

УДК 519.63

Моделирование высокочастотных полей в нерегулярных волноводах через граничные потенциалы

А. Д. Юнаковский

Институт прикладной физики РАН,
Нижний Новгород 603950. E-mail: yun@appl.sci-nnov.ru

Аннотация. Работа посвящена исследованию возможностей создания математических моделей широкополосных волноводных модовых преобразователей и систем в миллиметровом и терагерцевом диапазонах. Их модели должны позволять описывать и изучать процессы распространения СВЧ с использованием существенно (на два порядка) больших дифракционных элементов.

Для построения преобразователей от гироскопа-БВТ к излучателям, а также для исследования влияния локальных возмущений используется модель, учитывающая только огибающие высокочастотных составляющих сигнала, распространяющегося в многомодовом волноводе (так называемое параболическое приближение). Огибающая в этом случае вместо уравнения Гельмгольца удовлетворяет уравнению Шредингера.

Основная идея заключается в определении решения уравнения Шредингера как граничного потенциала относительно внешней границы цилиндрической области, охватывающей нерегулярный волновод, и граничные условия должны быть проверены на реальность — т. е. фактически желаемую границу. Внутри заключающей цилиндрической области колебаний ядра представления решения уже доступны для расчетов.

Ключевые слова: нерегулярный волновод, граничный потенциал, уравнение Шредингера.

Modeling of high-frequency fields in irregular waveguides through boundary potentials

A. D. Yunakovsky

Institute of Applied Physics RAS, Nizhny Novgorod 603950.

Abstract. The work is devoted to the study of the possibilities of creating mathematical models broadband waveguide systems and mode converters in the millimeter and terahertz ranges. Their models should allow describing and studying the processes of microwave propagation using substantially (two orders of magnitude) large diffraction elements. To construct converters from gyro-BWT to emitters, as well as to study the influence of local disturbances, a model is used that takes into account only the envelopes of the high-frequency components of the signal propagating in a multimode waveguide (the so-called parabolic approximation). The envelope in this case, instead of the Helmholtz equation, satisfies the Schredinger equation. The main idea is to define the solution of the Schredinger equation as a boundary potential with respect to the external the boundary of the cylindrical region enclosing the irregular waveguide, and the boundary conditions should be checked for real – i.e. actually the desired border. Inside the enclosing cylindrical oscillation region of the core, the representations of the solution are already available for calculations.

Keywords: irregular waveguide, boundary potential, Schredinger equation.

MSC 2010: 35K20, 35K59, 35Q60, 78A60, 37L10, 34O12

Введение

Работа посвящена исследованию возможностей создания математических моделей широкополосных волноводных систем и преобразователей мод в миллиметровом и терагерцовом диапазонах. Они должны позволять описывать и изучать процессы распространения СВЧ волн, используя существенно (на два порядка) большие по размерам дифракционные элементы.

Развитие современных электронных СВЧ приборов сопровождается повышением их мощности и эффективности, расширением частотных диапазонов, использованием новых режимов работы. Электродинамические системы таких приборов характеризуются наличием сложной геометрии. Оптимизация профилей для улучшения эффективности приборов приводит к перебору большого количества значений параметров. Поэтому задача поиска математических моделей и численных методов, обеспечивающих проведение оптимизации, является актуальной.

Для конструирования преобразователей от гиро-ЛОВ к излучателям, а также для изучения влияния локальных возмущений используется модель, учитывающая лишь огибающие высокочастотных компонент сигнала, распространяющегося в многомодовом волноводе (так называемое параболическое приближение) [1]. Огибающая в этом случае вместо уравнения Гельмгольца удовлетворяет уравнению Шредингера. Задача состоит в том, чтобы подаваемая на вход преобразователя волна должна на выходе трансформироваться в гауссову форму.

Основная идея состоит в том, чтобы задать представление решения уравнения Шредингера в виде граничного потенциала [4, 5] по границе цилиндрической (объемлющей преобразователь, т.е. нерегулярный волновод) области, а граничные условия проверять на реальной — т.е. фактически искомой, границе.

Поиск неизвестной границы и значений весовых функций граничных потенциалов на объемлющей цилиндрической границе можно вести, модифицируя метод Л. И. Шатровского [7, 8] постепенного улучшения управлений, используя в качестве управления разложение весовых функций в ряд Фурье.

Коэффициенты разложения решения уравнения Шредингера в двойной ряд Фурье по угловой и продольной («временной») координатам, получаются в виде быстроосциллирующих интегралов. Основная трудность их вычисления преодолевается с помощью обобщения на двухмерный случай метода Е. Е. Тыртышниковой [6] с использованием рекуррентных соотношений.

1. Математическая модель высокочастотных полей в нерегулярных волноводах

Рассмотрим случай волновода с плавной гофрировкой. Профиль волновода в цилиндрических координатах описывается уравнением:

$$F(r, \varphi, z) = r - f(\varphi, z) = 0; f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi); -\infty < z < +\infty; 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (1.1)$$

где функция $f(\xi)$ непрерывно дифференцируемая и периодическая с периодом 2π . Поля в волноводе удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла

$$\vec{E} = ik \operatorname{rot} \vec{H}, \quad \vec{H} = -ik \operatorname{rot} \vec{E}, \quad (1.2)$$

В случае цилиндрической симметрии электромагнитное поле выражается через электрическую u и магнитную v функции Борнгиса, эквивалентные введению электрического и магнитного векторов Герца с единственными отличными от нуля z -компонентами:

$$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_m, \quad \vec{H} = \vec{H}_e + \vec{H}_m, \quad (1.3)$$

$$\vec{E}_e = \operatorname{rot} \operatorname{rot} (u \vec{i}_z), \quad \vec{H}_e = -i\kappa \operatorname{rot} (u \vec{i}_z), \quad (1.4)$$

$$\vec{E}_m = i\kappa \operatorname{rot} (v \vec{i}_z), \quad \vec{H}_m = \operatorname{rot} \operatorname{rot} (v \vec{i}_z). \quad (1.5)$$

Функции u и v удовлетворяют уравнению Гельмгольца.

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0, \quad \Delta v + \kappa^2 v = 0. \quad (1.6)$$

«Электрическая» и «магнитная» составляющие электрического поля запишутся в виде

$$\vec{E}_e = \begin{cases} E_{er} = \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} \\ E_{e\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial z} \\ E_{ez} = \kappa^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{cases}, \quad \vec{E}_m = \begin{cases} E_{mr} = \frac{i\kappa}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ E_{m\varphi} = -i\kappa \frac{\partial v}{\partial r} \\ E_{mz} = 0 \end{cases}. \quad (1.7)$$

Граничное условие на внутренней поверхности волновода является условием равенства нулю тангенциальной составляющей электрического поля на металлической поверхности и записывается в форме

$$\vec{E}_\tau \Big|_S = 0, \quad S = \{F = r - f(\varphi, z) = 0; f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi); 0 < z < +\infty; 0 \leq \varphi < 2\pi\} \quad (1.8)$$

$$T_s : \left\{ \frac{1}{r} f'_\varphi E_r + E_\varphi \right\} \Big|_S = 0, \quad (1.9)$$

$$T_k : \{f'_z E_r + E_z\} \Big|_S = 0. \quad (1.10)$$

Вектор нормали к поверхности имеет вид

$$\operatorname{grad} F = \left(1, -\frac{1}{r} f'_\varphi, -f'_z \right), \quad \vec{\nu} = \frac{1}{|n|} \operatorname{grad} F, \quad |n| = \sqrt{1 + (f'_\varphi)^2 / r^2 + (f'_z)^2}.$$

Вектора

$$\vec{s} = \frac{1}{|s|} \left(\frac{1}{r} f'_\varphi, 1, 0 \right), \quad |s| = \sqrt{1 + (f'_\varphi)^2 / r^2},$$

$$\vec{k} = \frac{1}{|k|} (f'_z, 0, 1), \quad |k| = \sqrt{1 + (f'_z)^2}, \quad (1.11)$$

лежат в касательной к поверхности плоскости, но не ортогональны между собой.

Введем новые функции $u_1 = ue^{-i\omega z}$, $v_1 = ve^{-i\omega z}$ в предположении, что они медленно меняются по координате z . Тогда уравнение Гельмгольца после сокращения на $e^{i\omega z}$ приобретет вид

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + 2i\omega \frac{\partial u_1}{\partial z} + \Delta_{\perp} u_1 + (\varkappa^2 - \omega^2) u_1 = 0.$$

При наших предположениях мы можем пренебречь второй производной по z .

$$2i\omega \frac{\partial u_1}{\partial z} + \Delta_{\perp} u_1 + (\varkappa^2 - \omega^2) u_1 = 0.$$

Теперь с помощью замены $u = u_1 e^{i(\varkappa^2 - \omega^2)z/2\omega}$ мы можем избавиться от свободного члена и получить классическое «нестационарное» уравнение Шредингера

$$2i \frac{\partial u}{\partial z} + \Delta_{\perp} u = 0.$$

После проведенных замен и сокращения на соответствующие экспоненциальные множители «медленные» компоненты полей приобретут вид

$$\vec{E}_e = \begin{cases} E_{er} = \omega \left[\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{i}{2} \left(1 + \frac{\varkappa^2}{\omega^2} \right) \frac{\partial u}{\partial r} \right], \\ E_{e\varphi} = \frac{\omega}{r} \left[\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial z} + \frac{i}{2} \left(1 + \frac{\varkappa^2}{\omega^2} \right) \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right], \\ E_{ez} = 2i\omega \frac{\partial u}{\partial z}. \end{cases}$$

Здесь мы можем также пренебречь вторыми производными, так как они по порядку малости в $1/\omega^2$ меньше второго слагаемого. Поделив все компоненты на ω окончательно получаем

$$\vec{E}_e = \begin{cases} E_{er} = \frac{i}{2} \left(1 + \frac{\varkappa^2}{\omega^2} \right) \frac{\partial u}{\partial r} \\ E_{e\varphi} = \frac{i}{2r} \left(1 + \frac{\varkappa^2}{\omega^2} \right) \frac{\partial u}{\partial \varphi} \\ E_{ez} = 2i \frac{\partial u}{\partial z} \end{cases}, \quad \vec{E}_m = \begin{cases} E_{mr} = \frac{i\varkappa}{r\omega} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ E_{m\varphi} = -i \frac{\varkappa}{\omega} \frac{\partial v}{\partial r} \\ E_{mz} = 0 \end{cases}. \quad (1.12)$$

В дальнейшем перейдем к привычному обозначению t вместо z .

Решение нестационарного уравнения Шредингера для огибающей сигнала в случае, когда задано значение u только на границе области, можно искать в виде граничных потенциалов типа граничных тепловых потенциалов или в виде функционалов Ляпунова:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-i(x-\xi(\tau))^2/2(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau, \quad (1.13)$$

где $\xi(\tau)$ – уравнение границы.

Основная идея состоит в том, чтобы задать представление решения уравнения Шредингера в виде граничного потенциала по границе цилиндрической, объемлющей нерегулярный волновод, области, а граничные условия проверять на реальной – т. е. фактически искомой, границе. Внутри объемлющей цилиндрической области осцилляции ядра представления решения уже доступны для вычислений. Отметим, что это представление решения автоматически дает $u(r, \varphi, 0) = 0$.

2. Обоснование возможности использования быстроосциллирующего ядра

Из-за осцилляторного поведения ядра оператора более подробно распишем получение производной по t . Трудность заключается в дифференцировании интеграла по переменному верхнему пределу.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-i(x-\xi(\tau))^2/2(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau - \right. \\ \left. - \int_0^{t-\Delta t} \frac{1}{\sqrt{t-\Delta t-\tau}} e^{-i(x-\xi(\tau))^2/2(t-\Delta t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau \right] = \\ = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-i(x-\xi(\tau))^2/2(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau + \\ + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{t-\Delta t} \left[\frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-i(x-\xi(\tau))^2/2(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau - \right. \\ \left. - \int_0^{t-\Delta t} \frac{1}{\sqrt{t-\Delta t-\tau}} e^{-i(x-\xi(\tau))^2/2(t-\Delta t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau \right]. \quad (2.1) \end{aligned}$$

Второе слагаемое дает нам производную под знаком интеграла, то есть полную аналогию с обычным параболическим уравнением

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{t-\Delta t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{t}-\tau}} e^{-i(x-\xi(\tau))^2/2(\tilde{t}-\tau)} \sigma(\tau) \right) + O(\Delta t) \right] d\tau = \\ = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-i(x-\xi(\tau))^2/2(t-\tau)} \sigma(\tau) \right) d\tau. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно первое слагаемое

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-i(x-\xi(\tau))^2/2(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau. \quad (2.2)$$

Сделаем замену переменной интегрирования $t - \tau = \frac{\Delta t}{2s}$. Получим

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\Delta t}} \int_2^\infty \frac{1}{s^{3/2}} e^{-i(x-\xi(t-\Delta t/2s))^2 s/\Delta t} \sigma\left(t - \frac{\Delta t}{2s}\right) ds.$$

Введем функцию $q(s, \Delta t) = (x - \xi(t - \Delta t/2s))^2 s$ и проведем интегрирование по частям

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} i \frac{\sqrt{2\Delta t}}{q'_s(s, \Delta t)} e^{-i(x-\xi(t-\Delta t/2s))^2 s/\Delta t} \sigma\left(t - \frac{\Delta t}{2s}\right) \frac{1}{s^{3/2}} \Bigg|_2^\infty - \\ - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} i \sqrt{2\Delta t} \int_2^\infty \frac{1}{q'_s(s, \Delta t) s^{3/2}} e^{-i(x-\xi(t-\Delta t/2s))^2 s/\Delta t} \times \\ \times \left[-\frac{3}{2s} \sigma\left(t - \frac{\Delta t}{2s}\right) - \frac{q''_{ss}(s, \Delta t)}{q'_s(s, \Delta t)} \sigma\left(t - \frac{\Delta t}{2s}\right) + \frac{\Delta t}{2s^2} \sigma'\left(t - \frac{\Delta t}{2s}\right) \right] ds.$$

Здесь

$$q'_s(s, \Delta t) = (x - \xi(t - \Delta t/2s))^2 - (x - \xi(t - \Delta t/2s)) \xi'(t - \Delta t/2s) \frac{\Delta t}{s},$$

$$q''_{ss}(s, \Delta t) = 2(x - \xi(t - \Delta t/2s)) \xi'(t - \Delta t/2s) \frac{\Delta t}{s^2} + (\xi'(t - \Delta t/2s))^2 \frac{(\Delta t)^2}{2s^3} - \\ - (x - \xi(t - \Delta t/2s)) \xi''(t - \Delta t/2s) \frac{(\Delta t)^2}{2s^3}.$$

Очевидно, что при $\Delta t \rightarrow 0$ подынтегральное выражение ограничено по модулю при ограниченных ξ' и ξ'' и сам интеграл абсолютно сходится. За счет множителя $\sqrt{\Delta t}$ мы имеем достаточно медленное стремление первого слагаемого в I к нулю.

В случае двух пространственных переменных, когда задано значение u на границе цилиндра радиуса ρ решение можно искать в виде

$$u(r, \varphi, t) = \int_0^t \int_0^{2\pi} \frac{1}{t-\tau} e^{-i(r^2-2r\rho \cos(\varphi-\psi)+\rho^2)/2(t-\tau)} \sigma(\psi, \tau) d\psi d\tau. \quad (2.3)$$

Воспользуемся известным разложением

$$e^{ia \cos \psi} = e^{ia \sin(\pi/2-\psi)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n/2} J_n(a) e^{-in\psi}.$$

Подставив его в u и поменяв порядок суммирования и интегрирования, получим

$$\begin{aligned} u(r, \varphi, t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^t \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\pi n/2}}{t-\tau} e^{-i(r^2+\rho^2)/2(t-\tau)} J_n(r\rho/(t-\tau)) e^{-in(\varphi-\psi)} \sigma(\psi, \tau) d\psi d\tau = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\pi/2-\varphi)} \int_0^t \frac{1}{t-\tau} e^{-i(r^2+\rho^2)/2(t-\tau)} J_n(r\rho/(t-\tau)) \sigma_n(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $\sigma_n(\tau)$ — коэффициент разложения функции $\sigma(\psi, \tau)$ в ряд Фурье. При дифференцировании получившихся в (16) интегралов по переменному верхнему пределу возникают те же трудности, что и в одномерном случае. Найдем предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^t \frac{1}{t-\tau} e^{-i(r^2+\rho^2)/2(t-\tau)} J_n(r\rho/(t-\tau)) \sigma_n(\tau) d\tau.$$

Воспользовавшись асимптотическим представлением функции Бесселя, выделим главную часть рассматриваемого выражения

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^t \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi r\rho(t-\tau)}} e^{-i(r^2+\rho^2)/2(t-\tau)} \cos(r\rho/(t-\tau) - \pi/4) \sigma_n(\tau) d\tau.$$

Легко видеть, что получившееся выражение аналогично (2.2).

3. Численная модель

Преобразуем представление решения (2.4) к виду

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\pi/2-\varphi)} \int_0^t \frac{1}{\tau} e^{-i(r^2+\rho^2)/2\tau} J_n(r\rho/\tau) \sigma_n(t-\tau) d\tau.$$

Считая, что $0 \leq \tau \leq t \leq T$, зададим функции $\sigma_n(t-\tau)$ с помощью рядов Фурье:

$$\sigma_n(t-\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sigma_{n,m} e^{i2\pi mt/T} e^{-i2\pi m\tau/T}. \quad (3.1)$$

Сделаем замену переменной интегрирования $\tau = t/s$ и обозначим

$$u_{n,m}(r, t) = (i)^n e^{i2\pi mt/T} \int_1^{\infty} \frac{1}{s} e^{-i(r^2+\rho^2)s/2t} J_n(r\rho s/t) e^{2\pi mt/Ts} ds. \quad (3.2)$$

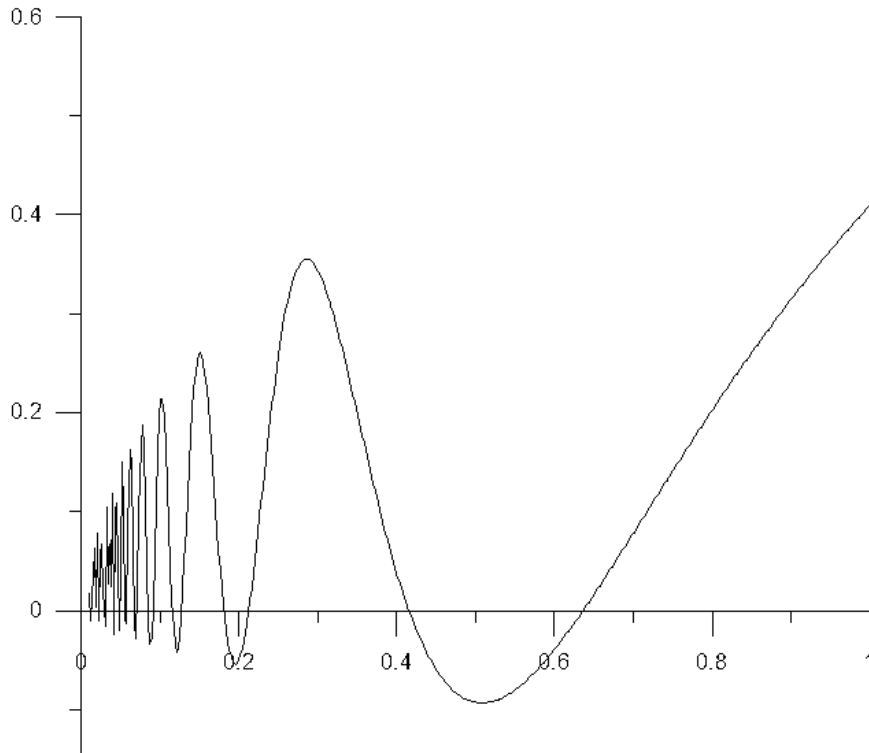


Рис. 1. Рисунок быстро осциллирующего ядра граничного потенциала.

Окончательно получаем

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in\varphi} \sigma_{n,m} u_{n,m}(r, t). \quad (3.3)$$

Введем обозначение:

$$A_{n,m,l}(a, b, c) = \int_1^{\infty} \frac{1}{s^l} e^{-i(as+b/s)} J_n(cs) ds, \quad (3.4)$$

где

$$a = (r^2 + \rho^2)/2t, \quad b = 2\pi mt/T, \quad c = r\rho/t. \quad (3.5)$$

Проинтегрировав это выражение по частям, получим рекуррентное соотношение

$$A_{n,m,l}(a, b, c) = \frac{1}{c} e^{-i(a+b)} J_{n-1}(c) - i \frac{a}{c} A_{n-1,m,l}(a, b, c) + \\ + \frac{n-1-l}{c} A_{n-1,m,l+1}(a, b, c) + i \frac{b}{c} A_{n-1,m,l+2}(a, b, c). \quad (3.6)$$

Здесь удобно ввести обозначения:

$$a/c = \frac{1}{2} \left(\frac{r}{\rho} + \frac{\rho}{r} \right), \quad b/c = \frac{2\pi mt^2}{Tr\rho}, \quad 1/c = \frac{t}{r\rho}. \quad (3.7)$$

Выпишем отдельно эти соотношения для $n = 0$ и $n = 1$ при фиксированных a, b, c :

$$\begin{aligned} A_{0,m,l} &= -\frac{1}{c}e^{-i(a+b)}J_1(c) + i\frac{a}{c}A_{1,m,l} + \frac{l+1}{c}A_{1,m,l+1} - i\frac{b}{c}A_{1,m,l+2}, \\ A_{1,m,l} &= \frac{1}{c}e^{-i(a+b)}J_0(c) - i\frac{a}{c}A_{0,m,l} - \frac{l+1}{c}A_{0,m,l+1} + i\frac{b}{c}A_{0,m,l+2}. \end{aligned}$$

Из этой пары соотношений находим

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right)A_{0,m,l} &= -\frac{1}{c}e^{-i(a+b)}J_1(c) + i\frac{a}{c^2}e^{-i(a+b)}J_0(c) + \\ &+ \frac{l+1}{c}A_{1,m,l+1} - i\frac{b}{c}A_{1,m,l+2} - i\frac{a(l+1)}{c^2}A_{0,m,l+1} - \frac{ab}{c^2}A_{0,m,l+2}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right)A_{1,m,l} &= \frac{1}{c}e^{-i(a+b)}J_0(c) + i\frac{a}{c^2}e^{-i(a+b)}J_1(c) + \\ &+ \frac{l+1}{c}A_{0,m,l+1} + i\frac{b}{c}A_{0,m,l+2} - i\frac{a(l+1)}{c^2}A_{1,m,l+1} - \frac{ab}{c^2}A_{1,m,l+2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Посчитав $A_{0,m,l}(a, b, c)$ и $A_{1,m,l}(a, b, c)$ при $l = l_{max}$ и $l = l_{max} - 1$, что позволяет взять за верхний предел интегрирования $s_{max} = 2$, мы можем с достаточной точностью по рекуррентному соотношению (3.6) посчитать $A_{n,m,1}(a, b, c)$ и $A_{n,m,0}(a, b, c)$. Чтобы найти $A_{n_{max},m,0}(a, b, c)$ при $n_{max} = 32$ по рекуррентному соотношению (3.6), нужно знать $A_{n_{max}-1,m,2}(a, b, c)$, и так далее, при уменьшении n на единицу, l прибавляется на две единицы. Таким образом, при $n = 0, 1$ нужно иметь $l_{max} = 2n_{max} = 64$.

Теперь найдем производные от $u_{n,m}(r, t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_{n,m}(r, t) = (i2\pi m/T)u_{n,m}(r, t), \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}u_{n,m}(r, t) &= (i)^n e^{i2\pi mt/T} \int_1^\infty e^{-i(r^2+\rho^2)s/2t} \left[-i\frac{r}{t}J_n(r\rho s/t) + \right. \\ &\left. + \frac{\rho}{2t}(J_{n-1}(r\rho s/t) - J_{n+1}(r\rho s/t)) \right] e^{2\pi mt/Ts} ds. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Распишем функцию $u_{n,m}(r, t)$ и ее производные через наши обозначения:

$$\begin{aligned} u_{n,m}(r, t) &= (i)^n e^{i2\pi mt/T} A_{n,m,1}(a, b, c), \\ \frac{\partial}{\partial t}u_{n,m}(r, t) &= (i2\pi m/T)(i)^n e^{i2\pi mt/T} A_{n,m,1}(a, b, c), \\ \frac{\partial}{\partial r}u_{n,m}(r, t) &= (i)^n e^{i2\pi mt/T} \left[-i\frac{r}{t}A_{n,m,0}(a, b, c) + \frac{\rho}{2t}(A_{n-1,m,0} - A_{n+1,m,0}) \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Естественно, что случай $n = 0$ расписывается отдельно.

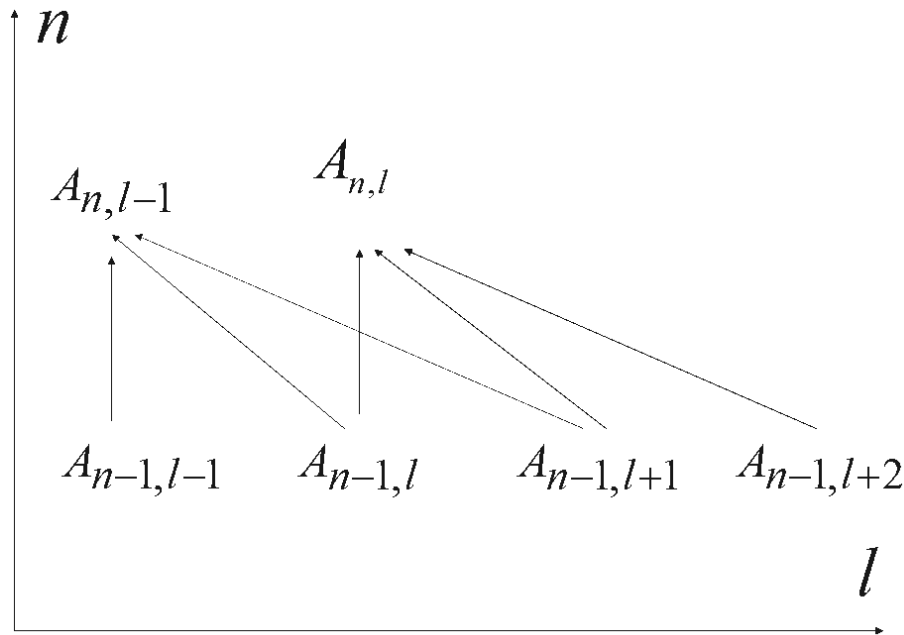


Рис. 2. Схема расчета коэффициентов $A_{n,m,l}$. Чтобы не загромождать рисунок, индекс m опущен.

Поля внутри преобразователя образуются падающей при $t = 0$ модой $\vec{E}_{in}(r, \varphi)$, $\vec{H}_{in}(r, \varphi)$ не обладающей азимутальной симметрией. Она генерирует отраженные поверхностью преобразователя электрическую и магнитную составляющие поля, описываемые граничными потенциалами вида (1.13) для электрической u и магнитной v функций Борнуса. На выходе преобразователя при $t = T$ мы хотим получить азимутально симметричное поле, представляющее собой гауссов пучок.

Подставляя разность этих полей в граничные условия (1.9), (1.10) при заданной граничной поверхности (1.8), мы получаем линейную систему уравнений для коэффициентов разложения функций σ_u , σ_v в двойные ряды Фурье по φ и t . Решив эту систему, мы находим электромагнитное поле в точке $t = T$.

Таким образом, мы получили задачу управления: варьируя границу преобразователя — функцию $f(r, t)$ из (1.8), мы стремим поле в точке $t = T$ к гауссову пучку.

Заключение

Задавая значения полей и их производных на поверхности (1.1), мы получаем линейную алгебраическую систему уравнений для коэффициентов из (3.3) на объемлющей цилиндрической поверхности. Мы избавлены от решения нестационарного уравнения Шредингера в трехмерной области сложной формы и от нахождения решения вольтерровского интегрального уравнения на сложной поверхности с быстроосциллирующим ядром.

Кроме того, мы получили возможность быстро считать матричные элементы системы линейных уравнений для коэффициентов разложения функций σ_u , σ_v в двойные ряды Фурье. Как хорошо известно [3], счет матричных коэффициентов занимает основное время счета в задачах электродинамики.

Список цитируемых источников

1. *Landau L. D., Lifshits E. M.* 2005 Теоретическая физика, Vol. 8 (М.: Fizmatlit) p. 656
2. *Юнаковский А. Д.* Моделирование нелинейного уравнения Шредингера // Н. Новгород: 1996 г. 160 с.
<http://libgen.io/ads.php?md5=E3B7C9412BD4D71AF6A18786E479F77B>
Yunakovsky A. D. Modeling of the nonlinear Schrodinger equation // N. Novgorod: 1996 160 p.
3. *Ильин В. П.* Численные методы решения задач электрофизики. – М.: Наука, 1985. – 336 с.
Ильин В. П. Numerical methods for solving problems of Electrophysics. – Moscow: Nauka, 1985. – 336 p.
4. *Юнаковский А. Д.* Моделирование высокочастотных полей в нерегулярных волноводах через граничные потенциалы // Труды XIV научной конференции по радиофизике, ННГУ, 2010. – С. 271-273.
Yunakovsky A. D. Modeling of high-frequency fields in irregular waveguides through boundary potentials // Proceedings of the XIV scientific conference on Radiophysics, NNSU, 2010. – Pp. 271-273.
5. *Юнаковский А. Д.* Моделирование высокочастотных полей в нерегулярных волноводах через граничные потенциалы // International Conference KROMSH-2010 "The Twenty First Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Book of Abstracts, Crimea, Laspi-Batiliman, September 17-19, pp. 55-56.
Yunakovsky A. D. Modeling of high-frequency fields in irregular waveguides through boundary potentials // International Conference KROMSH-2010 "The Twenty First Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Book of Abstracts, Crimea, Laspi-Batiliman, September 17-19, Pp. 55-56.
6. *Тыртышников Е. Е.* Модификации методов вычисления интегралов Чебышева-Лагерра и Гаусса-Лежандра // ЖВМ и МФ (2004).
Tyrtysnikov E. E. Modifications of methods for calculating Chebyshev-Laguerre and Gauss-Legendre integrals // ZhVM and MF (2004).
7. *Шатровский Л. И.* Об одном численном методе решения задач оптимального управления // ЖВМ и МФ, 1962, №2.
Shatrovsky L. I. On a numerical method for solving optimal control problems // ZhVM and MF, 1962, No. 2.
8. *Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Математическая теория конструирования систем управления / Учеб. для студентов вузов, обучающихся по специальности «Прикладная математика». – М.: Высш. шк., 2003. – 614 с.

Afanasyev V.N., Kolmanovsky V.B., Nosov V.R. Mathematical theory of control systems design / Studies. for University students studying in the specialty «Applied mathematics». – М.: No. SHK., 2003. – 614 p.

Получена 21.05.2019