Динамические системы, 2019, том 9(37), №2, 133–146

УДК 517.929

Об условиях осцилляции решений дифференциальных уравнений с последействием[1]

В. В. Малыгина*, **К. М. Чудинов***,**

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
**Пермский государственный национальный исследовательский университет,
Пермь 614990. *E-mail: mavera@list.ru, cyril@list.ru*

Аннотация. Исследуются возможности получения эффективных условий осцилляции решений линейных неавтономных дифференциальных уравнений первого порядка с последействием. Для уравнения с несколькими сосредоточенными запаздываниями производится сопоставление нескольких достигнутых в последние годы результатов и приводятся новые доказательства и примеры, обосновывающие эффективность некоторых разрабатываемых методов и их преимуществ перед более ранними подходами. Получены новые эффективные условия осцилляции решений уравнений с распределенным запаздыванием.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с запаздыванием, осцилляция, эффективные признаки.

On oscillation conditions for solutions to delay differential equations

V. V. Malygina, K. M Chudinov

Perm National Research Polytechnic University, Perm 614990,
Perm State National Research University, Perm 614990.

Abstract. The possibilities of obtaining effective oscillation conditions for solutions to linear non-autonomous first-order differential equations with aftereffect are investigated. We consider estimates, on the functional of the equation parameters, guaranteeing the oscillation of all solutions. These estimates are results of the development of known sufficient oscillation conditions for a linear equation with one concentrated delay, in the form of an estimate of the integral of the coefficient over the delay length. For an equation with several concentrated delays, several results achieved in recent years are compared and new proofs and examples are given that justify the effectiveness of some of the developed methods and their advantages over earlier approaches. A new approach is applied to equations with distributed delay, for which new effective conditions for the oscillation of solutions are obtained.

Keywords: delay differential equation, oscillation, explicit test.

MSC 2010: 34K11

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (задание № 1.5336.2017/8.9) при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00928).

Введение

Еще в первой половине прошлого столетия было отмечено, что линейные дифференциальные уравнения с последействием первого порядка, в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, могут иметь осциллирующие решения [4]. Это свойство решений уравнений с последействием хорошо объясняет ряд процессов в биологии, химии, теории автоматического регулирования, поэтому его исследование получило развитие.

Если ориентироваться на получение эффективных необходимых и достаточных условий осцилляции в терминах параметров уравнения, то выбор объектов исследования практически исчерпывается автономными уравнениями и сводится к изучению характеристической функции на наличие либо отсутствие вещественных корней [4, 16, 6, 19]. Для неавтономных уравнений задача резко усложняется и речь можно вести только о достаточных условиях. Лучшими из таковых естественно считать те, в которых показана как существенность всех наложенных требований, так и точность входящих в ограничения постоянных.

В настоящей работе рассмотрим основные достижения на пути уточнения и обобщения двух классических результатов для уравнения устойчивого типа.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + a(t)x(h(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{0.1}$$

где $a(t) \geq 0$, $h(t) \leq t$ и $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = +\infty$. В приведенных ниже двух теоремах можно считать, как это традиционно делалось начиная с работ А. Д. Мышкиса, что функции a и h непрерывны на $\mathbb{R}_+$, а решением является удовлетворяющая уравнению (0.1) непрерывно дифференцируемая функция $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. При этом предполагается, что $x(\xi) = \varphi(\xi)$ при $\xi \leq 0$, где φ — некоторая непрерывная функция. В дальнейшем уравнение (0.1) будет изучаться в более общих предположениях.

Теорема 1 ([18, 6]). *Если функция $h(t)$ не убывает на $\mathbb{R}_+$ и справедливо неравенство*

$$\varlimsup_{t\to\infty} \int\limits_{h(t)}^{t} a(s)\,ds > 1, \tag{0.2}$$

то все решения уравнения (0.1) *осциллируют.*

Теорема 2 ([3]). *Если справедливо неравенство*

$$\varliminf_{t\to+\infty} \int\limits_{h(t)}^{t} a(s)\,ds > 1/e,$$

то все решения уравнения (0.1) *осциллируют.*

1. О переносе условий осцилляции на уравнения с несколькими запаздываниями

Рассмотрим дифференциальное уравнение с несколькими запаздываниями

$$\dot{x}(t) + \sum_{k=1}^{n} a_k(t)x(h_k(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.1}$$

в следующих предположениях: функции a_k локально суммируемы, функции h_k измеримы по Лебегу и $h_k(t) \leq t$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$, $k = \overline{1,n}$. *Решением* уравнения (1.1) будем называть локально абсолютно непрерывную функцию $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую уравнению (1.1) почти всюду. Как известно [1, гл. 1], при заданной ограниченной борелевской начальной функции $\varphi\colon (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ и условии $x(\xi) = \varphi(\xi)$, $\xi \leq 0$, уравнение (1.1) однозначно разрешимо в классе локально абсолютно непрерывных функций и его решение бесконечно продолжаемо на всю положительную полуось.

Далее всюду будем считать выполненными следующие условия: $a_k(t) \geq 0$ для почти всех $t \geq 0$ и $\operatorname*{ess\,lim}_{t\to\infty} h_k(t) = +\infty$, $k = \overline{1,n}$.

Определение 1. Непрерывную на полуоси $\{t\colon t \geq t_0\}$ функцию будем называть *осциллирующей*, если она имеет неограниченную справа последовательность нулей.

Определение 2. Уравнение (1.1) будем называть *осциллирующим*, если любое его решение является осциллирующим.

Поскольку уравнение (0.1) есть частный случай уравнения (1.1) при $n = 1$, естественно желание обобщить теоремы 1 и 2 на уравнение (1.1). Простейший способ такого обобщения — выбрать достаточно малый общий для всех коэффициентов промежуток интегрирования. Результаты такого типа легко выводятся из следующего частного случая теоремы Мышкиса о сравнении решений [5, с. 177].

Теорема 3. *Рассмотрим наряду с уравнением* (1.1) *уравнение*

$$\dot{x}(t) + \sum_{k=1}^{n} a_k(t)x(\tilde{\tau}_k(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.2}$$

где $\tilde{\tau}_k(t) \geq \tau(t)$, $k = \overline{1,n}$. *Если уравнение* (1.2) *является осциллирующим, то уравнение* (1.1) *тоже является осциллирующим.*

Замечание 1. Теоремы о сравнении решений функционально-дифференциальных уравнений выводятся из свойств функционально-дифференциальных неравенств. Соответствующая аналитическая техника развивалась в ряде работ Л. Березанского, Е. Браверман и А. Домошницкого; результаты систематизированы в монографии [10].

Теорема 4 ([10, с. 44]). *Обозначим* $g(t) = \sup_{s\le t} h(s)$. *Пусть*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_{g(t)}^{t} \sum_{k=1}^{n} a_k(s)\, ds > 1.$$

Тогда уравнение (1.1) *является осциллирующим.*

Теорема 5 ([15]). *Пусть непрерывная функция* $h^*\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *такова, что* $h_k(t) \le h^*(t) \le t$ *для всех* $t \in \mathbb{R}_+$. *Если при этом*

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} \int_{h^*(t)}^{t} \sum_{k=1}^{n} a_k(s)\, ds > 1/e,$$

то уравнение (1.1) *является осциллирующим.*

С учетом теоремы 3 теоремы 4 и 5 следуют из теоремы 2. Недостаток этих результатов бросается в глаза: влияние относительно больших запаздываний на осцилляцию не учитывается, хотя именно оно наиболее велико; в частности, если $h_k(t) = t$ для некоторого k, то теоремы 4 и 5 полностью теряют силу.

Таким образом, основная проблема нетривиального обобщения теорем 1 и 2 на уравнение (1.1) состоит в том, чтобы учесть влияние всех запаздываний.

2. Итерационные уточнения условий осцилляции

Теорема 1 доказывается крайне просто. Требование неубывания функции $h(t)$ в ней отменить нельзя, но можно заменить $h(t)$ функцией $g(t) = \sup_{s\le t} h(s)$. Пример из работы [6] показывает, что константа 1 в правой части неравенства (0.2) неуменьшаема, однако применение теоремы 2 к автономному случаю $a(t) \equiv a$, $t - h(t) \equiv r$, для которого условие $ar > 1/e$ является необходимым и достаточным для осцилляции [4], показывает, что теорема 1 — в некотором смысле более грубый результат, чем теорема 2.

В 1994 г. в работе [17] было представлено замечательное усиление теоремы 1, суть которого состоит в итерационном ослаблении условия (0.2). Обобщение этой идеи и ее применение к уравнению (1.1) было предложено в статье [11] в 2016 г.

Обозначим $P_0(t,s) = 1$ и

$$P_m(t,s) = \exp\left\{ \int_{s}^{t} \sum_{k=1}^{n} a_k(\zeta) P_{m-1}(\zeta, h_k(\zeta))\, d\zeta \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Лемма 1 ([11]). *Если* x — *положительное при* $t \ge t_0$ *решение уравнения* (1.1), *то найдется такое* $t_1 \ge t_0$, *что для всех* $m \in \mathbb{N}_0$ *и* $t \ge s \ge t_1$ *имеем*

$$x(t) P_m(t,s) \le x(s). \tag{2.1}$$

Положим $g(t) = \max_{k=\overline{1,n}} \sup_{s \le t} h_k(t)$.

Теорема 6 ([11]). *Если при некотором $m \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int\limits_{g(t)}^{t} \sum_{k=1}^{n} a_k(s) P_m(g(t), h_k(s)) ds > 1,$$

то уравнение (1.1) *является осциллирующим.*

Сопоставление теорем 1, 2 и 6 наводит на мысль, что должно существовать усиление теоремы 2 с использованием вспомогательных функций, роль которых аналогична роли функций P_m в теореме 6. В работе [11] была предпринята попытка получить результат такого типа: утверждалось, что имеет место следующий факт.

Утверждение 1. *Если при некотором $m \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство*

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \int\limits_{g(t)}^{t} \sum_{k=1}^{n} a_k(s) P_m(g(t), h_k(s))\, ds > 1/e,$$

то уравнение (1.1) *является осциллирующим.*

В работе [7] было замечено, что утверждение 1 неверно в применении даже к автономному уравнению с одним запаздыванием. Действительно, применим утверждение 1 к уравнению

$$\dot{x}(t) + e^{-1} x(t-1) = 0, \quad t \ge 0, \tag{2.2}$$

при $m = 1$. Имеем: $n = 1$, $a_1(t) = 1/e$, $h_1(t) = g(t) = t - 1$, $P_1(t-1, s-1) = e^{(t-s)/e}$,

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \int\limits_{t-1}^{t} (1/e) e^{(t-s)/e}\, ds = e^{1/e} - 1.$$

В силу известного неравенства $e > (1 + 1/e)^e$ получаем, что $e^{1/e} - 1 > 1/e$. Таким образом, условия утверждения 1 выполнены, уравнение (2.2) должно быть осциллирующим, что неверно.

В той же работе [7] показано, что в формулировку утверждения 1 можно внести небольшое изменение так, что утверждение станет верным.

Теорема 7. *Если при некотором $m \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство*

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \int\limits_{g(t)}^{t} \sum_{k=1}^{n} a_k(s) P_m(g(s), h_k(s))\, ds > 1/e, \tag{2.3}$$

то уравнение (1.1) *является осциллирующим.*

Приведенное в [11] доказательство утверждения 1 можно исправить, но в этом нет необходимости: в [7] приведено более простое рассуждение, основанное на применении леммы о дифференциальном неравенстве [2, с. 65] к вспомогательному уравнению с одним запаздыванием.

Ниже приводится новое, максимально простое, доказательство теоремы 7, отчетливо показывающее причины успеха уточнения теоремы 2: применительно к уравнению (0.1) расширяющие область применимости утверждения итерации возможны благодаря очевидному равенству

$$\varliminf_{t\to+\infty}\int\limits_{h(t)}^{t} a(s)\,ds = \varliminf_{t\to+\infty}\int\limits_{g(t)}^{t} a(s)\,ds,$$

которое показывает, что уравнение не теряет осцилляции при замене $h(t)$ на $g(t)$, а это дает возможность воспользоваться оценкой отношения $\frac{x(h(s))}{x(g(s))}$.

Доказательство теоремы 7. Допустим, условия теоремы выполняются, но уравнение (1.1) имеет неосциллирующее решение (без ограничения общности, положительное) $x = x(t)$. Зафиксируем $t_0 \geq 0$ и рассмотрим уравнение

$$\dot{y}(t) + b(t)y(g(t)) = 0, \quad t \geq t_0, \tag{2.4}$$

где $b(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(t)\dfrac{x(h_k(t))}{x(g(t))}$. Применяя лемму 1, получаем:

$$\int\limits_{g(t)}^{t} b(s)\,ds = \int\limits_{g(t)}^{t}\sum_{k=1}^{n} a_k(s)\frac{x(h_k(s))}{x(g(s))}\,ds \geq \int\limits_{g(t)}^{t}\sum_{k=1}^{n} a_k(s)P_m(g(s),h_k(s))\,ds.$$

Поэтому из теоремы 2 и условий теоремы следует, что все решения уравнения (2.4) осциллируют. Но функция $x(t)$, очевидно, является решением уравнения (2.4). Следовательно, исходное предположение неверно. □

Отметим, что в работах [12, 13] получены условия осцилляции уравнения (1.1), являющиеся усилениями теоремы 2, основанным, как и теорема 7, на оценке отношений $\frac{x(h_k(s))}{x(g(s))}$. Удивительно, но это не мешает авторам работы [13] в очередной раз сослаться на утверждение 1 в обзоре известных результатов! Впрочем, в публикациях последних нескольких лет по рассматриваемой теме допущено немало ошибок. На некоторые из них указано в работах [7, 8, 9], но частота публикации исправлений существенно уступает частоте публикации новых ошибок.

3. Новые множества интегрирования

В работе [14] был предложен новый выбор множества интегрирования коэффициентов уравнения (1.1), который не только усиливал теорему 4, но и давал подход к решению проблемы учета всех запаздываний.

Определим для $k = \overline{1, n}$ семейства множеств

$$H_k(t) = \{s \geq t : h_k(s) \leq t\}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Теорема 8 ([14])**.** *Пусть*

$$\varlimsup_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{H_k(t)} a_k(s)\, ds > 1.$$

Тогда уравнение (1.1) *является осциллирующим.*

Доказательство теоремы 8 почти столь же просто, как доказательство теоремы 1. Для уравнения (0.1) в случае монотонной функции h эти теоремы равносильны, в противном случае теорема 8 всегда дает большее значение интеграла в левой части неравенства, чем теорема 1. Более того, в [9] показано, что теорема 8 в некоторых ситуациях более эффективна, чем итерационная теорема 6.

Существенно более тонким результатом является перенос возможности интегрирования по новому множеству на условия осцилляции, являющиеся развитием идеи теоремы 2.

Определим для $k = \overline{1, n}$ семейства множеств

$$E_k(t) = \{s \geq t : h_k(s) < t\}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Теорема 9 ([8])**.** *Пусть*

$$\varliminf_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k(t)} a_k(s)\, ds > 1/e,$$

Тогда уравнение (1.1) *является осциллирующим.*

Сравним силу теорем 7 и 9 — максимальных полученных обобщений теоремы 2.

Несложно убедиться, что области применимости теорем 7 и 9 не совпадают. Действительно [7], осцилляция автономного уравнения с двумя запаздываниями

$$\dot{x}(t) + a_1 x(t) + a_2 x(t-1) = 0, \quad t \geq 0,$$

не устанавливается теоремой 7, но теорема 9 показывает, что при $a_2 > 1/e$ оно является осциллирующим. Столь же нетрудно привести пример неавтономного уравнения с одним запаздыванием (0.1), осцилляция которого устанавливается теоремой 9, но не устанавливается теоремой 7: например, если $t-h(t)$ периодически обращается в ноль, то теорема 7 неприменима. Таким образом, область применимости теоремы 9 не у́же области применимости теоремы 7 (даже для уравнения с одним запаздыванием).

Ответить на вопрос, верно ли обратное, по-видимому, существенно труднее. Авторам настоящей статьи видится правдоподобной **гипотеза**: не существует уравнения, осцилляция которого устанавливается теоремой 7, но не устанавливается теоремой 9.

Замечание 2. Применить к теореме 9 итерационное уточнение, подобное уточнению теоремы 2, приведшему к теореме 7, представляется невозможным. Как было отмечено выше, теорема 2 допускает итерационное уточнение благодаря тому, что она нечувствительна к немонотонности функции $h(t)$; для теоремы 9 это не так.

4. Уравнения с распределенным запаздыванием

Изложенные в предыдущих разделах подходы допускают распространение на некоторые классы уравнений с распределенным запаздыванием. Обладая рядом общих свойств с уравнениями с сосредоточенным запаздыванием, они не являются их частным случаем и имеют свою специфику.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t)+\int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} k(t,s)x(s)\,ds=0, \quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{4.1}$$

где h_1, h_2 — измеримые на $\mathbb{R}_+$ функции, причем $h_1(t)\le h_2(t)\le t$, а k — неотрицательная локально суммируемая по второму аргументу функция. Пусть, далее, $\rho(t)=\int_{h_1(t)}^{h_2(t)} k(t,s)\,ds$ — локально суммируемая функция, а $\lim\limits_{t\to\infty} h_1(t)=+\infty$.

Обозначим $P_0(t,s)=1$ и

$$P_m(t,s)=\exp\left\{\int\limits_s^t\int\limits_{h_1(\zeta)}^{h_2(\zeta)} k(\zeta,\tau)P_{m-1}(\zeta,\tau)\,d\tau\,d\zeta\right\}, \quad m\in\mathbb{N}.$$

Лемма 2. *Если x — положительное при $t\ge t_0$ решение уравнения* (4.1)*, то найдется такое $T\ge t_0$, что при любых t и s таких, что $t\ge s\ge T$, справедлива оценка*

$$x(t)P_m(t,s)\le x(s). \tag{4.2}$$

Доказательство проведем индукцией по $m\in\mathbb{N}$. Пусть x — положительное при $t\ge t_0$ решение уравнения (4.1), тогда существует $t_1\ge t_0$, такое что $x(t)$ монотонно убывает для всех $t\ge t_1$.

Перепишем уравнение (4.1) в виде

$$\dot{x}(t) + \rho(t)x(t) = \int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} k(t,\tau)(x(t) - x(\tau))\, d\tau, \tag{4.3}$$

и выберем T так, чтобы для всех $t \geq T$ было $h_1(t) \geq t_1$. Тогда $x(t) \leq x(\tau)$ при всех $\tau \in [h_1(t), h_2(t)]$ и по формуле Коши из (4.3) следует, что

$$x(t) \leq x(s)e^{-\int_s^t \rho(\tau)\, d\tau},$$

то есть

$$P_1(t,s)x(t) \leq x(s),$$

и при $m = 1$ утверждение доказано.

Пусть неравенство (4.2) выполнено для некоторого $m \geq 1$. Тогда

$$\dot{x}(t) + x(t)\int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} k(t,\tau)P_m(t,\tau)\, d\tau =$$

$$= x(t)\int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} k(t,\tau)P_m(t,\tau)\, d\tau - \int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} k(t,\tau)x(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} k(t,\tau)(x(t)P_m(t,\tau) - x(\tau))\, d\tau \leq 0.$$

Еще раз применяя формулу Коши, получаем

$$x(t) \leq x(s)e^{-\int_s^t \int_{h_1(\zeta)}^{h_2(\zeta)} k(\zeta,\tau)P_m(\zeta,\tau)\, d\tau\, d\zeta}$$

или, с учетом определения P_{m+1},

$$x(t)P_{m+1}(t,s) \leq x(s). \qquad \square$$

Теорема 10. *Если при некотором $m \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство*

$$\varliminf_{t\to\infty} \int\limits_{h_2(t)}^{t} \int\limits_{h_1(s)}^{h_2(s)} k(s,\tau)P_m(h_2(s),\tau)\, d\tau\, ds > 1/e, \tag{4.4}$$

то уравнение (4.1) *является осциллирующим.*

Доказательство. Обозначим

$$\alpha(s) = \int\limits_{h_1(s)}^{h_2(s)} k(s,\tau) P_m(h_2(s),\tau)\, d\tau.$$

Не нарушая общности, можно считать, что $\alpha(s) > 0$. Тогда функция

$$\zeta = \varphi(t) = \int\limits_0^t \alpha(s)\, ds$$

является непрерывной и монотонно возрастающей, то есть имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(\zeta)$. Из (4.4) следует, что $\alpha \notin L_1(\mathbb{R}_+)$, значит, φ^{-1} взаимно-однозначно отображает $\mathbb{R}_+$ на $\mathbb{R}_+$, причем $\lim\limits_{\zeta\to\infty} \varphi^{-1}(\zeta) = \infty$.

Положим $r(\zeta) = \int_{h_2(\varphi^{-1}(\zeta))}^{\varphi^{-1}(\zeta)} \alpha(s)\, ds$ и $r = \varliminf\limits_{\zeta\to\infty} r(\zeta)$.

Пусть неравенство (4.4) выполнено, но уравнение (4.1) имеет неосциллирующее решение x. Тогда существует t_0, начиная с которого функция x положительна и монотонно убывает.

Построим функцию $v(\zeta) = x(\varphi^{-1}(\zeta))$, которая тоже является положительной и монотонно убывающей начиная с некоторого ζ_0.

Рассмотрим автономное уравнение

$$(Ly)(\zeta) \equiv y'(\zeta) + y(\zeta - r) = 0, \quad \zeta \geq \zeta_0. \tag{4.5}$$

Легко видеть, что

$$(Lv)(\zeta) \equiv v'(\zeta) + v(\zeta - r) \leq v'(z) + v(\zeta - r(\zeta)).$$

В силу определения функции φ

$$\zeta - r(\zeta) = \int\limits_0^{\varphi^{-1}(\zeta)} \alpha(s)\, ds - \int\limits_{h_2(\varphi^{-1}(\zeta))}^{\varphi^{-1}(\zeta)} \alpha(s)\, ds = \int\limits_0^{h_2(\varphi^{-1}(\zeta))} \alpha(s)\, ds =$$

$$= \varphi(h_2(\varphi^{-1}(\zeta)) = \varphi(h_2(t)).$$

Учитывая очевидное неравенство $\dfrac{dv}{d\zeta} = \dfrac{1}{\alpha(t)}\dfrac{dx}{dt}$ и оценку (4.2), получаем:

$$(Lv)(\zeta) \le \frac{1}{\alpha(t)}(\dot{x}(t) + \alpha(t)x(h_2(t)) \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha(t)}(\dot{x}(t) + \int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} k(t,s)P_m(h_2(t),s)x(h_2(t))\,ds) \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha(t)}(\dot{x}(t) + \int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} k(t,s)x(s))\,ds = 0.$$

Из леммы о дифференциальном неравенстве следует, что уравнение (4.5) имеет положительное решение. Но уравнение (4.5) — автономное, для него известен критерий неосцилляции: $r \le 1/e$. По условию теоремы $r > 1/e$. Противоречие. □

В качестве следствия из теоремы 10 при $m = 0$ получаем известный результат.

Следствие 1 ([19])**.** *Если*

$$\varliminf_{t\to\infty} \int\limits_{h_2(t)}^{t} \int\limits_{h_1(s)}^{h_2(s)} k(s,\zeta)\,d\zeta\,ds > 1/e, \tag{4.6}$$

то уравнение (4.1) *является осциллирующим.*

Покажем, что постоянная $1/e$ в неравенствах (4.6) и (4.4) является точной, несмотря на то, что автономное уравнение $\dot{x}(t)+ax(t-r) = 0$ не является частным случаем уравнения (4.1).

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{e(e^{\varepsilon(t)}-1)} \int\limits_{t-1-\varepsilon(t)}^{t-1} x(s)\,ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{4.7}$$

где ε — положительная измеримая ограниченная функция, причем $\int_0^\infty \varepsilon(t)\,dt < \infty$.

Так как $\left|\dfrac{e^{\varepsilon(s)}-1-\varepsilon(s)}{e^{\varepsilon(s)}-1}\right| < \dfrac{\varepsilon(s)}{2}$, то, с учетом свойств функции ε,

$$\lim_{t\to\infty}\left|\int\limits_{t-1}^{t} \frac{e^{\varepsilon(s)}-1-\varepsilon(s)}{e^{\varepsilon(s)}-1}\,ds\right| \le \lim_{t\to\infty}\int\limits_{t-1}^{t}\frac{\varepsilon(s)}{2}\,ds = 0.$$

Из равенства

$$\frac{\varepsilon(s)}{e^{\varepsilon(s)}-1} = 1 + \frac{\varepsilon(s)+1-e^{\varepsilon(s)}}{e^{\varepsilon(s)}-1}$$

следует

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_{t-1}^{t}\int\limits_{s-1-\varepsilon(s)}^{s-1}\frac{d\zeta}{e(e^{\varepsilon(s)}-1)}\,ds=\frac{1}{e}\lim_{t\to\infty}\int\limits_{t-1}^{t}\frac{\varepsilon(s)}{e^{\varepsilon(s)}-1}=$$

$$=\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\lim_{t\to\infty}\int\limits_{t-1}^{t}\frac{\varepsilon(s)+1-e^{\varepsilon(s)}}{e^{\varepsilon(s)}-1}\,ds=\frac{1}{e},$$

то есть для уравнения (4.7) неравенство (4.6) обращается в равенство. С другой стороны, несложно убедиться, что функция $y(t)=e^{-t}$ является решением уравнения (4.7):

$$\dot y(t)+\frac{1}{e(e^{\varepsilon(t)}-1)}\int\limits_{t-1-\varepsilon(t)}^{t-1}y(s)\,ds=-e^{-t}-\frac{e^{-(t-1)}-e^{-(t-1-\varepsilon(t)}}{e(e^{\varepsilon(t)}-1)}=0,$$

то есть уравнение (4.7) имеет неосциллирующее решение.

Приведенный пример показывает, что в неравенстве (4.6) нельзя даже заменить строгое неравенство нестрогим.

Список цитируемых источников

1. *Азбелев, Н. В., Максимов, В. П., Рахматуллина, Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

   Azbelev, N. V., Maksimov, V. P., Rakhmatullina, L. F. Vvedeniye v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy [Introduction to the theory of functional-differential equations]. Moscow: Nauka, 1991. (in Russian, with an English summary)

2. *Азбелев, Н. В., Симонов П. М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновнными производными. Пермь: изд-во Пермск. ун-та, 2001.

   Azbelev, N. V., Simonov, P. M. Stability of Differential Equations with Aftereffect. London: CRC Press, 2002.

3. *Коплатадзе, Р. Г., Чантурия, Т. А.* О колеблющихся и монотонных решениях дифференциальных уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом. Дифференц. уравн. 18, №8, 1463-1465 (1982).

   Koplatadze, R. G., Chanturiya, T. A. Oscillating and monotone solutions of first-order differential equations with deviating argument. (Russian) Differentsial'nye Uravneniya 18, No. 8, 1463-1465 (1982). (in Russian)

4. *Мышкис А. Д.* О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом. Матем. сб. 28 (70), № 3, 641-658 (1951).

   Myshkis, A. D. On solutions of linear homogeneous differential equations of the first order of stable type with a retarded argument. Mat. Sb., N. Ser. 28 (70), 641-658 (1951). (in Russian)

5. *Мышкис, А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.

   Myshkis, A. D. Linear differential equations with a retarded argument. Moscow: Nauka, 1972. (in Russian)

6. *Трамов, М. И.* Условия колеблемости решений дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом. Изв. вузов. Матем. №3, 92-96 (1975).

   Tramov, M. I. Conditions for the oscillation of the solutions of first order differential equations with retarded argument. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Matematika No. 3 (154), 92-96 (1975). (in Russian)

7. *Чудинов, К. М., Малыгина, В. В.* Об осцилляции линейных дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями. Вестник Пермск. ун-та. Математика. Механика. Информатика. № 4, 11-18 (2017).

   `http://vestnik.psu.ru/docs/2017/4/3/20174344.pdf`

   Chudinov, K. M., Malygina, V. V. On oscillation of linear differential equations with several delays, Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science. No. 4, 11-18 (2017). (in Russian)

8. *Чудинов, К. М.* О точных достаточных условиях осцилляции решений линейных дифференциальных и разностных уравнений первого порядка с последействием. Изв. вузов. Матем. № 5, 93-98 (2018).

   Chudinov, K. M. On exact sufficient oscillation conditions for solutions of linear differential and difference equations of the first order with aftereffect. Russ. Math. 62, No. 5, 79-84 (2018).

9. *Чудинов, К. М., Малыгина, В. В.* Признаки осцилляции решений дифференциальных уравнений первого порядка с последействием. Изв. вузов. Матем. №7, 72-85 (2019).

   Chudinov, K. M. Malygina,V. V. Oscillation Criteria for Solutions of Delay Differential Equations of the First Order Russ. Math. 63, No. 7, 62-74 (2019).

10. *Agarwal R.P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A.* Nonoscillation theory of functional differential equations with applications. New York: Springer, 2012.

11. *Braverman E., Chatzarakis G. E., Stavroulakis I. P.* Iterative oscillation tests for differential equations with several non-monotone arguments. Adv. Difference Equ. 2016:87, 18 p. (2016).

12. *Chatzarakis, G. E., Purnaras, I. K., Stavroulakis, I. P.* Oscillation tests for differential equations with deviating arguments. Adv. Math. Sci. Appl. 27, No. 1, 1-28 (2018).

13. *Chatzarakis, G. E., Jadlovská, I., Li, T.* Oscillations of differential equations with non-monotone deviating arguments. Adv. Difference Equ. 2019:233, 20 p. (2019).

14. *Chudinov, K.* Note on oscillation conditions for first-order delay differential equations. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2016, Paper No. 2, 10 p. (2016).

15. *Fukagai, N., Kusano, T.* Oscillation theory of first order functional-differential equations with deviating arguments. Ann. Mat. Pura Appl. 136, No. 4, 95-117 (1984).

16. *Győri, I., Ladas, G.* Oscillation theory of delay differential equations. New York: The Clarendon Press, Oxford University Press, 1991.

17. *Koplatadze, R., Kvinikadze, G.* On the oscillation of solutions of first-order delay differential inequalities and equations. Georgian Math. J. 1, No. 6, 675-685 (1994).

18. *Ladas, G., Lakshmikantham, V., Papadakis, J. S.* Oscillations of higher-order retarded differential equations generated by the retarded argument. In: Delay and functional differential equations and their applications (Proc.Conf., Park City, Utah, 1972) (pp. 219-231) New York: Academic Press, 1972.
19. *Malygina, V., Sabatulina, T.* On oscillation of solutions of differential equations with distributed delay. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2016, Paper №.116., 15 p. (2016).

Получена 01.06.2019