Динамические системы, 2019, том 9(37), №4, 367–389

УДК 517.929.4

Асимптотические свойства решений в модели хищник-жертва с двумя запаздываниями[1]

М. А. Скворцова

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
Новосибирск 630090. *E-mail: sm-18-nsu@yandex.ru*

Аннотация. Рассматривается система дифференциальных уравнений с двумя запаздываниями, описывающая взаимодействие популяций хищников и жертв. Модель учитывает возрастную структуру популяций, при этом параметры запаздывания отвечают за время взросления хищников и жертв соответственно. В работе изучаются асимптотические свойства решений рассматриваемой системы. Указано множество начальных вектор-функций, при которых решения сходятся к положению равновесия, соответствующему совместному сосуществованию популяций хищников и жертв. Установлены оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности к данному положению равновесия. Результаты получены с использованием модифицированных функционалов Ляпунова – Красовского.

Ключевые слова: модель хищник-жертва, уравнения с запаздывающим аргументом, асимптотическая устойчивость, оценки решений, множество притяжения, модифицированные функционалы Ляпунова – Красовского.

Asymptotic properties of solutions in a predator-prey model with two delays

M. A. Skvortsova

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Novosibirsk State University,
Novosibirsk 630090.

Abstract. We consider a system of differential equations with two delays, which describes the interaction between predator and prey populations. The model takes into account the age structure of populations, herewith the delay parameters denote the time that predator and prey individuals need to become adult. In the paper we study asymptotic properties of solutions to the considered system. We describe a set of initial vector-functions, for which solutions converge to the equilibrium point corresponding to the coexistence of predator and prey populations. We establish estimates of solutions characterizing the rate of stabilization at infinity to this equilibrium point. The results are obtained using modified Lyapunov–Krasovskii functionals.

Keywords: predator-prey model, delay differential equations, asymptotic stability, estimates of solutions, attraction set, modified Lyapunov–Krasovskii functionals.

---

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-00408).

MSC 2010: 34K20, 34K25, 92D25

1. Введение

Настоящая работа является продолжением исследований асимптотических свойств решений системы дифференциальных уравнений с двумя запаздываниями, описывающей взаимодействие популяций хищников и жертв [20]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx(t-\tau_1)e^{-c_1\tau_1} - ax^2(t) - d_1x(t) - f(x(t), y(t)), \\ \dot{u}(t) = rx(t) - rx(t-\tau_1)e^{-c_1\tau_1} - c_1u(t), \\ \dot{y}(t) = nf(x(t-\tau_2), y(t-\tau_2))e^{-c_2\tau_2} - d_2y(t), \\ \dot{v}(t) = nf(x(t), y(t)) - nf(x(t-\tau_2), y(t-\tau_2))e^{-c_2\tau_2} - c_2v(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

$$f(x,y) = \frac{bxy}{1+k_1x+k_2y}, \quad b>0, \quad k_1, k_2 \geq 0.$$

Здесь $x(t)$ — численность популяции взрослых жертв, $u(t)$ — численность популяции молодых жертв, $y(t)$ — численность популяции взрослых хищников, $v(t)$ — численность популяции молодых хищников. Параметры запаздывания $\tau_1 > 0$ и $\tau_2 > 0$ отвечают за время взросления жертв и хищников соответственно. Коэффициенты системы предполагаются положительными. Более детальное описание модели содержится в [20].

Отметим, что в работе [20] также подробно обсуждались асимптотические свойства решений рассматриваемой системы. В частности, были получены условия стабилизации решений на бесконечности, а также условия асимптотической устойчивости и неустойчивости положений равновесия.

Как было отмечено в [20], в зависимости от коэффициентов система (1.1) имеет не более трех положений равновесия (с неотрицательными компонентами).

1) Если $d_1 \geq re^{-c_1\tau_1}$, то у системы существует только одно положение равновесия: $(x(t), u(t), y(t), v(t)) = (0,0,0,0)$.

2) Если $d_1 < re^{-c_1\tau_1}$ и $ad_2 \geq (re^{-c_1\tau_1} - d_1)(nbe^{-c_2\tau_2} - d_2k_1)$, то у системы существуют два положения равновесия: $(x(t), u(t), y(t), v(t)) = (0,0,0,0)$ и $(x(t), u(t), y(t), v(t)) = (x^*, u^*, 0, 0)$, где

$$x^* = \frac{1}{a}(re^{-c_1\tau_1} - d_1), \quad u^* = \frac{rx^*}{c_1}(1-e^{-c_1\tau_1}).$$

3) Если $d_1 < re^{-c_1\tau_1}$ и $ad_2 < (re^{-c_1\tau_1} - d_1)(nbe^{-c_2\tau_2} - d_2k_1)$, то у системы существуют три положения равновесия: $(x(t), u(t), y(t), v(t)) = (0,0,0,0)$, $(x(t), u(t), y(t), v(t)) = (x^*, u^*, 0, 0)$, и $(x(t), u(t), y(t), v(t)) = (x_0, u_0, y_0, v_0)$. При $k_2 \neq 0$ величина x_0 определяется по формуле

$$x_0 = \frac{1}{2}(-B + \sqrt{B^2+4C}),$$

$$B = \frac{nbe^{-c_2\tau_2} - d_2k_1}{ak_2ne^{-c_2\tau_2}} - \frac{1}{a}(re^{-c_1\tau_1} - d_1), \quad C = \frac{d_2}{ak_2ne^{-c_2\tau_2}},$$

при $k_2 = 0$

$$x_0 = \frac{d_2}{nbe^{-c_2\tau_2} - d_2k_1}.$$

Величины u_0, y_0, v_0 определяются так:

$$u_0 = \frac{rx_0}{c_1}(1 - e^{-c_1\tau_1}),$$

$$y_0 = \frac{ne^{-c_2\tau_2}}{d_2}(re^{-c_1\tau_1} - d_1 - ax_0)x_0,$$

$$v_0 = \frac{d_2y_0}{c_2}(e^{c_2\tau_2} - 1).$$

Положение равновесия $(0, 0, 0, 0)$ соответствует полному вымиранию популяций, положение равновесия $(x^*, u^*, 0, 0)$ соответствует выживанию только популяции жертв, положение равновесия (x_0, u_0, y_0, v_0) соответствует совместному сосуществованию популяций жертв и хищников.

При исследовании асимптотического поведения решений важным вопросом также является получение оценок решений, характеризующих скорость стабилизации на бесконечности. Отметим, что для получения оценок решений систем с запаздыванием часто используются модифицированные функционалы Ляпунова – Красовского (см., например, [2–9], [16–19]). Для изучения свойств решений некоторых биологических моделей такой подход применялся в [10–14]. В частности, в работе [13] были установлены оценки, характеризующие скорости стабилизации решений системы (1.1) на бесконечности к положениям равновесия $(0, 0, 0, 0)$ и $(x^*, u^*, 0, 0)$.

Цель настоящей работы — указать множество начальных вектор-функций, при которых решения системы (1.1) сходятся к положению равновесия (x_0, u_0, y_0, v_0), и получить оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности к данному положению равновесия. Такие оценки асимптотического поведения решений для системы (1.1) будут получены впервые. При получении результатов мы также будем использовать модифицированные функционалы Ляпунова – Красовского.

Автор выражает благодарность профессору Г. В. Демиденко за внимание к работе.

2. Построение модифицированного функционала Ляпунова – Красовского

В данном параграфе мы будем предполагать, что выполнены условия, при которых у системы (1.1) существует нетривиальное положение равновесия (x_0, u_0, y_0, v_0):

$$d_1 < re^{-c_1\tau_1}, \quad ad_2 < (re^{-c_1\tau_1} - d_1)(nbe^{-c_2\tau_2} - d_2k_1). \tag{2.1}$$

Рассмотрим подсистему, состоящую из первого и третьего уравнений системы (1.1):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx(t-\tau_1)e^{-c_1\tau_1} - ax^2(t) - d_1x(t) - f(x(t), y(t)), \\ \dot{y}(t) = nf(x(t-\tau_2), y(t-\tau_2))e^{-c_2\tau_2} - d_2y(t). \end{cases} \tag{2.2}$$

В системе (2.2) сделаем замену

$$x(t) = x_0 + \widetilde{x}(t), \quad y(t) = y_0 + \widetilde{y}(t), \tag{2.3}$$

тогда получим

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{x}}(t) = re^{-c_1\tau_1}(x_0 + \widetilde{x}(t-\tau_1)) - a(x_0 + \widetilde{x}(t))^2 \\ \qquad\quad -d_1(x_0 + \widetilde{x}(t)) - f(x_0 + \widetilde{x}(t), y_0 + \widetilde{y}(t)), \\ \\ \dot{\widetilde{y}}(t) = nf(x_0 + \widetilde{x}(t-\tau_2), y_0 + \widetilde{y}(t-\tau_2))e^{-c_2\tau_2} - d_2(y_0 + \widetilde{y}(t)). \end{cases}$$

Кратко эту систему можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\boldsymbol{y}}(t) = A\widetilde{\boldsymbol{y}}(t) + B_1\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_1) + B_2\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2) + F_0(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)) + G(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)), \tag{2.4}$$

где

$$\widetilde{\boldsymbol{y}}(t) = \begin{pmatrix} \widetilde{x}(t) \\ \widetilde{y}(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ 0 & -a_{22} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

$$a_{11} = 2ax_0 + d_1 + f'_x(x_0, y_0) = 2ax_0 + d_1 + \frac{by_0(1 + k_2y_0)}{(1 + k_1x_0 + k_2y_0)^2},$$

$$a_{12} = f'_y(x_0, y_0) = \frac{bx_0(1 + k_1x_0)}{(1 + k_1x_0 + k_2y_0)^2}, \quad a_{22} = d_2, \quad b_{11} = re^{-c_1\tau_1},$$

$$b_{21} = ne^{-c_2\tau_2}f'_x(x_0, y_0) = \frac{y_0}{x_0}\frac{d_2(1 + k_2y_0)}{(1 + k_1x_0 + k_2y_0)},$$

$$b_{22} = ne^{-c_2\tau_2}f'_y(x_0, y_0) = \frac{d_2(1 + k_1x_0)}{(1 + k_1x_0 + k_2y_0)},$$

$$F_0(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)) = \begin{pmatrix} -a\widetilde{x}^2(t) - h(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ ne^{-c_2\tau_2}h(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)) \end{pmatrix},$$

$$h(\widetilde{\boldsymbol{y}}) = f(x_0 + \widetilde{x}, y_0 + \widetilde{y}) - f(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0)\widetilde{x} - f'_y(x_0, y_0)\widetilde{y}$$

$$= \frac{b\Big[\Big(1 + k_1x_0 + k_2y_0 + 2k_1x_0k_2y_0\Big)\widetilde{x}\widetilde{y} - k_1y_0(1 + k_2y_0)\widetilde{x}^2 - k_2x_0(1 + k_1x_0)\widetilde{y}^2\Big]}{[1 + k_1(x_0 + \widetilde{x}) + k_2(y_0 + \widetilde{y})][1 + k_1x_0 + k_2y_0]^2}. \tag{2.6}$$

В работе [13] были получены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.4), которые также являются достаточными условиями асимптотической устойчивости положения равновесия (x_0, y_0) системы (2.2). Приведем соответствующий результат.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (2.1) *и условие*

$$a_{12}b_{21} < (a_{11} - b_{11})(a_{22} + b_{22}). \tag{2.7}$$

Тогда положение равновесия (x_0, y_0) *системы* (2.2) *является асимптотически устойчивым.*

Замечание 1. В работе [13] также было показано, что результат останется верным и в случае $a_{12}b_{21} = (a_{11} - b_{11})(a_{22} + b_{22})$.

Следующая наша цель — при выполнении условий (2.1) и (2.7) построить модифицированный функционал Ляпунова – Красовского, который в дальнейшем будет использован для получения оценок решений системы (1.1), характеризующих скорость сходимости к положению равновесия (x_0, u_0, y_0, v_0).

Вначале приведем результат об асимптотической устойчивости нулевого решения линейной системы с запаздывающим аргументом

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(t-\tau), \tag{2.8}$$

вытекающий из работы [3].

Теорема 2. *Пусть существуют матрицы* $H = H^* > 0$ *и* $K(s) \in C^1([0,\tau])$ *такие, что* $K(s) = K^*(s) > 0$, $\frac{d}{ds}K(s) < 0$, $s \in [0,\tau]$, *при этом*

$$C = -\begin{pmatrix} H\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^*H + K(0) & H\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^*H & -K(\tau) \end{pmatrix} > 0.$$

Тогда нулевое решение системы (2.8) *является асимптотически устойчивым.*

Замечание 2. Неравенство $H > 0$ означает, что матрица H является положительно определенной.

При доказательстве теоремы 2 использовался модифицированный функционал Ляпунова – Красовского следующего вида

$$V(t,\boldsymbol{y}) = \langle H\boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{y}(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)\boldsymbol{y}(s), \boldsymbol{y}(s)\rangle\, ds. \tag{2.9}$$

Важно отметить, что при выполнении условий теоремы 2 с помощью данного функционала были получены оценки решений системы (2.8), характеризующие скорость убывания на бесконечности. Функционал (2.9) также позволяет получать оценки областей притяжения нулевого решения и оценки скорости убывания решений и для нелинейных систем с запаздывающим аргументом (см., например, [3, 4, 7]).

Результаты работы [3] легко обобщаются на случай нескольких запаздываний (см., например, [2]). В частности, если система содержит два запаздывания

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{y}(t-\tau_1) + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{y}(t-\tau_2), \tag{2.10}$$

тогда для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.10) достаточно потребовать существование матриц $H = H^* > 0$, $K_1(s) \in C^1([0,\tau_1])$ и $K_2(s) \in C^1([0,\tau_2])$ таких, что

$$K_1(s) = K_1^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K_1(s) < 0, \quad s \in [0,\tau_1], \tag{2.11}$$

$$K_2(s) = K_2^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K_2(s) < 0, \quad s \in [0,\tau_2], \tag{2.12}$$

причем

$$C = -\begin{pmatrix} H\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^*H + K_1(0) + K_2(0) & H\boldsymbol{B}_1 & H\boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{B}_1^*H & -K_1(\tau_1) & 0 \\ \boldsymbol{B}_2^*H & 0 & -K_2(\tau_2) \end{pmatrix} > 0. \tag{2.13}$$

Доказательство этого проводится с использованием функционала

$$V(t,\boldsymbol{y}) = \langle H\boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{y}(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau_1}^{t} \langle K_1(t-s)\boldsymbol{y}(s), \boldsymbol{y}(s)\rangle\, ds$$

$$+ \int\limits_{t-\tau_2}^{t} \langle K_2(t-s)\boldsymbol{y}(s), \boldsymbol{y}(s)\rangle\, ds. \tag{2.14}$$

Предполагая, что справедливы неравенства (2.1) и (2.7) и матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$ имеют вид (2.5), построим модифицированный функционал Ляпунова – Красовского (2.14) для системы (2.10) такой, что выполнены условия (2.11)–(2.13). Для этого подберем соответствующие матрицы $H = H^* > 0$, $K_1(s) \in C^1([0,\tau_1])$, $K_2(s) \in C^1([0,\tau_2])$.

Положим

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix},$$

$$K_1(s) = e^{-\kappa_1 s}(\alpha B_1^* B_1 + M_1), \quad M_1 = M_1^* > 0, \quad \alpha, \kappa_1 > 0,$$

$$K_2(s) = e^{-\kappa_2 s}(\beta B_2^* B_2 + M_2), \quad M_2 = M_2^* > 0, \quad \beta, \kappa_2 > 0.$$

Заметим, что $B_1^*H = B_1^*\widetilde{H}_1$, $B_2^*H = B_2^*\widetilde{H}_2$, где

$$\widetilde{H}_1 = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{H}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

В этом случае матрица (2.13) будет иметь вид $C =$

$$\begin{pmatrix} -\Big(HA + A^*H + \alpha B_1^*B_1 + \beta B_2^*B_2\Big) - M_1 - M_2 & -\widetilde{H}_1^*B_1 & -\widetilde{H}_2^*B_2 \\ -B_1^*\widetilde{H}_1 & e^{-\kappa_1\tau_1}(\alpha B_1^*B_1 + M_1) & 0 \\ -B_2^*\widetilde{H}_2 & 0 & e^{-\kappa_2\tau_2}(\beta B_2^*B_2 + M_2) \end{pmatrix}.$$

Введем обозначение

$$R = -\Big(HA + A^*H + \alpha B_1^*B_1 + \beta B_2^*B_2$$
$$+\frac{1}{\alpha}e^{\kappa_1\tau_1}\widetilde{H}_1^*\widetilde{H}_1 + \frac{1}{\beta}e^{\kappa_2\tau_2}\widetilde{H}_2^*\widetilde{H}_2\Big) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Тогда матрица C преобразуется к виду

$$C = \begin{pmatrix} R - M_1 - M_2 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\kappa_1\tau_1}M_1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\kappa_2\tau_2}M_2 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha}e^{\kappa_1\tau_1}\widetilde{H}_1^*\widetilde{H}_1 & -\widetilde{H}_1^*B_1 & 0 \\ -B_1^*\widetilde{H}_1 & \alpha e^{-\kappa_1\tau_1}B_1^*B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta}e^{\kappa_2\tau_2}\widetilde{H}_2^*\widetilde{H}_2 & 0 & -\widetilde{H}_2^*B_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -B_2^*\widetilde{H}_2 & 0 & \beta e^{-\kappa_2\tau_2}B_2^*B_2 \end{pmatrix}$$
$$\geq \begin{pmatrix} R - M_1 - M_2 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\kappa_1\tau_1}M_1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\kappa_2\tau_2}M_2 \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Тем самым, наша задача свелась к тому, чтобы показать положительную определенность матрицы R. В этом случае легко подобрать матрицы M_1 и M_2 так, чтобы матрица C также была положительно определенной.

Учитывая явный вид матриц A, B_1, B_2, H, $\widetilde{H}_1$ и $\widetilde{H}_2$, получим следующие формулы для элементов матрицы R:

$$\begin{cases} r_{11} = 2a_{11}h_{11} - \alpha b_{11}^2 - \beta b_{21}^2 - \dfrac{1}{\alpha}e^{\kappa_1\tau_1}h_{11}^2 - \dfrac{1}{\beta}e^{\kappa_2\tau_2}h_{12}^2, \\ r_{12} = a_{12}h_{11} + (a_{11} + a_{22})h_{12} - \beta b_{21}b_{22} - \dfrac{1}{\alpha}e^{\kappa_1\tau_1}h_{11}h_{12} - \dfrac{1}{\beta}e^{\kappa_2\tau_2}h_{12}h_{22}, \\ r_{22} = 2a_{12}h_{12} + 2a_{22}h_{22} - \beta b_{22}^2 - \dfrac{1}{\alpha}e^{\kappa_1\tau_1}h_{12}^2 - \dfrac{1}{\beta}e^{\kappa_2\tau_2}h_{22}^2. \end{cases} \tag{2.17}$$

Заметим, что в силу обозначений величин a_{22} и b_{22} имеет место неравенство $a_{22} \geq b_{22}$. Далее мы будем рассматривать два случая: $a_{22} > b_{22}$ и $a_{22} = b_{22}$.

Случай $a_{22} > b_{22}$.

В этом случае положим $h_{12} = 0$, тогда

$$\begin{cases} r_{11} = 2a_{11}h_{11} - \alpha b_{11}^2 - \beta b_{21}^2 - \dfrac{1}{\alpha} e^{\kappa_1 \tau_1} h_{11}^2, \\ r_{12} = a_{12}h_{11} - \beta b_{21} b_{22}, \\ r_{22} = 2a_{22}h_{22} - \beta b_{22}^2 - \dfrac{1}{\beta} e^{\kappa_2 \tau_2} h_{22}^2. \end{cases}$$

Величину α выберем так, чтобы величина r_{11} принимала наибольшее значение. Тогда

$$\alpha = \frac{h_{11}}{b_{11}} e^{\kappa_1 \tau_1 / 2}.$$

Величину h_{22} выберем так, чтобы величина r_{22} принимала наибольшее значение. Тогда

$$h_{22} = \beta a_{22} e^{-\kappa_2 \tau_2}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} r_{11} = 2(a_{11} - b_{11} e^{\kappa_1 \tau_1/2}) h_{11} - \beta b_{21}^2, \\ r_{12} = a_{12} h_{11} - \beta b_{21} b_{22}, \\ r_{22} = \beta (a_{22}^2 e^{-\kappa_2 \tau_2} - b_{22}^2). \end{cases}$$

Определитель матрицы R имеет вид:

$$r_{11} r_{22} - r_{12}^2 = \beta (a_{22}^2 e^{-\kappa_2 \tau_2} - b_{22}^2) \Big(2(a_{11} - b_{11} e^{\kappa_1 \tau_1/2}) h_{11} - \beta b_{21}^2 \Big) - \Big(a_{12} h_{11} - \beta b_{21} b_{22} \Big)^2$$

$$= 2\beta \Big((a_{11} - b_{11} e^{\kappa_1 \tau_1/2})(a_{22}^2 e^{-\kappa_2 \tau_2} - b_{22}^2) + a_{12} b_{21} b_{22} \Big) h_{11} - \beta^2 a_{22}^2 b_{21}^2 e^{-\kappa_2 \tau_2} - a_{12}^2 h_{11}^2.$$

Полагая

$$h_{11} = \frac{\beta}{a_{12}^2} \Big((a_{11} - b_{11} e^{\kappa_1 \tau_1/2})(a_{22}^2 e^{-\kappa_2 \tau_2} - b_{22}^2) + a_{12} b_{21} b_{22} \Big),$$

будем иметь

$$r_{11} r_{22} - r_{12}^2 = \frac{\beta^2}{a_{12}^2} \left[\Big((a_{11} - b_{11} e^{\kappa_1 \tau_1/2})(a_{22}^2 e^{-\kappa_2 \tau_2} - b_{22}^2) + a_{12} b_{21} b_{22} \Big)^2 - (a_{12} b_{21} a_{22})^2 e^{-\kappa_2 \tau_2} \right].$$

Элементы матрицы R преобразуются к виду

$$\begin{cases} r_{11} = \dfrac{\beta}{a_{12}^2}(a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})^2(a_{22}^2 e^{-\kappa_2\tau_2} - b_{22}^2) \\ + \dfrac{\beta}{a_{12}^2}\left[(a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})^2 a_{22}^2 e^{-\kappa_2\tau_2} - \Big((a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})b_{22} - a_{12}b_{21}\Big)^2\right], \\ r_{12} = \dfrac{\beta}{a_{12}}(a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})(a_{22}^2 e^{-\kappa_2\tau_2} - b_{22}^2), \\ r_{22} = \beta(a_{22}^2 e^{-\kappa_2\tau_2} - b_{22}^2). \end{cases}$$

Для определенности положим $\beta = 1$. Положительная определенность матрицы R эквивалентна условиям

$$\begin{cases} a_{22}e^{-\kappa_2\tau_2/2} > b_{22}, \\ (a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})(a_{22}e^{-\kappa_2\tau_2/2} + b_{22}) > a_{12}b_{21}. \end{cases} \tag{2.18}$$

В силу условия $a_{22} > b_{22}$ и условия (2.7) можно подобрать величины $\kappa_1 > 0$ и $\kappa_2 > 0$, при которых эти неравенства будут выполнены. Итак, окончательно получим

$$\alpha = \frac{e^{\kappa_1\tau_1/2}}{a_{12}^2 b_{11}}\Big((a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})(a_{22}^2 e^{-\kappa_2\tau_2} - b_{22}^2) + a_{12}b_{21}b_{22}\Big) > 0, \quad \beta = 1, \tag{2.19}$$

$$h_{11} = \frac{1}{a_{12}^2}\Big((a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})(a_{22}^2 e^{-\kappa_2\tau_2} - b_{22}^2) + a_{12}b_{21}b_{22}\Big) > 0, \tag{2.20}$$

$$h_{12} = 0, \quad h_{22} = a_{22}e^{-\kappa_2\tau_2} > 0. \tag{2.21}$$

В случае $a_{22} > b_{22}$ модифицированный функционал Ляпунова – Красовского построен, при этом выполнены условия (2.11)–(2.13).

Случай $a_{22} = b_{22}$.

Воспользуемся формулами, полученными в предыдущем случае. Используя (2.19)–(2.21) и учитывая, что $a_{22} = b_{22}$, положим

$$\alpha = \frac{b_{22}e^{\kappa_1\tau_1/2}}{a_{12}^2 b_{11}}\Big(a_{12}b_{21} - (a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})b_{22}(1 - e^{-\kappa_2\tau_2})\Big) > 0, \quad \beta = 1, \tag{2.22}$$

$$h_{11} = \frac{b_{22}}{a_{12}^2}\Big(a_{12}b_{21} - (a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})b_{22}(1 - e^{-\kappa_2\tau_2})\Big) > 0, \quad h_{22} = b_{22}e^{-\kappa_2\tau_2} > 0. \tag{2.23}$$

Подставим эти величины в (2.17), учитывая, что $a_{22} = b_{22}$:

$$\begin{cases} r_{11} = \dfrac{b_{21}}{a_{12}}\Big(2(a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})b_{22} - a_{12}b_{21}\Big) \\ -2\dfrac{b_{22}^2}{a_{12}^2}(a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})^2(1 - e^{-\kappa_2\tau_2}) - e^{\kappa_2\tau_2}h_{12}^2, \\ r_{12} = (a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})\left(h_{12} - \dfrac{b_{22}^2}{a_{12}}(1 - e^{-\kappa_2\tau_2})\right), \\ r_{22} = 2a_{12}h_{12} - \dfrac{a_{12}^2 b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2}h_{12}^2}{b_{22}\Big(a_{12}b_{21} - (a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})b_{22}(1 - e^{-\kappa_2\tau_2})\Big)} - b_{22}^2(1 - e^{-\kappa_2\tau_2}). \end{cases}$$

Полагая

$$h_{12} = \frac{b_{22}^2}{a_{12}}(1 - e^{-\kappa_2\tau_2}), \tag{2.24}$$

будем иметь

$$\begin{cases} r_{11} = \dfrac{b_{21}}{a_{12}}\Big(2(a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})b_{22} - a_{12}b_{21}\Big) \\ -\dfrac{b_{22}^2}{a_{12}^2}(1 - e^{-\kappa_2\tau_2})\Big(2(a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})^2 + b_{22}^2(e^{\kappa_2\tau_2} - 1)\Big), \\ r_{12} = 0, \\ r_{22} = \dfrac{\Big(a_{12}b_{21} - a_{11}b_{22}(1 - e^{-\kappa_2\tau_2})\Big)b_{22}^2(1 - e^{-\kappa_2\tau_2})}{\Big(a_{12}b_{21} - (a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})b_{22}(1 - e^{-\kappa_2\tau_2})\Big)}. \end{cases}$$

Положительная определенность матрицы R эквивалентна условиям

$$\begin{cases} b_{22}^2(1 - e^{-\kappa_2\tau_2})\Big(2(a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})^2 + b_{22}^2(e^{\kappa_2\tau_2} - 1)\Big) \\ < a_{12}b_{21}\Big(2(a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})b_{22} - a_{12}b_{21}\Big), \\ a_{11}b_{22}(1 - e^{-\kappa_2\tau_2}) < a_{12}b_{21}. \end{cases} \tag{2.25}$$

В силу условия $a_{22} = b_{22}$ и условия (2.7) можно подобрать величины $\kappa_1 > 0$ и $\kappa_2 > 0$, при которых эти неравенства будут выполнены.

Также нетрудно видеть, что при выполнении условий (2.25) матрица H является положительно определенной. Действительно, из (2.15) вытекает, что

$$HA + A^*H = -R - \alpha B_1^*B_1 - \beta B_2^*B_2 - \frac{1}{\alpha}e^{\kappa_1\tau_1}\widetilde{H}_1^*\widetilde{H}_1 - \frac{1}{\beta}e^{\kappa_2\tau_2}\widetilde{H}_2^*\widetilde{H}_2 < 0,$$

т. е. матрица $H = H^*$ является решением матричного уравнения Ляпунова $HA + A^*H = -S$, где $S = S^* > 0$. Поскольку все собственные значения матрицы A содержатся в левой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$, отсюда следует положительная определенность матрицы H (см., например, [1], гл. 1, § 4]).

Итак, в случае $a_{22} = b_{22}$ модифицированный функционал Ляпунова – Красовского построен, при этом условия (2.11)–(2.13) также выполняются.

3. Оценки для модифицированного функционала Ляпунова – Красовского

В этом параграфе мы будем предполагать, что выполнены условия (2.1) и (2.7). Как уже отмечалось, из этих условий вытекает асимптотическая устойчивость положения равновесия (x_0, y_0) системы (2.2). Также при выполнении этих условий в предыдущем параграфе был построен модифицированный функционал Ляпунова – Красовского, с использованием которого устанавливается асимптотическая устойчивость. В данном параграфе мы получим оценки для этого функционала, из которых будут следовать оценки решений системы (2.2), характеризующие скорость сходимости к положению равновесия (x_0, y_0) при $t \to \infty$.

Рассмотрим систему (2.2), для которой зададим начальные условия:

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau_{\max}, 0], \quad x(+0) = \varphi(0), \\ y(t) = \psi(t), \quad t \in [-\tau_{\max}, 0], \quad y(+0) = \psi(0), \end{cases} \tag{3.1}$$

где

$$\tau_{\max} = \max\{\tau_1, \tau_2\},$$

$\varphi(t)$, $\psi(t)$ — заданные неотрицательные непрерывные функции. Хорошо известно, что решение начальной задачи (2.2), (3.1) существует и единственно, при этом, как было отмечено в [20], решение будет определено при всех $t \geq 0$, и более того, будут выполнены неравенства $x(t) \geq 0$ и $y(t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$. Также можно показать, что компоненты решения начальной задачи будут ограничены сверху при всех $t \geq 0$ [13].

Как было отмечено в предыдущем параграфе, задача об устойчивости положения равновесия (x_0, y_0) системы (2.2) сводится к задаче об устойчивости нулевого решения при помощи замены (2.3). При этой замене начальная задача (2.2), (3.1) преобразуется к начальной задаче для системы (2.4):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\widetilde{\boldsymbol{y}}(t) = A\widetilde{\boldsymbol{y}}(t) + B_1\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_1) + B_2\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2) + F_0(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)) + G(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)), \\ \\ \widetilde{\boldsymbol{y}}(t) = \widetilde{\boldsymbol{\psi}}(t), \quad t \in [-\tau_{\max}, 0], \quad \widetilde{\boldsymbol{y}}(+0) = \widetilde{\boldsymbol{\psi}}(0), \end{cases} \tag{3.2}$$

где

$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}(t) = \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}(t) \\ \widetilde{\psi}(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{\psi}(t) - \boldsymbol{y}_0, \quad \boldsymbol{\psi}(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Рассмотрим модифицированный функционал Ляпунова – Красовского

$$V(t,\widetilde{\boldsymbol{y}}) = \langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau_1}^{t} \langle K_1(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\rangle\, ds$$

$$+\int\limits_{t-\tau_2}^{t} \langle K_2(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\rangle\, ds, \tag{3.4}$$

где

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad K_1(s) = \alpha e^{-\kappa_1 s} B_1^* B_1, \quad \alpha, \kappa_1 > 0,$$

$$K_2(s) = e^{-\kappa_2 s}(\beta B_2^* B_2 + M_2), \quad M_2 = M_2^* > 0, \quad \beta, \kappa_2 > 0.$$

Величины h_{11}, h_{12}, h_{22}, α, β, κ_1, κ_2 определены в предыдущем параграфе (формулы (2.18)–(2.21) в случае $a_{22} > b_{22}$ и формулы (2.22)–(2.25) в случае $a_{22} = b_{22}$), матрица M_2 будет определена ниже.

Для формулировки результатов нам потребуются следующие обозначения. Пусть $c > 0$ — наибольшее число такое, что выполнено неравенство

$$\langle R\widetilde{\boldsymbol{y}},\widetilde{\boldsymbol{y}}\rangle \geq c\,\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}},\widetilde{\boldsymbol{y}}\rangle\,, \quad \widetilde{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^2, \tag{3.5}$$

где матрица $R > 0$ определена в (2.15). Нетрудно проверить, что величина $c > 0$ определяется по формуле

$$c = \frac{1}{(h_{11}h_{22} - h_{12}^2)}\Bigg(\frac{1}{2}(h_{11}r_{22} + h_{22}r_{11} - 2h_{12}r_{12})$$

$$-\sqrt{\frac{1}{4}(h_{11}r_{22} - h_{22}r_{11})^2 + (h_{11}r_{12} - h_{12}r_{11})(h_{22}r_{12} - h_{12}r_{22})}\Bigg).$$

Далее, пусть $\theta > 0$ такое, что

$$2ne^{-c_2\tau_2}\mu\sqrt{h_{22}}\,\theta\, e^{\kappa_2\tau_2/2} < c, \tag{3.6}$$

где

$$\mu = \frac{1}{(h_{11}h_{22} - h_{12}^2)}\Bigg(\frac{1}{2}(h_{11}p_{22} + h_{22}p_{11} + 2|h_{12}|p_{12})$$

$$+\sqrt{\frac{1}{4}(h_{11}p_{22} - h_{22}p_{11})^2 + (h_{11}p_{12} + |h_{12}|p_{11})(h_{22}p_{12} + |h_{12}|p_{22})}\Bigg), \tag{3.7}$$

$$p_{11} = \frac{bk_1y_0(1 + k_2y_0)}{(1 + k_1x_0 + k_2y_0)^2}, \tag{3.8}$$

$$p_{12} = \frac{b\Big(1 + k_1x_0 + k_2y_0 + 2k_1x_0k_2y_0\Big)}{2(1 + k_1x_0 + k_2y_0)^2}, \tag{3.9}$$

$$p_{22} = \frac{bk_2x_0(1 + k_1x_0)}{(1 + k_1x_0 + k_2y_0)^2}. \tag{3.10}$$

Положим

$$M_2 = m_2H, \quad m_2 = ne^{-c_2\tau_2}\mu\sqrt{h_{22}}\,\theta\, e^{\kappa_2\tau_2/2}. \tag{3.11}$$

Также обозначим

$$\varepsilon = \min\{c - 2ne^{-c_2\tau_2}\mu\sqrt{h_{22}}\,\theta\, e^{\kappa_2\tau_2/2}, \kappa_1, \kappa_2\} > 0, \quad q = 2\nu\sqrt{h_{11}}, \tag{3.12}$$

где

$$\nu = \frac{1}{(h_{11}h_{22} - h_{12}^2)}\left(\frac{1}{2}(h_{11}q_{22} + h_{22}q_{11} + 2|h_{12}|q_{12})\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{1}{4}(h_{11}q_{22} - h_{22}q_{11})^2 + (h_{11}q_{12} + |h_{12}|q_{11})(h_{22}q_{12} + |h_{12}|q_{22})}\right), \tag{3.13}$$

$$q_{11} = a + p_{11}, \quad q_{12} = p_{12}, \quad q_{22} = p_{22}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (2.1) *и* (2.7). *Тогда для решения* $\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)$ *начальной задачи* (3.2) *с начальными данными, удовлетворяющими условиям*

$$\widetilde{\varphi}(t) \geq -x_0, \quad \widetilde{\psi}(t) \geq -y_0, \quad t \in [-\tau_{\max}, 0], \tag{3.14}$$

$$\sqrt{\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{\psi}}(t), \widetilde{\boldsymbol{\psi}}(t)\right\rangle} \leq \theta, \quad t \in [-\tau_2, 0], \tag{3.15}$$

$$\sqrt{V(0,\widetilde{\boldsymbol{\psi}})} < \frac{\varepsilon}{q}, \quad \frac{\sqrt{V(0,\widetilde{\boldsymbol{\psi}})}}{\left(1 - \frac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0,\widetilde{\boldsymbol{\psi}})}\right)} \leq \theta, \tag{3.16}$$

справедлива оценка

$$\sqrt{\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\rangle} \leq \frac{\sqrt{V(0,\widetilde{\boldsymbol{\psi}})}}{\left(1 - \frac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0,\widetilde{\boldsymbol{\psi}})}\right)}\, e^{-\varepsilon t/2}, \quad t > 0. \tag{3.17}$$

Доказательство. Рассмотрим модифицированный функционал Ляпунова – Красовского (3.4). Дифференцируя его вдоль решения начальной задачи (3.2), получим

$$\frac{d}{dt}V(t,\widetilde{\boldsymbol{y}}) = \left\langle H\frac{d}{dt}\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\right\rangle + \left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \frac{d}{dt}\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\right\rangle$$

$$+\langle K_1(0)\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\rangle-\langle K_1(\tau_1)\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_1),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_1)\rangle+\int\limits_{t-\tau_1}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K_1(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\right\rangle ds$$

$$+\langle K_2(0)\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\rangle-\langle K_2(\tau_2)\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)\rangle+\int\limits_{t-\tau_2}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K_2(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\right\rangle ds$$

$$=-\left\langle C\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\\ \widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_1)\\ \widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\\ \widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_1)\\ \widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)\end{pmatrix}\right\rangle+2\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),F_0(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t))\rangle+2\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),G(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2))\rangle$$

$$-\kappa_1\int\limits_{t-\tau_1}^{t}\langle K_1(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\rangle\,ds-\kappa_2\int\limits_{t-\tau_2}^{t}\langle K_2(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\rangle\,ds,$$

где матрица $C>0$ определена в (2.13). Проводя те же самые рассуждения, что и при получении неравенства (2.16), мы приходим к следующей оценке

$$\frac{d}{dt}V(t,\widetilde{\boldsymbol{y}})\leq-\langle(R-M_2)\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\rangle-e^{-\kappa_2\tau_2}\langle M_2\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)\rangle$$

$$+2\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),F_0(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t))\rangle+2\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),G(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2))\rangle$$

$$-\kappa_1\int\limits_{t-\tau_1}^{t}\langle K_1(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\rangle\,ds-\kappa_2\int\limits_{t-\tau_2}^{t}\langle K_2(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\rangle\,ds.$$

Учитывая неравенство (3.5), будем иметь

$$\frac{d}{dt}V(t,\widetilde{\boldsymbol{y}})\leq-c\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\rangle+2\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),F_0(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t))\rangle$$

$$+2\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),G(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2))\rangle+\langle M_2\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\rangle-e^{-\kappa_2\tau_2}\langle M_2\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)\rangle$$

$$-\kappa_1\int\limits_{t-\tau_1}^{t}\langle K_1(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\rangle\,ds-\kappa_2\int\limits_{t-\tau_2}^{t}\langle K_2(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\rangle\,ds.$$

Оценим $2\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),F_0(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t))\rangle$. Учитывая явный вид вектор-функции $F_0(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t))$, получим оценку

$$2\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),F_0(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t))\rangle\leq2\sqrt{\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\rangle}\sqrt{\langle HF_0(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)),F_0(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t))\rangle}$$

$$=2\sqrt{\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\rangle}\sqrt{h_{11}}|a\widetilde{x}^2(t)+h(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t))|.$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условий (3.14) компоненты решения начальной задачи (3.2) будут удовлетворять условиям $\widetilde{x}(t)\geq-x_0$ и $\widetilde{y}(t)\geq-y_0$ при всех $t \geq 0$. Поэтому из явного представления (2.6) функции $h(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t))$ вытекает следующее неравенство

$$|a\widetilde{x}^2(t) + h(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t))| \leq (a + p_{11})\widetilde{x}^2(t) + 2p_{12}|\widetilde{x}(t)||\widetilde{y}(t)| + p_{22}\widetilde{y}^2(t)$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} a + p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\widetilde{x}(t)| \\ |\widetilde{y}(t)| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |\widetilde{x}(t)| \\ |\widetilde{y}(t)| \end{pmatrix} \right\rangle \leq \nu \left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t) \right\rangle,$$

где величины p_{11}, p_{12}, p_{22} определены в (3.8)–(3.10), ν определено в (3.13). Следовательно,

$$2 \left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), F_0(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)) \right\rangle \leq 2\nu\sqrt{h_{11}} \left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t) \right\rangle^{3/2} \leq qV^{3/2}(t, \widetilde{\boldsymbol{y}}),$$

где q определено в (3.12). Отсюда получим оценку на производную функционала $V(t, \widetilde{\boldsymbol{y}})$:

$$\frac{d}{dt}V(t, \widetilde{\boldsymbol{y}}) \leq -c \left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t) \right\rangle + qV^{3/2}(t, \widetilde{\boldsymbol{y}})$$

$$+2 \left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), G(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t - \tau_2)) \right\rangle + \left\langle M_2\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t) \right\rangle - e^{-\kappa_2\tau_2} \left\langle M_2\widetilde{\boldsymbol{y}}(t - \tau_2), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t - \tau_2) \right\rangle$$

$$-\kappa_1 \int\limits_{t-\tau_1}^{t} \left\langle K_1(t - s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s), \widetilde{\boldsymbol{y}}(s) \right\rangle ds - \kappa_2 \int\limits_{t-\tau_2}^{t} \left\langle K_2(t - s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s), \widetilde{\boldsymbol{y}}(s) \right\rangle ds.$$

Теперь оценим $2 \left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), G(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t - \tau_2)) \right\rangle$. Имеем

$$2 \left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), G(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t - \tau_2)) \right\rangle \leq 2\sqrt{\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t) \right\rangle}\sqrt{\left\langle HG(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t - \tau_2)), G(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t - \tau_2)) \right\rangle}$$

$$= 2\sqrt{\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t) \right\rangle}\sqrt{h_{22}}\; ne^{-c_2\tau_2}|h(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t - \tau_2))|.$$

Учитывая неравенства $\widetilde{x}(t) \geq -x_0$, $\widetilde{y}(t) \geq -y_0$ и представление (2.6), получим оценку

$$|h(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t - \tau_2))| \leq p_{11}\widetilde{x}^2(t - \tau_2) + 2p_{12}|\widetilde{x}(t - \tau_2)||\widetilde{y}(t - \tau_2)| + p_{22}\widetilde{y}^2(t - \tau_2)$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\widetilde{x}(t - \tau_2)| \\ |\widetilde{y}(t - \tau_2)| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |\widetilde{x}(t - \tau_2)| \\ |\widetilde{y}(t - \tau_2)| \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mu \left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t - \tau_2), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t - \tau_2) \right\rangle,$$

где величины p_{11}, p_{12}, p_{22} определены в (3.8)–(3.10), μ определено в (3.7). Следовательно,

$$2 \left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), G(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t - \tau_2)) \right\rangle \leq 2ne^{-c_2\tau_2}\mu\sqrt{h_{22}}\sqrt{\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t) \right\rangle} \left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t - \tau_2), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t - \tau_2) \right\rangle.$$

Отсюда получим оценку на производную функционала $V(t, \widetilde{\boldsymbol{y}})$:

$$\frac{d}{dt}V(t, \widetilde{\boldsymbol{y}}) \leq -c \left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t) \right\rangle + qV^{3/2}(t, \widetilde{\boldsymbol{y}})$$

$$+2ne^{-c_2\tau_2}\mu\sqrt{h_{22}}\sqrt{\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t) \right\rangle} \left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t - \tau_2), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t - \tau_2) \right\rangle$$

$$+\left\langle M_2\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\right\rangle - e^{-\kappa_2\tau_2}\left\langle M_2\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)\right\rangle$$
$$-\kappa_1\int\limits_{t-\tau_1}^{t}\left\langle K_1(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\right\rangle ds-\kappa_2\int\limits_{t-\tau_2}^{t}\left\langle K_2(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\right\rangle ds. \tag{3.18}$$

Вначале предположим, что $t\in[0,\tau_2]$. В этом случае в силу неравенства (3.15) будем иметь оценку
$$\sqrt{\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)\right\rangle}\le\theta. \tag{3.19}$$
Учитывая данное неравенство и определение (3.11), из (3.18) получим оценку
$$\frac{d}{dt}V(t,\widetilde{\boldsymbol{y}})\le -c\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\right\rangle+qV^{3/2}(t,\widetilde{\boldsymbol{y}})$$
$$+ne^{-c_2\tau_2}\mu\sqrt{h_{22}}\,\theta\left(2\sqrt{\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\right\rangle}\sqrt{\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)\right\rangle}\right.$$
$$\left.+e^{\kappa_2\tau_2/2}\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\right\rangle-e^{-\kappa_2\tau_2/2}\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)\right\rangle\right)$$
$$-\kappa_1\int\limits_{t-\tau_1}^{t}\left\langle K_1(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\right\rangle ds-\kappa_2\int\limits_{t-\tau_2}^{t}\left\langle K_2(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\right\rangle ds$$
$$\le-\left(c-2ne^{-c_2\tau_2}\mu\sqrt{h_{22}}\,\theta\,e^{\kappa_2\tau_2/2}\right)\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\right\rangle+qV^{3/2}(t,\widetilde{\boldsymbol{y}})$$
$$-\kappa_1\int\limits_{t-\tau_1}^{t}\left\langle K_1(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\right\rangle ds-\kappa_2\int\limits_{t-\tau_2}^{t}\left\langle K_2(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\right\rangle ds.$$
Отсюда нетрудно получить оценку
$$\frac{d}{dt}V(t,\widetilde{\boldsymbol{y}})\le-\varepsilon V(t,\widetilde{\boldsymbol{y}})+qV^{3/2}(t,\widetilde{\boldsymbol{y}}),$$
где ε определено в (3.12). Из данной оценки, используя неравенство Гронуолла (см., например, [15]), установим оценку
$$V(t,\widetilde{\boldsymbol{y}})\le\frac{V(0,\widetilde{\boldsymbol{\psi}})\,e^{-\varepsilon t}}{\left(1-\dfrac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0,\widetilde{\boldsymbol{\psi}})}\right)^2}.$$
Учитывая определение (3.4) функционала $V(t,\widetilde{\boldsymbol{y}})$, отсюда непосредственно вытекает (3.17). Тем самым, при $t\in[0,\tau_2]$ оценка (3.17) доказана.

Далее предположим, что $t\in[\tau_2,2\tau_2]$. В этом случае из неравенства (3.17), установленного при $t\in[0,\tau_2]$, и из неравенства (3.16) вытекает оценка (3.19). Тогда, повторяя рассуждения, приведенные выше, из (3.18) получим оценку (3.17) при $t\in[\tau_2,2\tau_2]$.

Оценка (3.17) при $t\in[m\tau_2,(m+1)\tau_2]$, $m\in\mathbb{N}$, легко устанавливается по индукции.

Теорема доказана. □

Теперь приведем результат для системы (2.2), непосредственно вытекающий из теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (2.1) *и* (2.7). *Тогда для решения* $(x(t), y(t))^{\mathrm{T}}$ *начальной задачи* (2.2), (3.1) *с начальными данными, удовлетворяющими условиям*

$$\varphi(t) \geq 0, \quad \psi(t) \geq 0, \quad t \in [-\tau_{\max}, 0], \tag{3.20}$$

$$\sqrt{\langle H(\boldsymbol{\psi}(t) - \boldsymbol{y}_0), (\boldsymbol{\psi}(t) - \boldsymbol{y}_0)\rangle} \leq \theta, \quad t \in [-\tau_2, 0], \tag{3.21}$$

$$\sqrt{V(0, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{y}_0)} < \frac{\varepsilon}{q}, \qquad \frac{\sqrt{V(0, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{y}_0)}}{\left(1 - \dfrac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{y}_0)}\right)} \leq \theta, \tag{3.22}$$

где θ *определено в* (3.6), ε *и* q *определены в* (3.12), *справедливы оценки*

$$|x(t) - x_0| \leq \left(\frac{h_{22}}{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{V(0, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{y}_0)}}{\left(1 - \dfrac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{y}_0)}\right)}\, e^{-\varepsilon t/2}, \quad t > 0, \tag{3.23}$$

$$|y(t) - y_0| \leq \left(\frac{h_{11}}{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{V(0, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{y}_0)}}{\left(1 - \dfrac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{y}_0)}\right)}\, e^{-\varepsilon t/2}, \quad t > 0. \tag{3.24}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 3. Из оценки (3.17) и из неравенств

$$\widetilde{x}^2(t) \leq \frac{h_{22}}{h_{11}h_{22} - h_{12}^2} \left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\right\rangle, \quad \widetilde{y}^2(t) \leq \frac{h_{11}}{h_{11}h_{22} - h_{12}^2} \left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\right\rangle$$

получим

$$|\widetilde{x}(t)| \leq \left(\frac{h_{22}}{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{V(0, \widetilde{\boldsymbol{\psi}})}}{\left(1 - \dfrac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0, \widetilde{\boldsymbol{\psi}})}\right)}\, e^{-\varepsilon t/2},$$

$$|\widetilde{y}(t)| \leq \left(\frac{h_{11}}{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{V(0, \widetilde{\boldsymbol{\psi}})}}{\left(1 - \dfrac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0, \widetilde{\boldsymbol{\psi}})}\right)}\, e^{-\varepsilon t/2}.$$

Учитывая замену (2.3) и обозначения (3.3), эти неравенства совпадают с (3.23), (3.24).

Теорема доказана. □

4. Оценки решений системы (1.1)

В данном параграфе мы изучим асимптотические свойства решений системы (1.1). Мы укажем множество начальных вектор-функций, при которых решения сходятся к положению равновесия (x_0, u_0, y_0, v_0), и получим оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности к данному положению равновесия. Как и ранее, мы будем предполагать, что выполнены условия (2.1) и (2.7), при которых положение равновесия (x_0, u_0, y_0, v_0) является асимптотически устойчивым (следствие теоремы 1).

Для системы (1.1) вместе с начальными условиями (3.1) на функции $x(t)$ и $y(t)$ зададим начальные условия на функции $u(t)$ и $v(t)$:

$$u(0) = u^{(0)}, \quad v(0) = v^{(0)}. \tag{4.1}$$

Решение начальной задачи (1.1), (3.1), (4.1) существует и единственно, при этом, если выполены условия (3.20) и условия

$$u^{(0)} \geq \int_{-\tau_1}^{0} re^{c_1 s}\varphi(s)ds, \quad v^{(0)} \geq \int_{-\tau_2}^{0} ne^{c_2 s}f(\varphi(s), \psi(s))ds, \tag{4.2}$$

то все компоненты решения будут неотрицательны (см., например, [13]).

Теперь перейдем к изучению асимптотических свойств решений системы (1.1) в окрестности положения равновесия (x_0, u_0, y_0, v_0). Очевидно, что при выполнении условий теоремы 4 для первой и третьей компонент решения $x(t)$ и $y(t)$ начальной задачи (1.1), (3.1), (4.1) справедливы оценки (3.23) и (3.24), характеризующие скорость стабилизации на бесконечности. Осталось получить оценки на $u(t)$ и $v(t)$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (2.1) *и* (2.7). *Тогда для второй и четвертой компонент решения* $(x(t), u(t), y(t), v(t))^{\mathrm{T}}$ *начальной задачи* (1.1), (3.1), (4.1) *с начальными данными, удовлетворяющими условиям* (3.20)–(3.22), (4.2), *справедливы оценки:*

1) если $t \in [0, \tau_1]$, *то*

$$|u(t) - u_0| \leq e^{-c_1 t}\left|u^{(0)} - u_0 - \int_{-\tau_1}^{t-\tau_1} re^{c_1 s}(\varphi(s) - x_0)ds\right|$$

$$+e^{-c_1 t}\left(\int_0^t re^{(c_1-(\varepsilon/2))s}ds\right)\left(\frac{h_{22}}{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}\right)^{1/2}\Theta(\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{y}_0), \tag{4.3}$$

где ε *определено в* (3.12),

$$\Theta(\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{y}_0) = \frac{\sqrt{V(0, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{y}_0)}}{\left(1 - \dfrac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{y}_0)}\right)}; \tag{4.4}$$

2) если $t \geq \tau_1$, *то*

$$|u(t) - u_0| \leq \left(u^{(0)} - u_0 - \int_{-\tau_1}^{0} re^{c_1 s}(\varphi(s) - x_0)ds\right)e^{-c_1 t}$$

$$+\left(\int_{-\tau_1}^{0} re^{(c_1-(\varepsilon/2))\xi}d\xi\right)\left(\frac{h_{22}}{h_{11}h_{22}-h_{12}^2}\right)^{1/2}\Theta(\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{y}_0)\,e^{-\varepsilon t/2}; \tag{4.5}$$

3) если $t\in[0,\tau_2]$, *то*

$$|v(t)-v_0|\le e^{-c_2t}\left|v^{(0)}-v_0-\int_{-\tau_2}^{t-\tau_2} ne^{c_2s}(f(\varphi(s),\psi(s))-f(x_0,y_0))ds\right|$$

$$+e^{-c_2t}\left(\int_0^t ne^{(c_2-(\varepsilon/2))s}ds\right)\omega\,\Theta(\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{y}_0)+e^{-c_2t}\left(\int_0^t ne^{(c_2-\varepsilon)s}ds\right)\sigma\,\Theta^2(\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{y}_0), \tag{4.6}$$

где

$$\omega=\frac{b\Big[y_0(1+k_2y_0)\sqrt{h_{22}}+x_0(1+k_1x_0)\sqrt{h_{11}}\Big]}{(1+k_1x_0+k_2y_0)\sqrt{h_{11}h_{22}-h_{12}^2}},\quad \sigma=\frac{b\sqrt{h_{11}h_{22}}}{(h_{11}h_{22}-h_{12}^2)}; \tag{4.7}$$

4) если $t\ge\tau_2$, *то*

$$|v(t)-v_0|\le\left(v^{(0)}-v_0-\int_{-\tau_2}^{0} ne^{c_2s}(f(\varphi(s),\psi(s))-f(x_0,y_0))ds\right)e^{-c_2t}$$

$$+\left(\int_{-\tau_2}^{0} ne^{(c_2-(\varepsilon/2))\xi}d\xi\right)\omega\,\Theta(\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{y}_0)\,e^{-\varepsilon t/2}+\left(\int_{-\tau_2}^{0} ne^{(c_2-\varepsilon)\xi}d\xi\right)\sigma\,\Theta^2(\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{y}_0)\,e^{-\varepsilon t}. \tag{4.8}$$

Доказательство. Из второго уравнения системы (1.1), используя метод вариации произвольной постоянной, нетрудно получить

$$u(t)=e^{-c_1t}\left(u(0)-\int_{-\tau_1}^{t-\tau_1} re^{c_1s}x(s)ds\right)+e^{-c_1t}\int_0^t re^{c_1s}x(s)ds$$

$$=e^{-c_1t}\left(u(0)-\int_{-\tau_1}^{0} re^{c_1s}x(s)ds\right)+e^{-c_1t}\int_{t-\tau_1}^{t} re^{c_1s}x(s)ds.$$

Следовательно,

$$u(t)-u_0=e^{-c_1t}\left(u(0)-u_0-\int_{-\tau_1}^{0} re^{c_1s}(x(s)-x_0)ds\right)$$

$$+e^{-c_1 t}\int\limits_{t-\tau_1}^{t} re^{c_1 s}(x(s)-x_0)ds.$$

Отсюда, используя неравенство (3.23), с учетом обозначения (4.4) получим оценки (4.3) и (4.5).

Из четвертого уравнения системы (1.1), используя метод вариации произвольной постоянной, нетрудно получить

$$v(t)=e^{-c_2 t}\left(v(0)-\int\limits_{-\tau_2}^{t-\tau_2} ne^{c_2 s}f(x(s),y(s))ds\right)+e^{-c_2 t}\int\limits_{0}^{t} ne^{c_2 s}f(x(s),y(s))ds$$

$$=e^{-c_2 t}\left(v(0)-\int\limits_{-\tau_2}^{0} ne^{c_2 s}f(x(s),y(s))ds\right)+e^{-c_2 t}\int\limits_{t-\tau_2}^{t} ne^{c_2 s}f(x(s),y(s))ds.$$

Следовательно,

$$v(t)-v_0=e^{-c_2 t}\left(v(0)-v_0-\int\limits_{-\tau_2}^{0} ne^{c_2 s}(f(x(s),y(s))-f(x_0,y_0))ds\right)$$

$$+e^{-c_2 t}\int\limits_{t-\tau_2}^{t} ne^{c_2 s}(f(x(s),y(s))-f(x_0,y_0))ds. \tag{4.9}$$

Учитывая явный вид функции $f(x,y)$, получим

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x_0+\widetilde{x},y_0+\widetilde{y})-f(x_0,y_0)$$

$$=\frac{b\Big[y_0(1+k_2y_0)\widetilde{x}+x_0(1+k_1x_0)\widetilde{y}+(1+k_1x_0+k_2y_0)\widetilde{x}\widetilde{y}\Big]}{[1+k_1x_0+k_2y_0][1+k_1(x_0+\widetilde{x})+k_2(y_0+\widetilde{y})]},$$

откуда

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\le\frac{by_0(1+k_2y_0)}{(1+k_1x_0+k_2y_0)}|x-x_0|$$

$$+\frac{bx_0(1+k_1x_0)}{(1+k_1x_0+k_2y_0)}|y-y_0|+b|x-x_0||y-y_0|.$$

Используя неравенства (3.23), (3.24) и учитывая обозначения (4.4), (4.7), установим оценку

$$|f(x(t),y(t))-f(x_0,y_0)|\le\omega\,\Theta(\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{y}_0)\,e^{-\varepsilon t/2}+\sigma\,\Theta^2(\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{y}_0)\,e^{-\varepsilon t}.$$

Из этой оценки и равенства (4.9) получим оценки (4.6) и (4.8).

Теорема доказана. □

Список цитируемых источников

1. *Демиденко Г. В.* Матричные уравнения. — Учебное пособие. — Новосибирск: Издательство Новосибирского государственного университета, 2009.

   Demidenko G. V. (2009). Matrix equations. Textbook. Novosibirsk: Publishing Office of Novosibirsk State University. (in Russian)

2. *Демиденко Г. В., Водопьянов Е. С., Скворцова М. А.* Оценки решений линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с несколькими отклонениями аргумента // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2013. — Т. 16, № 3. С. 53–60.

   Demidenko G. V., Vodop'yanov E. S., Skvortsova M. A. (2013). Estimates of solutions to linear differential equations of neutral type with several delays of argument. Journal of Applied and Industrial Mathematics, 7, No. 4 , 472–479.

3. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. — 2005. — Т. 5, № 3. — С. 20–28.

   Demidenko G. V., Matveeva I. I. (2005). Asymptotic properties of solutions to delay differential equations. Vestnik Novosibirskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Matematika, Mekhanika, Informatika, 5, No. 3, 20–28. (in Russian)

4. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сибирский математический журнал. — 2007. — Т. 48, № 5. — С. 1025–1040.

   Demidenko G. V., Matveeva I. I. (2007). Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms. Siberian Mathematical Journal, 48, No. 5, 824–836.

5. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сибирский математический журнал. — 2014. — Т. 55, № 5. — С. 1059–1077.

   Demidenko G. V., Matveeva I. I. (2014). On estimates of solutions to systems of differential equations of neutral type with periodic coefficients. Siberian Mathematical Journal, 55, No. 5, 866–881.

6. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И., Скворцова М. А.* Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах // Сибирский математический журнал. — 2019. — Т. 60, № 5. — С. 1063–1079.

   Demidenko G. V., Matveeva I. I., Skvortsova M. A. (2019). Estimates for solutions to neutral differential equations with periodic coefficients of linear terms. Siberian Mathematical Journal, 60, No. 5, 828–841.

7. *Матвеева И. И.* Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2013. — Т. 16, № 3. — С. 122–132.

   Matveeva I. I. (2013). Estimates of solutions to a class of systems of nonlinear delay differential equations. Journal of Applied and Industrial Mathematics, 7, No. 4, 557–566.

8. *Матвеева И. И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сибирский математический журнал. — 2017. — Т. 58, № 2. — С. 344–352.

   Matveeva I. I. (2017). On exponential stability of solutions to periodic neutral-type systems. Siberian Mathematical Journal, 58, No. 2, 264–270.

9. *Матвеева И. И.* Оценки экспоненциального убывания решений линейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2019. — Т. 22, № 3. — С. 96–103.

   Matveeva I. I. (2019). Estimates of the exponential decay of solutions to linear systems of neutral type with periodic coefficients. Journal of Applied and Industrial Mathematics, 13, No. 3, 511–518.

10. *Скворцова М. А.* Устойчивость решений в модели хищник-жертва с запаздыванием // Математические заметки СВФУ. — 2016. — Т. 23, № 2. — С. 108–120.

    Skvortsova M. A. (2016). Stability of solutions in the predator-prey model with delay. Mathematical Notes of North-Eastern Federal University, 23, No. 2, 108–120. (in Russian)

11. *Скворцова М. А.* Асимптотическая устойчивость положений равновесия и оценки решений в одной модели заболевания // Динамические системы. — 2017. — Т. 7(35), № 3. — С. 257–274.

    Skvortsova M. A. (2017). Asymptotic stability of equilibrium points and estimates of solutions in a model of disease. Dinamicheskie Sistemy, 7(35), No. 3, 257–274. (in Russian)

12. *Скворцова М. А.* Оценки решений в модели хищник-жертва с запаздыванием // Известия Иркутского государственного университета. Серия "Математика". — 2018. — Т. 25. — С. 109–125.

    Skvortsova M. A. (2018). Estimates for solutions in a predator-prey model with delay. The Bulletin of Irkutsk State University, Series "Mathematics", 25, 109–125. (in Russian)

13. *Скворцова М. А.* Об оценках решений в модели хищник-жертва с двумя запаздываниями // Сибирские электронные математические известия. — 2018. — Т. 15. — С. 1697–1718.

    Skvortsova M. A. (2018). On estimates of solutions in a predator-prey model with two delays. Siberian Electronic Mathematical Reports, 15, 1697–1718. (in Russian)

14. *Скворцова М. А.* Асимптотические свойства решений в модели взаимодействия популяций с несколькими запаздываниями // Математические заметки СВФУ. — 2019. — Т. 26, № 4. — С. 63–72.

    Skvortsova M. A. (2019). Asymptotic properties of solutions in a model of interaction of populations with several delays. Mathematical Notes of North-Eastern Federal University, 26, No. 4, 63–72. (in Russian)

15. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Пер. с англ. — М.: Мир, 1970.

    Hartman Ph. (1964). Ordinary differential equations. New York, London, Sydney: John Wiley & Sons.

16. *Хусаинов Д. Я., Иванов А. Ф., Кожаметов А. Т.* Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным

запаздыванием // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, № 8. — С. 1137–1140.

Khusainov D. Ya., Ivanov A. F., Kozhametov A. T. (2005). Convergence estimates for solutions of linear stationary systems of differential-difference equations with constant delay. Differential Equations, 41, No. 8, 1196–1200.

17. *Ыскак Т.* Об устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2019. — Т. 22, № 3. — С. 118–127.

    Yskak T. (2019). On the stability of systems of linear differential equations of neutral type with distributed delay. Journal of Applied and Industrial Mathematics, 13, No. 3, 575–583.

18. *Demidenko G. V.* (2009). Stability of solutions to linear differential equations of neutral type. Journal of Analysis and Applications, 7, No. 3, 119–130.
19. *Mondié S., Kharitonov V. L.* (2005). Exponential estimates for retarded time-delay systems: LMI approach. IEEE Transactions on Automatic Control, 50, No. 2, 268–273.
20. *You H., Yuan R.* (2011). A stage-structured predator-prey model with two delays due to juvenile maturation. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 1–20.

Получена 25.10.2019