Динамические системы, 2019, том 9(37), №2, 190–200

УДК 517.983.24

Построение J-самосопряжённой дилатации линейного оператора

Ю. Л. Кудряшов

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: kudryashov_2889@mail.ru*

Аннотация. В статье, используя понятие операторного узла для линейного ограниченного оператора и преобразование Кэли, вводится понятие операторного узла для линейного оператора с непустым множеством регулярных точек. С помощью этого понятия производится явное построение J-самосопряжённой дилатации линейного, плотно заданного в гильбертовом пространстве оператора, у которого $-i$ является регулярной точкой. Построенные ранее дилатации являются частным случаем этой дилатации или ей изоморфны.

Ключевые слова: дилатация, J-самосопряжённый оператор, операторный узел.

Constructing the J-self-adjoint dilatation of a linear operator

Yu. L. Kudryashov

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. Using the notion of an operator node for a bounded linear operator and the Cayley transform, the article introduces the notion of an operator node for a linear operator with a nonempty set of regular points. Using this concept, an explicit construction of a J-self-adjoint dilatation of a linear operator densely defined in a Hilbert space is carried out for which $-i$ is a regular point. The dilations constructed earlier are a special case of this dilatation or are isomorphic to it.

Keywords: dilatation, J-selfadjoint operator, operator knot.

MSC 2010: 47A20, 47A48

1. Введение

Определение 1. Ограниченный оператор B, действующий в гильбертовом пространстве H, называется дилатацией ограниченного оператора A, который действует в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H} \subset H$, если

$$A^n h = PB^n h \quad (\forall n \in \mathbb{N} \wedge \forall h \in \mathfrak{H}), \tag{1.1}$$

где P — оператор ортогонального проектирования в H на $\mathfrak{H}$. При этом условие (1.1) эквивалентно любому из следующих условий:

1) $(A^n h, g) = (B^n h, g) \quad (\forall \{h, g\} \subset \mathfrak{H} \wedge \forall n \in \mathbb{N})$;

2) $(A-\lambda I)^{-1}h = P(B-\lambda I)^{-1}h \quad (\forall h \in \mathfrak{H} \wedge \forall \lambda \in W(\lambda_0, \epsilon) \subset \rho(A) \cap \rho(B))$, где $W(\lambda_0, \epsilon)$ — ϵ-окрестность точки λ_0;

3) $R^n(A,\alpha)h = PR^n(B,\alpha)h \quad (\forall h \in \mathfrak{H} \wedge \forall n \in \mathbb{N} \wedge \alpha \in \rho(A) \cap \rho(B))$, где $R(T,\alpha) = (T-\alpha I)^{-1}$.

Последние два условия имеют смысл и в случае неограниченных операторов и, таким образом, любое из них можно принять в качестве определения дилатации произвольного линейного оператора A, у которого $\rho(A) \neq \emptyset$.

Определение 2. Дилатации B_1 и B_2 оператора A, действующие соответственно в пространствах H_1 и H_2, называются изоморфными, если существует унитарное отображение U пространства H_1 на H_2 такое, что

1) $Uh = h \quad (\forall h \in \mathfrak{H})$,

2) $B_2 = UB_1U^{-1}$.

Пусть A — линейный, плотно заданный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, $-i \in \rho(A)$.

Рассмотрим операторы

$$R = (A+iI)^{-1}, B = iR - iR^* - 2R^*R, \tilde{B} = iR - iR^* - 2RR^*. \tag{1.2}$$

Используя понятие операторного узла для ограниченного оператора, введённое в [1, 2, 3], и учитывая преобразование Кэли, дадим определение операторного узла для линейного оператора.

Определение 3. Совокупность гильбертовых пространств $\mathfrak{H}$, E_- и E_+ и операторов

$$\Phi \in [E_-, \mathfrak{H}], \Psi \in [\mathfrak{H}, E_+], K \in [E_-, E_+],$$
$$J_- \in [E_-, E_-], J_+ \in [E_+, E_+], A : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H},$$

где $J_\pm = J_\pm^{-1} = J_\pm^*$, которые удовлетворяют соотношениям:

$$B = \Psi^* J_+ \Psi, \tag{1.3}$$

$$T^*\Phi + \Psi^* J_+ K = 0, \tag{1.4}$$

$$2\Phi^*\Phi + K^* J_+ K = J_-, \tag{1.5}$$

$$\tilde{B} = \Phi J_- \Phi^*, \tag{1.6}$$

$$T\Psi^* + \Phi J_- K^* = 0, \tag{1.7}$$

$$2\Psi\Psi^* + KJ_-K^* = J_+, \tag{1.8}$$

называется операторным узлом для оператора A.

Из (1.4), получаем

$$\Phi^* T + K^* J_+ \Psi = 0. \tag{1.9}$$

Из (1.7), получаем

$$\Psi T^* + K J_- \Phi^* = 0. \tag{1.10}$$

2. Построение дилатации

При доказательстве основной теоремы будем использовать следующие леммы.

Лемма 1. *Если* $\widetilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0) \in \mathfrak{D}\,(A)$ *и* $h_+\,(0) = -Kh_-\,(0) + i\Psi\,(A + iI)\,\widetilde{h}$, *то* $\hat{h} = h_0 + \Psi^* J_+ h_+(0) \in \mathfrak{D}(A^*)$ *и*

$$(A + iI)\widetilde{h} - (A^* - iI)\hat{h} = 2ih_0 \tag{2.1}$$

Доказательство.

$$h_+(0) = -Kh_-(0) + i\Psi(A + iI)\widetilde{h}.$$

Подействуем на это равенство оператором $\Psi^* J_+$

$$\Psi^* J_+ h_+(0) = -\Psi^* J_+ K h_-(0) + i\Psi^* J_+ \Psi(A + iI)\widetilde{h}.$$

Используем соотношение (1.3)

$$\Psi^* J_+ h_+(0) = -\Psi^* J_+ K h_-(0) + (-R + R^* - 2iR^* R)(A + iI)\widetilde{h},$$

$$\Psi^* J_+ h_+(0) = -\Psi^* J_+ K h_-(0) - \widetilde{h} + R^*(A + iI)\widetilde{h} - 2iR^*\widetilde{h},$$

или

$$\Psi^* J_+ h_+(0) + \Psi^* J_+ K h_-(0) + \widetilde{h} = R^*(A + iI)\widetilde{h} - 2iR^*\widetilde{h}. \tag{2.2}$$

Преобразуем левую часть равенства, используя (1.4)

$$\Psi^* J_+ h_+(0) - T^*\Phi h_-(0) + h_0 + \Phi h_-(0) =$$

$$= \Psi^* J_+ h_+(0) + h_0 - 2iR^*\Phi h_-(0) = \hat{h} - 2iR^*\Phi h_-(0).$$

Подставляя в (2.2), получим

$$\Psi^* J_+ h_+(0) + h_0 = 2iR^*\Phi h_-(0) + R^*(A + iI)\hat{h} - 2iR^*\widetilde{h}. \tag{2.3}$$

Следовательно, вектор $\hat{h} = \Psi^* J_+ h_+(0) + h_0 \in \mathfrak{D}(A^*)$.

Подействуем на равенство (2.3) оператором $(A^* - iI)$.

$$(A^* - iI)\hat{h} = 2i\Phi h_-(0) + (A + iI)\widetilde{h} - 2i\widetilde{h},$$

$$(A^* - iI)\hat{h} = 2i\Phi h_-(0) + (A + iI)\hat{h} - 2ih_0 - 2i\Phi h_-(0).$$

и получаем (2.1).

□

Лемма 2. *Если* $\hat{h} = h_0 + \Psi^* h_+(0) \in \mathfrak{D}(A^*)$ *и* $h_-(0) = -K^* h_+(0) - i\Phi^*(A^* - iI)\hat{h}$, *то* $h' = h_0 + \Phi J_- h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$ *и*

$$(A + iI)h' - (A^* - iI)\hat{h} = 2ih_0, \tag{2.4}$$

Доказательство.

$$h_-(0) = -K^* h_+(0) - i\Phi^*(A^* - iI)\hat{h}$$

и подействуем на это равенство оператором ΦJ_-

$$\Phi J_- h_-(0) = -\Phi J_- K^* h_+(0) - i\Phi J_- \Phi^*(A^* - iI)\hat{h}.$$

Используя равенства (1.6) и (1.7), получаем

$$\Phi J_- h_-(0) = T\Psi^* h_+(0) - i(iR - iR^* - 2RR^*)(A - iI)\hat{h},$$

$$\Phi J_- h_-(0) = \Psi^* h_+(0) - 2iR\Psi^* h_+(0) + R(A^* - iI)\hat{h} - \hat{h} + 2iR\hat{h}. \tag{2.5}$$

Тогда $h' = h_0 + \Phi J_- h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$.
Подействуем на равенство (2.5) оператором $(A + iI)$

$$(A + iI)h' = -2i\Psi^* h_+(0) + (A^* - iI)\hat{h} + 2i(h_0 + \Psi^* h_+(0)),$$

$(A + iI)h' - (A^* - iI)\hat{h} = 2ih_0$ и (2.4) доказано.

□

Используя введённое понятие операторного узла построим J-самосопряжённую дилатацию S линейного оператора A следующим образом.

Пусть $H_- = L_2((-\infty; 0], E_-)$, $H_+ = L_2([0; \infty), E_+)$, $H = H_- \oplus \mathfrak{H} \oplus H_+$.

Введём в H индефинитную метрику:

$$Jh = J\begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_- h_-(t) \\ h_0 \\ J_+ h_+(t) \end{pmatrix}.$$

Вектор $h = \begin{pmatrix} h_+ \\ h_0 \\ h_- \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}(\mathrm{S})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) $\{h_\pm, \frac{dh_\pm(t)}{dt}\} \subset H_\pm$,

2) $\tilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$,

3) $h_+(0) = -Kh_-(0) + i\Psi(A + iI)\tilde{h}$.

$$\mathrm{S}\begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\frac{dh_-(t)}{dt} \\ -ih_0 + (A+iI)\,\tilde{h} \\ i\frac{dh_+(t)}{dt} \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Оператор* S *является* J*-самосопряженной дилатацией оператора* A.

Доказательство. Найдём сопряжённый оператор S^*.

Обозначим $\Gamma_\pm h_\pm(t) = i\frac{dh_\pm(t)}{dt}$.

Используя свойства оператора дифференцирования, получим

$$(\Gamma_\pm f, \varphi)_{H_\pm} - (f, \Gamma_\pm \varphi)_{H_\pm} = \mp i(f(0), \varphi(0))_{\mathfrak{H}}.$$

$$(\mathrm{S}h, g)_H = (h_-, \Gamma_- g_-)_{H_-} + (h_+, \Gamma_+ g_+)_{H_+} - i(h_+(0), g_+(0))_{E_+}$$
$$+ i(h_-(0), g_-(0))_{E_-} - i(h_0, g_0)_{\mathfrak{H}} + ((A+iI)\hat{h}, g_0)_{\mathfrak{H}},$$

где $\hat{h} = h_0 + \Phi h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$.

Введем обозначение

$$C = (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} - i(h_+(0), g_+(0))_{E_+} + i(h_-(0), g_-(0))_{E_-} + ((A+iI)\hat{h}, g_0)_{\mathfrak{H}}.$$

Используем условие 3) на $\mathfrak{D}(\mathrm{S})$.

$$C = (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} - i(-Kh_-(0) + i\Psi(A+iI)\hat{h}, g_+(0))_{E_+} +$$
$$+ i(h_-(0), g_-(0))_{E_-} + ((A+iI)\hat{h}, g_0)_{\mathfrak{H}}.$$

Положим $h_-(0) = 0$, тогда $\hat{h} = h_0$ и

$$C = (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} + (\Psi(A+iI)h_0, g_+(0))_{E_+} + ((A+iI)h_0, g_0)_{\mathfrak{H}} =$$
$$= (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} + ((A+iI)h_0, \Psi^* g_+(0))_{E_+} + ((A+iI)h_0, g_0)_{\mathfrak{H}} =$$
$$= (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} + ((A+iI)h_0, g_0 + \Psi^* g_+(0))_{\mathfrak{H}}.$$

Если $g' = g_0 + \Psi^* g_+(0) \in \mathfrak{D}(A^*)$, то

$$C = (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} + (h_0, (A* - iI)g')_{\mathfrak{H}} = (h_0, ig_0 + (A* - iI)g')_{\mathfrak{H}}.$$

Теперь

$$C = (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} + i(h_-(0), K^* g_+(0))_{E_-} + ((A+iI)\hat{h}, g_0 +$$
$$+ \Psi^* J_+ g_+(0))_{\mathfrak{H}} + i(h_-(0), g_-(0))_{E_-} =$$
$$= (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} + i(h_-(0), K^* g_+(0))_{E_-} + (h_0 + \Phi h_-(0), (A^* - iI)g')_{\mathfrak{H}} +$$
$$+ i(h_-(0), g_-(0))_{E_-} =$$
$$= (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} + (h_-(0), -iK^* g_+(0))_{E_-} + (h_0, (A^* - iI)g')_{\mathfrak{H}} +$$
$$+ (\Phi h_-(0), (A^* - iI)g')_{\mathfrak{H}} + i\,(h_-(0), g_-(0))_{E_-} =$$
$$= (h_0, ig_0 + (A^* - iI)g')_{\mathfrak{H}} + (h_-(0), -iK^* g_+(0) + \Phi^*(A^* - iI)g' - ig_-(0))_{E_-},$$

тогда

$$-iK^*g_+(0) + \Phi^*(A^* - iI)g' - ig_-(0) = 0,$$

т.е.

$$g_-(0) = -K^*g_+(0) - i\Phi^*(A^* - iI)g'.$$

Таким образом оператор S^* определяется следующим образом.

Вектор $h = \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}(\mathrm{S}^*)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия

1) $\{h_\pm, \Gamma_\pm h_\pm\} \subset H_\pm$,

2) $h' = h_0 + \Psi^* h_+(0) \in D(A^*)$,

3) $h_-(0) = -K^*h_+(0) - i\Phi^*(A^* - iI)h'$.

$$\mathrm{S}^* \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_- h_-(t) \\ ih_0 + (A^* - iI)h' \\ \Gamma_+ h_+(t) \end{pmatrix}.$$

Докажем равенство

$$\mathrm{S} = J\mathrm{S}^*J, \text{ где} \tag{2.6}$$

$$J \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_- h_-(t) \\ h_0 \\ J_+ h_+(t) \end{pmatrix}.$$

Пусть $h \in \mathfrak{D}(S)$ и $Jh \in \mathfrak{D}(S^*)$, тогда

$$\mathrm{S}^* Jh = \mathrm{S}^* \begin{pmatrix} J_+ h_+ \\ h_0 \\ J_- h_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\frac{J_+ dh_+(t)}{dt} \\ ih_0 + (A^* - iI)\hat{h} \\ i\frac{J_- dh_-(t)}{dt} \end{pmatrix},$$

где $\hat{h} = h_0 + \Psi J_+ h_+(0) \in \mathfrak{D}(A^*)$. Используя (2.1), получаем

$$\mathrm{S}^* Jh = \begin{pmatrix} iJ_+ \frac{dh_+(t)}{dt} \\ -ih_0 + (A + iI)\widetilde{h} \\ iJ_- \frac{J_- dh_-(t)}{dt} \end{pmatrix},$$

$$J\mathrm{S}^* Jh = \begin{pmatrix} i\frac{J_+ dh_+(t)}{dt} \\ -ih_0 + (A + iI)\widetilde{h} \\ i\frac{dh_-(t)}{dt} \end{pmatrix} = \mathrm{S}h.$$

Надо доказать, что

$$\mathfrak{D}(S^*) = J\mathfrak{D}(S). \tag{2.7}$$

Равенство (2.6) было доказано в предположении (2.7). Пусть $h \in \mathfrak{D}(\mathrm{S})$, докажем что $Jh \in \mathfrak{D}(\mathrm{S}^*)$.

$$h_+(0) = -Kh_-(0) + i\Psi(A + iI)\widetilde{h}, \tag{2.8}$$

где $\widetilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$. Надо доказать, что

$$J_-h_-(0) = -K^*J_+h_+(0) - i\Phi^*(A^* - iI)\hat{h},$$

где $\hat{h} = h_0 + \Psi^*J_+h_+(0) \in \mathfrak{D}(A^*)$. Из (2.1) получим

$$(A + iI)\widetilde{h} = 2ih_0 + (A^* - iI)\hat{h}.$$

Подействуем на равенство (2.8) оператором K^*J_+ и применим равенства (1.5) и (1.9), получаем:

$$K^*J_+h_+(0) = -K^*J_+Kh_-(0) + iK^*J_+\Psi(2ih_0 + (A^* - iI)\hat{h}),$$

$$K^*J_+h_+(0) = (2\Phi^*\Phi - J_-)h_-(0) - i\Phi^*T(2ih_0 + (A^* - iI)\hat{h}),$$

$$K^*J_+h_+(0) + J_-h_-(0) = 2\Phi^*\Phi h_-(0) - iT(2ih_0 + (A^* - iI)\hat{h}).$$

Преобразуем правую часть равенства.

$$2\Phi^*\Phi h_-(0) - i\Phi^*(I - 2iR)(2ih_0 + (A^* - iI)\hat{h}) =$$

$$= 2\Phi^*\Phi h_-(0) + 2\Phi^*Th_0 - i\Phi^*(A^* - iI)\hat{h} - 2\Phi^*R(A^* - iI)\hat{h}.$$

Вычислим

$$2\Phi^*\Phi h_-(0) + 2\Phi^*Th_0 - 2\Phi^*R(A^* - iI)\hat{h} =$$

используя (2.1), получаем

$$= 2\Phi^*\Phi h_-(0) + 2\Phi^*(I - 2iR)h_0 - 2\Phi^*R((A + iI)\hat{h} - 2ih_0) =$$

$$= \Phi^*(2\Phi h_-(0) + 2h_0 - 4iRh_0 - 2h_0 - 2\Phi h_-(0) + 4iRh_0) = 0,$$

таким образом

$$J_-h_-(0) = K^*J_+h_+(0) - i\Phi^*(A^* - iI)\hat{h}.$$

Пусть $Jh \in \mathfrak{D}(\mathrm{S}^*)$ и докажем, что $h \in \mathfrak{D}(\mathrm{S})$,

$$h = \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix}, Jh = \begin{pmatrix} J_-h_- \\ h_0 \\ J_+h_+ \end{pmatrix}, Jh \in \mathfrak{D}(\mathrm{S}^*).$$

Это означает, что

$$\hat{h} = h_0 + \Psi^* J_+ h_+(0) \in \mathfrak{D}(A^*) \text{ и}$$
$$J_- h_-(0) = -K^* J_+ h_+(0) - i\Phi^*(A^* - iI)\hat{h}. \tag{2.9}$$

Из равенства (2.1), если $Jh \in \mathfrak{D}(\mathrm{S}^*)$, получаем

$$(A + iI)\widetilde{h} - (A^* - iI)\hat{h} = 2ih_0,$$

$$\hat{h} \in \mathfrak{D}(A^*), \widetilde{h} \in \mathfrak{D}(A),$$
$$\hat{h} = h_0 + \Psi^* J_+ h_+(0), \tilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0) \in \mathfrak{D}(A),$$

т.е. условие 2) на $\mathfrak{D}(\mathrm{S})$ выполняется.

Проверим выполнение условия 3) на $\mathfrak{D}(\mathrm{S})$ для вектора h. Надо доказать равенство

$$h_+(0) = -Kh_-(0) + i\Psi(A + iI)\widetilde{h},$$

где $\tilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$. Подействуем на равенство (2.9) оператором KJ_-, получим

$$Kh_-(0) = -KJ_-K^* J_+ h_+(0) - iKJ_-\Phi^*(A^* - iI)\hat{h}.$$

Используя (1.8) и (1.10), получаем

$$Kh_-(0) = (2\Psi\Psi^* - J_+)J_+ h_+(0) + i\Psi(I + 2iR^*)(A^* - iI)\hat{h},$$

$$Kh_-(0) + h_+(0) = 2\Psi\Psi^* J_+ h_+(0) + i\Psi(I + 2iR^*)(A^* - iI)\hat{h}.$$

Преобразуем правую часть равенства

$$2\Psi\Psi^* J_+ h_+(0) + i\Psi(A^* - iI)\hat{h} - 2\Psi(h_0 + \Psi^* J_+ h_+(0)) =$$

$$= 2\Psi\Psi^* J_+ h_+(0) + i\Psi((A + iI)\widetilde{h} - 2ih_0) - 2\Psi h_0 - 2\Psi\Psi^* J_+ h_+(0) =$$
$$= i\Psi(A + iI)\widetilde{h}.$$

$h_+(0) = -Kh_-(0) + i\Psi(A + iI)\widetilde{h}$, где $\widetilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0)$.

Докажем, что S-дилатация оператора A.

Обозначим

$$\Gamma_0 = \Gamma_+|_M, \text{ где } M = \{h_+(t) \in \mathfrak{D}(\Gamma_+) | h_+(0) = 0\}.$$

Рассмотрим в пространстве $H = H_- \oplus \mathfrak{H} \oplus H$ оператор R.

$$\mathrm{R}h = \mathrm{R}\begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Gamma_- - \lambda I)^{-1} h_- \\ R_\lambda h_0 - (I + \mu R_\lambda)\Phi v_-(0) \\ (\Gamma_0 - \lambda I)^{-1} h_+ + e^{-i\lambda t} v_+(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_- \\ v_0 \\ v_+ \end{pmatrix},$$

где $\lambda \in \rho(\Gamma_-) \cap \rho(\Gamma_0) \cap \rho(A) = \rho(\lambda)$. Так как $-i \in \rho(\lambda)$, то λ принадлежит некоторой окрестности точки $-i$, которая содержится в $\rho(\lambda)$.

$$(\Gamma_0 - \lambda I)^{-1} h_+(x) = \frac{1}{i} \int_0^x e^{-i\lambda(x-t)} h_+(t)dt,$$

$$(\Gamma_- - \lambda I)^{-1}h_-(t) = \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{x} e^{-i\lambda(x-t)}h_-(t)dt.$$

При этом

$$v_-(0) = [(\Gamma_- - \lambda I)^{-1}h_-(t)]_{t=0},$$

$$v_+(0) = -Kv_-(0) + i\Psi^*(I + \mu R_\lambda)(h_0 - \mu\Phi v_-(0)),$$

$$\mu = \lambda + i, R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}.$$

Пусть $h \in \mathfrak{D}(\mathrm{S})$, тогда

$$(\mathrm{S} - \lambda I)\begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Gamma_- - \lambda I)h_- \\ -\mu h_0 + (A + iI)\widetilde{h} \\ (\Gamma_+ - \lambda I)h_+ \end{pmatrix}.$$

Докажем, что $\mathrm{R} = (\mathrm{S} - \lambda I)^{-1}$.

$$\mathrm{R}(\mathrm{S} - \lambda I)\begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \mathrm{R}\begin{pmatrix} (\Gamma_- - \lambda I)h_- \\ (A - \lambda I)\widetilde{h} + \mu\Phi h_-(0) \\ (\Gamma_+ - \lambda I)h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_- \\ y_0 \\ y_+ \end{pmatrix}.$$

Докажем, что $y_0 = h_0, y_+ = h_+$.

$$y_0 = R_\lambda((A - \lambda I)\widetilde{h} + \mu\Phi h_-(0)) - (I + \mu R_\lambda)\Phi v_-(0) =$$

$$= \widetilde{h} + \mu R_\lambda \Phi h_-(0) - \Phi h_-(0) - \mu R_\lambda \Phi v_-(0) = h_0,$$

т.к. $v_-(0) = h_-(0)$.

$$v_+(0) = -Kv_-(0) + i\Psi^*(I + \mu R_\lambda)((A - \lambda I)\widetilde{h} - \mu\Phi h_-(0) - \mu\Phi v_-(0)) =$$

$$= -Kh_-(0) + i\Psi^*(I + \mu R_\lambda)(A - \lambda I)\widetilde{h} =$$

$$= -Kh_-(0) + i\Psi^*(A - \lambda I)\widetilde{h} + i\mu\Psi^*\widetilde{h} =$$

$$= -Kh_-(0) + i\Psi^*(A + iI)\widetilde{h} = h_+(0),$$

таким образом $y_+ = h_+$.

Теперь докажем, что $\forall h \in H, \mathrm{R}h \in \mathfrak{D}(\mathrm{S})$.

Действительно,

1) очевидно, что $v_\mp \in H_\mp$.

2) $\widetilde{h} = v_0 + \Phi v_-(0) = R_\lambda h_0 - (I + \mu R_\lambda)\Phi v_-(0) + \Phi v_-(0) = R_\lambda(h_0 - \mu\Phi v_-(0)) \in \mathfrak{D}(A)$

3) Проверим равенство

$$v_+(0) = -Kv_-(0) + i\Psi^*(A+iI)(v_0 + \Phi v_-(0)).$$

$$-Kv_-(0) + i\Psi^*(A+iI)(v_0 + \Phi v_-(0)) =$$

$$= -Kv_-(0) + i\Psi^*(A+iI)(R_\lambda h_0 - (I+\mu R_\lambda)\Psi^* v_-(0) + \Psi^* v_-(0)) =$$

$$= -Kv_-(0) + \Psi^*(I+\mu R_\lambda)(h_0 - \mu\Phi v_-(0)) = v_+(0).$$

Таким образом $\mathrm{R}h \in \mathfrak{D}(\mathrm{S})(\forall h \in H)$.
Теперь докажем, что $(\mathrm{S}-\lambda I)\mathrm{R}h = h, \forall h \in H$.

$$(\mathrm{S}-\lambda I)\mathrm{R}h = (\mathrm{S}-\lambda I)\begin{pmatrix} v_- \\ v_0 \\ v_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Gamma_- - \lambda I)v_- \\ (A-\lambda I)(v_0 + \Phi v_-(0)) + \mu\Phi v_-(0) \\ (\Gamma_+ - \lambda I)v_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_- \\ \Theta_0 \\ \Theta_+ \end{pmatrix} = \Theta.$$

Докажем, что $\Theta = h$.

$$\Theta_- = (\Gamma_- - \lambda I)(\Gamma_- - \lambda I)^{-1}h_- = h_-,$$

$$\Theta_0 = (A-\lambda I)(v_0 + \Phi v_-(0)) + \mu\Phi v_-(0) =$$

$$= (A-\lambda I)(R_\lambda h_0 - (I+\mu R_\lambda)\Phi v_-(0) - \Phi v_-(0)) + \mu\Phi v_-(0) = h_0,$$

$$\Theta_+ = (\Gamma_+ - \lambda I)[(\Gamma_0 - \lambda I)^{-1}h_0 + e^{-i\lambda t}v_+(0)],$$

где

$$v_+(0) = -Kv_-(0) + i\Psi^*(I+\mu R_\lambda)(h_0 - \mu\Phi v_-(0)).$$

Т.к. $(\Gamma_+ - \lambda I)e^{-i\lambda t}v_-(0) = 0$, то $\Theta_+ = h_+$.
Как легко видеть оператор R ограничен и определен на всем пространстве H.

□

Следствие 1. *Самосопряженная дилатация диссипаивного оператора A из [4, 5] является частным случаем дилатации из теоремы 1, если положить* $Q = \sqrt{B}$, $\tilde{Q} = \sqrt{\tilde{B}}$, $E_- = \overline{\widetilde{Q}\mathfrak{H}}$, $E_+ = \overline{Q\mathfrak{H}}$, $\Psi = Q$, $\Phi = \widetilde{Q}$, $J = I$.

Следствие 2. *J-самосопряженная дилатация линейного оператора A из [6] является частным случаем дилатации из теоремы 1, если положить* $Q = \sqrt{|B|}$, $\tilde{Q} = \sqrt{|\tilde{B}|}$, $E_- = \overline{\widetilde{Q}\mathfrak{H}}$, $E_+ = \overline{Q\mathfrak{H}}$, $J_- = sign\tilde{B}$, $J_+ = signB$, $\Psi = Q$, $\Phi = \widetilde{Q}$.

Список цитируемых источников

1. *Temme D.* The point spectrum of unitary dilation in krein space. Mathematische Nachrichten, 1-20 (1995).
2. *Золотарёв В. А.* Аналитические методы спектральных представлений несамосопряжённых и неунитарных операторов. Харьков: ХНУ, 343 с., 2003.

   Zolotaryov V. A. Analytic Methods of Spectral Representations of Nonself-adjoint and Nounitary Operators, Kharkov University, 2003. (in Russian)

3. *Биданец А. В., Кудряшов Ю. Л.* J-изометрические и J-унитарные дилатации операторного узла. Таврический вестник информатики и математики КФУ, №3, 21-30 (2016).

   Bidanets A. V., Kudryashov Yu. L. J-isometric and J-unitary dilations opetor knot. Taurida Journal of Computer Science theory and Mathematics, Crimea Federal University, №3, 21-30 (2016).

4. *Кудряшов Ю. Л.* Симметрические и самосопряжённые дилатации диссипативных операторов. — Сб.: Теория функций, функц. анализ и их прил., вып. 37, с. 51 – 54 (1982).

   Kudryashov Yu. L. Symmetric and self-adjoint dilations of dissipative operators. Function theory, functional analysis and their applications. vol. 37. pp. 51-54 (1982). (in Russian)

5. *Кужель А. В., Кудряшов Ю. Л.* Симметрические и самосопряжённые дилатации диссипативных операторов. Докл. АН СССР, т. 253, №4, с 812 –815 (1980).

   Kuzhel A. V., Kudryashov Yu. L. Symmetric and selfadjoint dilations of dissipative operators. Science, Reports of the USSR Academy of Science, vol. 253, №4, pp. 812-815 (1980).

6. *Кудряшов Ю. Л.* J-эрмитовы и J-самосопряжённые дилатации линейных операторов. Динам. системы, вып. 3, 94-98 (1984).

   Kudryashov Yu. L. J-hermitian and J-selfadjoint dilations of linear operators. Dinamicheskie sistemy 3, 94-98 (1984).

Получена 03.04.2019

РЕФЕРАТЫ

УДК 517.544+517.968

А. Ф. ВОРОНИН. **Уравнения в свертках 1–го и 2–го рода на конечном интервале и краевые задачи для аналитических функций** (русский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №2. — С. 103–115.

Сделан обзор новых результатов по исследованию уравнений в свертках 1–го и 2–го рода на конечном интервале и краевых задач для аналитических функций, связанных с этими уравнениями. В работе найдена взаимосвязь между задачей Маркушевича и уравнениями в свертках и, как следствие, получены новые условия корректной разрешимости задачи Маркушевича и усеченного уравнения Винера – Хопфа. Рассмотрены краевые задачи Римана, являющиеся аналогами задачи Маркушевича. Приведены достаточные условия корректной разрешимости усеченного уравнения Винера – Хопфа с симметричным ядром.

Ключевые слова: уравнения в свертках 1–го и 2–го рода, конечный интервал, обобщенная краевая задача Римана, векторная краевая задача Римана–Гильберта, корректная разрешимость задачи.

Библиогр. 16 назв.

УДК 517.9

Г.С.ОСИПЕНКО. **Об энтропии символического образа динамической системы** (английский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №2. — С. 116–132.

Рассматривается оценка энтропии дискретной динамической системы с использованием символического изображения, представляющего собой ориентированный граф, построенный с помощью конечного покрытия фазового пространства. Траектории системы кодируются путями на графе. Потоки на символическом изображении приближают инвариантные меры системы. Максимальная метрическая энтропия символического изображения оценивается по логарифму максимального собственного значения матрицы смежности символического изображения. Существует поток, на котором достигается эта энтропия. Инвариантная мера максимальной энтропии оценивается с помощью этого потока.

Ключевые слова: символический образ, динамические системы, инвариантная мера, энтропия

Библиогр. 20 назв.

УДК 517.929

В. В. МАЛЫГИНА, К. М. ЧУДИНОВ. **Об условиях осцилляции решений дифференциальных уравнений с последействием** (русский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №2. — С. 133–146.

Исследуются возможности получения эффективных условий осцилляции решений линейных неавтономных дифференциальных уравнений первого порядка с последействием. Для уравнения с несколькими сосредоточенными запаздываниями производится сопоставление нескольких достигнутых в последние годы результатов и приводятся новые доказательства и примеры, обосновывающие эффективность некоторых разрабатываемых методов и их преимуществ перед более ранними подходами. Получены новые эффективные условия осцилляции решений уравнений с распределенным запаздыванием.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с запаздыванием, осцилляция, эффективные признаки.

Библиогр. 19 назв.

УДК 519.6

Р. А. ХАЧАТРЯН. **О решениях дифференциальных включений с почти выпуклой правой частью** (русский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №2. — С. 147–153.

В статье рассматривается вопрос существования решения включения вида $Dx(t) \subseteq a(x(t))$ при начальном условии $x(t_0) = x_0$, где $Dx(t)$ — паратингентная производная функции $x(t)$. Предполагается, что многозначное отображение a непрерывно, а множества $a(x)$ почти выпуклы.

Ключевые слова: многозначное отображение, почти выпуклость, дифференциальное включение.

Библиогр. 14 назв.

УДК 531.36

А. С. КУЛЕШОВ, И. И. УЛЯТОВСКАЯ. **Эффект трансгрессии в задаче о движении почти голономного маятника** (русский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №2. — С. 154–159.

В 1986 году Я.В. Татаринов заложил основы теории слабо неголономных систем. Рассматриваются механические системы с неголономными связями, содержащими малый параметр. Предполагается, во–первых, что при нулевом значении параметра связи такой системы интегрируемы, то есть получается семейство голономных систем, зависящее от нескольких произвольных констант интегрирования. Во–вторых, эти голономные системы должны быть вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами.

При ненулевом значении малого параметра поведение таких систем можно рассматривать при помощи асимптотических методов, представляя его как трансгрессию: сочетание движения слегка модифицированной голономной системы с медленным изменением былых констант. В данной работе описан эффект трансгрессии в задаче о движении почти голономного маятника.

Ключевые слова: слабо неголономные системы; почти голономный маятник; трансгрессия.

Ил. 1. Библиогр. 3 назв.

УДК 517.968

А. И. ПЕСЧАНСКИЙ. **Интегральные и интегро-дифференциальные уравнения типа криволинейной свертки** (русский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №2. — С. 160–168.

Приводится обзор результатов исследований интегральных и интегро-дифференциальных уравнений типа криволинейной свертки, которая является обобщением обычной свертки в случае замены прямой или окружности на криволинейный контур в комплексной плоскости. На замкнутом контуре ядра криволинейных сверток зависят от отношения аргументов, а в случае бесконечного контура — от разности аргументов. В обзор включены следующие классы уравнений: уравнения с сингулярными свертками, которые являются полными сингулярными уравнениями с ядром Коши и вполне непрерывными операторами специального вида; уравнение с сингулярными свертками и сдвигом; интегральные и интегро-дифференциальные уравнения с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах.

Ключевые слова: криволинейная свертка, интегральное уравнение, решение в квадратурах, краевая задача Римана, гипергеометрическая функция Гаусса.

Библиогр. 16 назв.

УДК 535.338.1+519.6+519.853.6

В. С. СИЗИКОВ, А. В. ЛАВРОВ. **О методе производных разделения большого числа перекрывающихся компонент при наличии шума** (русский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №2. — С. 169–177.

Рассмотрена эффективность метода производных для разделения (сепарации) большого числа перекрывающихся спектральных линий-компонент в условиях зашумленности. Линии моделируются гауссианами или лоренцианами. Выведены аналитические формулы для производных 1-4 порядков, а также для амплитуд и полуширин линий. Найденные число и параметры линий уточняются путем минимизации функционала невязки с ограничениями на решение. Путем моделирования спектра из 7 компонент с использованием 1-4 производных показано, что количество и значения параметров линий хорошо восстанавливаются при отсутствии шумов и при использовании аналитических выражений для производных. При наличии шумов (даже слабых) производные определяются (численно) с большими погрешностями. В этом случае эффективным является использование сглаживающих сплайнов. Однако если использовать сплайн лишь один раз для сглаживания спектра и вычисления 1-й производной, то погрешности резко возрастают с ростом порядка производной от 2-го до 4-го. Поэтому в работе предложено сглаживать сплайнами перед расчетом каждой производной. В этом случае значения производных получаются мало отличающимися от производных при отсутствии помех, а число линий и их параметры определяются достаточно точно.

Ключевые слова: разделение (сепарация) перекрывающихся спектральных линий, метод производных, гауссианы и лоренцианы, число линий, параметры линий, сглаживающие сплайны.

Библиогр. 12 назв.

УДК 519.63

А. Д. ЮНАКОВСКИЙ. **Моделирование высокочастотных полей в нерегулярных волноводах через граничные потенциалы** (русский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №2. — С. 178–189.

Работа посвящена исследованию возможностей создания математических моделей широкополосных волноводных модовых преобразователей и систем в миллиметровом и терагерцовом диапазонах. Их модели должны позволять описывать и изучать процессы распространения СВЧ с использованием существенно (на два порядка) больших дифракционных элементов.

Для построения преобразователей от гироскопа-БВТ к излучателям, а также для исследования влияния локальных возмущений используется модель, учитывающая только огибающие высокочастотных составляющих сигнала, распространяющегося в многомодовом волноводе (так называемое параболическое приближение). Огибающая в этом случае вместо уравнения Гельмгольца удовлетворяет уравнению Шредингера.

Основная идея заключается в определении решения уравнения Шредингера как граничного потенциала относительно внешней границы цилиндрической области, охватывающей нерегулярный волновод, и граничные условия должны быть проверены на реальность — т. е. фактически желаемую границу. Внутри заключающей цилиндрической области колебаний ядра представления решения уже доступны для расчетов.

Ключевые слова: нерегулярный волновод, граничный потенциал, уравнение Шредингера.

Ил. 2. Библиогр. 8 назв.

УДК 517.983.24

Ю. Л. КУДРЯШОВ. **Построение J-самосопряжённой дилатации линейного оператора** (русский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №2. — С. 190–200.

В статье, используя понятие операторного узла для линейного ограниченного оператора и преобразование Кэли, вводится понятие операторного узла для линейного оператора с непустым множеством регулярных точек. С помощью этого понятия производится явное построение J-самосопряжённой дилатации линейного, плотно заданного в гильбертовом пространстве оператора, у которого $-i$ является регулярной точкой. Построенные ранее дилатации являются частным случаем этой дилатации или ей изоморфны.

Ключевые слова: дилатация, J-самосопряжённый оператор, операторный узел.

Библиогр. 6 назв.

ABSTRACTS

MSC 2010: 34K20, 34K60

A. F. VORONIN. **Convolution equations of the first and second kind on a finite interval and boundary value problems for analytic functions** (Russian). Dinamicheskie Sistemy **9(37)**, no.2, 103–115 (2019).

A review of new results on the study of convolution equations of the 1-st and 2-nd kind on a finite interval and related boundary value problems for analytical functions is made. In the work, the relationship between the Markushevich problem and convolution equations is found, and, as a result, new conditions for the correct solvability of the Markushevich problem and the truncated Wiener–Hopf equation are obtained. Riemann boundary value problems that are analogues of the Markushevich problem are considered. Sufficient conditions for the correct solvability of the truncated Wiener–Hopf equation with a symmetric kernel are given.

Keywords: onvolution equations, finite interval, Markushevich problem, Riemann boundary value problems, factorization of matrix functions, factorization indices, stability, unique.

Ref. 16.

MSC 2010: 37A05, 37B10

G. S. OSIPENKO, N. B. AMPILOVA. **On the entropy of symbolic image of a dynamical system** (English). Dinamicheskie Sistemy **9(37)**, no.2, 116–132 (2019).

We consider the estimation of the entropy of a discrete dynamical system by using a symbolic image that is a directed graph constructed by means of a finite covering of phase space. Trajectories of the system are coded by paths on the graph. Flows on symbolic image approximate invariant measures of the system. The maximal metric entropy of a symbolic image is estimated by the logarithm of the maximal eigenvalue of the symbolic image adjacency matrix. There is the flow on which this entropy is achieved. The invariant measure of the maximal entropy is estimated by using this flow.

Keywords: symbolic image, dynamical systems, invariant measure, entropy.

Ref. 20.

MSC 2010: 34K11

V. V. MALYGINA, K. M CHUDINOV. **On oscillation conditions for solutions to delay differential equations** (Russian). Dinamicheskie Sistemy **9(37)**, no.2, 133–146 (2019).

The possibilities of obtaining effective oscillation conditions for solutions to linear non-autonomous first-order differential equations with aftereffect are investigated. We consider estimates, on the functional of the equation parameters, guaranteeing the oscillation of all solutions. These estimates are results of the development of known sufficient oscillation conditions for a linear equation with one concentrated delay, in the form of an estimate of the integral of the coefficient over the delay length. For an equation with several concentrated delays, several results achieved in recent years are compared and new proofs and examples are given that justify the effectiveness of some of the developed methods and their advantages over earlier approaches. A new approach is applied to equations with distributed delay, for which new effective conditions for the oscillation of solutions are obtained.

Keywords: delay differential equation, oscillation, explicit test.

Ref. 19.

MSC 2010: 49-XX

R. A. KHACHATRYAN. **On solutions of differential inclusions with almost convex right-hand side** (Russian). Dinamicheskie Sistemy **9(37)**, no.2, 147–153 (2019).

In the paper, the question of the existence of a differential inclusion $\dot{x}(t) \in a(x)$ under the initial condition $x(t_0) = x_0$ is considered. It is assumed that a multivalued mapping a is upper semicontinuous and the sets $a(x)$ are almost convex.

Keywords: set-valued mapping, almost convex mapping, differential inclusion.

Ref. 14.

MSC 2010: 70F25; 70K60; 70K70

A. S. KULESHOV, I. I. ULYATOVSKAYA. **The Transgression Effect in the Problem of Motion of an Almost Holonomic Pendulum** (Russian). Dinamicheskie Sistemy **9(37)**, no.2, 154–159 (2019).

In 1986 Ya. V. Tatarinov presented the basis of the theory of weakly nonholonomic systems. Mechanical systems with nonholonomic constraints depending on a small parameter are considered. It is assumed that when the value of this parameter is zero, the constraints of such a system become integrable, i.e. in this case we have a family of holonomic systems depending on several arbitrary integration constants. We will assume that these holonomic systems are integrable hamiltonian systems. When the small parameter is not zero, the methods of perturbation theory can be used to represent, to a first approximation, the motion of the system with nonzero parameter values, as a combination of the motion of a slightly modified holonomic system with slowly varying previous integration constants (transgression effect). In this paper we describe the transgression effect in the problem of motion of an almost holonomic pendulum.

Keywords: weakly nonholonomic systems, almost holonomic pendulum, transgression.

Fig. 1. Ref. 3.

MSC 2010: 45E10

A. I. PESCHANSKY. **Integral and Integro-differential Equations of Curvilinear Convolution Type** (Russian). Dinamicheskie Sistemy **9(37)**, no.2, 160–168 (2019).

A review of the results of studies of integral and integro-differential equations of curvilinear convolution type, which is a generalization of the customary convolution in the case of replacing a circle for a curvilinear contour in the complex plane. On the circumference, the kernels of curvilinear convolutions depend on the ratio of the arguments, and in the case of infinite circumference — on the difference of arguments. The following classes of equations are included in the review: equations with singular convolutions, which are complete singular equations with Cauchy kernel and completely continuous operators of a special kind; equation with singular convolutions and a shift; integral and integro-differential equations with hypergeometric Gaussian function in kernels.

Keywords: curvilinear convolution, integral equation, solution in quadratures, Riemann boundary value problem, Gaussian hypergeometric function.

Ref. 16.

MSC 2010: 41A15, 65D07, 65Z05

V. S. SIZIKOV, A. V. LAVROV. **On the derivative method for separating large number of overlapping components in the presence of noise** (Russian). Dinamicheskie Sistemy **9(37)**, no.2, 169–177 (2019).

The efficiency of the derivatives method for separation of an increased number of overlapping spectral lines (components) is considered, in addition, under noisy conditions. The lines are modeled by Gaussians or Lorentzians. Analytical formulas are derived for derivatives of 1-4 orders, as well as for amplitudes and half-widths of lines. Then, the number and the parameters of the lines are refined by minimizing the discrepancy functional. By modeling a spectrum of 7 components using 1-4 derivatives, it is shown that the number and parameters of the lines are well restored in the noise absence and when using analytical expressions for derivatives. And in the presence of noise (even weak), the derivatives are determined (numerically) with large errors. In this case, the use of smoothing splines is very effective. However, if the spline is used only once to smooth the spectrum and calculate the 1st derivative, then the errors will increase sharply with increasing order of the derivative from 2 to 4. Therefore, in this paper, it is proposed to use a spline before calculating each derivative. In this case, the derivatives are slightly different from the derivatives in the absence of noises, and the number of lines and their parameters are determined quite accurately.

Keywords: separation of overlapping spectral lines, derivative method, Gaussian and Lorentzian, number of lines, line parameters, smoothing splines.

Ref. 12.

MSC 2010: 35K20, 35K59, 35Q60, 78A60, 37L10, 34O12

A. D. YUNAKOVSKY. **Modeling of high-frequency fields in irregular waveguides through boundary potentials** (Russian). Dinamicheskie Sistemy **9(37)**, no.2, 178–189 (2019).

The work is devoted to the study of the possibilities of creating mathematical models broadband waveguide systems and mode converters in the millimeter and terahertz ranges. Their models should allow describing and studying the processes of microwave propagation using substantially (two orders of magnitude) large diffraction elements. To construct converters from gyro-BWT to emitters, as well as to study the influence of local disturbances, a model is used that takes into account only the envelopes of the high-frequency components of the signal propagating in a multimode waveguide (the so-called parabolic approximation). The envelope in this case, instead of the Helmholtz equation, satisfies the Schredinger equation. The main idea is to define the solution of the Schredinger equation as a boundary potential with respect to the external the boundary of the cylindrical region enclosing the irregular waveguide, and the boundary conditions should be checked for real – i.e. actually the desired border. Inside the enclosing cylindrical oscillation region of the core, the representations of the solution are already available for calculations.

Keywords: irregular waveguide, boundary potential, Schredinger equation.

Fig. 2. Ref. 8.

MSC 2010: 47A20, 47A48

YU. L. KUDRYASHOV. **Constructing the J-self-adjoint dilatation of a linear operator** (Russian). Dinamicheskie Sistemy **9(37)**, no.2, 190–200 (2019).

Using the notion of an operator node for a bounded linear operator and the Cayley transform, the article introduces the notion of an operator node for a linear operator with a nonempty set of regular points. Using this concept, an explicit construction of a J-self-adjoint dilatation of a linear operator densely defined in a Hilbert space is carried out for which $-i$ is a regular point. The dilations constructed earlier are a special case of this dilatation or are isomorphic to it.

Keywords: dilatation, J-selfadjoint operator, operator knot.

Ref. 6.