Динамические системы, 2019, том 9(37), №4, 410–427

УДК 621.391

Метод ортогонализации и его применение в теории связи

А. Н. Дегтярев

Севастопольский государственный университет,
Севастополь, 299053. *E-mail: degtyaryov1966@yandex.ru*

Аннотация. Рассматривается метод ортогонализации, основанный на определении веса ортогональности. Указанный вес может быть знакопеременной функцией. Непротиворечивость метода известным положениям показана на примере полиномов Чебышева и Эрмита. Получены ортогональные с весом системы эквидистантных функций. Показано, что базис, составленный из смещенных на кратные интервалы времени импульсных характеристик физически реализуемых линейных систем, является квазиортогональным. Установлено, что преобразование нормированного фильтра-прототипа в фильтры нижних частот и в полосовые фильтры с заданными характеристиками не нарушает ортогональность базисных функций. Показано, что использование базиса, составленного из импульсных характеристик линейных систем позволяет снизить уровень межканальных и межсимвольных помех при передаче сообщений по каналам связи.

Ключевые слова: метод ортогонализации, системы ортогональных функций, помехоустойчивость систем передачи информации.

Orthogonalization method and its application in communication theory

A. N. Degtyaryov

Sevastopol State University, Sevastopol 299053.

Abstract. The analysis of the reasons leading to the emergence of intersymbol and interchannel interference in information transmission systems is carried out. It is shown that the indicated interference occurs due to the fact that physically realizable elementary signals with the help of which information is transmitted are not orthogonal. It is established that, within the framework of the existing communication theory, the considered interference can not be simultaneously eliminated. It is shown that the known methods for obtaining systems of orthogonal functions do not satisfy the requirements for systems of physically realizable functions that approximate elementary signals. An orthogonalization method based on determining the weight of orthogonality is proposed. The peculiarity of the method is that it does not distort the shape of the original functions. The indicated weight may be an alternating function. The condition that the norm of functions is non-negative follows from the conditions of orthogonality. The concept of weight energy is introduced. It is shown that a weight satisfying the minimum energy condition is a quadratic form of orthogonalizable functions. The consistency of the method to the well-known propositions is shown by the example of chebyshev and hermite polynomials. It is shown that the weight functions known for classical orthogonal polynomials satisfy the condition of minimum weight energy. We obtained systems of equidistant functions that are orthogonal with weight, consisting of reference functions raised to an integer degree. For the transmission of messages, it is proposed to use the impulse response of physically realizable linear systems that are offset by multiple time intervals. It is shown that a basis composed of such functions

is quasi-orthogonal. Quasi-orthogonality consists in the fact that the conditions of orthogonality can be strictly fulfilled only if the number of initial functions is equal to the order of the linear system. For the remaining equidistant functions, the orthogonality condition is satisfied with an error sufficient for practice. It is established that the conversion of the normalized prototype filter into lower-pass filters and into band-pass filters with specified characteristics does not violate the orthogonality of the basis functions. To evaluate the accuracy of representing signals in the form of orthogonal series, two criteria are proposed. One criterion is used to approximate the transmitted signal side by side, and the second – for the receiver to make a decision about the values of the coefficients of the series. Analytical dependences of the probability of error when receiving a message symbol for the case of transmission of information by opposite signals are obtained. It is shown that the use of a basis composed of equidistant biased impulse characteristics of linear systems can reduce the level of interchannel and intersymbol interference when transmitting mes-sages over communication channels.
Keywords: orthogonalization method, systems of orthogonal functions, noise immunity of information transmission systems.
MSC 2010: 42C05

Введение

В большинстве высокоэффективных цифровых систем передачи информации (спутниковые, радиорелейные и кабельные системы) дисперсия случайной межсимвольной интерференции (МСИ) или случайной межканальной помехи (МКП) существенно превышает мощность шума в канале связи.

МСИ обусловлена наложением во времени откликов линейных устройств каналоформирующего оборудования (КО) на различные элементарные сигналы, несущие информацию о передаваемых символах, в результате чего на расшифровку одного символа оказывают влияние несколько предыдущих, а в каналах с большим групповым временем запаздывания еще и последующих символов. МСИ также возникает в результате многолучевого распространения радиоволн.

Причиной МКП является проникновение на выход КО одного канала сигналов соседних каналов из-за перекрытия по частоте амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) фильтров КО каналов.

В [1] показано, что полное устранение МСИ при одновременной минимизации дисперсии аддитивного шума достигается, если приемный фильтр состоит из каскадного соединения фильтра, согласованного с принимаемым сигналом, и трансверсального фильтра (эквалайзера), содержащего бесконечное число отводов с соответствующими весовыми коэффициентами.

Линия задержки физически реализуемого эквалайзера имеет конечное число отводов и, следовательно, полностью устранить МСИ невозможно. На практике производится оптимизация эквалайзера по критериям минимума пикового значения МСИ или минимума среднеквадратического значения МСИ [1]. В общем случае оптимальный по указанным критериям эквалайзер не является оптимальным по критерию минимума вероятности ошибки, т.к. он нарушает условие согласованности приемного фильтра с сигналом.

Наряду с линейной обработкой сигнала для компенсации МСИ в отсчетные моменты времени используют и нелинейную обработку, в частности, прием с обратной связью по решению [2]. На основе решений о переданных сигналах и сведений об отклике тракта формируется сигнал, компенсирующий МСИ за счет предыдущих символов. Этому методу присуще явление размножения ошибок.

Если последующие символы создают значительный уровень МСИ, то линейная и нелинейная обработки используются совместно [2].

В системах с неизменными во времени параметрами приемопередающего тракта линейный выравниватель в виде трансверсального фильтра предусматривается в модуляторе [9].

Если параметры тракта в процессе эксплуатации подвержены изменениям, то его характеристики должны периодически подстраиваться. Такая подстройка осуществляется использованием на приеме адаптивной коррекции тракта [2].

Снижение уровня межсимвольной интерференции, возникающей в результате многолучевого распространения радиоволн, достигается путем адаптивной коррекции тракта, а также применением пространственно-временной селективности сигналов [3]. Отметим, что данный тип МСИ по своему влиянию на качество принимаемого сообщения аналогичен повторной помехе.

Снижение уровня МКП достигается повышением избирательности КО и введением защитного частотного интервала между соседними каналами связи.

Одновременное снижение уровней МСИ и МКП в рамках существующей теории невозможно. При снижении уровня МСИ повышается уровень МКП и наоборот. На практике приходится искать параметры КО, оптимальные по критерию минимальной суммарной ошибки, обусловленной действием МСИ, МКП и шума в канале связи.

Невозможность одновременного снижения уровней МСИ и МКП обусловлена принятой в современной теории связи, основы которой разработаны К. Шенноном и В. А. Котельниковым, моделью передаваемого по каналу связи сигнала.

Так, в цифровых системах связи и передачи информации непрерывный сигнал источника сообщения конкретизируется по времени и преобразуется в цифровой код, которым осуществляется модуляция несущего колебания.

Дискретизация непрерывного сигнала производится в соответствии с теоремой отсчетов, доказанной В. А. Котельниковым.

Теорема отсчетов [4]. Сигнал $s(t)$, ограниченный по спектру наивысшей частотой $\omega_m = 2\pi f_m$, может быть представлен рядом

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s\left(\frac{n}{2f_m}\right) \frac{\sin \omega_m \left(t - \frac{n}{2f_m}\right)}{\omega_m \left(t - \frac{n}{2f_m}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta t) \sin c\omega_m (t - n\Delta t), \tag{1}$$

где $\Delta t = 1/(2f_m)$ – интервал дискретизации функции $s(t)$, $s(n\Delta t)$ — выборки (отсчеты) функции $s(t)$ в моменты времени $n\Delta t$.

Заметим, что функции $\sin c\omega_m(t-n\Delta t)$ представляют собой импульсные характеристики идеального фильтра с прямоугольной АЧХ и частотами среза $\pm\omega_m$, смещенные на интервалы времени $n\Delta t$. Для того, чтобы восстановить непрерывный сигнал $s(t)$ из дискретного, достаточно последовательность его отсчетов $s(n\Delta t)$ подать на указанный идеальный фильтр.

При разработке теории связи К. Шенноном была принята модель, согласно которой ограниченный по частоте сигнал, имеющий длительность ΔT, может быть представлен в виде конечной суммы ряда (1), содержащей $N = 2f_m \Delta T$ слагаемых.

Однако, такая модель приводит к противоречивости теории связи и возникновению систематических погрешностей при технической реализации теоретических положений.

Во-первых, предположение об ограниченности сигнала по длительности и по частоте противоречит свойствам прямого и обратного преобразований Фурье.

Во-вторых, для точного восстановления непрерывного сигнала по его выборкам требуется идеальный фильтр, который, согласно известной теореме Р. Пэли и Н. Винера физически не реализуется и противоречит принципу причинности [5].

При технической реализации КО указанные противоречия приводят к появлению МКП и МСИ, а в случае необходимости восстановления на приемном конце непрерывного сигнала – к погрешности восстановления.

Кроме того, стоит отметить, что схема устройство обработки сигналов приемной части КО определяет ковариацию каждого сигнала алфавита с принимаемой смесью сигнала и шума. Т.е. выполнять требование полноты системы базисных функций нет необходимости.

МКП возникают в результате того, что сигналы, передаваемые в соседних каналах связи, из-за неидеальности АЧХ каналов перестают быть ортогональными.

МСИ является следствием потери ортогональности сигналами, с помощью которых передаются символы сообщения.

Вообще говоря, многие задачи науки и техники связаны с разложениями функций в ряды. Наиболее широко применяются разложения функций в ряды по системам ортогональных функций, по вейвлетам, разложение Карунена-Лоева-Пугачева (К-Л-П-разложение).

При анализе общих свойств систем ортогональных функций и для получения таких систем используются теория специальных функций и теория линейных интегральных преобразований.

Метод исследования ортогональных рядов, предлагаемый теорией специальных функций, основан на изучении дифференциальных свойств веса ортогональности этих функций [6]. В соответствии с данным методом теория специальных функций строится следующим образом. Через дифференциальное уравнение веса ортогональности вводится понятие классических ортогональных полиномов. Выводится формула Родрига – дифференциальное уравнение, решением которого являются классические ортогональные полиномы. Путем обобщения формулы Родрига на нецелые значения степени и комплексные значения коэффициентов уравнения в рассмотрение вводится дифференциальное уравнение гипергеометрического типа. Решением данного уравнения являются гипергеометрические, вырожденные гипергеометрические функции и функции Эрмита. С помощью замены переменных устанавливается связь уравнений гипергеометрического типа с обобщенными уравнениями гипергеометрического типа, при решении которых получаются цилиндрические и гипергеометрические функции.

В соответствии с указанной теорией вес ортогональности должен быть неотрицательной функцией.

В теории специальных функций обосновывается метод ортогонализации Грамма-Шмидта, который позволяет из системы линейно независимых функций получить ансамбль ортогональных функций.

Указанная теория позволяет вычислять ортогональные функции по известному весу, но не отвечает на вопрос, как определить вес ортогональности для уже известных линейно независимых функций. Кроме того, метод ортогонализации Грамма-Шмидта не дает возможность в полной мере использовать преимущества многих линейно независимых функций, поскольку получаемые ортогональные функции по форме отличаются от исходных. Например, большей частью системы вейвлетов представляют собой системы линейно независимых неортогональных функций. Ряды по вейвлетам сходятся быстро, поскольку базисные функции «похожи» на раскладываемую функцию [7]. Использование указанного метода ортогонализации приводит к снижению скорости сходимости рядов.

В теории линейных интегральных преобразований доказывается, что собственные функции этих преобразований ортогональны.

Частным случаем линейных интегральных преобразований являются гильбертовы преобразования с воспроизводящим ядром (ГПВЯ). Для пространств функций, описываемых с помощью собственных функций ГПВЯ, доказываются теоремы отсчетов. Наиболее известная из них теорема отсчетов В. А. Котельникова.

При исследовании случайных процессов рассматривается К-Л-П-разложение. Доказывается, что координатные функции данного разложения являются собственными функциями линейного интегрального преобразования с ядром в виде корреляционной функции исследуемого случайного процесса. Дисперсии коэффициентов разложения случайного процесса по таким функциям представляют собой собственные числа данного интегрального преобразования. Коэффициенты К-Л-П-разложения оказываются некоррелированными между собой, следовательно, получаемый ряд сходится быстро.

Однако, практическое применение разложения Карунена-Лоева-Пугачева связано с большими вычислительными затратами при определении координатных функций.

В 2010 году Петровым Д. А. защищена диссертация [8], в которой разработаны математические методы синтеза конечномерных, дискретных обобщенных базисов Вейля-Гейзенберга с заданными параметрами, обладающие хорошей локализацией одновременно и в частотной и во временной области. Указанные базисы получаются смещением на кратные интервалы времени некоторой формирующей функции. Показано, что формирующая функция по форме близка к функции Гаусса. Доказаны условия ортогональности обобщенных базисов Вейля-Гейзенберга, сформулированные в виде специальных условий на формирующую функцию и критерии отсутствия межканальной и межсимвольной интерференции. Однако, автор работы сам признает сложность получения рассматриваемых базисов, и отмечает, что ортогональность базиса возможна при определенных условиях, связанных с изменением формы формирующей функции и интервалом смещения функций друг относительно друга.

Существующая научная проблема заключается в следующем.

С одной стороны, существующая теория связи, построенная с помощью математического аппарата классической теории ортогональных функций не позволяет одновременно снизить уровни МСИ и МКП. С другой стороны, практическая реализация оптимальных по критерию максимального правдоподобия приемников сигналов нестрого использует понятие полноты ортогональных функций, что позволяет введением дополнительных условий повысить частотную эффективность систем передачи информации.

Таким образом, для увеличения предельной скорости передачи сигналов необходимо выйти за рамки теоремы В. А. Котельникова, для чего сформировать новую систему функций, для которой сформулировать условия, аналогичные условиям ортогональности. Целью работы является создание метода описания сигналов, который позволяет снизить влияние МСИ и МКП на правильный прием сообщений в системах связи с частотным разделением абонентов.

Для формирования новой системы функций будем использовать метод ортогонализации функций, основанный на определении веса ортогональности, предложенный в работе [9].

1. Обоснование метода ортогонализации линейно независимых функций

Рассмотрим систему N неслучайных линейно независимых функций $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, ..., $\phi_N(t)$ [9]. Введем в рассмотрение функцию $h(t)$ такую, что выполняются условия:

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t)\phi_j(t)h(t)dt = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j, \end{cases} \tag{2}$$

где (t_1, t_2) – интервал выполнения условий (2).

Можно говорить о том, что функции $\phi_1(t)$, $\phi_2(t), ..., \phi_N(t)$ являются ортогональными с весом $h(t)$ на интервале $(t_1,\ t_2)$.

Норма получаемого функционального пространства

$$\|\phi_i(t)\| = \left(\int_{t_1}^{t_2} \phi_i^2(t)h(t)dt\right)^{1/2} \geq 0.$$

существует, поскольку в соответствии с условиями (2) выражение под знаком корня принимает положительные значения.

Лемма 1 [9]. Пусть заданы системы линейно независимых функций $\phi_1(t)$,

$\phi_2(t), ..., \phi_N(t)$ и $l_1(t)$, $l_2(t), ..., l_k(t)$, тогда система из $k = N(N+1)/2$ уравнений

$$
\begin{aligned}
&b_1 \int_{t_1}^{t_2} \phi_1^2(t) l_1(t) dt + b_2 \int_{t_1}^{t_2} \phi_1^2(t) l_2(t) dt + ... + b_k \int_{t_1}^{t_2} \phi_1^2(t) l_k(t) dt = 1, \\
&b_1 \int_{t_1}^{t_2} \phi_1(t)\phi_2(t) l_1(t) dt + ... + b_k \int_{t_1}^{t_2} \phi_1(t)\phi_2(t) l_k(t) dt = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&b_1 \int_{t_1}^{t_2} \phi_N^2(t) l_1(t) dt + b_2 \int_{t_1}^{t_2} \phi_N^2(t) l_2(t) dt + ... + b_k \int_{t_1}^{t_2} \phi_N^2(t) l_k(t) dt = 1.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

имеет решение относительно b_i, то функция $h(t) = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i l_i(t)$, является весом ортогональности функций $\phi_1(t)$, $\phi_2(t), ..., \phi_N(t)$. Алгоритм ортогонализации, вытекающий из леммы 1, неудобен тем, что для определения веса ортогональности N функций $\phi_1(t)$, $\phi_2(t), ..., \phi_N(t)$ необходимо вводить $k = N(N+1)/2$ функций $l_1(t)$, $l_2(t), ..., l_k(t)$, составляющих эту весовую функцию. Кроме того, численный эксперимент показывает, что в зависимости от того, какие функции $l_i(t)$ выбраны, можно получить различные значения величины

$$I = \int_{t_1}^{t_2} h^2(t) \mathrm{d}t, \tag{4}$$

называемой энергией веса.

Лемма 2 [9]. Вес, оптимальный по условию минимума энергии, представляет собой квадратичную форму от ортогонализуемых функций.

$$h(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_{mn} \phi_n(t) \phi_m(t). \tag{5}$$

Для того, чтобы определить множители Лагранжа, достаточно подставить выражение (5) в уравнения (2).

Энергия веса (4), равна сумме

$$I = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_{nn}.$$

2. Апробация метода ортогонализации

Определим весовые функции ортогональности полиномов Чебышева.

Известно, что полиномы Чебышева $\mathrm{T}_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ортогональны на интервале $(-1, 1)$ с весом $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Согласно предложенному методу ортогонализации оптимальный по условию минимума энергии вес ортогональности функций $\mathrm{T}_n(x)$ должен иметь вид

$$h(x) = \sum_{i=j}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{ij} \mathrm{T}_i(x) \mathrm{T}_j(x). \tag{6}$$

Учитывая свойства произведения полиномов Чебышева, имеем

$$\mathrm{T}_i(x)\mathrm{T}_j(x) = \begin{cases} \mathrm{T}_i(x), j = 0, \\ \dfrac{1}{2}\mathrm{T}_{j+i}(x) + \dfrac{1}{2}\mathrm{T}_{j-i}(x), j \neq 0. \end{cases} \tag{7}$$

Откуда получаем

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \mathrm{T}_n(x), \tag{8}$$

где β_n – некоторые постоянные коэффициенты.

Нетрудно заметить, что число n является четным. Таким образом, $h(x)$ является четной функцией. Запишем условия ортогональности $\mathrm{T}_n(x)$ с весом $h(x)$:

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} \mathrm{T}_0^2(x) h(x) \mathrm{d}x = c_0, \\ &\int_{-1}^{1} \mathrm{T}_0(x)\mathrm{T}_1(x) h(x) \mathrm{d}x = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\int_{-1}^{1} \mathrm{T}_n^2(x) h(x) \mathrm{d}x = c_1, \\ &\int_{-1}^{1} \mathrm{T}_n(x)\mathrm{T}_{n+1}(x) h(x) \mathrm{d}x = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{9}$$

Пределы интегрирования в данном случае задаются областью определения функции $\arccos(x)$. Принимая во внимание свойства произведения полиномов Чебышева (7), систему уравнений (9) перепишем в виде:

$$\beta_0 \int_{-1}^{1} \mathrm{T}_0(x)\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \int_{-1}^{1} \mathrm{T}_n(x)\mathrm{d}x = c_0,$$
$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_{-1}^{1} \mathrm{T}_{n-k}(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_{-1}^{1} \mathrm{T}_{n+k}(x)\mathrm{d}x = 0, k \neq 0. \qquad (10)$$

Поскольку $\int\limits_{-1}^{1} \cos(n \arccos x)\mathrm{d}x = -\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}$, и n – четное число, из (10) получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left[\frac{1}{4(n-k)^2-1} + \frac{1}{4(n+k)^2-1}\right] = \begin{cases} \frac{c_0}{2}, k = 0, \\ 0, k \neq 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Можно показать, что система (11) разрешима относительно коэффициентов β_n методом редукции, поскольку сходится последовательность решений частных систем уравнений, полученных из (11) ограничением числа неизвестных. Получаемые весовые функции при увеличении числа полиномов $\mathrm{T}_n(x)$ сходятся к функции $1/(\pi\sqrt{1-x^2})$, которая в таком случае является весом, оптимальным по условию минимума энергии.

Аналогичные вычисления можно провести для полиномов Эрмита. Вес ортогональности полиномов Эрмита необходимо искать в виде

$$h(x) = \sum_{i=j}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{ij}\mathrm{H}_i(x)\mathrm{H}_j(x). \qquad (12)$$

Поскольку произведение полиномов Эрмита имеет вид

$$\mathrm{H}_m(x)\mathrm{H}_n(x) = \sum_{k=0}^{\min(m,n)} 2^k k! C_m^k C_n^k \mathrm{H}_{m+n-2k}(x), \qquad (13)$$

где

$$C_n^k = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!}, 0 \le k \le n, \\ 0, 0 \le n < k, \end{cases}, \quad C_m^k = \begin{cases} \dfrac{m!}{k!(m-k)!}, 0 \le k \le m, \\ 0, 0 \le m < k. \end{cases}$$

имеем

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \mathrm{H}_k(x). \qquad (14)$$

Решение уравнений относительно λ_k методом редукции приводит к известной весовой функции e^{-x^2}.

3. Новые системы ортогональных функций

Лемма 3 [9]. Бесконечномерный базис, с координатными функциями вида $\phi_n(t) = \frac{\sin\pi(t-\alpha n)}{\pi(t-\alpha n)}$, которые ортогональны с весом, имеющим минимальную энергию, существует при целых α (что совпадает с теоремой отсчетов В. А. Котельникова), нецелых $\alpha > 1$ и не существует при $\alpha < 1$.

Лемма 4 [9]. Функции вида $\phi_n(t) = \frac{\sin^2\pi(t-n)}{\pi^2(t-n)^2}$ образуют на бесконечном интервале полную ортонормированную систему с весовой функцией вида $h(t) = 3-4\sin^2\pi t$.

Лемма 5 [9]. Функции $\phi_n(t) = sinc^3\pi(t-n)$ на бесконечном интервале изменения аргумента ортогональны с весом $h(t) = \frac{280}{101}\cos^2\pi t - \frac{64}{101}\sin^4\pi t$.

Лемма 6 [9]. Функции $\phi_n(t) = sinc^3\pi(t-n)$ на бесконечном интервале изменения аргумента ортогональны с весом равным $h(t) = \frac{20}{7} - \frac{24}{7}\sin^2\pi t$.

Лемма 7 [9]. Функции вида $\phi_m(t) = sinc^n\pi(t-m)$, где n – целое число, ортогональны на бесконечном интервале изменения аргумента с весом $h(t) = \sum\limits_{i=1}^{\frac{n}{2}-\frac{1+(-1)^{n-1}}{4}+1} a_i(\sin\pi t)^{(i-\frac{1+(-1)^{i-1}}{2})}$, где a_i – коэффициенты тригонометрического полинома.

4. Критерии оценки точности представления сигналов в виде ортогональных рядов и свойства ортонормированного базиса

Пусть сигнал $x(t)$ приближенно описывается конечной суммой

$$x(t) \approx \sum_{n=0}^{N} y_n\phi_n(t).$$

Ошибка аппроксимации сигнала может быть выражена двумя различными критериями:

$$I_1 = M\left\{\int_0^T [x(t) - \sum_{n=0}^{N} y_n\phi_n(t)]^2 h(t)dt\right\}, \tag{15}$$

$$I_2 = M\left\{\int_0^T [x(t) - \sum_{n=0}^{N} y_n\phi_n(t)]^2 dt\right\}, \tag{16}$$

где $M\{...\}$ – оператор математического ожидания.

На практике добиваются минимума одного из функционалов I_1 или I_2, определяя оптимальный базис. В классической теории ортогональных рядов доказывается, что если вес ортогональности базисных функций является положительной функцией, то критерии (15) и (16) совпадают. В рассматриваемом случае вес $h(t)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, поэтому необходимо определить границы применения каждого критерия. При передаче сигналов по цифровым каналам связи различают два процесса: передачу данных и передачу непрерывных сообщений.

При передаче информации существенным является наиболее точное представление сигнала суммой, поэтому необходимо добиваться минимума I_2. На приемном конце решение о том, какой символ был передан, может быть принято по величине коэффициентов разложения по ортогональному базису переданного сигнала, и, следовательно, необходимо минимизировать I_1.

5. Особенности ортогонализации физически реализуемых функций

На практике осуществляют аппроксимацию идеальных характеристик КО и переходят к фильтрам Чебышева, Баттерворта, Бесселя и эллиптическим фильтрам порядка N. Передаточные функции указанных фильтров

$$K_{\text{ФНЧ}}(s) = K_{\text{ФНЧ}} \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{N} (s - p_j)},$$

($K_{\text{ФНЧ}}$ – коэффициент усиления фильтра) имеют простые полюсы p_jи, следовательно, импульсные характеристики вида

$$\phi_0(t) = 1(t) \sum_{k=1}^{N/2} A_k \mathrm{e}^{\sigma_k t} \sin(\omega_k t + \vartheta_k), \tag{17}$$

если N – четное число;

$$\phi_0(t) = 1(t) A_0 \mathrm{e}^{\sigma_0 t} + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} A_k \mathrm{e}^{\sigma_k t} \sin(\omega_k t + \vartheta_k), \tag{18}$$

если N – нечетное число, где $1(t)$ – функция Хевисайда, A_0, A_k, ϑ_k – некоторые известные постоянные величины, σ_k и ω_k – вещественная и мнимая части k-го полюса передаточной функции КО:$\sigma_k + \mathrm{j}\omega_k = p_k$.

Введем в рассмотрение систему функций, полученных путем смещения импульсной характеристики ФНЧ на временной интервал α

$$\phi_m(t) = 1(t - m\alpha)\phi_0(t - m\alpha), \tag{19}$$

В работе [9] показано, что соблюсти условия ортогональности можно лишь для первых N функций $\phi_m(t)$, т.е. система функций, составленная из эквидистантно смещенных импульсных характеристик КО, может быть только квазиортогональной системой. Повышение порядка фильтра приводит к снижению погрешности условий ортогональности. В качестве примера в [9] рассматривались системы функций, составленные из смещенных импульсных характеристик нормированных фильтров Баттерворта.

6. Условия сохранения ортогональности эквидистантно смещенных импульсных характеристик при преобразовании нормированных фильтров

На практике расчет КО осуществляется путем преобразования характеристик нормированного фильтра-прототипа (НФП).

Нормированный фильтрпрототип (НФП) можно охарактеризовать длительностью переходного процесса $t_{ux} \cong 5\tau_k$, где τ_k – максимальная постоянная времени, соответствующая минимальному затуханию σ_k, которое, в свою очередь, соответствует k-ому полюсу p_k.

Тогда интервал смещения α импульсных характеристик, который позволяет получить квазиортогональную систему функций, определяется как

$$\alpha = \frac{t_{ux}}{N} = \frac{5\tau_k}{N} = \frac{5}{\sigma_k N}.$$

Импульсная характеристика $g(t)$ НФП записывается в виде (17).

Преобразование передаточной функции НФП $K_{\text{НФП}}(p)$ в передаточную функцию ФНЧ $K_{\text{ФНЧ}}(p)$ с частотой среза ω_c по уровню 3 дБ осуществляется путем формальной замены p на $\frac{p}{\omega_c}$. В работе [9] показано, что преобразование НФП и ФНЧ с частотой среза ω_c по уровню 3 дБ не изменяет условия ортогональности эквидистантно смещенных импульсных характеристик.

Преобразование передаточной функции НФП $K_{\text{НФП}}(p)$ в передаточную функцию полосового фильтра (ПФ) $K_{\text{ПФ}}(p)$ с полосой пропускания $\Delta\omega$ по уровню 3 дБ и центральной частотой ω_0 осуществляется путем формальной замены p на $\frac{p^2+\omega_0^2}{\Delta\omega p}$. Заметим, что $\Delta\omega = 2\omega_c$.

В этом случае порядок ПФ $N_{\text{ПФ}} = 2N$, а корню p_k характеристического уравнения НФП соответствует два корня $\hat{p}_{k1}$ и $\hat{p}_{k2}$ характеристического уравнения ПФ.

Расчеты показывают, что преобразование НФП в ПФ с полосой пропускания $\Delta\omega$, определяемой по уровню 3 дБ, не изменяет условия ортогональности эквидистантно смещенных импульсных характеристик. При этом необходимо соблюдение условий

$$\omega_0 \hat{\alpha} = 2\pi l, \hat{\alpha} = \frac{\hat{t}_{ux}}{N},$$

где $\hat{\alpha}$ – интервал смещения импульсных характеристик ПФ, $\hat{t}_{ux}$ – длительность переходного процесса ПФ.

7. Обоснование метода борьбы с межсимвольными и межканальными помехами

Рассмотрим отношение сигнал/шум на выходе коррелятора классической системы передачи информации (СПИ), принимающего символ a_0.

Передаваемый сигнал записывается как

$$s(t) = a_0\phi_0(t) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} a_n\phi_n(t). \tag{20}$$

С учетом реализации белого шума $n(t)$, входной сигнал коррелятора имеет вид

$$r(t) = a_0\phi_0(t) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} a_n\phi_n(t) + n(t). \tag{21}$$

Выходной сигнал коррелятора имеет вид

$$z = a_0\int_T r(t)\phi_0(t)dt = a_0^2\int_T \phi_0^2(t)dt + a_0\int_T \phi_0(t)\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} a_n\phi_n(t)dt + a_0\int_T n(t)\phi_0(t)dt =$$

$$= a_0^2E_{00} + a_0\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} a_nE_{0n} + n,$$

где T – интервал ортогональности функций $\phi_n(t)$, n – компонента, обусловленная влиянием гауссовского шума, $E_{00} = \int_T \phi_0^2(t)dt$, $E_{0n} = \int_T \phi_0^(t)\phi_n(t)dt$ – величина обусловленная наличием МСИ, возникающей вследствие потери ортогональности функциями $\phi_n(t)$.

Энергия полезной компоненты принимаемого сигнала равна

$$E = a_0^2E_{00},$$

поэтому

$$a_0 = \sqrt{\frac{E}{E_{00}}}. \tag{22}$$

Дисперсия величины n равна

$$\sigma^2 = M\{n^2\} - M^2\{n\} = M\left\{a_0^2\int_T n(t)\phi_0(t)dt\int_T n(\tau)\phi_0(\tau)d\tau\right\} =$$

$$= a_0^2\int_T\int_T M\{n(t)n(\tau)\}\phi_0(t)\phi_0(\tau)d\tau dt.$$

Здесь учтено, что случайная величина n имеет нулевое среднее значение.

Поскольку гауссовский случайный процесс является дельта коррелированным, то

$$M\{n(t)n(\tau)\} = \frac{N_0}{2}\delta(t-\tau),$$

и

$$\sigma^2 = a_0^2 \int\limits_T \int\limits_T \frac{N_0}{2}\delta(t-\tau)\phi_0(t)\phi_0(\tau)d\tau dt = a_0^2 \frac{N_0}{2} \int\limits_T \phi_0^2(\tau)d\tau = a_0^2 \frac{N_0}{2} E_{00} = \frac{N_0 E}{2},$$

где $\frac{N_0}{2}$ – спектральная плотность мощности белого шума.

Среднее квадратическое значение величины n оценивается как

$$\sigma = \sqrt{\frac{N_0 E}{2}}.$$

С учетом приведенных соотношений оценка выходного сигнала коррелятора запишется в виде

$$z = E + \frac{E}{E_{00}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \mathrm{sign}(a_n)E_{0n} + \sqrt{\frac{N_0 E}{2}},$$

где компонента $\frac{E}{E_{00}} \sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \mathrm{sign}(a_n)E_{0n}$ обусловлена влиянием МСИ, $\mathrm{sign}(x)$– функция знака. В худшем случае отношение сигнал/шум на выходе классического коррелятора с учетом МСИ имеет вид

$$\rho_{0\text{МСИ}} = \frac{E + \frac{E}{E_{00}} \sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \mathrm{sign}(a_n)E_{0n}}{\sqrt{\frac{N_0 E}{2}}} = \rho_0 \left(1 + \frac{1}{E_{00}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \mathrm{sign}(a_n)E_{0n} \right),$$

где $\rho_0 = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}$ – отношение сигнал/шум на выходе коррелятора без учета МСИ.

Вероятность ошибки приема символа a_0, при условии, что информация передается противоположными сигналами, определяется из соотношения

$$p = \frac{1}{2^m} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \exp\left\{ -\frac{\left(E + \frac{\mathrm{sign}(a_n)EE_{0n}}{E_{00}}\right)^2}{2\sigma^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2^m} \sum_{n=1}^{m} Q\left\{ \frac{\rho_0}{E_{00}}(E_{00} + E_{0n}\mathrm{sign}a_n) \right\},$$

где m – число учитываемых интерферирующих символов

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Рассмотрим возможность снижения уровня МСИ и МКП путем использования базиса, для которого выполняются соотношения (2). В этом случае приемная часть системы передачи информации должна содержать несколько каналов, в состав которых входят корреляторы для приема отдельных символов сообщения. В идеальном случае элементарными сигналами, с помощью которых передаются символы сообщения, являются функции вида (19). Определим вероятность ошибки на выходе коррелятора одного из каналов приемной части системы передачи информации. Будем считать, что этот коррелятор служит для приема информационного символа a_0.

Передаваемый сигнал записывается в виде (20). С учетом реализации белого шума $n(t)$, входной сигнал коррелятора имеет вид (21).

В силу ортогональности с весом $h(t)$ функций $\phi_n(t)$ выходной сигнал коррелятора имеет вид

$$z_h = a_0 \int\limits_T r(t)\phi_0(t)h(t)\mathrm{d}t = a_0^2 \int\limits_T \phi_0^2(t)h(t)\mathrm{d}t + a_0 \int\limits_T n(t)\phi_0(t)h(t)\mathrm{d}t =$$

$$= a_0^2 A_{00} + n_h,$$

где n_h – компонента, обусловленная влиянием гауссовского шума.

Дисперсия величины n_h равна

$$\sigma_h^2 = M\{n_h^2\} - M^2\{n_h\} = M\left\{ a_0^2 \int\limits_T n(t)\phi_0(t)h(t)dt \int\limits_T n(\tau)\phi_0(\tau)h(\tau)d\tau \right\} =$$

$$= a_0^2 \int\limits_T \int\limits_T M\{n(t)n(\tau)\}\phi_0(t)h(t)\phi_0(\tau)h(\tau)d\tau dt.$$

Здесь учтено, что случайная величина n_h имеет нулевое среднее значение.

Поскольку гауссовский случайный процесс является дельта коррелированным, то

$$\sigma_h^2 = a_0^2 \int\limits_T \int\limits_T \frac{N_0}{2}\delta(t-\tau)\phi_0(t)h(t)\phi_0(\tau)h(\tau)d\tau dt = a_0^2\frac{N_0}{2} \int\limits_T \phi_0^2(\tau)h^2(\tau)d\tau = a_0^2\frac{N_0}{2}H,$$

где $H = \int\limits_T \phi_0^2(\tau)h^2(\tau)d\tau$.

С учетом (22) дисперсия σ_h^2 представляется в виде

$$\sigma_h^2 = \frac{H}{E_{00}}\frac{EN_0}{2}.$$

Отношение сигнал/шум на выходе рассматриваемого устройства составит

$$\rho_h = \frac{A_{00}\frac{E}{E_{00}}}{\sqrt{\frac{N_0 E}{2}}\sqrt{\frac{H}{E_{00}}}} = \rho_0 \frac{A_{00}}{\sqrt{E_{00}H}}.$$

Вероятность ошибки приема символа a_0, при условии, что информация передается противоположными сигналами, определяется соотношением

$$p_h = Q\left\{\rho_0 \frac{A_{00}}{\sqrt{E_{00}H}}\right\}.$$

Рассмотрим коэффициент при ρ_0.

$$\frac{A_{00}}{\sqrt{E_{00}H}} = \frac{\int\limits_T \phi_0^2(\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\int\limits_T \phi_0^2(\tau)d\tau \int\limits_T \phi_0^2(\tau)h^2(\tau)d\tau}}. \tag{23}$$

На основании неравенства Буняковского-Шварца получаем

$$\int\limits_T \phi_0^2(\tau)h(\tau)d\tau \le \sqrt{\int\limits_T \phi_0^2(\tau)d\tau \int\limits_T \phi_0^2(\tau)h^2(\tau)d\tau},$$

следовательно

$$\frac{A_{00}}{\sqrt{E_{00}H}} \le 1. \tag{24}$$

Равенство в выражении (24) достигается только в классическом случае, когда $h(\tau) = 1$.

Таким образом, рассматриваемый коррелятор при отсутствии МСИ даст меньшее отношение сигнал/шум, чем классический. Однако, в случае действия межсимвольной интерференции может быть получен некоторый выигрыш по помехоустойчивости. Этот выигрыш в большей степени определяется отношением (23).

Вес ортогональности кроме выполнения условий (2) должен обеспечивать максимальное значение отношения (24).

Пусть в соседних каналах связи информация передается с помощью сигналов $\phi_{k,n}(t) = \phi_{0,k}(t - \frac{\pi n}{\omega_m})$, $\phi_{k-1,n}(t) = \phi_{0,k-1}(t - \frac{\pi n}{\omega_m})$, $\phi_{k+1,n}(t) = \phi_{0,k+1}(t - \frac{\pi n}{\omega_m})$. Сигналы $\phi_{k-1,n}(t)$ и $\phi_{k+1,n}(t)$ соседних каналов не будут влиять на прием сигналов $\phi_{k,n}(t)$ основного канала, если выполняются условия

$$J_{k,k} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi_{k,0}(t)\phi_{k,n}(t)h(t)dt = \begin{cases} A_{00}, n = 0, \\ 0, n \ne 0, \end{cases}$$

$$J_{k,k-1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi_{k,0}(t)\phi_{k-1,n}(t)h(t)dt = 0,$$

$$J_{k,k+1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi_{k,0}(t)\phi_{k+1,n}(t)h(t)dt = 0.$$

Проведенные численные эксперименты, позволяют сделать вывод о том, что, несмотря на погрешность ортогонализации физически реализуемых элементарных сигналов, можно подобрать вес, который позволяет снизить влияние МСИ и МКП на правильный прием символов сообщений, и сколь угодно близко приблизиться к равенству в выражении (24).

Список цитируемых источников

1. *Зюко А. Г.* Помехоустойчивость и эффективность систем передачи информации / А. Г. Зюко и др. – М.: Радио и связь, 1985. – 272 с.

   Zuko A. G. Noise immunity and efficiency of information transmission systems / A. G. Zyuko et al. – M.: Radio and communications, 1985. – 272 s.
2. *Кловский, Д. Д.* Инженерная реализация радиотехнических схем / Д. Д. Кловский, Б. И. Николаев. – М.: Связь, 1975. – 200 с.

   Klovsky, D. D. Engineering implementation of radio schemes / D. D. Klovsky, B. I. Nikolaev. – Moscow: Svyaz, 1975. – 200 p.
3. *Любопытов, В. С.* Компенсация межсимвольной интерфернции в цифровых каналах на основе дробно-интервальной предварительной коррекции: дис. ... канд. техн. наук: 05.12.13 / Любопытов Владимир Сергеевич. – Уфа, 2013. – 188 с.

   Ljubomirov, V. P. the Compensation of the intersymbol interference in digital channels based on a fractional-interval pre-correction: dis. ... Cand. tech. Sciences: 05.12.13 / Liubomirov Vladimir Sergeevich. – Ufa, 2013. – 188 p.
4. *Гоноровский, И. С.* Радиотехнические цепи и сигналы / И. С. Гоноровский. – М.: Сов. Радио, 1971. – 672 с.

   Gonorovsky I. C. Radio circuits and signals / I. S. Gonorovsky. – M.: Sov. Radio, 1971. – 672 p.
5. *Сиберт, У. М.* Цепи, сигналы, системы: в 2 ч. / У. М. Сиберт. – М.: Мир, 1988. – Ч. 2. – 359 с.

   Siebert, U. M. Circuits, signals, systems: in 2 h. / U. M. Siebert. – Moscow: Mir, 1988. – CH. 2. – 359 p.
6. *Никифоров, А. Ф.* Основы теории специальных функций / А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров. – М.: Наука, 1974. – 304 с.

   Nikiforov, A. F. Fundamentals of the theory of special functions / A. F. Nikiforov, V. B. Uvarov. – Moscow: Nauka, 1974. – 304 p.
7. *Астафьева, Н. М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения / Н. М. Астафьева // Успехи физических наук, 1996. – Т. 166. – № 11. – С. 1145-1170.

   Astafyeva, N. M. Wavelet analysis: fundamentals of theory and application examples / N. M. Astafyeva // Advances in physical Sciences, 1996. – T. 166. – No. 11. – Pp. 1145-1170.
8. *Петров, Д. А.* Синтез хорошо-локализованных конечномерных базисов Вейля-Гейзенберга и их применение для построения высокоэффективных алгоритмов обработки сигналов: дис. ... докт. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Петров Дмитрий Андреевич. – М., 2010. – 144 с.

Petrov, D. A. Synthesis of well-localized finite-dimensional Weyl-Heisenberg bases and their application for the construction of high-performance signal processing algorithms: dis. ... Doct. Fiz.-Mat. Sciences: 05.13.18 / Petrov Dmitry Andreevich. – M., 2010. – 144 p.

9. *Дегтярев, А. Н.* Ортогонализация функций и повышение помехоустойчивости высокоскоростных систем передачи информации / А. Н. Дегтярев. – М.: Инфра-М, 2015. – 152 с.

Degtyarev, A. N. Orthogonalization of functions and increase of noise immunity of high-speed information transmission systems / A. N. Degtyarev. – Moscow: Infra-M, 2015. – 152 p.

Получена 06.04.2019