Динамические системы, 2019, том 9(37), №2, 147–153

УДК 519.6

О решениях дифференциальных включений с почти выпуклой правой частью

Р. А. Хачатрян

Ереванский государственный университет,
Ереван 0025. *E-mail: Khachatryan.rafik@gmail.com*

Аннотация. В статье рассматривается вопрос существования решения включения вида $Dx(t) \subseteq a(x(t))$ при начальном условии $x(t_0) = x_0$, где $Dx(t)$ — паратингентная производная функции $x(t)$. Предполагается, что многозначное отображение a непрерывно, а множества $a(x)$ почти выпуклы.

Ключевые слова: многозначное отображение, почти выпуклость, дифференциальное включение.

On solutions of differential inclusions with almost convex right-hand side

R. A. Khachatryan

Yerevan State University, Yerevan 0025.

Abstract. In the paper, the question of the existence of a differential inclusion $\dot{x}(t) \in a(x)$ under the initial condition $x(t_0) = x_0$ is considered. It is assumed that a multivalued mapping a is upper semicontinuous and the sets $a(x)$ are almost convex.

Keywords: set-valued mapping, almost convex mapping, differential inclusion.

MSC 2010: 49-XX

Введение

Рассмотрим вопрос существования решения дифференциального включения

$$\frac{dx}{dt} \in a(x) \tag{1}$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$. В зависимости от свойств многозначного отображения (непрерывность в том или ином смысле) решения дифференциального включения обладают различными дифференциальными свойствами.

Пусть вектор-функция $x(t)$ определена на интервале или отрезке J, $t_0 \in J$ и $x(t_0) = x_0$. Она называется *классическим решением* дифференциального включения (1), если всюду на J имеет непрерывную производную и удовлетворяет включению (1).

Вектор-функция $x(t)$ называется *решением Каратеодори* дифференциального включения (1) на интервале J, если на интервале J $x(t)$ абсолютно непрерывна и почти всюду удовлетворяет включению (1).

Решение включения (1) с выпуклозначной правой частью при предположении полунепрерывности сверху многозначного отображения впервые было рассмотрено Зарембой (S. K. Zaremba) в статье [14]. *Паратингентной производной* $Dx(t_0)$ функции $x(t)$ в точке t_0 называется совокупность всех пределов

$$\lim_{\substack{t_n \to t_0 \\ s_n \to t_0}} \frac{x(t_n) - x(s_n)}{t_n - s_n}, \ s_n \neq t_n.$$

Зaремба определял решение как непрерывную функцию, паратингентная производная $Dx(t)$ которой всюду удовлетворяет включению

$$Dx(t) \subseteq a(x(t)). \tag{2}$$

Верна следующая теорема.

Теорема 1 [14]. *Пусть многозначное отображение* $a : R^n \longrightarrow 2^{R^n}$ *с выпуклыми замкнутыми значениями полунепрерывно сверху и существует число* $C > 0$ *такое, что* $\|y\| \leq C, \ \forall y \in a(x), \ x \in R^n$. *Тогда существует липшицевая функция* $x(t)$ *с начальным условием* $x(0) = x_0$, *паратингентная производная* $Dx(t)$ *которой всюду удовлетворяет включению*

$$Dx(t) \subseteq a(x(t)) \ t \in [0, 1].$$

Дифференциальное включение с обобщенными производными (контингентными производными) было рассмотрено Важевским (T. Ważewski) [13]. Доказано, что если для любого x множество $a(x)$ — выпуклый компакт и отображение a непрерывно, то включение (2) равносильно включению в контингенциях и дифференциальному включению (1).

Для дифференциальных включений с невыпуклой правой частью первая теорема существования классического локального решения была доказана А. Ф. Филипповым, при условии, что правая часть удовлетворяет условию Липшица [2]. Затем им же была доказана теорема о существования решения Каратеодори для уравнения с непрерывной правой частью [3]. В настоящее время имеются достаточно содержательные и подробные монографии и статьи, целиком или в значительной степени излагающие проблемы существования решений (классических или в смысле Каратеодори) дифференциальных включений (1). К числу таких работ можно отнести: Ж. П. Обен (J. P. Aubin) [10], А. А. Толстоногов [6], Е. С. Половинкин [5], А. Д. Иоффе [12], В. И. Благодастких [1], Б. Д. Гельман [4].

Однако, в литературе мало работ, посвященных дифференциальным включениям с обобщенными производными.

В настоящей статье рассматривается вопрос о существовании функций $x(t)$, $t \in [0, 1]$, с начальным условием $x(0) = x_0$, паратингентная производная которой удовлетворяет всюду включению (2). Предполагается, что множества $a(x)$ являются **почти выпуклыми** множествами, а отображение a **непрерывно.** Этот результат аналогичен теореме Зарембы при ослабленных условиях выпуклости множеств $a(x)$. Понятие почти выпуклости было введено в работах [8, 7]. Потребность изучения таких множеств возникла в теории дифференциальных игр [9].

Введем обозначения: $B_r(a)$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке a, $M \subseteq R^n$ — замкнутое множество.

Определение 1 [7]. Множество $M \subseteq R^n$ удовлетворяет условию *почти выпуклости* с константой $\theta \geq 0$, если для любых

$$x_j \in M, \lambda_j \geq 0, j \in J,$$

где J — конечное множество индексов, таких что $\sum_{j \in J} \lambda_j = 1$, выполняется включение

$$\sum_{j \in J} \lambda_j x_j \in M + \theta r^2 B_1(0),$$

где $r = \max_{i,j \in J} \|x_i - x_j\|$.

Заметим, что если $\theta = 0$, то M — выпуклое множество. Класс почти выпуклых множеств достаточно широк.

Пример 1. Множество $M = \{a, b\}$, состоящее из двух точек, почти выпукло. Действительно, имеем

$$conv\{a, b\} \subseteq M + \frac{1}{2\|a-b\|}\|a-b\|^2 B_1(0),$$

т. е. в этом случае константу почти выпуклости θ можно выбрать равной $1/(2\|a-b\|)$.

В дальнейшем мы используем следующее свойство почти выпуклых множеств.

Предложение 1 [8, Теорема 3, Следствие 3]. *Если M — почти выпуклое множество с константой θ, то для любого $\epsilon < 1/(16\theta)$ множество $M + B_\epsilon(0)$ почти выпукло с константой 4θ.*

Напомним теперь некоторые определения теории многозначных отображений. Пусть 2^{R^m} есть совокупность всех непустых подмножеств из R^m.

Отображение $a\colon R^n \longrightarrow 2^{R^m}$ называется *полунепрерывным снизу* в точке $x_0 \in R^n$, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$a(x_0) \subseteq a(x) + B_\epsilon(0), \ \forall x \in B_\delta(0).$$

Отображение $a : R^n \longrightarrow 2^{R^m}$ называется *полунепрерывным сверху* в точке $x_0 \in R^n$, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$a(x) \subseteq a(x_0) + B_\epsilon(0), \ \forall x \in B_\delta(0).$$

Если отображение полунепрерывно снизу и сверху в точке x_0, то оно называется непрерывным в этой точке (см. [4, Определение 1.2.43, стр. 38]: определение непрерывности в смысле Хаусдорфа).

Верна следующая теорема, которая обобщает результат Зарембы на невыпуклые случаи.

Теорема 2. *Пусть*

1) *многозначное отображение a с компактными значениями непрерывно;*

2) *множества $a(x)$ почти выпуклы с постоянной $\theta \geq 0$;*

3) *существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\|a(x)\| \leq C(1 + \|x\|),\ \forall x \in R^n.$$

Тогда существует липшицевая функция $x(t)$, паратингентная производная $Dx(t)$ которой всюду удовлетворяет включению

$$Dx(t) \subseteq a(x(t)),\ t \in [0,1]$$

с начальным условием $x(0) = x_0$.

Доказательство. Доказательство аналогично теореме Зарембы. Отметим ключевые моменты доказательства, чтобы показать отличие от теоремы Зарембы.

Разобьем отрезок на m равных частей и положим $\delta = 2^{-m}$. Запишем вместо соотношения (1) разностные включение

$$x_\delta(t+\delta) \in x_\delta(t) + \delta a_\delta(t), \quad t = 0, \delta, 2\delta, \ldots, (2^m - 1)\delta. \tag{3}$$

Решение $x_\delta(t)$ разностного включения (3) построим шаг за шагом следующим образом:

Положим $x_\delta(0) = x_0$. В первом шаге в качестве $x_\delta(\delta)$ выберем произвольный элемент множества $x_\delta(0) + \delta a(x_\delta(0))$. Во втором шаге в качестве $x_\delta(2\delta)$ выберем такой элемент множества $x_\delta(\delta) + \delta a(x_\delta(\delta))$, что

$$\left\| \frac{x_\delta(\delta) - x_\delta(0)}{\delta} - \frac{x_\delta(2\delta) - x_\delta(\delta)}{\delta} \right\| = \min_{u \in x_\delta(\delta) + a(x_\delta(\delta))} \left\| \frac{x_\delta(\delta) - x_\delta(0)}{\delta} - \frac{u - x_\delta(\delta)}{\delta} \right\| \tag{4}$$

Аналогично, построим $x_\delta(3\delta), \ldots, x_\delta(1)$.

Как и в теореме Зарембы [14] (выпуклый случай) здесь можно показать, что существует число $L > 0$ такое, что

$$\|x_\delta(t+\delta) - x_\delta(t)\| \leq \delta L\ t = 0, \delta, \ldots$$

Доопределим $x_\delta(t)$ для всех $[0,1]$, построив линейную интерполяцию. Согласно теореме Арцелы из последовательности $\{x_\delta(t)\}$ функций можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Можно доказать, что предельная $x_0(t)$ функция удовлетворяет условию Липшица с константой L. Покажем, что паратингентная производная $Dx(t)$ удовлетворяет включению всюду на отрезке $[0,1]$. Пусть $t_0 \in (0,1)$.

Так как отображение a полунепрерывно сверху, то для любого $\epsilon > 0$ существуют числа $\gamma > 0,\ \delta_0 > 0$ такие, что

$$a(x_\delta(t)) \subseteq a(x_0(t_0)) + \epsilon B_1(0),$$

если $\mid t - t_0 \mid < \gamma, \delta < \delta_0$. Пусть $t_1,\ T_2$ — фиксированные точки, имеющие вид $t_1 = k_1\delta_1,\ t_2 = k_2\delta_1,\ \delta_1 < \delta$, причем

$$t_1 < t_0 < t_2,\ \mid t_1 - t_2 \mid < \gamma.$$

Так как $\delta = 2^{-m}$, то при $\delta < \delta_1$ точки t_1, t_2 будут входить в разбиение отрезка $[0,1]$. Имеем

$$\frac{x_\delta(t_2) - x_\delta(t_1)}{t_2 - t_1} = \sum_{t=t_1, t_1+\delta, \ldots, t_2-\delta} \frac{\delta}{t_2 - t_1} \frac{x_\delta(t+\delta) - x_\delta(t)}{\delta}.$$

Для достаточно малых δ получим

$$(y_t \equiv \frac{x_\delta(t+\delta) - x_\delta(t)}{\delta} \in a(x_0(t_0)) + \epsilon B_1(0))\ \forall t = t_1, t_1+\delta, \ldots, t_2 - \delta.$$

Так как множество $a(x_0(t_0))$ почти выпукло с константой θ, то по предложению 1 при $\epsilon < 1/(16\theta)$ множество $a(x_0(t_0)) + \epsilon B_1(0)$ почти выпукло с константой 4θ. Поэтому согласно определению почти выпуклости имеем

$$\frac{x_\delta(t_2) - x_\delta(t_1)}{t_2 - t_1} \in a(x_0(t_0)) + \epsilon B_1(0) + 4\theta \max_{t,p} \|y_t - y_p\|^2. \tag{5}$$

Из соотношения получим, что для произвольных $t, p = t_1, t_1+\delta, \ldots, t_2 - \delta$ имеет место неравенство

$$\|y_t - y_p\| \leq (t_2 - t_1)\epsilon.$$

Поэтому, если $\gamma < \varepsilon$, то

$$\|y_t - y_p\|^2 \leq (t_2 - t_1)^2 \epsilon^2 < \epsilon^4. \tag{6}$$

Имеем

$$\frac{x_0(t_2) - x_0(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{x_0(t_2) - x_\delta(t_2)}{t_2 - t_1} + \frac{x_\delta(t_2) - x_\delta(t_1)}{t_2 - t_1} + \frac{x_\delta(t_1) - x_0(t_1)}{t_2 - t_1}. \tag{7}$$

Выберем теперь число δ настолько малым, чтобы первое и третье слагаемое в (7) были по модулю меньше ϵ. Учитывая соотношения (5)-(7), получим

$$\frac{x_0(t_2) - x_0(t_1)}{t_2 - t_1} \in a(x_0(t_0)) + 3\epsilon B_1(0) + 4\theta\epsilon^4 B_1(0).$$

Отсюда, поскольку ϵ произвольно, получим искомое включение

$$Dx_0(t_0) \subseteq a(x_0(t_0)).$$

$\square$

Замечание 1. Если ослабить условие непрерывности отображения a, то утверждение теоремы 2 неверно. Действительно, пусть

$$x \in R^1,\ a(0) = \{-1, 1\},\ a(x) = -\text{sign } x.$$

Тогда отображение a полунепрерывно сверху, множества $a(x)$ **почти выпуклы** (пример 1), но решение с начальным условием не существует при $t > 0$ (см. пример [1, стр. 243]).

Замечание 2. Отметим, что в условиях теоремы 2 включение 2 в паратингенциях не равносильно дифференциальному включению (1). Действительно, пусть $a(x) = [-1, 1] \cup 2,\ \forall x \in R^1$. Отображение a непрерывно и для каждого x множество $a(x)$ почти выпукло с константой $\theta = 1/2$. Рассмотрим дифференциальное включение (1) с начальным условием $x(0) = 1$ на отрезке $[0, 3]$. Липшицева функция

$$x(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t \in [0, 1], \\ 2 - t, & \text{если } t \in [1, 2], \\ 2t - 4 & \text{если } t \in [2, 3] \end{cases}$$

почти всюду на отрезке $[0, 3]$ удовлетворяет дифференциальному включению

$$\frac{d}{dx} x(t) \in a(x).$$

Однако включение (2) всюду не выполняется, поскольку, например $1.5 \in Dx(2)$, и поэтому $Dx(2) \subseteq a(x(2))$.

Решением включения (2) в паратингенциях будет, например, функция

$$y(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t \in [0, 1], \\ 2 - t, & \text{если } t \in [1, 3], \end{cases}$$

Действительно,

$$Dy(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [0, 1), \\ -1, & \text{если } t \in (1, 3], \\ [-1, 1], & \text{если } t = 1. \end{cases}$$

и поэтому всюду на отрезке $[0, 3]$ имеет место включение $Dy(t) \subseteq a(y(t)),\ y(0) = 1$.

Список цитируемых источников

1. *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальные управления. Тр. МИАН СССР 169, 194-252 (1985).

   Blagodatskikh V. I., Filippov A. F. Differential inclusions and optimal controls. Tr. MIAN USSR, 169, 194-252 (1985). (in Russian)

2. *Филиппов А. Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью. Вестник Моск. ун-та, Матем., механ., №3, 16-26 (1967).

   Filippov A. F. Classical solutions of differential equations with multivalued right-hand side., Vestn. Mosk. Univ., Ser. matem., mekhan., No.3, 16-26 (1967). (in Russian)

3. *Филиппов А. Ф.* О существовании решений многозначных дифференциальных уравнений. Математические заметки 10, №19, 307-319 (1971).

   Filippov A. F. Über die Existenz von Lösungen mehrdeutiger Differentialgleichungen. Mat. Zametki 10, 307-319 (1971). (in Russian)

4. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений, Москва: КомКнига, 2005.

   Borisovich Yu. G., Gelman B. D., Myshkis A.D., Obukhov V. V. Introduction to the theory of multivalued maps and differential inclusions, Moscow: Komkniga, 2005. (in Russian)

5. *Половинкин Е. С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. Москва: Физматлит, 2014.

   Polovinkin E. S. Multivalued analysis and differential inclusions. Moscow: Fizmatlit, 2014. (in Russian)

6. *Толстоногов А. А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве, Новосибирск: Наука, 1987.

   Tolstonogov A. A. Differential Inclusions in Banach Space. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

7. *Остапенко В. В.* Приближенное решение задач сближения-уклонения, Препринт-82-16, Институт Кибернетики АН УССР, Киев, 1982.

   Ostapenko V. V. Approximate solution of convergence-evasion problems, Preprint-82-16, Institute of Cybernetics of the USSR Academy of Sciences, Kiev, 1982. (in Russian)

8. *Остапенко В. В.* Об одном условии почти выпуклости. Украинский мат. журнал 35, №2, 169-172 (1983).

   Ostapenko V. V., On one condition of almost convexity. Ukrainian mat. journal 35, No.2, 169-172 (1983). (in Russian)

9. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры преследования, Мат. сб., Новая сер. 112, №3, 307-330 (1980).

   Pontryagin L. S. Linear differential pursuit games. Mat. sat., New ser. 112, No. 3, 307-330 (1980). (in Russian)

10. *Aubin J. P., Celina A.* Differential inclusions. N.-Y., Berlin: Springer, !984, 342p.
11. *Davi J. L.* Properties of the solutions set a generalised diffferential equation. Bull. Austral. Math. Soc. 6, No.3, 379-398 (1972).
12. *Ioffe A. D.* Variational Analysis of Regular Mappings, Theory and Applications. Cham: Springer, 2017, 476 p.
13. *Ważewski, T.* Sur une condition équivalente à l'équation au contingent. Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys. 9, 865-867 (1961).
14. *Zaremba S. K.* Sur une extension de la notion d'équation différentielle. C. R. Acad. Sci., Paris 199, 545-548 (1934).

Получена 04.05.2019