Динамические системы, 2019, том 9(37), №2, 103–115

УДК 517.544+517.968

Уравнения в свертках 1–го и 2–го рода на конечном интервале и краевые задачи для аналитических функций[1]

А. Ф. Воронин

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск 630090. *E-mail: voronin@math.nsc.ru*

Аннотация. Сделан обзор новых результатов по исследованию уравнений в свертках 1–го и 2–го рода на конечном интервале и краевых задач для аналитических функций, связанных с этими уравнениями. В работе найдена взаимосвязь между задачей Маркушевича и уравнениями в свертках и, как следствие, получены новые условия корректной разрешимости задачи Маркушевича и усеченного уравнения Винера – Хопфа. Рассмотрены краевые задачи Римана, являющиеся аналогами задачи Маркушевича. Приведены достаточные условия корректной разрешимости усеченного уравнения Винера – Хопфа с симметричным ядром.

Ключевые слова: уравнения в свертках 1–го и 2–го рода, конечный интервал, обобщенная краевая задача Римана, векторная краевая задача Римана–Гильберта, корректная разрешимость задачи.

Convolution equations of the first and second kind on a finite interval and boundary value problems for analytic functions

A. F. Voronin
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Novosibirsk 630090.

Abstract. A review of new results on the study of convolution equations of the 1-st and 2-nd kind on a finite interval and related boundary value problems for analytical functions is made. In the work, the relationship between the Markushevich problem and convolution equations is found, and, as a result, new conditions for the correct solvability of the Markushevich problem and the truncated Wiener–Hopf equation are obtained. Riemann boundary value problems that are analogues of the Markushevich problem are considered. Sufficient conditions for the correct solvability of the truncated Wiener–Hopf equation with a symmetric kernel are given.

Keywords: Convolution equations, finite interval, Markushevich problem, Riemann boundary value problems, factorization of matrix functions, factorization indices, stability, unique.

MSC 2010: 34K20, 34K60

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке комплексной Программы фундаментальных научных исследований СО РАН II.1 (проект № 0314-2018-0010).

Введение

В работе сделан обзор новых результатов по исследованию уравнений в свертках 1–го и 2–го рода на конечном интервале и краевых задач для аналитических функций, связанных с этими уравнениями.

Изучаются следующие уравнения в свертках первого и второго рода на конечном интервале $(0,\tau)$:

$$\lambda\, u(t) - \int\limits_0^\tau k(t-s)u(s)\,ds = f(t), \quad t \in (0,\tau), \tag{0.1}$$

где

$$k \in L_1(-\tau,\tau), \quad f \in L_1(0,\tau),\ \tau > 0,\ \lambda = 0,1. \tag{0.2}$$

Легко видеть, что значения функции $k(t)$ вне интервала $(-\tau,\tau)$ не влияют на решения уравнений (0.1). Для удобства считаем, что $k(t)$ — заданная функция при $t \in (-\tau,\tau)$ и произвольная при $t \notin (-\tau,\tau)$ $\big(k \in L_1(\mathbb{R})\big)$.

Вместе с уравнениями (0.1) будут рассматриваться следующие краевые задачи для аналитических функций. Векторная краевая задача Римана (которую также называют векторной краевой задачей Римана – Гильберта) с коэффициентами определенного вида и обобщенная краевая задача Римана (известная также под названием задачи Маркушевича и задачи $\mathbb{R}$-линейного сопряжения).

Заметим, что если для уравнения в свертках второго рода на полубесконечном интервале (уравнения Винера – Хопфа) и (эквивалентной к нему) скалярной краевой задачи Римана существует развитая теория (см., например, [10], [13]), то для усеченного уравнения Винера – Хопфа (уравнения (0.1) при $\lambda = 1$) и отмеченных выше краевых задач, общей теории к настоящему времени не существует. Взаимосвязь между уравнением Винера – Хопфа и краевой задачей Римана была найдена в середине прошлого века. Лишь, сравнительно недавно, найдена взаимосвязь (и условия эквивалентности) между уравнениями в свертках на конечном интервале и краевой задачей Римана [16], [9], [6] и задачей $\mathbb{R}$-линейного сопряжения [3], [4] в алгебре Винера.

Отметим следующие частные случаи исследования усеченного уравнения Винера – Хопфа: норма интегрального оператора меньше единицы; ядро интегрального оператора является периодической функцией с периодом τ [10, §26.2], [7]; длина интервал τ — достаточно большое положительное число [11, гл. 2, §7]; вырожденный случай, когда образ Фурье ядра является рациональной функцией [12, гл. 8 §11].

Теория уравнений 1–го рода в (0.1) при условии (0.2) существенно беднее чем теория усеченного уравнения Винера – Хопфа. Здесь можно отметить следующие случаи содержательного исследования уравнения: ядро интегрального оператора является периодической функцией с периодом τ [8] и вырожденный случай, когда образ Фурье ядра является рациональной функцией [12, гл. 8, §11].

1. Связь уравнений в свертках с краевыми задачами для аналитических функций

Пусть $1 \le n, m \le 2$, $\mathbb{R}$ — расширенная вещественная прямая. Введем следующие обозначения:

$L_{n\times m}$ — пространство $n \times m$ матриц-функций с элементами из $L_1(R)$;

$\mathcal{F}f\colon x \mapsto \mathcal{F}f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}\,dt$ — образ Фурье матрицы-функции $f \in L_{n\times m}$, $x \in \mathbb{R}$;

$W^{n\times n}$ — алгебра Винера непрерывных матриц-функций вида $C + \mathcal{F}f$, где C — постоянная матрица порядка n и $f \in L_{n\times n}$;

$W_+^{n\times n}$ ($W_-^{n\times n}$) — подалгебра в $W^{n\times n}$, состоящая из матриц-функций вида $C+\mathcal{F}f$ таких, что $f(t) = 0$ при $t < 0$ (при $t > 0$). При $C = 0$ соответствующие алгебры и подалгебры будем снабжать нижним индексом 0 ($W_0^{n\times n}$, $W_{0\pm}^{n\times n}$). При $n = 1$ верхний индекс $n \times n$ при W будем опускать;

$\mathcal{G}A$ — группа из обратимых элементов алгебры A.

Рассмотрим $\mathbb{R}$-линейную задачу сопряжения (известную также под названием задачи Маркушевича и обобщенной краевой задачи Римана) о нахождении функций $\varphi^{\pm} \in W_{0\pm}$ по краевому условию на $\mathbb{R}$:

$$\varphi^+(x) = a(x)\varphi^-(x) + b(x)\overline{\varphi^-(x)} + c(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

где

$$a, b \in W, \quad a(x) \ne 0,\ x \in \mathbb{R},\ c \in W_0. \tag{1.2}$$

Изучению задачи (1.1), (1.2) посвящено много работ (библиографию см. в [4], [15]). На настоящий момент нет общей теории этой задачи, известны лишь отдельные результаты, которые в основе получены еще в середине прошлого века на начальном пути изучения задачи. Корректность задачи (1.1), (1.2) исследована для частного случая: $|a| > |b|$, а также в вырожденных случаях: $|a| = |b|$ и $b \in W_+$, здесь b — рациональная функция.

Ниже, для простоты, краевую задачу (1.1), (1.2) будем называть задачей Маркушевича.

В работах [3], [4] найдена взаимосвязь между задачей Маркушевича и уравнениями в свертках (0.1). Как следствие такой связи, в работе [2] получены новые условия корректной разрешимости задачи Маркушевича и усеченного уравнения Винера – Хопфа при следующем условии симметрии на ядро k:

$$k(t) = k_+(t) + \overline{k_+(-t)},\ t \in R,\ \left(\mathcal{F}k = \mathcal{F}k_+ + \overline{\mathcal{F}k_+}\right). \tag{1.3}$$

где $k_+(t) = \theta(t)\,k(t)$, θ — функция Хевисайда. Другими словами, в [2] результаты исследования усеченного уравнения Винера – Хопфа (задачи Маркушевича) в перечисленных выше частных случаях были перенесены на задачу Маркушевича (усеченное уравнение Винера – Хопфа). Кроме того, были найдены новые условия корректной разрешимости усеченного уравнения Винера-Хопфа (задачи Маркушевича), которые не следуют из известных результатов для задачи Маркушевича (уравнения Винера – Хопфа).

Рассмотрим теперь две краевые задачи Римана, являющиеся аналогами задачи Маркушевича и уравнений в свертках (0.1), соответственно.

В первой краевой задаче Римана на $\mathbb{R}$ (аналог задачи Маркушевича) требуется определить вектор-функцию $\Psi^+ \in W_{0+}^{2\times 1}$ из краевого условия:

$$\Psi^+(x) = M(x)\overline{\Psi^+(x)} + q(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

где

$$M \in W^{2\times 2},\ q \in W_0^{2\times 1},\ M = \frac{1}{\overline{a}} \begin{pmatrix} b & |a|^2 - |b|^2 \\ 1 & -\overline{b} \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

$$q_1 = \frac{\overline{a}c - b\overline{c}}{\overline{a}},\ q_2 = -\frac{\overline{c}}{\overline{a}}. \tag{1.6}$$

Здесь и далее классы функций $W_0^{2\times 1}$ и $W_{0\pm}^{2\times 1}$ определены по аналогии с классами $W_0^{2\times 2}$ и $W_{0\pm}^{2\times 2}$ соответственно. Например, условие $\Psi^+ \in W_{0+}^{2\times 1}$ означает, что

$$\Psi^+ = (\Psi_1^+, \Psi_2^+)^T,\ \Psi_j^+ \in W_{0+},\ j = 1, 2,$$

где T — знак транспонирования.

Лемма 1. *Для существования решения задачи Маркушевича* (1.1), (1.2) *необходимо и достаточно существование решения краевой задачи Римана* (1.4)–(1.6). *Эквивалентность этих двух задач устанавливается равенствами*

$$\varphi^+(x) = \Psi_1^+(x),\ \varphi^-(x) = \overline{\Psi_2^+(x)}.$$

Приведем теперь вторую краевую задачу Римана (аналог уравнений в свертках (0.1) при условии (0.2)). Для вектор–функций $\Phi^\pm \in W_{0\pm}^{2\times 1}$ рассмотрим на расширенной прямой $\mathbb{R}$ краевую задачу Римана:

$$\Phi^+(x) = G(x)\,\Phi^-(x) + g(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{1.7}$$

где

$$G(x) = -\frac{1}{\Lambda^-(x)} \begin{pmatrix} 1 & -e^{ix\tau}\mathcal{F}k_-(x) \\ e^{-ix\tau}\big(\mathcal{F}k_+(x) + 1 - \lambda\big) & \lambda - \mathcal{F}k_-(x) - \mathcal{F}k_+(x) \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

$$\begin{gathered} k_\pm(t) = \theta(\pm t)k(t),\ \mathcal{F}k_\pm(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}k_\pm(t)\,dt,\ \Lambda^\pm(x) = 1 - \mathcal{F}k_\pm(x), \\ g_1(x) = \frac{\mathcal{F}f(x)}{\Lambda^-(x)}\mathcal{F}k_-(x),\ g_2(x) = \frac{\mathcal{F}f(x)}{\Lambda^-(x)}e^{-ix\tau}\mathcal{F}k_+(x). \end{gathered} \tag{1.9}$$

Определим на алгебре W_0 дополнительные друг к другу проекторы P_0^+ и P_0^- по формулам

$$P_0^{\pm}:\ W_0\ \to\ W_{0\pm},\ P_0^{\pm}\mathcal{F}g_0(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}g_0(t)\theta(\pm t)\,dt,\ x\in\mathbb{R},$$

где $g_0\in L_1(\mathbb{R})$.

В следующей теореме (см. [9, лемма 1.1], [6, теорема 1]) найдена взаимосвязь (и условия эквивалентности) краевой задачи Римана (1.7)–(1.9) и уравнений в свертках (0.1) (задачи (0.1), (0.2)).

Теорема 1. *Задача* (0.1), (0.2) *эквивалентна краевой задаче Римана* (1.7)–(1.9) *с дополнительным условием*

$$\hat{u}_1(x):=\Phi_1^+(x)+e^{ix\tau}\Phi_2^-(x)+\mathcal{F}f(x)\in W_{0+},\ e^{-ix\tau}\hat{u}_1(x)\in W_{0-}. \tag{1.10}$$

Решения задачи (0.1), (0.2) *и краевой задачи Римана* (1.7)–(1.10) *связаны равенствами*

$$\Phi_1(x)=\mathcal{F}k_-(x)\mathcal{F}u(x),\ \Phi_2(x)=e^{-ix\tau}\big(\mathcal{F}k_+(x)+1-\lambda\big)\mathcal{F}u(x),$$

$$\mathcal{F}u(x)=\Phi_1^+(x)+e^{ix\tau}\Phi_2^-(x)+\mathcal{F}f(x),\ (\hat{u}_1(x)=\mathcal{F}u(x)),$$

где

$$\Phi=\Phi^++\Phi^-,\ \Phi^{\pm}(x)=P_0^{\pm}\Phi(x).$$

Кроме того, если $\lambda=1$ *и выполнено неравенство*

$$\Lambda^{\pm}(x)\neq 0,\ x\in\mathbb{R},$$

то матрица $G(x)\in\mathcal{G}W^{2\times 2}$ *и допускает левую и правую стандартные факторизации с суммарным индексом* $æ_0$*:*

$$æ_0=Ind\det G(x)\equiv\frac{1}{2\pi}\Delta_{\mathbb{R}}\arg\det G(x)=Ind\frac{\Lambda^+(x)}{\Lambda^-(x)}\geq 0.$$

Замечание 1. При $\lambda=1$ легко видеть, что в теореме 1 условие (1.10) заведомо выполнено, если $||k_{\pm}||_{L_1}<1$, кроме того, если $k(t)=0,\ |t|>\tau$ или функция $k(t)$ экспоненциально убывает на бесконечности, то не уменьшая общности можно считать, что $\Lambda^{\pm}(x)\neq 0,\ x\in\mathbb{R}$, (см. [9, замечание 1.1]).

Укажем взаимосвязь (и условия эквивалентности) краевой задачи Маркушевича и усеченного уравнения Винера – Хопфа с симметричным ядром (при условии (1.3)).

Для простоты считаем, что коэффициенты задачи Маркушевича имеют следующий вид:

$$a=1,\ b(x):=b^-(x)=\int_{-\infty}^{0}e^{itx}\,\beta(t)\,dt, \tag{1.11}$$

где $\beta\in L_1(-\infty,0)$.

Сформулируем теперь теорему и следствие из нее, которые доказаны в [3, теорема 1, следствие 1] при более общих условиях на коэффициенты a и b.

Теорема 2. *Пусть для задачи* (0.1), (0.2) *при* $\lambda = 1$ *выполнено условие симметрии* (1.3) *и*

$$\Lambda^{+}(x) \equiv 1 - \mathcal{F}k_{+}(x) \neq 0, \ x \in \mathbb{R}, \ Ind\,\Lambda^{+}(x) = 0, \tag{1.12}$$

а для задачи Маркушевича выполнено условие (1.11) *и коэффициент* b *имеет следующий общий вид:*

$$b(x) = P_0^{-}\left\{e^{-ix\tau}\frac{\mathcal{F}k_{+}(x)}{1-\mathcal{F}k_{+}(x)}\right\}. \tag{1.13}$$

Тогда матричные коэффициенты краевых задач Римана (1.7)–(1.9) *и* (1.4)–(1.6)*, матрицы* $G(x)$ *и* $M(x)$*, имеют одинаковый набор (левых) частных индексов.*

Более того, справедливо равенство

$$M(x) = -\left\{\frac{1}{\Lambda^{+}(x)},\, 1\right\} I_1\, G(x)\left\{\overline{\Lambda^{+}(x)},\, 1\right\}, \ x \in \mathbb{R}, \tag{1.14}$$

где

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что для доказательства теоремы 2 достаточно обосновать равенство (1.14). Справедливость последнего устанавливается непосредственным перемножением матриц в правой части (1.14).

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда задача Маркушевича* (1.1), (1.2) *корректно разрешима (решение существует, единственно и устойчиво по отношению к коэффициентам задачи* a, b, c *в норме алгебры Винера) тогда и только тогда, когда однородное усеченное уравнение Винера – Хопфа имеет лишь тривиальное решение.*

2. Достаточные условия корректной разрешимости усеченного уравнение Винера – Хопфа с симметричным ядром

В [1], (см. также [14]) было показано, что задача Маркушевича (1.1), (1.2) корректно разрешима, если выполнены условия: $|a| > |b|$, $\operatorname{Ind} a(x) = 0$. Можно видеть, что используя этот результат по теореме 1 (и следствию 1) можно получить следующие две теоремы (см. [2]).

Положим

$$||k_{+}||_1 := \int_0^{\infty} |k_{+}(s)|\, ds.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (0.2), (1.3) *и*

$$k(t) = 0, \ |t| < \tau/2. \tag{2.1}$$

Если

$$||k||_1 \equiv \int_{-\tau}^{\tau} |k(s)|\, ds < 2, \tag{2.2}$$

то усеченное уравнение Винера – Хопфа в (0.1) *корректно разрешимо.*

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (0.2), (1.3) *и*

$$|1 - \mathcal{F}k_+(x)| > ||k_+||_1. \tag{2.3}$$

Тогда оба частных индекса матрицы $G(x)$ (в теореме 1) равны 0, и усеченное уравнение Винера – Хопфа в (0.1) *корректно разрешимо.*

Приведем (см. [2]) достаточные условия корректной разрешимости усеченного уравнения Винера – Хопфа, полученные из других соображений (без использования задачи Маркушевича).

Теорема 5. *Пусть справедливы условия* (0.2), (1.3), *и выполнены неравенства*

$$1 - \mathcal{F}k(x) \neq 0,\ \ x \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

$$1 - \mathcal{F}k_+(x) \neq 0,\ \ x \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Тогда оба частных индекса матрицы $G(x)$ равны 0, и усеченное уравнение Винера – Хопфа в (0.1) *корректно разрешимо.*

Легко видеть, что неравенство в (2.4) заведомо выполнено, если

$$\mathcal{F}k_+(x) + \overline{\mathcal{F}k_+(x)} < 1,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим два примера к теореме 5.

1. Пусть $||k_+||_1 < 1/2$. Тогда оба неравенства (2.4) и (2.5) будут выполнены. По теореме 5 усеченное уравнение Винера – Хопфа (при ограничении (1.3)) корректно разрешимо. С другой стороны, из неравенства $||k||_1 < 1$ по теореме Банаха об обратном операторе получим, что усеченное уравнение Винера – Хопфа имеет единственное решение в $L_1(0,\tau)$, представимое в виде абсолютно сходящегося ряда Неймана. Следовательно, искомое уравнение второго рода в (0.1) корректно разрешимо.

2. Пусть τ — достаточно большое число. Тогда из неравенства в (2.4) (неравенство в (2.5) может не выполняться) по теореме 7.2 из [11] получим существование и единственность решения усеченного уравнение Винера – Хопфа при условии (1.3).

3. Применение усеченного уравнение Винера–Хопфа с симметричным ядром для исследования задачи Маркушевича

В работах [2], [3] найдены условия корректной разрешимости задачи Маркушевича, которые вытекают из хорошо известных результатов для усеченного уравнения Винера – Хопфа и настоящей теоремы 2.

В данном параграфе предполагается, что коэффициенты a и b задачи Маркушевича (1.1), (1.2) удовлетворяют условиям (1.11)–(1.13). Следующие теоремы получены в [2], [3] (при общих условиях на коэффициент a).

Рассмотрим сначала случай, когда

$$||k||_1 \equiv \int_{-\tau}^{\tau} |k(s)|\, ds < 1. \tag{3.1}$$

Теорема 6. *Пусть выполнено неравенство* (3.1). *Тогда оба частных индекса матрицы $M(x)$ равны 0 и задача Маркушевича* (1.1), (1.2) *корректно разрешима.*

Если, кроме того,

$$c(x) = b(x)\mathcal{F}f(x),\ f(t) = -\overline{f(\tau - t)},\ t \in (0, \tau),$$

то решение задача Маркушевича имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi^-(x) &= \frac{1}{2}\left(\overline{\Phi_1^+(x)} - \Phi_2^-(x)\right), \\ \varphi^+(x) &= \frac{1}{2\Lambda^+(x)}\left(\Phi_2^+(x) - \overline{\Phi_1^-(x)}\right) + b^+(x)\overline{\varphi^-(x)}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где

$$\Phi_1(x) = \overline{\mathcal{F}k_+}(x)\mathcal{F}u(x),\ \Phi_2(x) = e^{-ix\tau}\mathcal{F}k_+(x)\mathcal{F}u(x),\ \Phi^\pm(x) = P_0^\pm\Phi(x),$$

u — решение усеченного уравнение Винера – Хопфа при ограничениях (0.2), (1.3).

В следующем случае считаем, что ядро $k(t)$ является периодической функцией на интервале $(-\tau, \tau)$ с периодом τ.

Пусть $\mathcal{N}$ — множество целых чисел. Положим

$$\mathcal{N}_0 := \{m \in \mathcal{N} \,:\, \Lambda^+(x_m) = 0, \text{ где } x_m = 2m\pi/\tau,\}$$

$$\left(\Lambda^+(x) = 1 - \int_0^\tau e^{ixt}k_+(t)\,dt,\ x \in R,\ k(t) := 0,\ |t| > \tau\right).$$

Из соотношения

$$\lim_{|x|\to\infty} \Lambda^+(x) = 1$$

и явного вида для целой аналитической функции Λ^+ следует, что $\mathcal{N} \supset \mathcal{N}_0$ — конечное множество (с числом элементов n_0). Ясно, что $n_0 = 0$ при $\mathcal{N}_0 = \emptyset$ — пустое множество.

Теорема 7. *Пусть функция* $k_+(t)$ *удовлетворяет следующему равенству:*

$$k_+(t) = \overline{k_+(\tau - t)},\ t \in (0, \tau). \tag{3.3}$$

Тогда задача Маркушевича (1.1), (1.2) *корректно разрешима тогда и только тогда, когда* $\mathcal{N}_0 = \emptyset$.

В противном случае, если $\mathcal{N}_0 \neq \emptyset$, *то общее решение однородной* ($c = 0$) *задача Маркушевича* (1.1), (1.2) *вычисляется по формулам* (3.2), *где*

$$\mathcal{F}u(x) = Q_0^+(x)\bigl(1 - e^{ix\tau}\bigr),$$

$$Q_0^+(x) = \sum_{j=1}^{n_0} c_j (x - x_j)^{-1},\ x_j = 2m_j\pi/b,\ m_j \in \mathcal{N}_0,$$

c_j — *произвольные комплексные постоянные,* $j = 1, \ldots, n_0$.

В случае, когда τ — достаточно большое число в [3, теорема 3] получен следующий результат.

Теорема 8. *Пусть*

$$1 - \mathcal{F}k_+(x) - \overline{\mathcal{F}k_+(x)} \neq 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Тогда существует такое (достаточно большое) $\tau_0 > 0$, *что для всех* $\tau > \tau_0$ *задача Маркушевича* (1.1), (1.2) *корректно разрешима.*

Рассмотрим теперь случай, когда для уравнения в светках 2–го рода выполнены условия теоремы 5.

Положим

$$b(x) := \int_{-\tau}^{\infty} e^{itx}\beta(t)dt, \quad H_b^+(x) := 1 + e^{ix\tau}b(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.4}$$

где $\beta \in L_1(-\tau, \infty)$.

Теорема 9. *Пусть выполняется неравенство в* (3.4), $Ind\, H_b^+(x) = 0$ *и, кроме того,*

$$1 - \mathcal{F}k_+(x) - \overline{\mathcal{F}k_+(x)} \neq 0,\ x \in \mathbb{R},$$

где

$$\mathcal{F}k_+(x) = \frac{e^{ix\tau}b(x)}{H_b^+(x))}.$$

Тогда задача Маркушевича (1.1), (1.2) *корректно разрешима.*

4. Векторная краевая задача Римана (задача Римана– –Гильберта) и уравнения в свертках первого и второго рода на конечном интервале

В теореме 1 получена взаимосвязь между векторной краевой задаче Римана (1.7)–(1.9) с коэффициентами G, g и уравнениями в свертках (0.1) при условии (0.2).

Легко видеть, что из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие 2. *Пусть* $||k_\pm||_{L_1} < 1$. *Тогда матрица* $G(x)$ *допускает каноническую факторизацию в алгебре Винера (другими словами, матрица* $G(x)$ *имеет только нулевые частные индексы) тогда и только тогда, когда усеченное уравнение Винера – Хопфа* (0.1) *при условии* (0.2) *имеет единственное решение в* $L_1(0,\tau)$.

Положим
$$A(x) = \begin{pmatrix} e^{-ix\tau}\mathcal{F}k(x) & -1-\mathcal{F}k(x) \\ 1-\mathcal{F}k(x) & e^{ix\tau}\mathcal{F}k(x) \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R}.$$
Для сравнения со следствием 2 приведем из [16, теорема 2] следующую теорему.

Теорема 10. *Матрица* $A(x)$ *допускает каноническую факторизацию в алгебре Винера тогда и только тогда, когда усеченное уравнение Винера – Хопфа* (0.1) *при условии* (0.2) *имеет единственное решение в* $L_1(0,\tau)$.

Отметим, что с помощью теоремы 1 (и следствия 2) найдены новые условия корректной разрешимости усеченного уравнения Винера – Хопфа с симметричным ядром и также краевой задачи Маркушевича (см. пп. 2–3). Кроме того, теорема 1 использовалась в построении теории уравнений в свертках (0.1) с периодическими ядрами [7], [8]. Эффективного же применения теоремы 10 не выявлено.

Перейдем непосредственно к уравнению 1-го рода в свертках. Рассмотрим случай симметричного ядра, когда выполнено условие (1.3). В [3] получена взаимосвязь между уравнением 1–го рода (0.1) при условиях (0.2), (1.3) и задачи Маркушевича (1.1):

Теорема 11. *Пусть для уравнения в свертках первого рода* (0.1) *выполнены ограничения* (0.2), (1.3) *и правая часть уравнения удовлетворяет условию*
$$f(t) = -\overline{f(\tau - t)}, \ t \in (0,\tau).$$
А в задаче Маркушевича (1.1) $a = 1$, *коэффициент* $b(x)$ *имеет следующий общий вид:*
$$b(x) = e^{-ix\tau}\frac{\mathcal{F}k_+(x) + 1/2}{\Lambda_0^+(x)} + F^+(x),$$
где
$$\Lambda_0^+(x) \equiv 1/2 - \mathcal{F}k_+(x) \neq 0, \ x \in \mathbb{R}, \ F^+ \in W_{0+}.$$
Кроме того, правые части уравнения (0.1) *и задачи Маркушевича связаны равенством*
$$c(x) = b(x)\mathcal{F}f(x), \ x \in \mathbb{R}.$$

Тогда, если $u \in L_1(0,\tau)$ — *решение уравнения первого рода* (0.1), *то функции* $\varphi^\pm(x)$, *заданные следующими двумя формулами:*
$$\varphi^-(x) = \frac{1}{2}\left(\overline{\Phi_1^+(x)} - \Phi_2^-(x)\right),$$
$$\varphi^+(x) = \frac{1}{2\Lambda_0^+(x)}\left(\Phi_2^+(x) - \overline{\Phi_1^-(x)}\right) + F^+(x)\overline{\varphi^-(x)}$$

(функции $\Phi_1^{\pm}$, $\Phi_2^{\pm}$ *определены в теореме 1), являются решением задачи Маркушевича* (1.1).

С другой стороны, если $\varphi^{\pm} \in W_{0\pm}$ *— решение задачи Маркушевича* (1.1) *и выполнено условие*

$$e^{-ix\tau}\overline{\varphi^-(x)} \in W_{0-},$$

то функция

$$u(t) = f(t) + \mathcal{F}^{-1}\{\overline{\varphi^-(x)} - e^{ix\tau}\varphi^-(x)\}(t)$$

является решением уравнения первого рода (0.1).

Заключение

Установлена связь между краевыми задачами для аналитических функций и интегральными уравнениями в свертках на конечном промежутке, позволяющая получить новые результаты как для краевых задач, так и для интегральных уравнений. Дальнейшее исследование направлено на развитие полученных методов для исследования уравнений в свертках 1–го рода и других интегральных уравнений типа свертки.

Список цитируемых источников

1. *Боярский Б. В.* Об обобщенной граничной задаче Гильберта // Сообщения АН Груз. ССР. — 1960. — Т. 25, № 4. — С. 385–390.

   Bojarski B. V. On the generalized boundary value problem of Hilbert. Communications of the Academy of Sciences of the Georgian SSR, T. 25, № 4, 385–390 (1960). (in Russian)
2. *Воронин А. Ф.* Исследование задачи $\mathbb{R}$–линейного сопряжения и усеченного уравнения Винера – Хопфа // Математические труды. — 2019. — Т. 22, №2. — С. 21-23.

   Voronin A. F. Study of the $\mathbb{R}$–linear conjugation problem and the truncated Wiener – Hopf equation. Siberian Advances in Mathematics 22, №2, 21-23 (2019).
3. *Воронин А. Ф.* Обобщенная краевая задача Римана и интегральные уравнения в свертках первого и второго рода на конечном интервале // Сибирские электронные математические известия. — 2018. — Т. 15. — С. 611–623.

   Voronin A. F. A generalized Riemann boundary value problem and integral convolutions equations of the first and second kind. Siberian Electronic Mathematical Reports 15, 412–421 (2018). (in Russian)
4. *Воронин А. Ф.* О связи обобщенной краевой задачи Римана и усеченного уравнения Винера – Хопфа // Сибирские электронные математические известия. — 2018. — Т. 15. — С. 412–421.

   Voronin A. F. On the connection between the generalized Riemann boundary value problem and the truncated Wiener – Hopf equation. Siberian Electronic Mathematical Reports 15, 412–421 (2018). (in Russian).

5. *Воронин А. Ф.* Условия устойчивости и единственности решения задачи Маркушевича // Сибирские электронные математические известия. — 2017. — Т. 14. — С. 511–617.

   Voronin A. F. Conditions for the stability and uniqueness of the solution of the Markushevich problem. Sib. Elektron. Matem. Izv. 14, 511–517 (2017). (in Russian)

6. *Воронин А. Ф.* Системы уравнений в свертках 1–го и 2–го рода на конечном интервале и факторизация матриц–функций // Сиб. матем. журн. — 2012. — Т. 35 № 5. —С. 978–990.

   Voronin A. F. Systems of convolution equations of the first and second kind on a finite interval and factorization of matrix–functions. Siberian Math. J., 53:5, 781–791 (2012).

7. *Воронин А. Ф.* Исследование интегрального уравнения 2–го рода в свертках на конечном интервале с периодическим ядром // Сиб. журнал индустр. мат–ки. — 2009. — Т.12, №1(37). — С. 31–39.

   A. F. Voronin.(2010) Analysis of a convolution integral equation of the second kind with periodic kernel on a finite interval. J. Appl. Industr. Math., 4:2, 282–289.

8. *Воронин А. Ф.* Интегральное уравнения первого рода в свертках на конечном интервале с периодическим ядром // Сиб. журн. индустр. матем., 11:1. — С. 46–56.

   A. F. Voronin. (2009) An integral convolution equation of the first kind on a finite interval with a periodic kernel. J. Appl. Industr. Math. — 2008. — 3:3, 409–418.

9. *Воронин А. Ф.* Полное обобщение метода Винера – Хопфа для интегральных уравнений в свертках на конечном интервале с интегрируемыми ядрами // Диф. уравнения. — 2004. — Т. 40, № 9. — С. 1153–1160.

   A. F. Voronin, (2004). A complete generalization of the Wiener – Hopf method to convolution integral equations with integrable kernel on a finite interval. Differ. Equ., 40:9, 1259–1267

10. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. Наука, М., 1978.

    Gakhov F. D, Cherskii Yu. I. (1978) Equations of Convolution Type. Nauka, Moscow. (Rusian).

11. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971.

    I. C. Gohberg and I. A. Fel'dman. (1971). Convolution equations and projection methods for their solution, Nauka, Moscow. (Russian)

12. *Забрейко П. П., Кошелев А. И. и др.* Интегральные уравнения, Наука, М., 1968.

    Zabreiko P. P., Koshelev A. I. and others. (1968) Integral equations, Nauka, M. (Russian)

13. *Крейн М. Г.,* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи мат. наук. — 1958. — Т 13, № 5 (83), — С. 3–120.

    Krein M. G. (1958). Integral equations on the half–line with kernel depending on the difference of the arguments. Uspehi Mat. Nauk (N. S.) V. 13, Issue: 5, 3–120. (Rusian)

14. *Литвинчук Г. С.* Две теоремы об устойчивости частных индексов краевой задачи Римана и их приложение // Изв. вузов. Математика. — 1967. — Т. 67, № 12. — С. 47–57

15. *B. Bojarski, V. Mityushev.* (2013). $\mathbb{R}$–linear problems for multiply connected domains and alternating method of Schwarz // Journal of Mathematical Sciences. Vol. 189, No. 1. P. 68–77.
16. *Feldman I., Gohberg I., Krupnik N.* (2000). Convolution equationson finite intervals and factorization of matrix function. Integral equations and operator theory. V. 36. P. 201–211.

Получена 29.05.2019