Динамические системы, 2019, том 9(37), №2, 160–168

УДК 517.968

Интегральные и интегро-дифференциальные уравнения типа криволинейной свертки

А. И. Песчанский

Севастопольский государственный университет,
Севастополь 299053. *E-mail: peschansky_ sntu@mail.ru*

Аннотация. Приводится обзор результатов исследований интегральных и интегро-дифференциальных уравнений типа криволинейной свертки, которая является обобщением обычной свертки в случае замены прямой или окружности на криволинейный контур в комплексной плоскости. На замкнутом контуре ядра криволинейных сверток зависят от отношения аргументов, а в случае бесконечного контура — от разности аргументов. В обзор включены следующие классы уравнений: уравнения с сингулярными свертками, которые являются полными сингулярными уравнениями с ядром Коши и вполне непрерывными операторами специального вида; уравнение с сингулярными свертками и сдвигом; интегральные и интегро-дифференциальные уравнения с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах.

Ключевые слова: криволинейная свертка, интегральное уравнение, решение в квадратурах, краевая задача Римана, гипергеометрическая функция Гаусса.

Integral and Integro-differential Equations of Curvilinear Convolution Type

A. I. Peschansky

Sevastopol State University, Sevastopol 299053.

Abstract. A review of the results of studies of integral and integro-differential equations of curvilinear convolution type, which is a generalization of the customary convolution in the case of replacing a circle for a curvilinear contour in the complex plane. On the circumference, the kernels of curvilinear convolutions depend on the ratio of the arguments, and in the case of infinite circumference — on the difference of arguments. The following classes of equations are included in the review: equations with singular convolutions, which are complete singular equations with Cauchy kernel and completely continuous operators of a special kind; equation with singular convolutions and a shift; integral and integro-differential equations with hypergeometric Gaussian function in kernels.

Keywords: curvilinear convolution, integral equation, solution in quadratures, Riemann boundary value problem, Gaussian hypergeometric function.

MSC 2010: 45E10

Введение

Профессор Юрий Иосифович Черский (1929-2015) проявлял большой интерес к аналитическим методам решения интегральных уравнений. Им была предложена обширная программа исследований в этом направлении, одним из пунктов которой является изучение интегральных уравнений типа свертки на криволинейных контурах в комплексной плоскости, заменяющих прямую или окружность [1]. Строгое определение криволинейной свертки с использованием аппарата обобщенных функций предложено Ю. И. Черским [2].

Пусть Γ — простая гладкая замкнутая ориентированная кривая на комплексной плоскости, которая лежит в кольце $T = \{z \mid r < |z| < R\}$ и разбивает плоскость на две области: G^+ $(0 \in G^+)$ и G^- $(\infty \in G^-)$. Оператором криволинейной свертки в пространстве $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, называется оператор вида

$$(Kf)(t) = (\mathbf{L}\, k_n\, \mathbf{L}^{-1} f)(t),$$

где $\mathbf{L}$ — преобразование Лорана, которое вводится с помощью обобщенных функций, а последовательность комплексных чисел $\{k_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ — мультипликатор этого преобразования [2]. Для оператора криволинейной сверки K справедливо представление

$$(Kf)(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} K^+\left(\frac{t}{\tau}\right) f(\tau)\frac{d\tau}{\tau} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} K^-\left(\frac{t}{\tau}\right) f(\tau)\frac{d\tau}{\tau},$$

где $K^{\pm}(t/\tau)$ понимаются как граничные значения соответственно функций $K^{\pm}(z/\tau)$ при $z \to t \in \Gamma$, аналитических соответственно в областях G^+ и G^-.

Если мультипликатор $\{k_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ преобразования Лорана удовлетворяет условию $|\, k_n \,| \geq c > 0$, $c = const$, $|\, n \,| \geq n_0 \geq 0$, то криволинейная свертка называется сингулярной. В частности, оператор $(S_\Gamma f)(t) = (\pi i)^{-1} \int_\Gamma (\tau - t)^{-1} f(\tau) d\tau$ сингулярного интегрирования с ядром Коши является сингулярной криволинейной сверткой, соответствующей мультипликатору вида $k_n = sgn(n + 1/2)$, $n \in Z$.

Сделаем краткий обзор изученных уравнений с криволинейными свертками.

1. Интегральные и интегро-дифференциальные уравнения на замкнутой кривой

1. *Уравнение с сингулярными криволинейными свертками на замкнутом контуре*

$$\begin{gathered}[a(t)c(t) + b(t)d(t)]\, f(t) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{a(t)c(\tau) - b(t)d(\tau)}{\tau - t} f(\tau) d\tau + \\ + \lambda\frac{a(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} K^+\left(\frac{t}{\tau}\right) c(\tau) f(\tau)\frac{d\tau}{\tau} + \lambda\frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} K^-\left(\frac{t}{\tau}\right) d(\tau) f(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = g(t), \;\; t \in \Gamma,\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ — заданные непрерывные, не обращающиеся в нуль на Γ функции; $\lambda \in C$; $\sum_{-\infty}^{\infty} k_n z^n = K^+(z) + K^-(z) = K(z)$ — аналитическая в кольце $r/R < |z| < R/r$ функция. Уравнение (1) является полным сингулярным уравнением с вполне непрерывным оператором специального вида и обобщает уравнение, исследованное Ю. И. Черским [3]. Решение (1) в замкнутой форме получается в результате сведения этого уравнения к двум задачам Римана и обращению оператора сингулярной криволинейной свертки

$$\phi(t) + \frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} K\left(\frac{t}{\tau}\right)\phi(\tau)\frac{d\tau}{\tau}.$$

2. *Интегральное уравнение с сингулярными свертками и сдвигом на замкнутом контуре*

$$[a(t)c(t)+b(t)d(t)]\ f(t) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{a(t)c(\tau)\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)} - \frac{b(t)d(\tau)}{\tau - t}\right] f(\tau)d\tau +$$
$$+a(t)\int\limits_{\Gamma} K^+\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right)c(\tau)f(\tau)\frac{d\alpha(\tau)}{\alpha(\tau)} + b(t)\int\limits_{\Gamma} K^-\left(\frac{t}{\tau}\right)d(\tau)f(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = g(t),\ \ t\in\Gamma, \tag{1.2}$$

где заданные функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $d(t)$ удовлетворяют условию Гельдера и не обращаются в нуль на Γ функции; $\alpha(t)$ — заданная функция сдвига контура Γ на аналогично расположенный в кольце T контур γ. Заданные функции $K^+(z)$ и $K^-(z)$ аналитические соответственно в областях $|\,z\,| < R/r$ и $|\,z\,| > r/R$, причем коэффициенты разложения этих функций в ряды Тейлора соответственно в окрестности $z = 0$ и $z = \infty$ удовлетворяют условиям

$$|\,k_n(R/r)^n\,| \le const,\ \ n \ge 0; |\,k_n(r/R)^n\,| \le const,\ \ n < 0.$$

Решение уравнения (2) в квадратурах удается в результате представления оператора в левой части уравнения в виде в виде композиции трех нетеровых операторов, один из которых является оператором сингулярной криволинейной свертки [2].

3. *Интегральное уравнение с криволинейными свертками и гипергеометрической функцией в ядре* [4]

$$\frac{a(t)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} F\left(\alpha,1;\gamma;\frac{t}{\tau}\right)c(\tau)f(\tau)\frac{d\tau}{\tau} + \frac{b(t)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} F\left(\alpha,1;\gamma;\frac{\tau}{t}\right)d(\tau)f(\tau)\frac{d\tau}{t} = g(t),\ t\in\Gamma, \tag{1.3}$$

где $\gamma \ge \alpha; \alpha,\gamma \ne 0,-1,-2,\ldots$. Под $F(\alpha,1;\gamma;t/\tau)\,(t,\,\tau\in\Gamma)$ понимается граничное значение на Γ ветви гипергеометрической функции Гаусса, определяемой в окрестности $z = 0$ рядом

$$F\left(\alpha,\ 1;\ \gamma;\ \frac{z}{\tau}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n}\left(\frac{z}{\tau}\right)^n\ \ (\tau\in\Gamma);$$

$F(\alpha,\,1;\,\gamma;\,\tau/t)$ $(t,\,\tau\ \in\ \Gamma)$ — граничное значение на Γ аналогично выбранной ветви функции $F(\alpha,\,1;\,\gamma;\,\tau/z)$ $(z\,\in\,G^-)$. При $\alpha\,=\,\gamma$ (1) есть особое интегро-дифференциальное уравнение с ядром Коши. Если $\gamma\,=\,1,\ 0\,<\,\alpha\,<\,1$, то (3) есть уравнение типа Абеля с весом на замкнутой кривой

$$\frac{a(t)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{(\tau)f(\tau)}{(1-t/\tau)^{\alpha}}\frac{d\tau}{\tau}+\frac{b(t)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d(\tau)f(\tau)}{(1-\tau/t)^{\alpha}}\frac{d\tau}{t}=g(t).$$

Другим частным случаем уравнения (3) $(F(1,\ 1;\ 2;\ \varsigma)=-\varsigma^{-1}\ln(1-\varsigma))$ является уравнение с логарифмическим ядром

$$\frac{a(t)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\ln\left(1-\frac{t}{\tau}\right)c(\tau)f(\tau)\frac{d\tau}{t}+\frac{b(t)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\ln\left(1-\frac{\tau}{t}\right)d(\tau)f(\tau)\frac{d\tau}{\tau}=g(t).$$

Для корректной постановки вопроса о нетеровости таких уравнений в случае $\gamma>\alpha$ используется метод нормализации оператора с незамкнутым образом. Пространство $L_p^{\eta}(\Gamma)$, $\eta\,=\,\gamma-\alpha$, правых частей уравнений, описывается как образ некоторого оператора криволинейной свертки, играющего роль оператора дробного интегрирования на замкнутой кривой:

$$L_p^{\eta}(\Gamma)=\left\{f(t)|\,f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\left[\tau^{-1}F\left(1,1;1+\eta;\frac{t}{\tau}\right)+t^{-1}F\left(1,1;n1+\eta;\frac{\tau}{t}\right)\right]\phi(\tau)d\tau,\right\},$$

$$\phi(t)\in L_p(\Gamma).$$

Описание пространства $L^{\eta}_{\mathrm{p}}(\Gamma)$ в терминах модифицированных производных Маршо для случая $0<\eta<1$ дано в [5], а для показателя $\eta>1$ — в [6].

Решение уравнения (3) в явном виде получается в результате решения двух характеристических сингулярных уравнений с ядром Коши и обращения оператора криволинейной свертки $F_{\alpha,\gamma}$, определяемой выражением

$$(F_{\alpha,\gamma}\phi)(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}F\left(\alpha,\,1;\,\gamma;\,\frac{t}{\tau}\right)\phi(\tau)\frac{d\tau}{\tau}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}F\left(\alpha,\,1;\,\gamma;\,\frac{\tau}{t}\right)\phi(\tau)\frac{d\tau}{t}.$$

Обратный оператор $F^{-1}_{\alpha,\gamma}$ находится по формуле

$$\left(F^{-1}_{\alpha,\gamma}g\right)(t)=\frac{1}{2\pi i}\left(t\frac{d}{dt}+\gamma-1\right)\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{m+1}F\left(\gamma,1;\alpha+m+1;\frac{t}{\tau}\right)\left(D^{(1)}_m g\right)(\tau)\frac{d\tau}{\tau}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\left(t\frac{d}{dt}-\gamma+2\right)\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{\tau}{t}\right)^{m+1}F\left(\gamma,1;\alpha+m+1;\frac{\tau}{t}\right)\left(D^{(2)}_m g\right)(\tau)\frac{d\tau}{t}+\left(T^{(1)}_m+T^{(2)}_m\right)g(t),$$

где

$$\left(T_m^{(2)} g\right)(t)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{m}\frac{(\gamma)_n}{(\alpha)_n}t^{-n-1}\int\limits_{\Gamma} g(\tau)\,\tau^n d\tau,$$

$$\left(D_m^{(2)}\right)(t)=\frac{(-1)^{m+1}}{(\alpha)_{m+1}}\prod_{i=3}^{m+2}\left(t\frac{d}{dt}-\gamma+i\right)g(t),\ \ m\geq 1;\ \ \left(D_0^{(2)} g\right)(t)=-\frac{1}{\alpha}g(t).$$

На функциях $g(t)$ из пространства С. Л. Соболева $W_{\mathrm{p}}^{m+1}(\Gamma)$ выражение для оператора $F_{\alpha,\gamma}^{-1}$ преобразуется к виду

$$\left(F_{\alpha,\gamma}^{-1} g\right)(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} F\left(\gamma,\,1;\,\alpha+m+1;\,\frac{t}{\tau}\right)\left[\prod_{j=0}^{m}\left(1+\frac{1}{\alpha+j}\tau\frac{d}{d\tau}\right)\right]g(\tau)\frac{d\tau}{\tau}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} F\left(\gamma,\,1;\,\alpha+m+1;\,\frac{\tau}{t}\right)\left[\prod_{j=0}^{m}\left(1-\frac{1}{\alpha+j}(\tau\frac{d}{d\tau}+1)\right)\right]g(\tau)\frac{d\tau}{t}.$$

4. *Интегро-дифференциальное уравнение с криволинейными свертками и гипергеометрической функцией в ядре* [7]

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{m}a_k(t)\int\limits_{\Gamma} F\left(\alpha,1;\gamma;\frac{t}{\tau}\right)c_k(\tau)f^{(k)}(\tau)\frac{d\tau}{\tau}+\\ +\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{s}b_k(t)\int\limits_{\Gamma} F\left(\alpha,1;\gamma;\frac{\tau}{t}\right)d_k(\tau)f^{(k)}(\tau)\frac{d\tau}{t}=g(t),\end{gathered}\tag{1.4}$$

где $\gamma\geq\alpha$; $\alpha,\gamma\neq 0,-1,-2,\ldots$. Уравнение (4) сводится к эквивалентному уравнению без производных в пространстве $L_p(\Gamma)$ с помощью оператора криволинейной свертки $K_{m,s}$, который определяется формулой

$$(K_{m,s}\phi)(t)=\left(\mathbf{L}\frac{1}{P_m(n)}(L^{-1}P^+\phi)_n\right)(t)+\left(\mathbf{L}\frac{1}{Q_s(n)}(L^{-1}P^-\phi)_n\right)(t)\tag{1.5}$$

Здесь $P_m(x)$ и $Q_s(x)$ — многочлены степени m и s соответственно; $P^{\pm}$ — проекционные операторы, связанные с оператором S сингулярного интегрирования с ядром Коши: $2P^{\pm}=(I\pm S)$, I — единичный оператор. Между известными интегральными представлениями кусочно-аналитических функций, которые используются при исследовании интегро-дифференциальных уравнений, и оператором свертки $K_{m,s}$ существует связь. Если в формуле (5) положить $P_m(x)=(x+1)^m$, $Q_s(x)=x^s$, то оператор $K_{m,s}$ принимает вид изоморфизма $K_{m,s}\phi=[\Lambda^+]^m\phi+[\Lambda^-]^s\phi$,

$$\left(\Lambda^+\varphi\right)(t)=\frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\ln\left(1-\frac{t}{\tau}\right)\varphi(\tau)\frac{d\tau}{t},\ \ \left(\Lambda^-\varphi\right)(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\ln\left(1-\frac{t}{\tau}\right)\varphi(\tau)\frac{d\tau}{t},$$

с помощью которого Р. С. Сакс исследует системы интегро-дифференциальных уравнений [8]. В случае $P_m(x) = (x+1)\cdot\dots\cdot(x+m)$; $Q_s(x) = x\cdot\ldots\cdot(x-s+1)$ оператор криволинейной свертки тесно связан с интегральными представлениями Ю. М. Крикунова, Р. С. Исаханова, В. С. Рогожина, Н. П. Векуа и В. И. Жегалова [9-14].

2. Интегральные уравнения на бесконечном контуре

Ядра интегральных уравнений типа криволинейной свертки на бесконечной кривой зависят от разности аргументов. Пусть Γ — бесконечный замкнутый контур Ляпунова, лежащий в полосе $-\nu+\varepsilon \le \operatorname{Im} z \le \mu-\varepsilon$, $\mu > \varepsilon > 0$, $\nu > \varepsilon > 0$, причем угол наклона касательной к кривой с действительной осью по абсолютной величине не больше $\pi/2-\delta$, $\delta > 0$.

5. *Интегральные уравнения с сингулярными криволинейными свертками*

$$[a(t)+b(t)]\; f(t) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{a(\tau)-b(t)}{\tau - t} f(\tau)d\tau + \\ + \int\limits_{\Gamma} K^{+}(t-\tau)\, a(\tau) f(\tau)d\tau - b(t)\int\limits_{\Gamma} K^{-}(t-\tau)\, df(\tau)d\tau = g(t),\;\; t\in\Gamma, \tag{2.1}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ — заданные непрерывные, не обращающиеся в нуль на Γ функции; $K^{+}(z)$ и $K^{-}(z)$ — функции, аналитические при $\operatorname{Im} z > -\nu$ и $\operatorname{Im} z < \mu$ соответственно;

$$[a(t)+\alpha\, b(t)]\; f(t) + a(t)\int\limits_{\Gamma} K(t-\tau)\, f(\tau)d\tau + b(t)\int\limits_{\Gamma} N(t-\tau)\, f(\tau)d\tau = g(t),\;\; t\in\Gamma, \tag{2.2}$$

где $a(t)$, $b(t)$ — заданные непрерывные функции на Γ, не имеющие нулей; $K(z) = \alpha/\pi z + K_0(z)$, $\alpha \in C$, $K_0(z)$ — такая аналитическая в полосе $|\operatorname{Im} z| < \mu+\nu$ функция, что $|\,k_0(t)\,| \le B\exp[-(\mu+\nu)\;|\,t\,|$, где B — постоянная, а

$$k_0(t) = (2\pi)^{-1/2}\int\limits_{R} K_0(x)\exp(-ixt)dx,\;\; N(z) = -(\pi z)^{-1} + N_0(z)$$

$N_0(x)$ — преобразование Гильберта функции $K_0(x) : N_0(x) = i\;(S_R K_0)\,(x)$, $x\in R$.

В пространстве $L_2(\Gamma)$ уравнения (6) и (7) решаются с помощью задач Римана и обращению операторов сингулярной криволинейной свертки [15, 16].

Заключение

Использование понятия криволинейной свертки позволяет получить в явном виде решение интегральных уравнений на замкнутом контуре, которые обобщают такие известные уравнения, как характеристическое сингулярное с ядром Коши, со степенными и логарифмическими ядрами, а также может быть полезным при исследовании краевых задач типа задачи Римана с краевыми условиями, содержащими производные. Методы обращения операторов и полученные формулы решения соответствующих уравнений можно использовать при приближенном решении широкого класса линейных интегральных уравнений на криволинейном контуре в комплексной плоскости.

Список цитируемых источников

1. *Черский Ю. И.* Уравнения, разрешимые в квадратурах // Научные труды Юбилейного семинара по краевым задачам, посвященного 75-летию со дня рождения академика АН БССР Ф. Д. Гахова. — Минск: Изд-во Университетское, 1985. — С. 120-128.

   Chersky Yu. I. Equations solvable in quadratures // Scientific works of the Jubilee seminar on boundary value problems dedicated to the 75th anniversary of the birth of academician of the Academy of Sciences of the BSSR F. D. Gakhov. – Minsk: Izd. Universitetskoe, 1985. 120-128 (in Russian)

2. *Песчанский А. И., Черский Ю. И.* Интегральное уравнение с криволинейными свертками на замкнутом контуре // Украинский математический журнал. – 1984. – Т. 36. – № 3. – С. 335-340.

   Peschanskij, A. I.; Cherskij, Yu. I. An integral equation with curvilinear convolutions on a closed contour. Ukr. Math. J. 36, 301-305 (1984).

3. *Черский, Ю. И.* Интегральные уравнения, сводящиеся к двум задачам Римана // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 248. – № 4. – С. 802-805.

   Cherskij, Yu. I. Integral equations reducing to two Riemann problems. Sov. Math. Dokl. 20, 1076-1079 (1979).

4. *Песчанский, А. И.* Интегральные уравнения типа криволинейной свертки с гипергеометрической функцией в ядре // Известия вузов. Математика. – 2019. – № 9. – С. 50-62.

   Peschanskii, A. I. Integral Equations of Curvilinear Convolution Type with Hypergeometric Function in a Kernel. Russian Mathematics 63, No.9, 43-54 (2019).

5. *Песчанский, А. И.* Об описании пространства дробных интегралов типа криволинейной свертки // Известия вузов. Математика. – 1989. – № 7. – С. 29-39.

   Peschanskij, A. I. Description of the space of fractional integrals of curvilinear convolution type. Sov. Math. 33, No. 7, 37-50 (1989).

6. *Песчанский А. И.* Об описании пространства $L_\mathrm{p}^\eta(\Gamma)$ дробных интегралов типа криволинейной свертки // Материалы XXY междунар. науч.-техн. конф. «Прикладные задачи математики, Севастополь, 18-22 сентября 2017» – Севастополь: Изд-во СевГУ, 2017. – С. 104-108.

   Peschansky A. I. on the description of the space $L_\mathrm{p}^\eta(\Gamma)$ of fractional integrals of the curvilinear convolution type // Materials of XXY international. science.-tech. Conf. «Applied problems of mathematics, Sevastopol, September 18-22, 2017»– Sevastopol: publishing house of Sevstu, 2017. – Pp. 104-108.

7. *Песчанский А. И.* Интегро-дифференциальные уравнения на замкнутом контуре с функцией Гаусса в ядрах // Известия вузов. Математика (в печати).

Peschanskii A .I. Integro-differential Equations over a Closed Circuit with Gaussian Function in a Kernel // Russian Mathematics (to be published).

8. *Сакс Р. С.* Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1975. – 164 с.

   Sachs R. S. Boundary value problems for elliptic systems of differential equations. – Novosibirsk: NSU Publishing house, 1975. – 164 p.

9. *Крикунов Ю. М.* О решении обобщенной краевой задачи Римана и линейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения // Уч. зап. Казанск. ун-та. – 1952. – Т. 112. № 10. – С. 191-199.

   Krikunov Yu. M. on the solution of the generalized Riemann boundary value problem and the linear singular integro-differential equation // Uch. Zap. Kazan. UN-TA. – 1952. T. 112. No. 10. – Pp. 191-199.

10. *Исаханов, Р. С.* Дифференциальная граничная задача линейного сопряжения и ее применение к теории интегро-дифференциальных уравнений // Сообщ. АН ГрузССР. – 1958. – Т. 20. № 6. – С. 659-666.

    Isakhanov, R. S. Differential boundary value problem of linear conjugation and its application to the theory of integro-differential equations // Post. An Georgian. – 1958. – V. 20. No. 6. – Pp. 659-666.

11. *Векуа, Н. П.* Об одной системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и ее приложениях в граничных задачах линейного сопряжения // Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР. – 1957. – Т. 24. – С. 135-147.

    Vekua, N. P. On a system of singular integro-differential equations and its applications in boundary value problems of linear conjugation // Tr. Tbilisi. mod. in-TA an Georgian. – 1957. – Vol. 24. – Pp. 135-147.

12. *Жегалов, В. И.* О задачах с производными в краевых условиях // Тр. семин. по краевым задачам. – 1973. – Вып. 10. – С. 38-52.

    Zhegalov, V. I. on problems with derivatives in boundary conditions // Tr. seminar. on boundary value problems. – 1973. – Vol. 10. – Pp. 38-52.

13. *Рогожин, В. С.* Новое интегральное представление кусочно-голоморфной функции и его приложения // Доклады АН СССР. – 1960. – Т. 135. № 4. – С. 791-793.

    Rogozhin, V. S. a New integral representation of a piecewise holomorphic function and its applications // Reports of the USSR Academy of Sciences. – 1960. T. – 135. No. 4. – Pp. 791-793.

14. *Товмасян, Н. Е.* К теории сингулярных интегральных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1967. — Т.3, №1. — С. 69-80.

    Tovmasyan, N. E. On the theory of singular integral equations // Differential equations. – 1967. – Vol. 3. No. 1. – Pp. 69-80.

15. *Песчанский, А. И.* Интегральное уравнение с сингулярными свертками // Доклады АН УССР, серия «А». — 1981. — №10. — С. 15-18.

    Peschanskij, A. I. An integral equation with singular convolutions. Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR, Ser. A, No. 10, 15-18 (1981).

16. *Песчанский, А. И.* Интегральные уравнения с сингулярными криволинейными свертками // Дифференциальные уравнения. – 1983. — №11. — С. 2007-2009.

Peschanskij, A. I. Integral equations with singular curvilinear convolutions. Differ. Uravn. 19, No. 11, 2007-2009 (1983). (in Russian)

Получена 07.06.2019