in the absence of noises, and the number of lines and their parameters are determined quite accurately.

Keywords: separation of overlapping spectral lines, derivative method, Gaussian and Lorentzian, number of lines, line parameters, smoothing splines.

Ref. 12.

MSC 2010: 35K20, 35K59, 35Q60, 78A60, 37L10, 34O12

A. D. YUNAKOVSKY. **Modeling of high-frequency fields in irregular waveguides through boundary potentials** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **9(37)**, no.2, 178–189 (2019).

The work is devoted to the study of the possibilities of creating mathematical models broadband waveguide systems and mode converters in the millimeter and terahertz ranges. Their models should allow describing and studying the processes of microwave propagation using substantially (two orders of magnitude) large diffraction elements. To construct converters from gyro-BWT to emitters, as well as to study the influence of local disturbances, a model is used that takes into account only the envelopes of the high-frequency components of the signal propagating in a multimode waveguide (the so-called parabolic approximation). The envelope in this case, instead of the Helmholtz equation, satisfies the Schredinger equation. The main idea is to define the solution of the Schredinger equation as a boundary potential with respect to the external the boundary of the cylindrical region enclosing the irregular waveguide, and the boundary conditions should be checked for real – i.e. actually the desired border. Inside the enclosing cylindrical oscillation region of the core, the representations of the solution are already available for calculations.

Keywords: irregular waveguide, boundary potential, Schredinger equation.

Fig. 2. Ref. 8.

MSC 2010: 47A20, 47A48

YU. L. KUDRYASHOV. **Constructing the J -self-adjoint dilatation of a linear operator** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **9(37)**, no.2, 190–200 (2019).

Using the notion of an operator node for a bounded linear operator and the Cayley transform, the article introduces the notion of an operator node for a linear operator with a nonempty set of regular points. Using this concept, an explicit construction of a J -self-adjoint dilatation of a linear operator densely defined in a Hilbert space is carried out for which $-i$ is a regular point. The dilations constructed earlier are a special case of this dilatation or are isomorphic to it.

Keywords: dilatation, J -selfadjoint operator, operator knot.

Ref. 6.

Подписано в печать 26.06.2019. Формат 60x84/8.
Усл. печ. л. 12,56. Тираж 25 экз. Заказ № НП/322. Бесплатно.
Дата выхода в свет 31.01.2020.
Отпечатано в Издательском доме
ФГАОУ ВО «КФУ им. В. И. Вернадского»
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7

Динамические системы

Том 9(37) №2

2019

Содержание

А. Ф. ВОРОНИН. Уравнения в свертках 1–го и 2–го рода на конечном интервале и краевые задачи для аналитических функций	103
G. S. OSIPENKO, N. V. AMPILOVA. On the entropy of symbolic image of a dynamical system	116
В. В. МАЛЫГИНА, К. М. ЧУДИНОВ. Об условиях осцилляции решений дифференциальных уравнений с последействием	133
Р. А. ХАЧАТРЯН. О решениях дифференциальных включений с почти выпуклой правой частью	147
А. С. КУЛЕШОВ, И. И. УЛЯТОВСКАЯ. Эффект трансгрессии в задаче о движении почти голономного маятника	154
А. И. ПЕСЧАНСКИЙ. Интегральные и интегро-дифференциальные уравнения типа криволинейной свертки	160
В. С. СИЗИКОВ, А. В. ЛАВРОВ. О методе производных разделения большого числа перекрывающихся компонент при наличии шума	169
А. Д. ЮНАКОВСКИЙ. Моделирование высокочастотных полей в нерегулярных волноводах через граничные потенциалы	178
Ю. Л. КУДРЯШОВ. Построение J -самосопряжённой дилатации линейного оператора	190

Dinamicheskie sistemy (Dynamical Systems)

Volume 9(37) no.2

2019

Table of Contents

A. F. VORONIN. Convolution equations of the first and second kind on a finite interval and boundary value problems for analytic functions	103
G. S. OSIPENKO, N. B. AMPILOVA. On the entropy of symbolic image of a dynamical system	116
V. V. MALYGINA, K. MCHUDINOV. On oscillation conditions for solutions to delay differential equations	133
R. A. KHACHATRYAN. On solutions of differential inclusions with almost convex right-hand side	147
A. S. KULESHOV, I. I. ULYATOVSKAYA. The Transgression Effect in the Problem of Motion of an Almost Holonomic Pendulum	154
A. I. PESCHANSKY. Integral and Integro-differential Equations of Curvilinear Convolution Type	160
V. S. SIZIKOV, A. V. LAVROV. On the derivative method for separating large number of overlapping components in the presence of noise	169
A. D. YUNAKOVSKY. Modeling of high-frequency fields in irregular waveguides through boundary potentials	178
YU. L. KUDRYASHOV. Constructing the J -self-adjoint dilatation of a linear operator	190