

УДК 517.957+517.312

Функционально-дифференциальные уравнения параболического типа с оператором инволюции

А. А. Корнута, В. А. Лукьяненко

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. E-mail: korn_57@mail.ru, art-inf@yandex.ru

Аннотация. В работе рассматриваются важные для приложений нелинейной оптики математические модели в виде нелинейных функционально-дифференциальных уравнений параболического типа с обратной связью и преобразованием пространственных переменных (которое задаёт оператор инволюции). Свойство оператора инволюции (поворот, отражение) позволяет свести исходное уравнение к системе уравнений без преобразования пространственных переменных. Множество решений таких уравнений определяется двумя параметрами: малым — коэффициентом диффузии и большим — коэффициентом интенсивности потока. Уравнение задаётся на кольцевой области с условиями третьего рода в классе периодических функций. Исследуются важные частные случаи стационарных и нестационарных решений. Для стационарного решения, зависящего только от угловой координаты подробно исследуется характер точек покоя и их устойчивость. Многообразие решений частных уравнений наследуется и в общем случае. Найденные частные решения используются для построения асимптотических решений исходных уравнений. В работе приводятся соответствующие ссылки на публикации авторов.

Ключевые слова: оптические системы, нелинейные среды керровского типа, параболические нелинейные уравнения, оператор инволюции, устойчивость частных решений.

Functional-differential equations of parabolic type with the involution operator

A. A. Kornuta, V. A. Lukianenko

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. In this work, mathematical models important for applications of nonlinear optics are considered in the form of nonlinear functional differential equations of parabolic type with feedback and a transformation of spatial variables (which defines the involution operator). The property of the involution operator (rotation, reflection) allows us to reduce the original equation to a system of equations without transforming the spatial variables. The set of solutions of such equations is determined by two parameters: a small one — diffusion coefficient and a large one — coefficient of flow intensity. The equation is given on a ring domain with conditions of the third kind in the class of periodic functions. Important special cases of stationary and non-stationary solutions are investigated. For a stationary solution that depends only on the angular coordinate, the nature of the stationary points and their stability are studied in detail. The variety of solutions of particular equations is also inherited in the general case. The particular solutions found are used to construct asymptotic solutions of the original equations. The work cites corresponding references to publications of the authors.

Keywords: optical systems, nonlinear Kerr type medium, parabolic nonlinear equations, involution operator, stability private solutions.

MSC 2010: 35K10, 35K55

Введение

Известно, что моделирование оптических систем, состоящих из тонкого слоя нелинейной среды керровского типа и различным образом организованного контура обратной связи, приводит к параболическим функционально-дифференциальным уравнениям с преобразованием аргументов искомой функции, что отражено монографиях [2, 3, 14, 17] и многочисленных публикациях.

Воздействие на нелинейную динамику системы, оказываемое внешним контуром обратной связи при помощи управляемого преобразования пространственных переменных, выполняемых призмами, линзами и другими устройствами, приводит к возникновению широкого спектра явлений нелинейной волновой динамики – многолепестковых и ротационных волн, оптических спиралей, волн переключения и др. [2, 21].

Используя специальную модель динамики внутрирезонаторного поля, которая учитывает дифракцию при свободном распространении поля в резонаторе в [7] предложена теоретическая модель, состоящая из уравнений, которые описывают временную динамику фазовой модуляции световой волны в нелинейной среде и комплексной амплитуды светового поля внутри резонатора с учетом дифракции. В результате численного моделирования по теоретической модели показано существование «собственных» пространственных структур резонатора.

Для произвольной области и произвольного невырожденного гладкого преобразования в [18] разработаны методы построения периодических решений. На основе теории бифуркации Андронова-Хопфа, например в [15], дано математическое обоснование наблюдаемых автоволновых явлений для преобразования поворота на фиксированный угол в круге или кольце. В [10, 14] показано, что при определенном выборе параметров в фазовом пространстве некоторой бесконечномерной динамической системы реализуется феномен буферности. В работах [4, 5] для исследования бифуркаций вращающихся структур в кольце и круге для случая поворота, а также в круге для преобразования поворота совместно с радиальным сжатием был использован метод центральных многообразий. Для описания динамики бегущих волн и медленно меняющихся структур параболического функционально-дифференциального уравнения с поворотом в [9] применяется метод квазинормальных форм.

Для нелинейного функционально-дифференциального уравнения параболического типа, моделирующего оптические системы с фурье-фильтром в контуре обратной связи в [16] доказано существование, единственность и непрерывная зависимость от входных данных решения начально-краевых задач в энергетическом классе, доказано существование оптимальных фурье-фильтров.

В работах [1, 19] исследована параболическая задача с преобразованием отражения пространственной переменной на круге, а также найдено асимптотическое

представление решения линеаризованной и соответствующей нелинейной параболической задачи с использованием функции Грина и сведения к нелинейному интегральному уравнению относительно функции с преобразованием отражения.

Несмотря на обилие публикаций, остаётся ряд нерешённых вопросов. Необходима систематизация моделей, постановок задач по явлениям, структурам, зависимостям от параметров, областям, характеру обратной связи. Иерархия моделей задач для нелинейных параболических уравнений с обратной связью и преобразованием аргументов определяется характером решений (структур, явлений), имеющих аналоги в реальных прикладных задачах. Целью работы является исследование частных случаев нелинейного параболического уравнения с оператором инволюции [8], которые используются для асимптотического анализа уравнений.

1. Постановка задачи

Рассматривается параболическое функционально-дифференциальное уравнение в кольце S :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = \mu \Delta u + K(1 + \gamma \cos Qu), \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad t \geq 0, \quad \mu > 0, \quad (1.1)$$

которое описывает динамику фазовой модуляции $u = u(r, \theta, t)$ световой волны, прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа, в оптической системе в контуре обратной связи [2, 17] с оператором инволюции Q , который обладает свойством $Q^m = I$ (например, с преобразованием поворота на угол $h = \frac{2\pi}{m}$), с условиями первого, второго или третьего рода на границе в зависимости от параметров a_1, a_2, b_1, b_2

$$\begin{aligned} a_1 \frac{\partial u(r_1, \theta, t)}{\partial r} + b_1 u(r_1, \theta, t) &= g_1(\theta, t), \\ a_2 \frac{\partial u(r_2, \theta, t)}{\partial r} - b_2 u(r_2, \theta, t) &= g_2(\theta, t), \end{aligned} \quad (1.2)$$

начальным условием

$$u(r, \theta, 0) = u_0(r, \theta) \quad (1.3)$$

и условием периодичности

$$u(r, \theta + 2\pi, t) = u(r, \theta, t), \quad (1.4)$$

здесь $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ – оператор Лапласа в полярной системе координат, $\mu > 0$ – коэффициент диффузии частиц нелинейной среды, Q – оператор поворота на угол $h = \frac{2\pi}{m}$ ($Q^m = I$ [8]), $K > 0$ – коэффициент, пропорциональный интенсивности входного поля, $\gamma (0 < \gamma < 1)$ – коэффициент видности (контрастности) интерференционной картины.

Лемма. Пусть $w = w(r, \theta, t)$ – одно из решений задачи (1.1) – (1.4), $u = w + v$, где $v = v(r, \theta, t)$ – новая неизвестная функция. Тогда уравнение (1.1) относительно v примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v = \mu \Delta v - K\gamma \sin Qw \cdot Qv + f(Qv, Qw), \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad t \geq 0, \quad (1.5)$$

$$f(Qw, Qv) = K\gamma (\cos Qw(\cos Qv - 1) - \sin Qw(\sin Qv - Qv)) \quad (1.6)$$

с условиями третьего рода на границе

$$\begin{aligned} a_1 \frac{\partial v(r_1, \theta, t)}{\partial r} + b_1 v(r_1, \theta, t) &= 0, \\ a_2 \frac{\partial v(r_2, \theta, t)}{\partial r} - b_2 v(r_2, \theta, t) &= 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

начальным условием

$$v(r, \theta, 0) = 0, \quad (1.8)$$

и условием периодичности

$$v(r, \theta + 2\pi, t) = v(r, \theta, t). \quad (1.9)$$

Доказательство. Действительно, так как

$$\begin{aligned} \cos(w + v) &= \cos w \cos v - \sin w \sin v = \\ &= \cos w(\cos v - 1) - \sin w \sin v + \cos w, \end{aligned}$$

то выражение $K [1 + \gamma \cos Qu]$ примет вид:

$$\begin{aligned} K [1 + \gamma \cos Qu] &= K [1 + \gamma \cos Q(w + v)] = \\ &= K [1 + \gamma (\cos Qw(\cos Qv - 1) - \sin Qw \sin Qv + \cos Qw)] = \\ &= K [1 + \gamma (\cos Qw(\cos Qv - 1) - \sin Qw(\sin Qv - Qv) + \\ &\quad + \cos Qw - \sin Qw \cdot Qv)] = \\ &= K [1 + \gamma \cos Qw] - K\gamma \sin Qw \cdot Qv + \\ &+ K\gamma (\cos Qw(\cos Qv - 1) - \sin Qw(\sin Qv - Qv)) = \\ &= K [1 + \gamma \cos Qw] - K\gamma \sin Qw \cdot Qv + f(Qw, Qv), \end{aligned}$$

где

$$f(Qw, Qv) = K\gamma (\cos Qw(\cos Qv - 1) - \sin Qw(\sin Qv - Qv)).$$

В предположении, что исследуется решения v в окрестности известной функции w , можно получить ряд модельных задач, сохраняя несколько членов разложения функций $f(Qw, Qv)$ в ряд по степеням v . Действительно, учитывая разложение $\cos v$ и $\sin v$ по степеням v , разложение

нелинейной функции $f(Qv, Qw)$ в ряд по степеням v начинается с v^2 и $f(Qw, 0) = 0$:

$$f(Qw, Qv) = K\gamma \left[\cos Qw \left(-\frac{(Qv)^2}{2!} + \frac{(Qv)^4}{4!} - \frac{(Qv)^6}{6!} + \dots + \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^{n-1} \frac{(Qv)^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} + \dots \right) - \right. \\ \left. - \sin Qw \left(-\frac{(Qv)^3}{3!} + \frac{(Qv)^5}{5!} - \frac{(Qv)^7}{7!} + \dots + + (-1)^{n-1} \frac{(Qv)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \right) \right].$$

□

В [11]-[13] рассматривались вопросы существования пространственно неоднородных решений задачи (1.1)-(1.4) для окружности ($r_1 = r_2$) в случае поворота на угол π и $\frac{\pi}{3}$ и квадрата, которые бифурцируют из пространственно однородного стационарного решения задачи (1.1)-(1.4) $w = const$. Используя метод Галёркина, проведено исследование асимптотической формы и устойчивости указанных решений.

Для задачи (1.1)-(1.4) на окружности были обнаружены метаустойчивые структуры, которые порождаются каскадами седло-узловых бифуркаций.

В работе исследуются решения задачи (1.1)-(1.4) в зависимости от предположений о решении w .

Возможны следующие частные случаи задачи, которые зависят от предполагаемого решения:

- 1) решение стационарное, равное постоянной: $u = w = const$;
- 2) решение стационарное, зависящее только от r : $u = w(r)$;
- 3) решение стационарное, зависящее только от θ : $u = w(\theta)$;
- 4) решение стационарное, зависящее от r и θ : $u = w(r, \theta)$;
- 5) нестационарное решение, зависящее только от t : $u = w(t)$;
- 6) нестационарное решение, зависящее от t и r : $u = w(r, t)$;
- 7) нестационарное решение, зависящее от t и θ : $u = w(\theta, t)$.

Исследование решения в окрестности одного из частных решений сводится к (1.5)-(1.9) относительно функции v . Заметим, что все решения можно исследовать в окрестности $w = const$.

2. Решения задачи в зависимости от предположений о решении

Пространственно однородное решение задачи (1.1)-(1.4) $w = const$ — определяется уравнением

$$w = K(1 + \gamma \cos w). \quad (2.1)$$

Число решений уравнения (2.1) зависит от параметров K и γ . При возрастании значения K , происходит увеличение числа решений. В пакете Wolfram

Mathematica построена бифуркационная диаграмма для (2.1) (см. рис. 1), из которой видно как возрастает число решений уравнения (2.1).

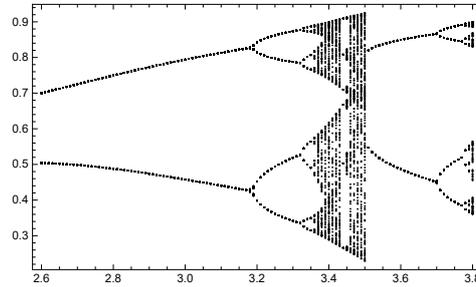


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма решений уравнения $w = K(1 + \gamma \cos w)$

В большинстве работ исследуется поведение решения задачи (1.1)-(1.4) в окрестности $w = const$ при условии, что $1 + K\gamma \sin \theta \neq 0$.

2.1. Решения, зависящие только от времени

Пусть $w = w(t)$, тогда $\Delta w = 0$ и получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dw}{dt} + w = K(1 + \gamma \cos w), w(0) = w_0. \quad (2.2)$$

Тогда решение (2.2) можно записать в виде [1]

$$\int_{w_0}^w \frac{d\tau}{K(1 + \gamma \cos \tau) - \tau} = t + C.$$

При $t = 0$ значение $u(r, \theta, 0) = u_0(r, \theta)$, но так как $u = w(t)$ не зависит от r и θ , то $w(0) = const = w_0$. Следовательно, $C = 0$.

На рисунке 2 представлены графики решений уравнения (2.2) при $\gamma = 0, 5$ и различных значениях K .

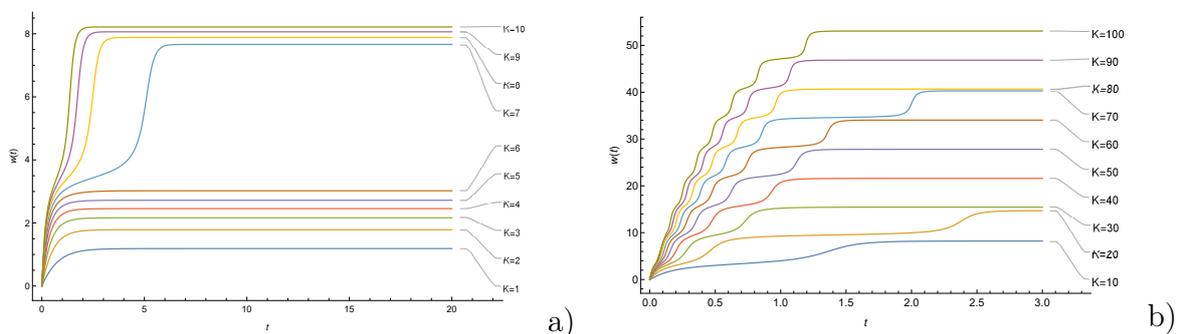


Рис. 2. Приближённые решения уравнения (2.2) при $\gamma = 0, 5$: а) при $K = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$; б) при $K = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100$.

2.2. Решения, зависящие от радиальной координаты

Рассмотрим решение уравнения (1.1)-(1.4), зависящее от радиальной переменной $w = w(r)$.

Для определения функции w получим уравнение второго порядка

$$\mu \left(w''(r) + \frac{w'(r)}{r} \right) - w(r) + K(1 + \gamma \cos w(r)) = 0. \quad (2.3)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} a_1 w'(r_1) + b_1 w(r_1) &= g_1, \\ a_2 w'(r_2) - b_2 w(r_2) &= g_2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Приближённые решения задачи (2.3)-(2.4) для $\mu = 0.1$, $\gamma = 0.5$, $K = 1, 2, 3, 4, 5, 10$ и различных краевых условий представлены на рисунках 3-5.

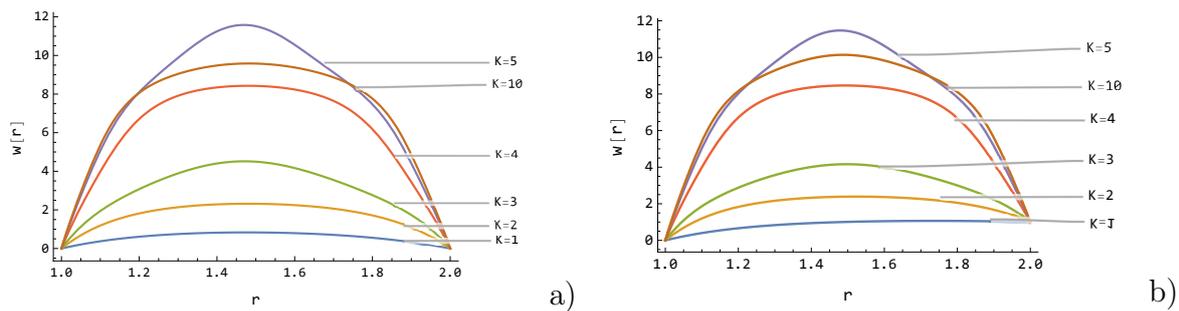


Рис. 3. Приближённое решение задачи (2.3)-(2.4) с краевыми условиями: а) $w(1) = 0$; $w(2) = 0$; б) $w(1) = 0$, $w(2) = 1$.

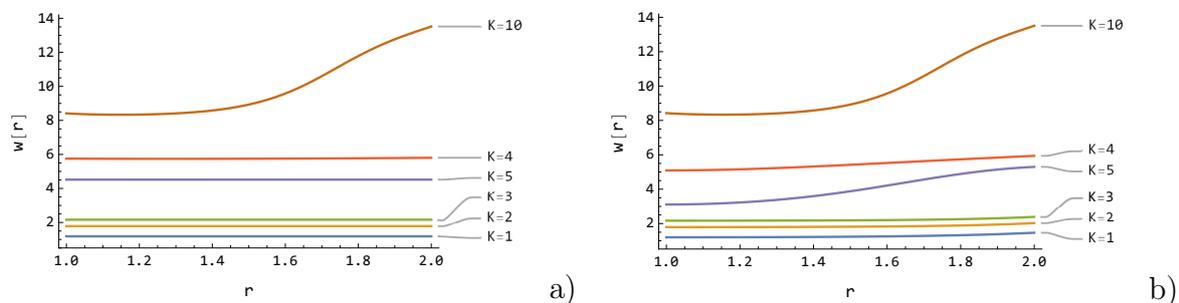


Рис. 4. Приближённое решение задачи (2.3)-(2.4) с краевыми условиями: а) $w'(1) = 0$; $w'(2) = 0$; б) $w'(1) = 0$, $w'(2) = 10$.

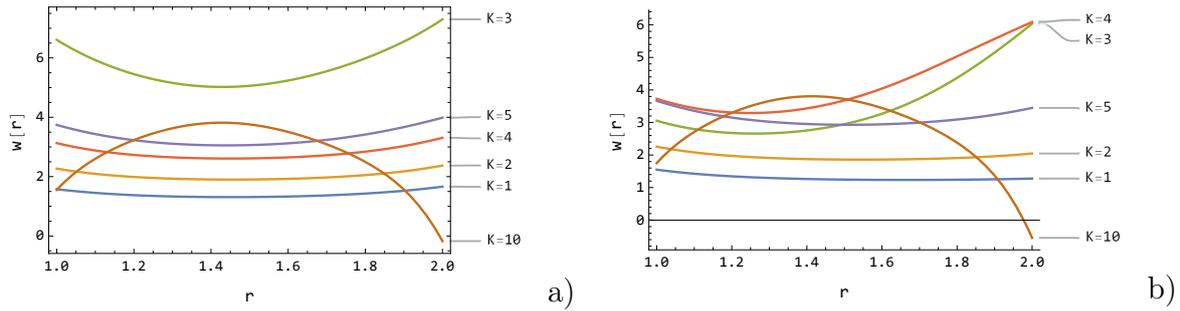


Рис. 5. Приближённое решение задачи (2.3)-(2.4) с краевыми условиями: а) $w(1) + w'(1) = 0$, $w(2) - w'(2) = 0$; б) $w(1) + w'(1) = 0$, $w(2) - w'(2) = 10$.

2.3. Решения, зависящие от угловой координаты

Пусть $w = w(\theta)$ – стационарное решение (1.1)-(1.4). Тогда функция $w = w(\theta)$ определяется уравнением

$$\mu w''(\theta) - w(\theta) + K(1 + \gamma \cos Qw(\theta)) = 0 \quad (2.5)$$

с условием периодичности

$$w(\theta + 2\pi) = w(\theta),$$

где $Qw = w(\theta + h)$ и $Q^m w = w$.

Решение уравнения (2.5) в зависимости от оператора Q может быть сведено к равносильной системе m дифференциальных уравнений второго порядка.

В частности, при $m = 2$ выполняется равенство $Q^2 w = w$. Обозначим $w_0 = w$, $Qw = Qw_0 = w_1$, $Q^2 w = w_0$ и перейдём к нормальной системе дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} w_0'' = \mu^{-1}(w_0 - K(1 + \gamma \cos w_1)), \\ w_1'' = \mu^{-1}(w_1 - K(1 + \gamma \cos w_0)). \end{cases} \quad (2.6)$$

Системе (2.6) можно сопоставить систему четырёх дифференциальных уравнений первого порядка

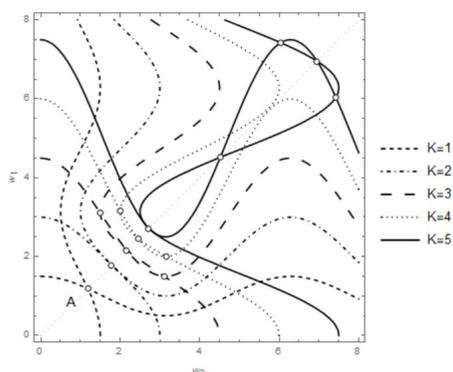
$$\begin{aligned} w_0' &= v_0, \quad w_1' = v_1, \\ v_0' &= \mu^{-1}(w_0 - K(1 + \gamma \cos w_1)), \quad v_1' = \mu^{-1}(w_1 - K(1 + \gamma \cos w_0)), \end{aligned} \quad (2.7)$$

положения равновесия которой являются решениями системы уравнений

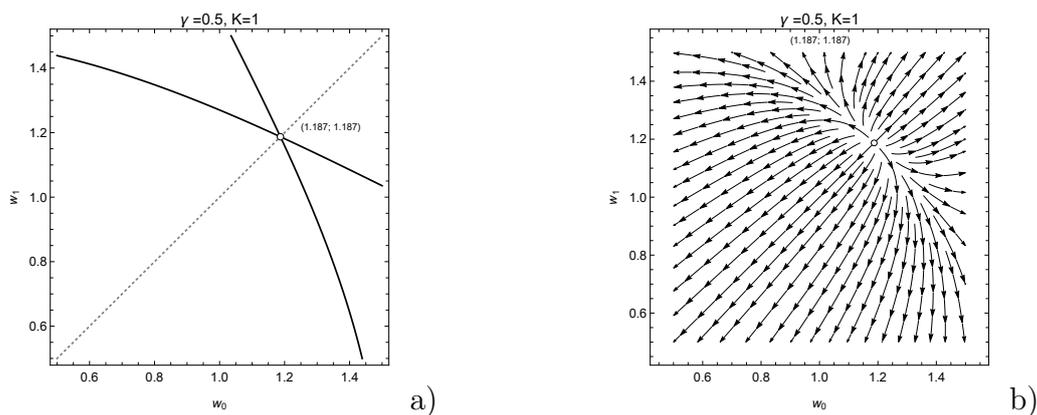
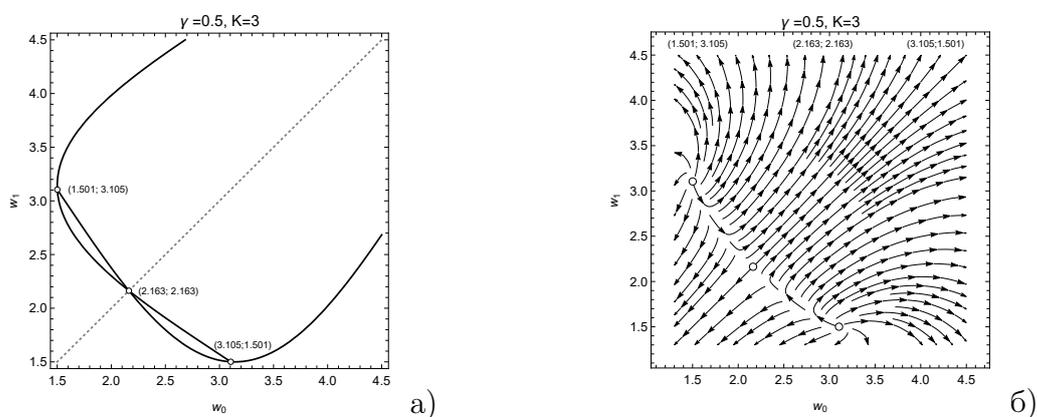
$$\mu^{-1}(w_0 - K(1 + \gamma \cos w_1)) = 0, \quad \mu^{-1}(w_1 - K(1 + \gamma \cos w_0)) = 0, \quad v_0 = 0, \quad v_1 = 0. \quad (2.8)$$

Из (2.8) следует, что $K(1 - \gamma) < w_j < K(1 + \gamma)$, $j = 0, 1$.

На рисунке 6 для $\gamma = 0.5$ и значений $K = 1, 2, 3, 4, 5$ обозначены точками соответствующие приближённые решения системы (2.8) в плоскости переменных w_0, w_1 (например, точкой A обозначено приближённое решение для $K = 1$).

Рис. 6. Решения системы (2.8) при $\gamma = 0.5$, $K = 1, 2, 3, 4, 5$

На рисунках 7 а)-10 а) для $\gamma = 0.5$ и $K = 1, 3, 5, 10$ точками обозначены приближённые решения системы (2.8) в плоскости переменных w_0, w_1 . На рисунках 7 б)-10 б) для $\gamma = 0.5$ и $K = 1, 3, 5, 10$ изображены фазовые траектории и положения равновесия системы (2.7).

Рис. 7. Решение (а) и фазовый портрет (б) системы (2.8) при $\gamma = 0.5$, $K = 1$.Рис. 8. Решение (а) и фазовый портрет (б) системы (2.8) при $\gamma = 0.5$, $K = 3$.

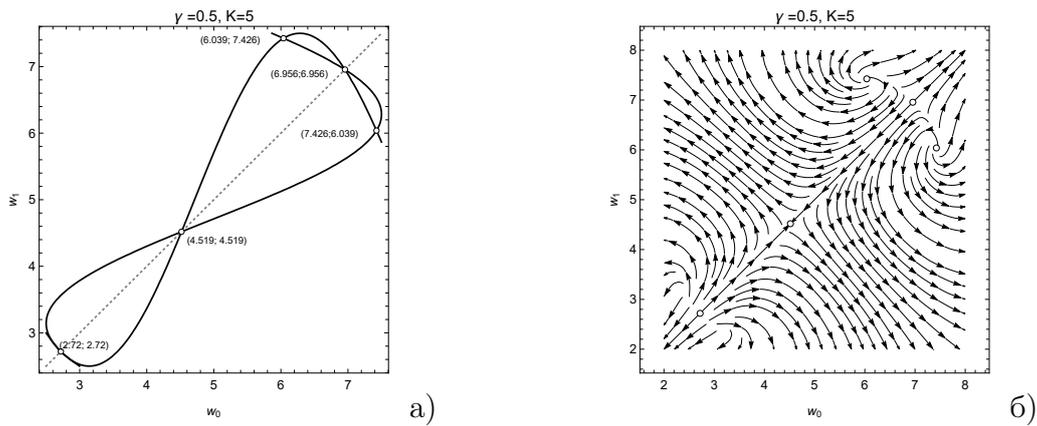


Рис. 9. Решение (а) и фазовый портрет (б) системы (2.8) при $\gamma = 0.5, K = 5$.

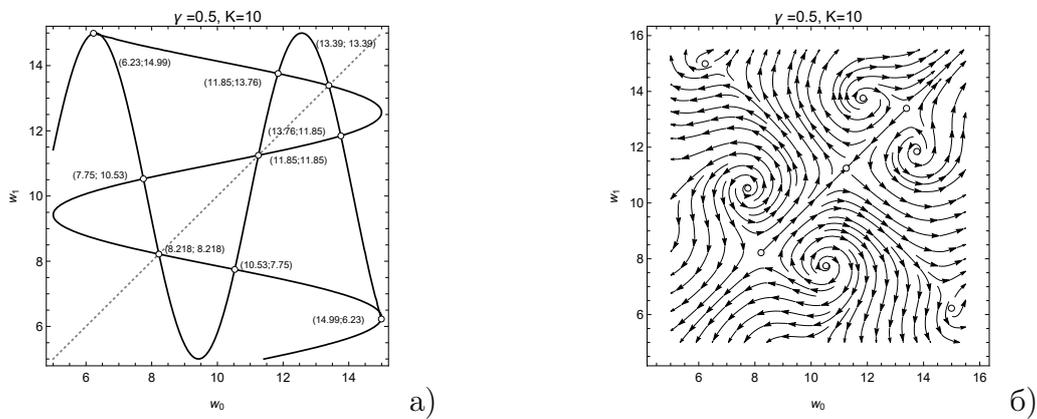


Рис. 10. Решение (а) и фазовый портрет (б) системы (2.8) при $\gamma = 0.5, K = 10$.

Устойчивость стационарных решений

Для исследования устойчивости положений равновесия системы (2.7), определяемых системой (2.8), составим матрицу линеаризации $J(v_0, v_1, w_0, w_1)$ в окрестности указанных положений равновесия:

$$J(v_0, v_1, w_0, w_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & K\gamma \sin w_1 \\ 0 & 0 & K\gamma \sin w_0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Её собственные значения

$$\lambda_{1,2} = 1, \quad \lambda_{3,4} = 1 \pm K\gamma \sqrt{\sin w_0 \sin w_1}. \tag{2.10}$$

Исходя из (2.7) для $w_0 \in (2\pi n, \pi + 2\pi n), w_1 \in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$ или $w_0 \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n), w_1 \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n), n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda_{3,4} = 1 \pm \sqrt[4]{(w_0 - \alpha)(\beta - w_0)(w_1 - \alpha)(\beta - w_1)}; \tag{2.11}$$

для $w_0 \in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$, $w_1 \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n)$ или $w_0 \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n)$, $w_1 \in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$:

$$\lambda_{3,4} = 1 \pm i\sqrt[4]{(w_0 - \alpha)(\beta - w_0)(w_1 - \alpha)(\beta - w_1)}, \quad (2.12)$$

где $\alpha = K(1 - \gamma)$, $\beta = K(1 + \gamma)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *В системе (2.7) в плоскости переменных w_0, w_1 реализуются следующие состояния покоя: неустойчивый фокус, неустойчивый дикритический узел, седло и вырожденный случай, когда неустойчивые точки покоя заполняют некоторую прямую.*

Доказательство. Пусть (w_0^*, w_1^*) – положение равновесия системы (2.7) в плоскости переменных w_0, w_1 . Обозначим $J^*(w_0, w_1)$ матрицу устойчивости:

$$J^*(w_0, w_1) = \begin{pmatrix} 1 & K\gamma \sin w_1 \\ K\gamma \sin w_0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

В зависимости от значений K, γ, w_0^*, w_1^* в плоскости переменных w_0, w_1 возможны следующие случаи.

1. Пусть $w_0^* = w_1^*$. Тогда собственные значения матрицы $J^*(w_0, w_1)$:

$$\lambda_{1,2}^* = 1 \pm K\gamma \sin w_0^*.$$

1.1. Если $w_0^* = \pi n$, $n \in \mathbb{N}$, то собственные значения матрицы $J^*(w_0, w_1)$ равны 1, следовательно, соответствующее положение равновесия есть неустойчивый дикритический узел.

Например, при $\gamma = 0,5$, $K = \frac{4\pi}{3}$ одна из особых точек имеет координаты $(2\pi; 2\pi)$ (см. рис. 11 а)). Собственные значения матрицы $J^*(w_0, w_1)$ в данной точке $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 1$. Фазовые траектории исходят из особой точки каждая под своим собственным углом. Для всякого ненулевого вектора, приложенного к особой точке, существует единственная траектория, касающаяся этого вектора (см. рис. 11 б)).

1.2. Если выполняются условия

$$K > 1, \quad \frac{1}{K} < \gamma < 1, \quad K - \sqrt{K^2\gamma^2 - 1} < w_0^* < K + \sqrt{K^2\gamma^2 - 1},$$

то собственные значения матрицы $J^*(w_0, w_1)$ действительные и имеют разные знаки, следовательно, особая точка является седлом.

Например, при $K = 3$, $\gamma = 0,5$ особая точка имеет координаты $(2,16; 2,16)$ (см. рис. 12 а)). Собственные значения матрицы $J^*(w_0, w_1)$ в данной точке имеют противоположные знаки: $\lambda_1^* = 2,24$, $\lambda_2^* = -0,24$. Вблизи особой точки, являющейся седлом по линейным членам, существуют две траектории, стремящиеся к особой точке, касаясь собственного вектора с отрицательным собственным значением, и ещё две траектории, стремящиеся к особой точке, касаясь собственного вектора с положительным собственным значением (см. рис. 12 б)).

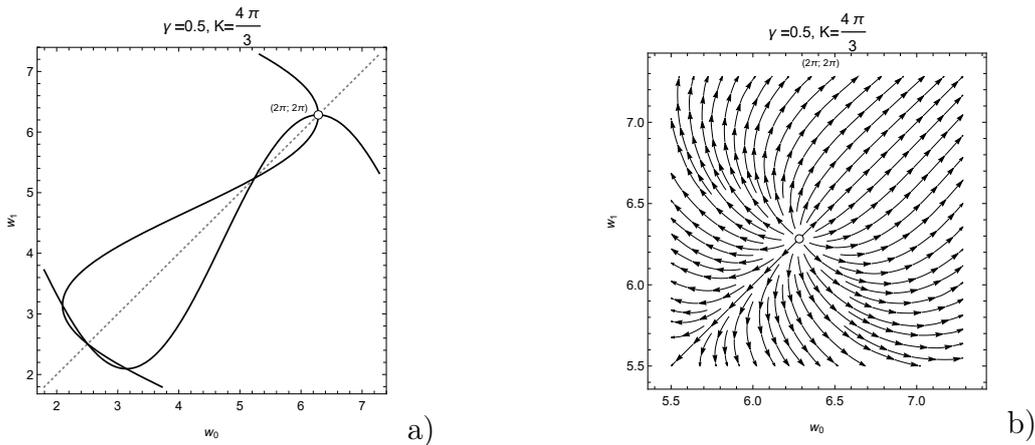


Рис. 11. (а) Особая точка $(2\pi; 2\pi)$ системы (2.7); (б) фазовые траектории системы (2.7) в окрестности особой точки $(2\pi; 2\pi)$ при $\gamma = 0.5$, $K = \frac{4\pi}{3}$.

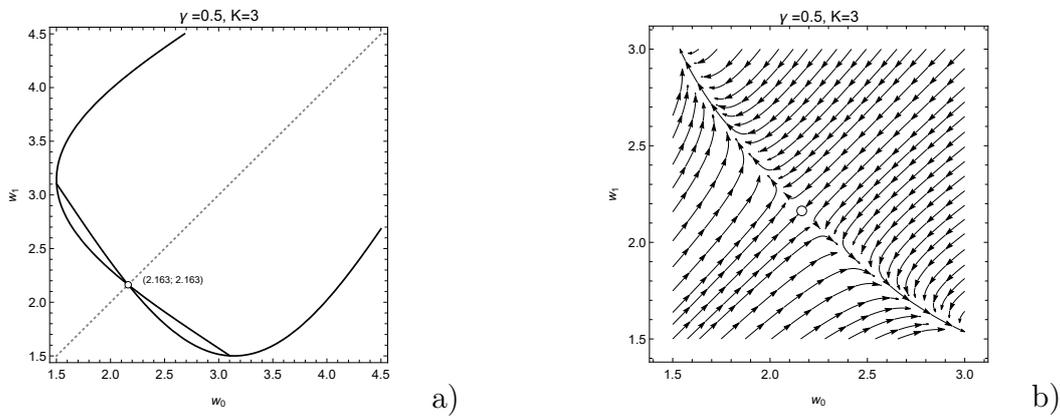


Рис. 12. (а) Особая точка $(2, 163; 2, 163)$ системы (2.7); (б) фазовые траектории системы (2.7) в окрестности особой точки $(2, 163; 2, 163)$ при $\gamma = 0.5$, $K = 3$.

1.3. Если при $K > 1$ выполняются условия

$$\gamma = \frac{1}{K}, \quad w_0^* = K - \sqrt{K^2\gamma^2 - 1} \quad \text{или} \quad \frac{1}{K} < \gamma < 1, \quad w_0^* = K \pm \sqrt{K^2\gamma^2 - 1},$$

то собственные значения матрицы $J^*(w_0, w_1)$ действительные различные, причём одно из них положительное, а второе равно нулю. Это означает, что в данном случае вся прямая, проходящая через данную точку и направленная вдоль собственного вектора, соответствующего нулевому собственному значению, состоит из точек равновесия. Фазовые траектории представляют собой лучи, параллельные второму собственному вектору, движение при этом происходит в направлении от прямой.

Например, при $\gamma = \frac{2}{\pi}$, $K = \frac{\pi}{2}$ собственные значения матрицы $J^*(w_0, w_1)$ в точке покоя $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (см. рис. 13 а)) равны $\lambda_1^* = 2$, $\lambda_2^* = 0$. Фазовые траектории пред-

ставлены на рисунке 13 б).

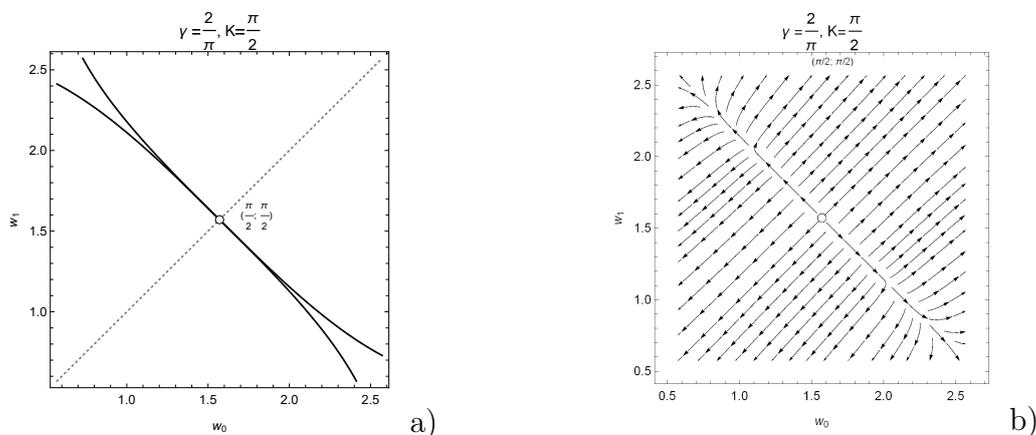


Рис. 13. (а) Особая точка $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ системы (2.7); (б) фазовые траектории системы (2.7) в окрестности особой точки $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ при $\gamma = \frac{2}{\pi}$, $K = \frac{\pi}{2}$.

1.4. Если при $K > 1$ выполняется одна из систем неравенств:

$$0 < \gamma < \frac{1}{K}, \quad \alpha < w_0^* < \beta;$$

$$\gamma = \frac{1}{K}, \quad \alpha < w_0^* < K - \sqrt{K^2\gamma^2 - 1} \quad \text{или} \quad K - \sqrt{K^2\gamma^2 - 1} < w_0^* < \beta;$$

$$\frac{1}{K} < \gamma < 1, \quad \alpha < w_0^* < K - \sqrt{K^2\gamma^2 - 1} \quad \text{или} \quad K + \sqrt{K^2\gamma^2 - 1} < w_0^* < \beta,$$

где $\alpha = K(1 - \gamma)$, $\beta = K(1 + \gamma)$, либо $0 < K \leq 1$, то собственные значения матрицы $J^*(w_0, w_1)$ положительные и различные. Это означает, что положение равновесия является неустойчивым узлом. Фазовые траектории касаются прямой, которая направлена вдоль собственного вектора, соответствующего меньшему по абсолютной величине собственному значению.

Например, при $\gamma = 0,5$, $K = 0,5$ точка $(0,692; 0,692)$ является точкой покоя системы (2.7) (см. рис. 14 а)). Собственные значения матрицы A^* в окрестности данной точки равны $\lambda_1^* = 0,84$, $\lambda_2^* = 1,16$, следовательно, точка покоя — неустойчивый узел (см. рис. 14 б)).

2. Пусть $w_0^* \neq w_1^*$. Тогда собственные значения $\lambda_1^* = \lambda_3$, $\lambda_2^* = \lambda_4$, где λ_3, λ_4 определяются равенствами (2.10)-(2.12).

2.1. Если $w_0^* = \pi n$ или $w_1^* = \pi n$, $n \in \mathbb{N}$ то собственные значения матрицы $J^*(w_0, w_1)$ равны 1, следовательно, соответствующее положение равновесия есть неустойчивый дикритический узел.

Например, при $\gamma = 0,5$, $K = \pi$ точки $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ и $\left(\pi; \frac{\pi}{2}\right)$ являются особыми точками (см. рис. 14 а)). Собственные значения матрицы $J^*(w_0, w_1)$ в окрестности каждой из них $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 1$. Фазовые траектории исходят из особой точки каждая

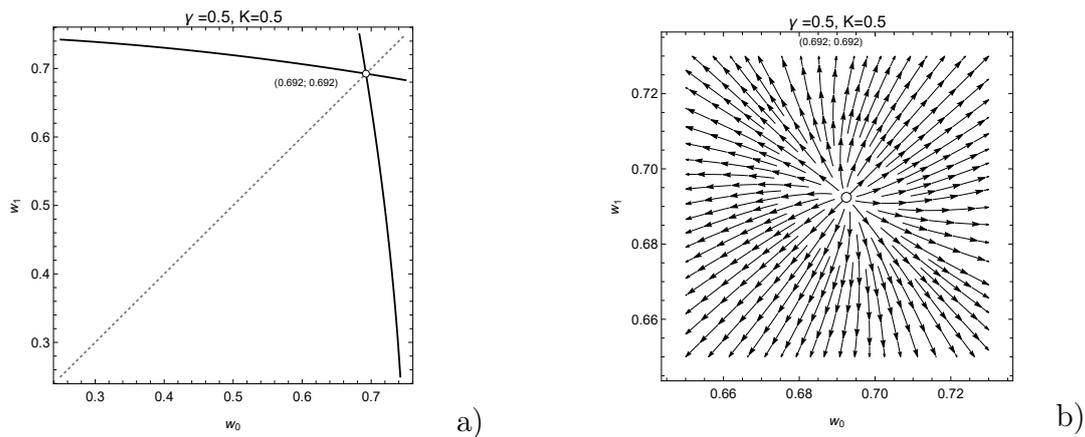


Рис. 14. (а) Особая точка $(0,692; 0,692)$ системы (2.7); (б) фазовые траектории системы (2.7) в окрестности особой точки $(0,692; 0,692)$ при $\gamma = 0,5$, $K = 0,5$.

под своим собственным углом. Для всякого ненулевого вектора, приложенного к особой точке, существует единственная траектория, касающаяся этого вектора (см. рис. 14 б)).

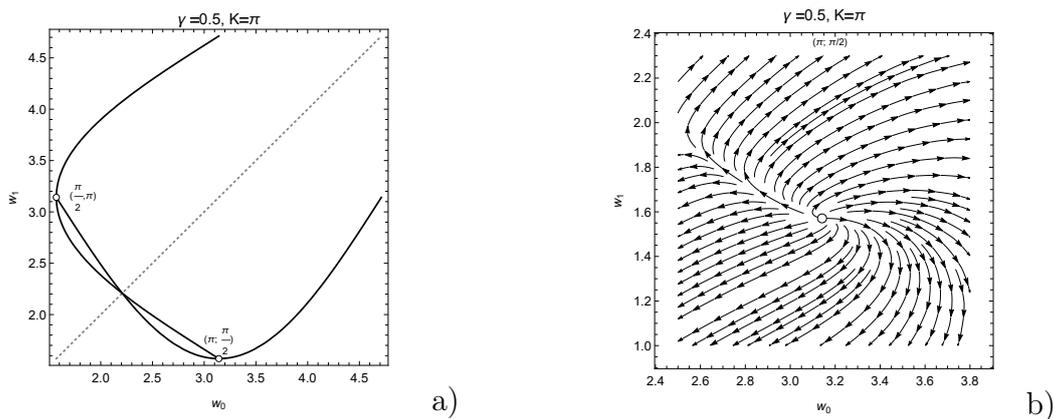


Рис. 15. (а) Особые точки $(\frac{\pi}{2}; \pi)$, $(\pi; \frac{\pi}{2})$ системы (2.7); (б) фазовые траектории системы (2.7) в окрестности особой точки $(\pi; \frac{\pi}{2})$ при $\gamma = 0,5$, $K = \pi$.

2.2. Пусть w_0^* и w_1^* принадлежат $(2\pi n, \pi + 2\pi n)$ или $(\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда λ_1^* и λ_2^* определяются равенствами (2.11). Исходя из системы (2.8) и условия $K(1 - \gamma) < w_{i,j} < K(1 + \gamma)$, $i, j = 0, 1$, подкоренные выражения в (2.11) больше 1. Следовательно, собственные значения матрицы $J^*(w_0, w_1)$ имеют противоположные знаки. Это означает, что соответствующая точка покоя является седлом.

Например, при $K = 8$, $\gamma = 0,5$ собственные значения матрицы $J^*(w_0, w_1)$ в точках покоя $(10, 26; 5, 31)$, $(5, 31; 10, 26)$ (см. рис. 16 а)) $\lambda_1^* = 4, 13$, $\lambda_2^* = -2, 13$. Вблизи особой точки, являющейся седлом по линейным членам, существуют две траектории, стремящиеся к особой точке, касаясь собственного вектора с отри-

пательным собственным значением, и ещё две траектории, стремящиеся к особой точке, касаясь собственного вектора с положительным собственным значением (см. рис. 16 б)).

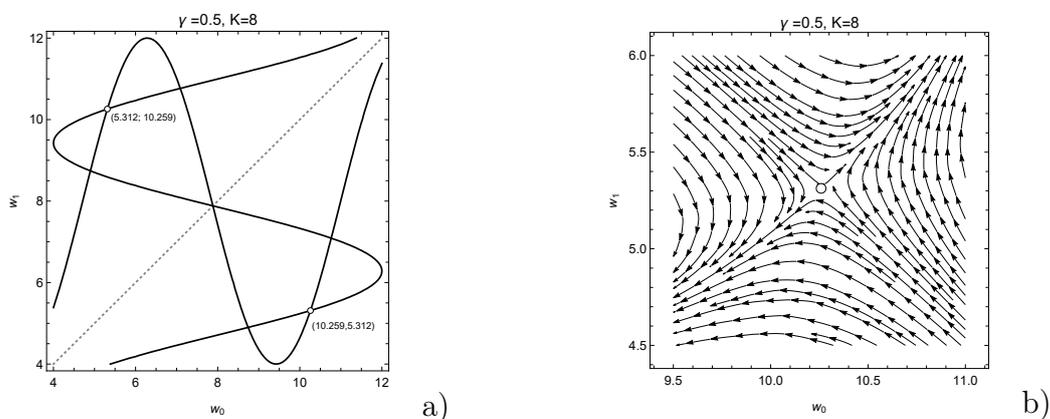


Рис. 16. (а) Особые точки $(5, 312; 10, 259)$, $(10, 259; 5, 312)$ системы (2.7); (б) фазовые траектории системы (2.7) в окрестности особой точки $(10, 259; 5, 312)$ при $\gamma = 0.5$, $K = 8$.

2.3. Пусть $w_0^* \in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$, $w_1^* \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n)$ или $w_0^* \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n)$, $w_1^* \in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда λ_1^* и λ_2^* определяются равенствами (2.12). Тогда для любых допустимых значений параметров K и γ собственные значения матрицы $J^*(w_0, w_1)$ комплексные с положительной действительной частью, это означает, что соответствующие точки покоя будут неустойчивыми фокусами.

Например, при $K = 5$, $\gamma = 0,5$ одна из особых точек имеет координаты $(7, 426; 6, 049)$ (см. рис. 17 а)). Собственные значения матрицы $J^*(w_0, w_1)$ в данной точке $\lambda_{1,2}^* = 1 \pm i1,17$. Фазовые траектории представляют собой раскручивающиеся из особой точки спирали (см. рис. 17 б)).

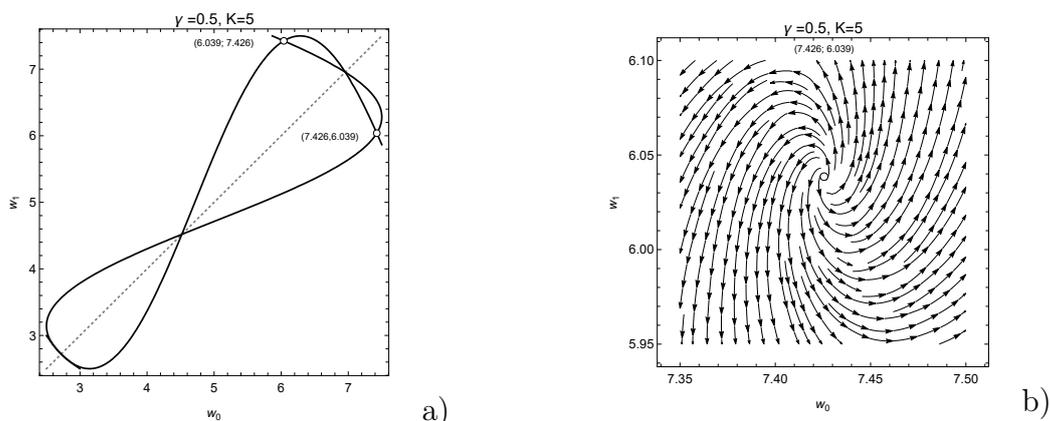


Рис. 17. (а) Особые точки $(7, 426; 6, 049)$, $(6, 049; 7, 426)$ системы (2.7); (б) фазовые траектории системы (2.7) в окрестности особой точки $(7, 426; 6, 049)$ при $\gamma = 0.5$, $K = 5$.

Таким образом, в системе (2.7) реализуются следующие состояния покоя: неустойчивый дикритический узел, неустойчивый фокус, неустойчивый узел, седло и вырожденный случай, когда неустойчивые точки покоя заполняют некоторую прямую. \square

2.4. Решения, зависящие от угловой координаты и от времени

Пусть $u = u(\theta, t)$ – решение (1.1)-(1.4). Тогда функция $u = u(\theta, t)$ определяется уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = \frac{\mu}{r_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + K(1 + \gamma \cos Qu), \quad t > 0, \quad (2.14)$$

с начальным условием $u(\theta, 0) = u_0(\theta)$ и условием периодичности $u(\theta + 2\pi, t) = u(\theta, t)$, где $Qu = u(\theta + h, t)$.

В случае узкого кольца, т. е. $d = r_2 - r_1 \ll 1$ приходим к задаче на окружности с оператором Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ и коэффициентом диффузии $D = \frac{\mu}{r_0^2}$, где $r_1 < r_0 < r_2$, стационарный вариант которой исследован в п.2.3. Аналогично работе [13], получим соответствующую теорему для упрощённой модели задачи (1.5)-(1.9) относительно $u = u(\theta, t)$ и характера решений в окрестности стационарного решения $u = w = const$, $u = w + v$ при $v = \sqrt{\frac{6}{|\Lambda|}} U$, $\Lambda < -1$, $h = \pi$, $Qw = w$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U = D \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \Lambda Qu + \Omega (QU)^2 + (QU)^3, \quad t > 0, \quad (2.15)$$

где $QU = U(\theta + \pi, t)$, $\Lambda = -K\gamma \sin w$, $\Omega = -\sqrt{\frac{3|\Lambda|}{2}} ctgw$.

Теорема 2. Пусть $\Lambda < -1$, тогда существует $\delta > 0$, такое что для любых значений параметра D удовлетворяющих неравенству $-\Lambda - 1 - \delta < D < -1 - \Lambda$, существует решение $\varphi_1(\theta, \mu)$ уравнения (2.15), определяемое равенством

$$\varphi_1(\theta, D) = (z \cos \theta + z^2 \sigma_2(\theta, D) + z^3 \sigma_3(\theta, D) + z^4 \sigma_4(\theta, D) + z^5 \sigma_5(\theta, D) + r(z, \theta, D)) |_{z=z(D)},$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{\Omega}{2} \left(\frac{1}{1 - \Lambda + 2\lambda_1} + \frac{\cos 2\theta}{2\lambda_1 - \lambda_2} \right), \quad \sigma_3 = -\frac{\xi}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3\theta, \\ \sigma_4 &= \frac{\Omega}{2(1 - \Lambda + 4\lambda_1)} \left(\frac{5\Omega^2}{2(1 - \Lambda + 2\lambda_1)^2} + \frac{\zeta}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} \right) + \\ &+ \frac{\Omega}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_2)} \left(\frac{3\xi}{2(1 - \Lambda + 2\lambda_1)} - \frac{\xi}{2(3\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{\zeta}{2\lambda_1 - \lambda_2} \right) \cos 2\theta + \\ &+ \frac{\Omega}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_4)} \left(\frac{\zeta}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{\xi}{3\lambda_1 - \lambda_3} \right) \cos 4\theta, \end{aligned}$$

$$\sigma_5 = \frac{1}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \left[\left(-\frac{3\Omega^2}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{3\Omega^2}{2(1 - \Lambda + 2\lambda_1)} - \frac{3\xi\Omega^2}{2(1 - \Lambda + 2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{\xi\Omega^2}{(1 - \Lambda + 2\lambda_1)(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\zeta\Omega^2}{(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{\xi\Omega^2}{2(4\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{\xi\Omega^2}{2(3\lambda_1 - \lambda_3)(4\lambda_1 - \lambda_4)} - \frac{3\xi\Omega^2}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\zeta\Omega^2}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_4)} - \frac{3\xi}{8(3\lambda_1 - \lambda_3)} \right) \cos 3\theta + \frac{1}{2} \left(\frac{3\Omega^2}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{3\zeta}{4(3\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{\xi\Omega^2}{(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\zeta\Omega^2}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_4)} + \frac{\xi\Omega^2}{(3\lambda_1 - \lambda_3)(4\lambda_1 - \lambda_4)} \right) \cos 5\theta \right],$$

здесь $r(z, \theta, D) = O(|z|^5)$, $z(D) > 0$ — непрерывная ветвь стационарных точек уравнения, $\xi = 2\Omega^2 + (2\lambda_1 - \lambda_2)$, $\zeta = \Omega^2 + 3(2\lambda_1 - \lambda_2)$, $\lambda_k = -\mu k^2 - 1 + (-1)^k \Lambda$, $k = 1, 2, \dots$

$$\dot{z} = \lambda_1(D)z + \left[-\frac{3}{4} - \frac{\Omega^2}{\Lambda - 1 + 2\lambda_1} - \frac{\Omega^2}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)} \right] z^3 + \left[\frac{5\Omega^4}{2(\Lambda - 1 + 2\lambda_1)^2(\Lambda - 1 - 4\lambda_1)} - \frac{3\Omega^2}{4(\Lambda - 1 + 2\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{3\Omega^2}{4(\Lambda - 1 + 2\lambda_1)^2} - \frac{3\Omega^2}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} + \frac{\Omega^2\zeta}{4(\Lambda - 1 - 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \frac{\Omega^2\zeta}{(\Lambda - 1 - 2\lambda_1)(\Lambda - 1 - 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{\Omega^2\zeta}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(4\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{3\Omega^2\xi}{(\Lambda - 1 - 2\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{3\xi}{16(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{\Omega^2\xi}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{\Omega^2\xi}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(3\lambda_1 - \lambda_3)} \right] z^5$$

Решение $\varphi_1(\theta, D)$ — экспоненциально устойчиво.

Заключение

В работе получены решения для частных случаев нелинейного параболического уравнения с оператором инволюции, который соответствует преобразованию пространственных переменных. Такие уравнения возникают в нелинейной оптике при моделировании прохождения потока через нелинейную среду керровского типа в контуре с обратной связью и преобразованием пространственных координат. Исследована устойчивость многообразия точек покоя для стационарного случая уравнения, зависящего от угловой переменной в задаче для кругового кольца.

Для этого случая доказана реализация следующих состояний покоя: неустойчивого дикритического узла, неустойчивого фокуса, неустойчивого узла, седла и вырожденного случая, когда неустойчивые точки покоя заполняют некоторую прямую.

В работе приведено преобразованное уравнение в окрестности рассмотренных частных решений, которые используются для дальнейшего исследования исходного уравнения. В частности, для уравнения, зависящего от угловой координаты и времени получено асимптотическое представление решения в окрестности стационарного решения $w = const$ с оператором инволюции $Q : Q^2 = I$ (поворот на угол $h = \pi$).

Список цитируемых источников

1. Аль-Андари, Д. С., Лукьяненко, В. А. Нелинейные параболические уравнения с преобразованием аргумента // Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование: сборник научных трудов МИКМО-2019. — 2019. — Вып.1, №1. — С. 4–13.
Al-Andari, D. S., Lukianenko, V. A. (2019). Nonlinear Parabolic Equations with Argument Conversion [in Russian]. MIKMO, 1:1, 4–13.
2. Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей // Новые принципы оптической обработки информации / Под ред. С. А. Ахманова, М. А. Воронцова. — М: Наука, 1990. — С. 263–325.
Akhmanov, S. A., Vorontsov, M. A., Ivanov, V. Yu. (1990). Generation of structures in optical systems with two-dimensional feedback [in Russian]. In S. A. Akhmanov, M. A. Vorontsov (Eds.), New Physical Principles of Optical Information Processing (pp. 263–325). Moscow: Nauka.
3. Ахромеева, Т. С., Курдюмов, С. П., Малинецкий, Г. Г., Самарский, А. А. Структуры и хаос в нелинейных средах. — М.: Физматлит, 2007. — 485 с.
Akhromeeva, T. S., Kyurdyumov, S. P., Malinetskii, G. G., Samarskii, A. A. (2005). Structures and Chaos in Nonlinear Media [in Russian]. Moscow: Fizmatlit.
4. Белан, Е. П. О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т.40, №5. — С. 645–654.
Belan, E. P. (2004). On the interaction of running waves in a parabolic functional differential equation [in Russian]. Differ. Edu., 40:5, 645–654.
5. Белан, Е. П., Лыкова, О. В. Бифуркации вращающихся структур в параболическом уравнении с преобразованием поворота пространственной переменной // Динамические системы. — 2008. — Вып.25. — С. 3–16.
Belan, E. P., Lykova, O. V. (2008). Bifurcations of rotating structures in a parabolic equation with shift transformation of a spatial variable [in Russian]. Din. Sist., 25, 3–16.
6. Белан, Е. П. Динамика стационарных структур в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — №5. — С. 99–111.

- Belan, E. P. (2010). Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflected spatial argument [in Russian]. *Cybern. Syst. Anal.*, 46, 772–783.
7. *Иванов, В. Ю., Иванова, И. Б.* Фазовые структуры в нелинейном кольцевом резонаторе // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. — 2016. — №3. — С. 48–53.
Ivanov, V. Ju., Ivanova, I. B. (2016). Phase patterns in a nonlinear ring resonator [in Russian]. *Moscow University Physics Bulletin*, 71, 266–271.
 8. *Карпетянц, Н. К., Самко, С. Г.* Уравнения с инволютивными операторами и их приложения. — Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1988. — 187 с.
Karapetiants, N., K., & Samko, S. G. (2001). *Equations with Involution Operators* [in Russian]. Basel: Birkhäuser.
 9. *Кащенко, С. А.* Асимптотика пространственно неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1994. — Т.31, №3. — С. 467–473.
Kashchenko, S. A. (1994). Asymptotics of spatially heterogeneous structures in coherent nonlinear-optical systems [in Russian]. *Comput. Math. Math. Phys.*, 31:3, 467–473.
 10. *Колесов, А. Ю., Розов, Н. Х.* Оптическая буферность и механизмы ее возникновения // Теоретическая и математическая физика. — 2004. — Т.140, №1. — С. 14–28.
Kolesov, A. Yu., Rozov, N. Kh. (2004). Optical buffering and mechanisms of its occurrence [in Russian]. *Theoret. and Math. Phys.*, 140:1, 14–28.
 11. *Корнута, А. А.* Метаустойчивые структуры в параболическом уравнении с поворотом пространственной переменной // Динамические системы. — 2014. — Т.4 (32), №1–2. — С. 59–75.
Kornuta, A. A. (2014). Metastable structures in a parabolic equation on a circle with rotation of a space variable [in Russian]. *Din. Sist.*, 4:32. 59–75.
 12. *Корнута, А. А.* Динамика стационарных структур в параболической задаче с преобразованием отражения // Таврический Вестник Информатики и Математики. — 2015. — №1 (28). — С. 49–61.
Kornuta, A. A. (2015). Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection transformation [in Russian]. *Tavrishesky Vestnik Inf. i Mat.*, 1:28, 49–61.
 13. *Корнута, А. А.* Стационарные структуры в параболической задаче с преобразованием поворота на окружности // Динамические системы. — 2016. — Т.6 (34), №4. — С. 311–322.
Kornuta, A. A. (2016). Stationary structures in a parabolic problem with rotation on a circle [in Russian]. *Din. Sist.*, 6:4. 311–322.
 14. *Мищенко, Е. Ф., Садовничий, В. А., Колесов, А. Ю., Розов, Н. Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. — М.: Физматлит, 2005. — 430 с.
Mishchenko, E., F., Sadovnichii, V. A., Kolesov, A. Yu., Rozov, N. Kh. (2005). *Autowave processes in nonlinear media with diffusion* [in Russian]. Moscow: Fizmatgiz.
 15. *Разгулин, А. В.* Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1993. — Т.33, №1. — С. 69–80.

- Razgulin, A. V. (1993). Self-excited oscillations in the nonlinear parabolic problem with transformed argument [in Russian]. *Comput. Math. Math. Phys.*, 33:1, 69–80.
16. *Разгулин, А. В., Чушкин, В. А.* О задаче оптимальной Фурье-фильтрации для одного класса моделей нелинейных оптических систем с обратной связью // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2004. — Т.44, №9. — С. 1608–1618.
- Razgulin, A. V. Chushkin, V. A. (2004). On the problem of optimal Fourier filtering for a class of models of nonlinear optical systems with feedback [in Russian]. *Comput. Math. Math. Phys.*, 44:9, 1608–1618.
17. *Разгулин, А. В.* Нелинейные модели оптической синергетики. — М: МАКС Пресс, 2008. — 203 с.
- Razgulin, A. V. (2008). *Nonlinear Models of Optical Synergetics* [in Russian]. Moscow: MAKS Press.
18. *Скубачевский, А. Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения // *Дифференц. уравнения.* — 1998. — Т.34, №10. — С. 1394–1401.
- Skubachevsky, A. L. (1998). On the Hopf bifurcation for a quasilinear parabolic functional-differential equation [in Russian]. *Differ. Equ.*, 34:10, 1395–1402.
19. *Хазова, Ю. А., Лукьяненко, В. А.* Применение интегральных методов для исследования одной параболической задачи // *Известия вузов. ПНД.* — 2019. — Т.27, №4. — С. 85–98.
- Hazova, J. A., Lukyanenko, V. A. (2019). The use of integral methods to study one parabolic problem [in Russian]. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 27:4, 85–98.
20. *Чушкин, В. А., Разгулин, А. В.* Стационарные структуры в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с отраженным аргументом // *Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика.* — 2003. — №2. — С. 13–20.
- Chushkin, V. A., Razgulin, A. V. (2003). Steady-state structures in a functional-differential diffusion equation with reflection of the spatial argument [in Russian]. *Mosc. Univ. Comput. Math. Cybern.*, 2, 13–20.
21. *Vorontsov, M., Iroshnikov, N., Abernathy, R.* Diffractive patterns in a nonlinear-optical 2-dimensional feedback-system with field rotation [in English] // *Chaos, Solitons and Fractals.* — 1994. — V.4, №8–9. — С. 1701–1716.

Получена 15.10.2019