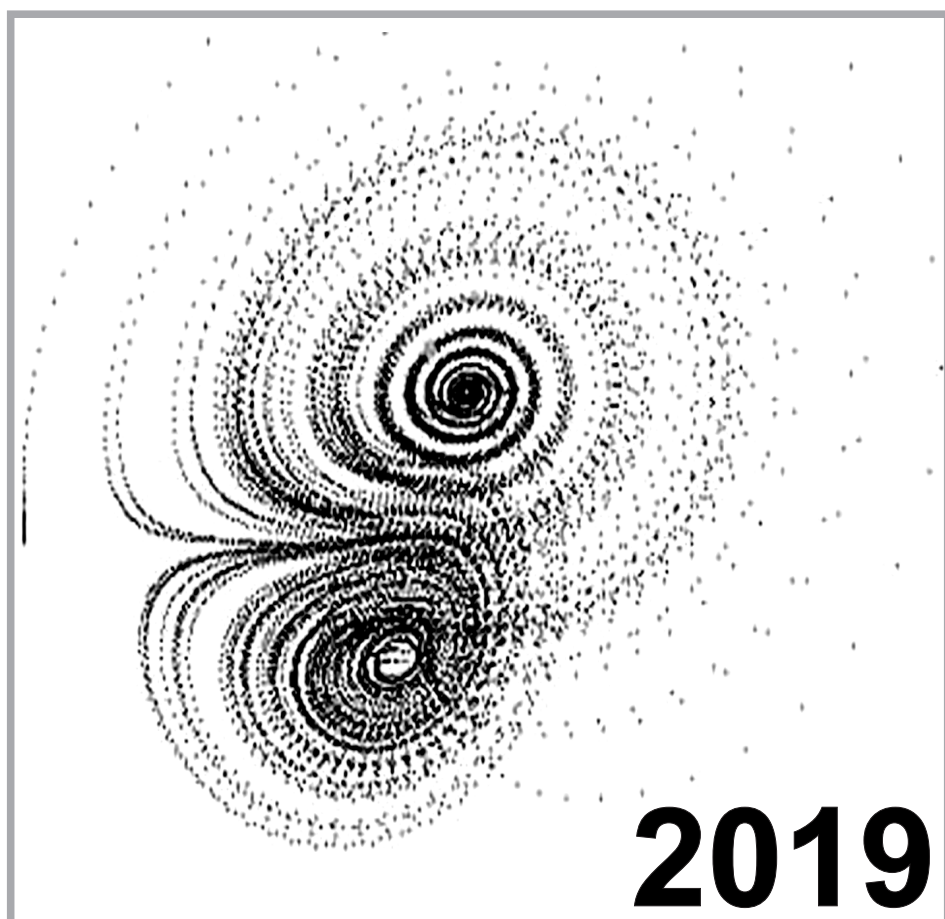


ISSN 0203-3755

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Том 9 (37), №1



2019

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Министерство образования и науки Российской Федерации
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского

Математический журнал

Главный редактор: д-р физ.-мат. наук О. В. Анашкин, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь.

Заместитель главного редактора: д-р физ.-мат. наук О. В. Починка, Национальный исследовательский ун-т «Высшая школа экономики» (нижегородский филиал), Нижний Новгород.

Редакционная коллегия:

А. О. Ватульян, д-р физ.-мат. наук, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону;
В. З. Гринес, д-р физ.-мат. наук, Национальный исследовательский ун-т «Высшая школа экономики» (нижегородский филиал), Нижний Новгород;

Г. В. Демиденко, д-р физ.-мат. наук, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;

А. В. Карапетян, д-р физ.-мат. наук, МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва;

С. А. Кащенко, д-р физ.-мат. наук, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль;

Н. Д. Копачевский, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;

Н. В. Кузнецов, д-р физ.-мат. наук, Санкт-Петербургский университет, Санкт-Петербург;

В. Б. Левенштам, д-р физ.-мат. наук, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону;

В. А. Лукьяненко, канд. физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;

М. А. Муратов, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;

И. В. Орлов, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;

Г. С. Осипенко, д-р физ.-мат. наук, Севастопольский филиал МГУ им. М. В. Ломоносова, Севастополь;

Н. О. Седова, д-р физ.-мат. наук, Ульяновский государственный университет;

В. Н. Тхай, д-р физ.-мат. наук, Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова, Москва;

И. А. Финогенко, д-р физ.-мат. наук, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск;

В. Н. Чехов, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;

V. Kravchenko, PhD, Center for Research and Advanced Studies of the National Polytechnic Institute (Cinvestav), Queretaro, Mexico;

T. Krisztin, DSc, Corresponding member of the Hungarian Academy of Sciences, Bolyai Institute, University of Szeged, Szeged, Hungary;

A. Shiriaev, PhD, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway.

A. L. Zuev, DSc, Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems, Magdeburg, Germany.

Том 9(37), №1, 3-96.

Печатается по решению Научно-технического Совета КФУ протокол №5 от 25.06.2019.

ISSN 0203–3755

Адрес редакционной коллегии: Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, к. 203В, пр-т Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Россия. Тел. +7 978 7715582. E-mail: dynsys2011@yandex.ru

© Крымский федеральный ун-т, 2019

Свидетельство о регистрации средства массовой информации — ПИ №ФС77-61810, выдано 18.05.15.

УДК 519.85

Аналог квадратичной интерполяции для специального класса негладких функционалов и одно его приложение к адаптивному методу зеркального спуска¹

Ф. С. Стонякин

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: fedyor@mail.ru*

Аннотация. Теоретические оценки скорости сходимости многих известных методов оптимизации градиентного типа основаны на квадратичной интерполяции при условии выполнения условия Липшица для градиента. В статье обоснована возможность построения аналога такой интерполяции в классе локально липшицевых квазивыпуклых функционалов при выполнении специальных условий негладкости (липшицевость субградиента), введённых в настоящей работе. При этом в качестве аппарата для описания дифференциальных свойств таких функционалов используется субдифференциал Кларка. Приведён пример выпуклой негладкой ограниченной функции со сколь угодно большой константой Липшица, для которой выполнено свойство липшицевости субградиента. В качестве приложения получены оценки скорости сходимости ранее предложенного метода адаптивного зеркального спуска для задач минимизации квазивыпуклого локально липшицева функционала с несколькими выпуклыми функциональными ограничениями. Эти оценки указывают на оптимальность рассматриваемого метода зеркального спуска с точки зрения теории нижних оракульных оценок.

Ключевые слова: квадратичная интерполяция, липшицевость градиента, квазивыпуклый функционал, липшицевость субградиента, адаптивный зеркальный спуск, оптимальный метод.

Some Analogue of Quadratic Interpolation for a Special Class of Non-Smooth Functionals and One Application to Adaptive Mirror Descent

F. S. Stonyakin

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. Theoretical estimates of the convergence rate of many well-known gradient-type optimization methods are based on quadratic interpolation, provided that the Lipschitz condition for the gradient is satisfied. The article substantiates the possibility of constructing an analogue of such interpolation in the class of locally Lipschitz quasi-convex functionals when the special conditions of non-smoothness (Lipschitz-continuous subgradient) introduced in this paper are fulfilled. In this case, the Clarke subdifferential is used as an apparatus for describing the differential properties of such functionals. An example is given of a convex nonsmooth bounded function with an arbitrarily large

¹Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта 18-31-00219

Lipschitz constant for which the subgradient Lipschitz property holds. As an application, estimates are obtained for the rate of convergence of the previously proposed adaptive mirror descent method for the problems of minimizing a quasiconvex locally Lipschitz functional with several convex functional constraints. These estimates indicate the optimality of the considered method of mirror descent from the point of view of the theory of lower oracle estimates.

Keywords: quadratic interpolation, Lipschitz-continuous gradient, quasi-convex functional, Lipschitz-continuous subgradient, adaptive mirror descent, optimal method.

MSC 2010: 90C25, 90C06, 49J52

1. Введение

Многие численные методы оптимизации основаны на идее подходящей аппроксимации оптимизируемого функционала некоторым функционалом стандартного типа. Например, для гладкого целевого функционала $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ с липшицевым градиентом

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_* \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in Q \quad (1.1)$$

на области определения $Q \subset \mathbb{R}^n$ хорошо известно неравенство

$$|f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle| \leq \frac{L\|y - x\|^2}{2} \quad (1.2)$$

для всяких x и y из Q . Здесь под $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ мы понимаем нормы в исходном и сопряжённом пространствах, соответственно. Иными словами,

$$\varphi_2(x, y) \leq f(y) \leq \varphi_1(x, y) \quad \forall x, y \in Q, \quad (1.3)$$

где

$$\varphi_1(x, y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{L\|y - x\|^2}{2}, \text{ а}$$

$$\varphi_2(x, y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{L\|y - x\|^2}{2}.$$

Как известно [12], указанные неравенства (1.2) – (1.3) позволяют обосновать не только глобальную сходимость методов градиентного типа, но и оценивать скорость такой сходимости. Отметим также [12], что похожие на (1.2) – (1.3) неравенства можно выписать для негладкого функционала, равного максимуму конечного числа гладких функционалов с липшицевым градиентом.

Неравенства (1.2) – (1.3) широко используются для обоснования скорости сходимости самых разных методов для задач как условной, так и безусловной оптимизации. Например, недавно в [6] были предложены алгоритмы зеркального спуска как с адаптивным выбором шага, так и с адаптивным критерием останова. При этом помимо случая липшицевых целевого функционала и функционального ограничения в ([6], п. 3.3) на базе идеологии [12, 13] был предложен оптимальный с точки зрения нижних оракульных оценок [11] метод для условных задач выпуклой минимизации с целевыми функционалами, обладающими свойством липшицевости градиента. В частности, в задачах с квадратичными функционалами мы

сталкиваемся с ситуацией, когда функционал не удовлетворяет обычному свойству Липшица (или константа Липшица достаточно большая), но градиент удовлетворяет условию Липшица. Для задач такого типа в ([6], п. 3.3) был предложен адаптивный алгоритм зеркального спуска. Модификация метода ([6], п. 3.3) для задач с несколькими ограничениями рассмотрена в [4].

Основной результат настоящей статьи (теорема 1) — обоснование возможности построения аналога неравенств стандартной квадратичной интерполяции (1.2) – (1.3) для специального класса негладких квазивыпуклых функционалов с *липшицевым субградиентом* (определение 1). Идея предлагаемой концепции свойства липшицевости субградиента заключается в том, чтобы описать изменение аппроксимации функционала при условии наличия некоторого (не более, чем счётного) набора точек с особенностями. Основной результат работы (теорема 1) показывает, как эти особенности могут приводить к изменению модели функционала, пригодной для построения методов оптимизации. Поскольку локально липшицевы квазивыпуклые функционалы могут не иметь субдифференциала в смысле выпуклого анализа, то для описания дифференциальных свойств мы используем наиболее известное обобщение понятия субдифференциала на невыпуклые функционалы — субдифференциал Кларка [1], а под субградиентами всюду далее понимаем элементы (векторы) субдифференциала Кларка как множества. Отметим, что для выпуклых функционалов субдифференциал Кларка совпадает с обычным субдифференциалом в смысле выпуклого анализа. Построен пример негладкого выпуклого функционала из указанного класса, который может иметь сколь угодно большую константу Липшица при нулевой константе Липшица субградиента (пример 1). Как приложение, обоснована оптимальность метода ([4], п. 4) для условных задач с локально липшицевым целевым функционалом и несколькими выпуклыми липшицевыми функциональными ограничениями. Для оценки скорости алгоритма 1 доказан аналог известного утверждения ([12], лемма 3.2.1) в классе непрерывных квазивыпуклых локально липшицевых функционалов с использованием субдифференциала Кларка для описания их дифференциальных свойств (теорема 3).

Всюду далее будем считать, что $(E, \|\cdot\|)$ — конечномерное нормированное векторное пространство и E^* — сопряженное пространство к E со стандартной нормой:

$$\|y\|_* = \max_x \{\langle y, x \rangle, \|x\| \leq 1\},$$

где $\langle y, x \rangle$ — значение линейного непрерывного функционала y в точке $x \in E$, $Q \subset E$ — замкнутое выпуклое множество.

2. Об аналоге условия Липшица градиента для специального класса негладких функционалов

В данном разделе мы покажем, как можно обобщить свойство (1.1) и оценки (1.2) – (1.3) на некоторый класс квазивыпуклых локально липшицевых функционалов $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ ($Q \subset \mathbb{R}^n$), не дифференцируемых на некотором счётном подмножестве $Q_0 \subset Q$. Напомним, что функционал $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ называют квазивыпуклым,

если:

$$f((1-t)x + ty) \leq \max\{f(x), f(y)\} \quad \forall t \in [0; 1] \quad \forall x, y \in Q. \quad (2.1)$$

Введем класс негладких квазивыпуклых функционалов, допускающих аналоги оценок (1.2) – (1.3). Будем считать функционал f дифференцируемым во всех точках $Q \setminus Q_0$ и полагать, что для произвольного $x \in Q_0$ существует компактный субдифференциал Кларка $\partial_{Cl}f(x)$. Напомним это понятие ([1], § 2.2). Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – фиксированная точка и $h \in \mathbb{R}^n$ – фиксированное направление. Положим

$$f_{Cl}^\uparrow(x_0; h) = \limsup_{x' \rightarrow x_0, \alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha} [f(x' + \alpha h) - f(x')].$$

Величина $f_{Cl}^\uparrow(x_0; h)$ называется верхней производной Кларка функционала f в точке x_0 по направлению h . Как известно, функция $f_{Cl}^\uparrow(x_0; h)$ субаддитивна и положительно однородна по h ([1], с. 17 – 18). Это обстоятельство позволяет определить субдифференциал функционала f в точке x_0 как следующее множество:

$$\partial_{Cl}f(x_0) := \{v \in \mathbb{R} \mid f_{Cl}^\uparrow(x_0; g) \geq vg \quad \forall g \in \mathbb{R}\}, \quad (2.2)$$

то есть как субдифференциал выпуклого по h функционала $f_{Cl}^\uparrow(x_0; h)$ в точке $h = 0$ в смысле выпуклого анализа. Таким образом, по определению

$$f_{Cl}^\uparrow(x_0; h) = \max_{v \in \partial_{Cl}f(x_0)} \langle v, h \rangle. \quad (2.3)$$

Будем говорить, что функционал f субдифференцируем по Кларку в точке x_0 , если множество $\partial_{Cl}f(x_0)$ непусто и компактно. В частности, если функция f локально липшицева, то она является субдифференцируемой по Кларку в любой точке области определения. Отметим, что для выпуклых функций субдифференциал Кларка совпадает с обычным субдифференциалом в смысле выпуклого анализа [1]. В дальнейших рассуждениях для фиксированных $x, y \in Q$ при $t \in [0; 1]$ будем обозначать $y_t := (1-t)x + ty$.

Определение 1. Будем говорить, что квазивыпуклый локально липшицев функционал $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ ($Q \subset \mathbb{R}^n$) имеет (δ, L) -липшицев субградиент ($f \in C_{L, \delta}^{1,1}(Q)$), если:

- (i) для произвольных $x, y \in Q$ f дифференцируем во всех точках множества $\{y_t\}_{0 \leq t \leq 1}$, за исключением последовательности (возможно, конечной)

$$\{y_{t_k}\}_{k=1}^\infty : t_1 < t_2 < t_3 < \dots \text{ и } \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 1; \quad (2.4)$$

- (ii) для последовательности точек из (2.4) существуют конечные субдифференциалы Кларка $\{\partial f(y_{t_k})\}_{k=1}^\infty$ и

$$\text{diam } \partial_{Cl}f(y_{t_k}) =: \delta_k > 0, \text{ где } \sum_{k=1}^{+\infty} \delta_k =: \delta < +\infty. \quad (2.5)$$

$$(\text{diam } \partial_{Cl}f(x) = \max\{\|y - z\|_* \mid y, z \in \partial_{Cl}f(x)\});$$

- (iii) для произвольных $x, y \in Q$ при условии, что $y_t \in Q \setminus Q_0$ при всяком $t \in (0, 1)$ (то есть существует градиент $\nabla f(y_k)$) для некоторой фиксированной константы $L > 0$, не зависящей от выбора x и y , выполняется неравенство:

$$\min_{\substack{\hat{\partial}f(x) \in \partial_{Cl}f(x), \\ \hat{\partial}f(y) \in \partial_{Cl}f(y)}} \|\hat{\partial}f(x) - \hat{\partial}f(y)\|_* \leq L\|x - y\|. \quad (2.6)$$

Ясно, что всякий локально липшицев квазивыпуклый функционал, удовлетворяющий (1.1), будет входить в класс $C_{L,\delta}^{1,1}(Q)$ при $\delta = 0$. Приведем пример негладкой вещественной выпуклой функции $f \in C_{L,\delta}^{1,1}(Q)$ при $\delta > 0$.

Пример 1. Зафиксируем некоторое $k > 0$, величину $\delta > 0$ и рассмотрим кусочно-линейную функцию $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (здесь $Q = [0; 1] \subset \mathbb{R}$):

$$f(x) := kx \text{ при } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (2.7)$$

$$f(x) := \left(k + \sum_{i=1}^n \frac{\delta}{2^i} \right) x - \sum_{i=1}^n \frac{\delta}{2^i} \left(1 - \frac{1}{2^i} \right) \text{ при } 1 - \frac{1}{2^n} < x \leq 1 - \frac{1}{2^{n+1}},$$

$$f(1) := \lim_{x \rightarrow +1} f(x).$$

В этом случае

$$Q_0 = \left\{ 1 - \frac{1}{2^n} \right\}_{n=1}^{\infty},$$

$$\partial f(q_n) = \left[k + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\delta}{2^i}; k + \sum_{i=1}^n \frac{\delta}{2^i} \right]$$

при $n > 1$ (здесь $\partial f(\cdot)$ — субдифференциал в смысле выпуклого анализа),

$$\partial f(q_1) = \left[k; k + \frac{\delta}{2} \right]$$

(здесь $q_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ при $n = 1, 2, 3, \dots$). Ясно, что $\partial f(q_n) = \frac{\delta}{2^n}$, то есть верно (2.5) для введенной величины $\delta > 0$. При этом на отрезках $(q_n; q_{n+1})$ и $(0; q_1)$ функция f имеет липшицев градиент с константой $L = 0$. Поэтому для функции f из (2.7) верно $f \in C_{0,\delta}^{1,1}(Q)$.

Замечание 1. Ясно, что функцию f из (2.7) нельзя представить в виде максимума конечного набора линейных функций, поскольку f имеет бесконечное число точек недифференцируемости f .

Сформулируем для введенного класса функционалов $C_{L,\delta}^{1,1}(Q)$ аналог леммы 1.2.3 из [12].

Теорема 1. Пусть локально липшицев квазивыпуклый функционал $f \in C_{L,\delta}^{1,1}(Q)$. Тогда для произвольных $x, y \in Q$ верно неравенство

$$|f(y) - f(x) - \langle \hat{\partial}f(x), y - x \rangle| \leq \frac{L}{2} \|y - x\|^2 + \delta \|y - x\| \quad (2.8)$$

для некоторого субградиента $\hat{\partial}f(x) \in \partial_{Cl}f(x)$.

Доказательство. Для произвольных фиксированных $x, y \in Q$ через y_t будем обозначать элемент $ty + (1-t)x$. Тогда при фиксированных x и y одномерная функция $\varphi: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ($\varphi(0) = f(x)$ и $\varphi(1) = f(y)$)

$$\varphi(t) = f(y_t) = f((1-t)x + ty) \quad (2.9)$$

будет квазивыпуклой и для некоторого $\hat{t} \in [0; 1]$ отрезки $[0; \hat{t}]$ и $[\hat{t}; 1]$ будут промежутками (вообще говоря, нестрогой) монотонности функции φ .

Поскольку для всякой точки y_t ($t \in [0; 1]$) существует конечный субдифференциал Кларка $\partial_{Cl}f(y_t)$, а также функционал f локально липшицев и квазивыпуклый, то для всех $t \in (0; 1)$ существуют конечные левосторонняя и правосторонняя производные:

$$\varphi'_-(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow -0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}, \quad \varphi'_+(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \quad (2.10)$$

и

$$\varphi'_+(t) = \max_{\hat{\partial}f(y_t) \in \partial_{Cl}f(y_t)} \langle \hat{\partial}f(y_t), y - x \rangle - \quad (2.11)$$

производная f по направлению $y - x$ в точке y_t . Ясно, что при $y_t \notin Q_0$ (то есть существует градиент $\nabla f(y_t)$)

$$\varphi'_-(t) = \varphi'_+(t) = \langle \nabla f(y_t), y - x \rangle. \quad (2.12)$$

Ввиду квазивыпуклости f (и φ) можно полагать, что функция φ абсолютно непрерывна и почти всюду дифференцируема в смысле классической меры Лебега, т.е. имеем равенства:

$$f(y) = f(x) + \int_{[0;1] \setminus Q_0} \langle \nabla f(y_t), y - x \rangle dt = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'_+(t) dt,$$

откуда для произвольного субградиента $\hat{\partial}f(x) \in \partial f(x)$ имеем:

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) + \langle \hat{\partial}f(x), y - x \rangle + \int_0^1 \left[\max_{\hat{\partial}f(y_t) \in \partial_{Cl}f(y_t)} \langle \hat{\partial}f(y_t), y - x \rangle - \langle \hat{\partial}f(x), y - x \rangle \right] dt = \\ &= f(x) + \langle \hat{\partial}f(x), y - x \rangle + \int_0^1 \langle \hat{\partial}f(y_t) - \hat{\partial}f(x), y - x \rangle dt \end{aligned} \quad (2.13)$$

для набора субградиентов $\{\hat{\partial}_{Cl}f(y_t)\}_{t \in (0;1]}$, на которых достигаются соответствующие максимумы. Если $y_t \in Q_0$, то $y_t = q_k$ ($k \geq 1$) из определения 1.1 (ii) и тогда

$$\begin{aligned} \varphi'_+(t) - \varphi'_-(t) &= \langle \hat{\partial}_1 f(y_t) - \hat{\partial}_2 f(y_t), y - x \rangle = \\ &= \langle \hat{\partial}_1 f(q_k) - \hat{\partial}_2 f(q_k), y - x \rangle \leq \\ &\leq \|\hat{\partial}_1 f(q_k) - \hat{\partial}_2 f(q_k)\|_* \cdot \|y - x\| \stackrel{(2.4)}{\leq} \delta_k \|y - x\| \end{aligned} \quad (2.14)$$

для соответствующих субградиентов (векторов-элементов субдифференциалов Кларка) $\hat{\partial}_{1,2}f(q_k) \in \partial_{Cl}f(q_k)$. Не уменьшая общности рассуждений, будем считать, что

$$x, y \in Q_0 \subset \{y_t\}_{t \in [0;1]} \quad (2.15)$$

и всякому q_n поставим в соответствие $t_n \in [0; 1] : q_n = (1 - t_n)x + t_n y$.

Пусть существует последовательность

$$\{t_n\}_{n=1}^\infty : 0 = t_1 < t_2 < \dots < 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1.$$

Тогда $\forall \tau_1, \tau_2 \in (t_k; t_{k+1})$ при $k \geq 1$ верны неравенства:

$$\|\nabla f(y_{\tau_2}) - \nabla f(y_{\tau_1})\|_* \leq L|\tau_2 - \tau_1| \cdot \|y - x\|, \quad (2.16)$$

$$|\varphi'_+(t_k) - \varphi'_-(t_{k+1})| \leq \frac{1}{2}L(t_{k+1} - t_k) \cdot \|y - x\|^2. \quad (2.17)$$

Поэтому при выборе в (2.13) подходящего субградиента $\hat{\partial}f(x)$ будут выполняться соотношения:

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x) - \langle \hat{\partial}f(x), y - x \rangle| &\stackrel{(2.13)}{=} \left| \int_0^1 \langle \hat{\partial}f(y_t) - \hat{\partial}f(x), y - x \rangle dt \right| = \\ &= \left| \int_0^1 (\varphi'_+(t) - \varphi'_+(0)) dt \right| \leq \left| \int_0^1 \langle \hat{g}(y_t) - \hat{\partial}f(x), y - x \rangle dt \right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \delta_k \|y - x\|, \end{aligned}$$

причем вектор-функция \hat{g} такова, что $\hat{g}(x) = \hat{g}(y_0) = \hat{\partial}f(x)$ и

$$\|\hat{g}(y_{\tau_1}) - \hat{g}(y_{\tau_2})\|_* \leq L\|y_{\tau_1} - y_{\tau_2}\| \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in [0; 1], \quad (2.18)$$

откуда

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \langle \hat{g}(y_t) - \hat{\partial}f(x), y - x \rangle dt \right| &= \left| \int_0^1 \langle \hat{g}(y_t) - \hat{g}(x), y - x \rangle dt \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 |\langle \hat{g}(y_t) - \hat{g}(x), y - x \rangle| dt \leq \int_0^1 \|\hat{g}(y_t) - \hat{g}(x)\|_* dt \cdot \|y - x\| \stackrel{(2.18)}{\leq} \\ &\leq L \int_0^1 \|y_t - x\| dt \cdot \|y - x\| = L\|y - x\|^2 \cdot \int_0^1 t dt = \frac{L}{2}\|y - x\|^2, \end{aligned}$$

то есть

$$|f(y) - f(x) - \langle \hat{\partial}f(x), y - x \rangle| \leq \frac{L}{2} \|y - x\|^2 + \delta \|y - x\|, \quad (2.19)$$

что и требовалось. \square

Следствие 1. Если $f \in C_{L,\delta}^{1,1}(Q)$, то для произвольных $x, y \in Q$ верны неравенства:

$$\begin{aligned} f(y) &\leq f(x) + \max \|\hat{\partial}f(x)\|_* \cdot \|y - x\| + \delta \|y - x\| + \frac{L}{2} \|y - x\|^2 = \\ &= f(x) + (\max \|\hat{\partial}f(x)\|_* + \delta) \|y - x\| + \frac{L}{2} \|y - x\|^2. \end{aligned}$$

3. Пример приложения: адаптивный зеркальный спуск для задач минимизации квазивыпуклого целевого функционала рассматриваемого класса гладкости

В качестве приложения покажем возможность получения оценок скорости сходимости для метода из [4] (алгоритм 4) для более широкого класса целевых функционалов. Напомним, что метод [4] (алгоритм 4) мы рассматривали для условных задач выпуклой минимизации при выполнении условия липшицевости градиента целевого функционала. Например, квадратичный целевой функционал может не удовлетворять обычному свойству Липшица (или константа Липшица может быть довольно большой), но его градиент удовлетворяет условию Липшица. Метод [4] (алгоритм 4) применим и для более широкого класса уже негладких выпуклых целевых функционалов

$$f(x) = \max_{1 \leq i \leq m} f_i(x), \quad (3.1)$$

где

$$f_i(x) = \frac{1}{2} \langle A_i x, x \rangle - \langle b_i, x \rangle + \alpha_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.2)$$

в случае, когда A_i ($i = 1, \dots, m$) — положительно определённые матрицы: $x^T A_i x \geq 0 \quad \forall x \in Q$.

Начнём с постановки рассматриваемых задач условной оптимизации, а также необходимых вспомогательных понятий. Рассмотрим набор выпуклых субдифференцируемых функционалов $g_m: X \rightarrow \mathbb{R}$ для $m = \overline{1, M}$. Также предположим, что все функционалы g_m удовлетворяют условию Липшица с некоторой константой M_g :

$$|g_m(x) - g_m(y)| \leq M_g \|x - y\| \quad \forall x, y \in Q, \quad m = \overline{1, M}. \quad (3.3)$$

Мы рассматриваем следующий тип задач оптимизации квазивыпуклого локально липшицева целевого функционала f с выпуклыми липшицевыми функциональными ограничениями

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in Q}, \quad (3.4)$$

где

$$g_m(x) \leq 0 \quad \forall m = \overline{1, M}. \quad (3.5)$$

Сделаем предположение о разрешимости задачи (3.4) – (3.5). Задачи минимизации негладкого функционала с ограничениями возникают в широком классе проблем современной large-scale оптимизации и её приложений [10, 14]. Для таких задач имеется множество методов, среди которых можно отметить метод зеркального спуска [8, 11]. Отметим, что в случае негладкого целевого функционала или функциональных ограничений естественно использовать субградиентные методы, восходящие к хорошо известным работам [3, 5]. Метод зеркального спуска возник для безусловных задач в [2, 11] как аналог стандартного субградиентного метода с неевклидовым проектированием. Для условных задач аналог этого метода был предложен в [11] (см. также [7]). Проблема адаптивного выбора шага без использования констант Липшица рассмотрена в [9] для задач без ограничений, а также в [7] для задач с функциональными ограничениями.

Отметим, что всюду далее будем под субградиентом квазивыпуклого (локально липшицева) функционала f понимать любой элемент (вектор) субдифференциала Кларка. Для выпуклых функционалов g_m понятие субградиента мы понимаем стандартно.

Для дальнейших рассуждений нам потребуются следующие вспомогательные понятия (см., например, [9]), которые позволяют оценить качество найденного решения. Для оценки расстояния от текущей точки до решения введём так называемую прокс-функцию $d: X \rightarrow \mathbb{R}$, обладающую свойством непрерывной дифференцируемости и 1-сильной выпуклости относительно нормы $\|\cdot\|$, т.е.

$$\langle \nabla d(x) - \nabla d(y), x - y \rangle \geq \|x - y\|^2 \quad \forall x, y, \in Q.$$

Будем полагать, что имеется некоторая оценка расстояния от точки старта до искомого решения задачи x_* , т.е. существует такая константа $\Theta_0 > 0$, что $d(x_*) \leq \Theta_0^2$, где x_* — точное решение (3.4) – (3.5). Если имеется множество решений X_* , то мы предполагаем, что для константы Θ_0

$$\min_{x_* \in X_*} d(x_*) \leq \Theta_0^2.$$

Для всех $x, y \in X$ рассмотрим соответствующую дивергенцию Брэгмана

$$V(x, y) = d(y) - d(x) - \langle \nabla d(x), y - x \rangle.$$

В зависимости от постановки конкретной задачи возможны различные подходы к определению прокс-структуры задачи и соответствующей дивергенции Брэгмана: евклидова, энтропийная и многие другие (см., например, [9]). Стандартно определим оператор проектирования

$$\text{Mirr}_x(p) = \arg \min_{u \in Q} \{ \langle p, u \rangle + V(x, u) \} \quad \text{для всяких } x \in Q \text{ и } p \in E^*.$$

Сделаем предположение о том, что оператор $\text{Mirr}_x(p)$ легко вычислим.

Напомним одно известное утверждение, которое вытекает из обычного неравенства Коши-Буняковского, а также $2ab \leq a^2 + b^2$. Поскольку функциональные ограничения по-прежнему выпуклы, мы рассмотрим также отдельно оценку в выпуклом случае [9].

Лемма 1. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторый функционал. Для произвольного $y \in X$, вектора $p_y \in E^*$ и некоторого $h > 0$ положим $z = \text{Mirr}_y(h \cdot p_y)$. Тогда для произвольного $x \in Q$

$$h \langle p_y, y - x \rangle \leq \frac{h^2}{2} \|p_y\|_*^2 + V(y, x) - V(z, x). \quad (3.6)$$

Для выпуклого субдифференцируемого в точке y функционала f предыдущее неравенство для произвольного субградиента $p_y = \nabla f(y)$ примет вид

$$h \cdot (f(y) - f(x)) \leq \langle \nabla f(y), y - x \rangle \leq \frac{h^2}{2} \|\nabla f(y)\|_*^2 + V(y, x) - V(z, x). \quad (3.7)$$

Аналогично ([4], алгоритм 4) рассмотрим следующий алгоритм адаптивного зеркального спуска для задач (3.4) – (3.5). Отметим, что ввиду предположения локальной липшицевости квазивыпуклого целевого функционала все его субградиенты конечны. Сделаем дополнительное предположение об отсутствии точек перегиба, т.е. градиент f может быть нулевым только в точке x_* .

Алгоритм 1. Адаптивный зеркальный спуск, квазивыпуклый негладкий целевой функционал, много ограничений.

REQUIRE $\varepsilon > 0, \Theta_0 : d(x_*) \leq \Theta_0^2$

1. $x^0 = \text{argmin}_{x \in Q} d(x)$

2. $I =: \emptyset$

3. $N \leftarrow 0$

4. **REPEAT**

5. **IF** $g(x^N) \leq \varepsilon$

6. $h_N \leftarrow \frac{\varepsilon}{\|\nabla f(x^N)\|_*}$

7. $x^{N+1} \leftarrow \text{Mirr}_{x^N}(h_N \nabla f(x^N))$ // "продуктивные шаги"

8. $N \rightarrow I$

9. **ELSE**

10. // $(g_{m(N)}(x^N) > \varepsilon)$ для некоторого $m(N) \in \{1, \dots, M\}$

11. $h_N \leftarrow \frac{\varepsilon}{\|\nabla g_{m(N)}(x^N)\|_*^2}$

12. $x^{N+1} \leftarrow \text{Mirr}_{x^N}(h_N \nabla g_{m(N)}(x^N))$ // "непродуктивные шаги"

13. **ENDIF**

14. $N \leftarrow N + 1$

15. **UNTIL** $\Theta_0^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2} \left(|I| + \sum_{k \notin I} \frac{1}{\|\nabla g_{m(k)}(x^k)\|_*^2} \right)$

ENSURE $\bar{x}^N := \text{argmin}_{x^k, k \in I} f(x^k)$

Для оценки скорости сходимости этого метода по аналогии с ([12], п. 3.2.2), для всякого ненулевого конечного субградиента (элемента субдифференциала Кларка) $\nabla f(x)$ целевого квазивыпуклого функционала f введём следующую вспомогательную величину

$$v_f(x, y) = \left\langle \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|_*}, x - y \right\rangle, \quad x \in Q. \quad (3.8)$$

Аналогично ([4], теорема 2) с использованием леммы 1 проверяется следующая

Теорема 2. Пусть $\varepsilon > 0$ — фиксированное число и выполнен критерий остановки алгоритма 1. Тогда

$$\min_{k \in I} v_f(x^k, x_*) < \varepsilon. \quad (3.9)$$

Отметим, что алгоритм 1 работает не более

$$N = \left\lceil \frac{2 \max\{1, M_g^2\} \Theta_0^2}{\varepsilon^2} \right\rceil \quad (3.10)$$

итераций.

Теперь покажем, как можно оценить скорость сходимости предлагаемого метода. Для этого полезно следующее вспомогательное утверждение, которое аналогично лемме 3.2.1 из [12]. Напомним, что под x_* мы понимаем точное решение задачи (3.4) – (3.5). Отличительной особенностью данного утверждения является то, что мы рассматриваем не выпуклый, а квазивыпуклый целевой функционал f . Предположение о его локальной липшицевости позволяет в качестве аппарата для исследования дифференциальных свойств использовать субдифференциал Кларка.

Теорема 3. Пусть $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ — локально липшицев квазивыпуклый функционал. Введём следующую функцию:

$$\omega(\tau) = \max_{x \in Q} \{f(x) - f(x_*) : \|x - x_*\| \leq \tau\}, \quad (3.11)$$

где τ — положительное число. Тогда для всякого $x \in Q$

$$f(x) - f(x_*) \leq \omega(v_f(x, x_*)). \quad (3.12)$$

Доказательство. Мы отправляемся от схемы рассуждений ([12], лемма 3.2.1) с тем отличием, что вместо обычного субдифференциала выпуклой функции будет использоваться субдифференциал Кларка. Можно проверить, что

$$v_f(x, x_*) = \min_y \{\|y - x_*\| : \langle \nabla f(x), y - x \rangle = 0\}.$$

Действительно, пусть $v_f(x, x_*) = \|y_* - x_*\|$ для некоторого $y_*: \langle \nabla f(x), y_* - x \rangle = 0$. Тогда $\nabla f(x) = \lambda s$, где $\langle s, y_* - x_* \rangle = \|y_* - x_*\|$ для некоторого s такого, что $\|s\|_* = 1$. Поэтому

$$0 = \langle \nabla f(x), y_* - x \rangle = \lambda \langle s, y_* - x_* \rangle + \langle \nabla f(x), x_* - x \rangle,$$

откуда

$$\lambda = \frac{\langle \nabla f(x), x - x_* \rangle}{\|y_* - x_*\|} = \|\nabla f(x)\|_* \text{ и } v_f(x, x_*) = \|y_* - x_*\|.$$

Остаётся лишь учесть существование конечной производной по направлению $h \in Q$ у всякого локально липшицева квазивыпуклого функционала f

$$f'(x, h) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda}.$$

Далее, с использованием свойства квазивыпуклости и (2.2) для локально липшицева квазивыпуклого функционала получаем:

$$f'(x, h) = f_{Cl}^\uparrow(x, h) = \max_{\nabla f(x) \in \partial_{Cl} f(x)} \langle \nabla f(x), h \rangle.$$

Для всякого направления h такого, что $\langle \nabla f(x), h \rangle > 0$ получаем $f'(x, h) > 0$. Поэтому имеет место $f(x + \lambda h) \geq f(x)$ для произвольного направления h такого, что $\langle \nabla f(x), h \rangle > 0$. Неравенство $f(y) - f(x) \geq 0$ следует теперь из непрерывности функционала f для всякого y такого, что $\langle \nabla f(x), y - x \rangle = 0$. Итак,

$$f(x) - f(x_*) \leq f(y) - f(x_*) \leq \omega(v_f(x, x_*)).$$

□

На базе теорем 2 и 3 можно оценить скорость сходимости алгоритма для квазивыпуклого локально липшицева целевого функционала f с липшицевым субградиентом. Используя доказанное в теореме 1 неравенство

$$f(x) \leq f(x_*) + (\|\nabla f(x_*)\|_* + \delta)\|x - x_*\| + \frac{1}{2}L\|x - x_*\|^2,$$

мы можем получить, что

$$\min_{k \in I} f(x^k) - f(x_*) \leq \min_{k \in I} \left\{ (\|\nabla f(x_*)\|_* + \delta)\|x^k - x_*\| + \frac{1}{2}L\|x^k - x_*\|^2 \right\}.$$

Далее, по теореме 3 верно неравенство:

$$f(x) - f(x_*) \leq \varepsilon \cdot (\|\nabla f(x_*)\|_* + \delta) + \frac{1}{2}L\varepsilon^2.$$

Поэтому справедливо

Следствие 2. Пусть локально липшицев квазивыпуклый функционал f имеет липшицев субградиент. Тогда после остановки алгоритма верна оценка:

$$\min_{1 \leq k \leq N} f(x^k) - f(x_*) \leq \varepsilon \cdot (\|\nabla f(x_*)\|_* + \delta) + \frac{L\varepsilon^2}{2}, \quad (3.13)$$

причём для всякого k

$$g_m(x^k) \leq \varepsilon \quad \forall m = \overline{1, M}. \quad (3.14)$$

Заключение

Таким образом, остановка алгоритма 1 гарантирует достижение приемлемого качества найденного решения (3.13) – (3.14), а оценка (3.10) указывает на его оптимальность с точки зрения нижних оракульных оценок [11] даже в классе выпуклых (а тем более и квазивыпуклых) целевых функционалов.

Полученные результаты, в частности, позволяют сделать такие выводы. Во-первых, алгоритм 1 применим для задач минимизации не только выпуклых, но и квазивыпуклых целевых функционалов. Во-вторых, особенности поведения целевого функционала в окрестности некоторых отдельных точек могут не сильно усложнять интерполяцию (модель) оптимизируемой функции, что может позволить сохранять при наличии таких особенностей оценки скорости сходимости метода.

Список цитируемых источников

1. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ: Пер. с англ. М.: Наука, 1988.
Clarke F. Optimization and non-smooth analysis. New York: John Wiley and Sons, 1983.
2. *Немировский А. С., Юдин Д. Б.* Эффективные методы решения задач выпуклого программирования большой размерности. Экономика и математические методы. №2, 135-152 (1979).
Nemirovskii A. and Yudin D. Efficient methods for large-scale convex optimization problems // Ekonomika i Matematicheskie Metody, No. 2, 135-152 (1979). (in Russian)
3. *Поляк В. Т.* Один общий метод решения экстремальных задач. Докл. АН СССР 174, 33-36 (1967).
Polyak V. A general method of solving extremum problems. Soviet Mathematics Doklady 8, No. 3, 593–597 (1967). (in Russian)
4. *Стонякин Ф. С., Алкуса М. С., Степанов А. Н., Баринов М. А.* Адаптивные алгоритмы зеркального спуска в задачах выпуклого программирования с липшицевыми ограничениями. Труды Института математики и механики УрО РАН 24, №2, 266-279 (2018).
Stonyakin F. S., Alkousa M. S., Stepanov A. N., Barinov M. A. Adaptive mirror descent algorithms in convex programming problems with Lipschitz constraints. Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN 24, No. 2, 266-279 (2018). (in Russian)
5. *Шор Н. З.* Применение обобщенного градиентного спуска в блочном программировании. Кибернетика 3, №3, 53-55 (1967).
Shor N. Z. Generalized gradient descent with application to block programming, Kibernetika 3, No. 3, 53–55 (1967). (in Russian)
6. *Bayandina A., Dvurechensky P., Gasnikov A., Stonyakin F., Titov A.* Mirror descent and convex optimization problems with non-smooth inequality constraints. Lecture Notes in Mathematics 2227. Large-scale and Distributed Optimization, 181-231 (2018).
7. *Beck A., Ben-Tal A., Guttman-Beck N., Tetruashvili L.* The comirror algorithm for solving nonsmooth constrained convex problems. Operations Research Letters 38, No. 6, 493-498 (2010).
8. *Beck A. and Teboulle M.* Mirror descent and nonlinear projected subgradient methods for convex optimization. Operations Research Letters 31, No. 3, 167–175 (2003).

9. *Ben-Tal A. and Nemirovski A.* Lectures on Modern Convex Optimization. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
10. *Ben-Tal A. and Nemirovski A.* Robust Truss Topology Design via Semidefinite Programming. SIAM Journal on Optimization 7, No. 4, 991-101 (1997).
11. *Nemirovsky A. and Yudin D.* Problem Complexity and Method Efficiency in Optimization. New York: J. Wiley & Sons, 1983.
12. *Nesterov Y.* Introductory Lectures on Convex Optimization: a basic course. Kluwer Academic Publishers, Massachusetts, 2004.
13. *Nesterov Y.* Subgradient methods for convex functions with nonstandard growth properties. https://www.mathnet.ru:8080/PresentFiles/16179/growthbm_nesterov.pdf, [Online; accessed 19-September-2018]
14. *Shpirko S., Nesterov Yu.* Primal-dual Subgradient Methods for Huge-scale Linear Conic Problem. SIAM Journal on Optimization 24, No. 3, 1444-1457 (2014).

Получена 19.09.2018

УДК 517.9+521.1+531.3

Обмен энергией в резонансных обратимых механических системах¹

В. Н. Тхай

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,
Москва 117997. E-mail: tkhai@ipu.ru

Аннотация. В окрестности равновесия изучается обратимая механическая система. Показывается, что при отсутствии резонанса обмен энергией между подсистемами невозможен. В ситуации резонансов 1:2 и 1:3 описывается сценарий обмена энергией между подсистемами.

Ключевые слова: обратимая механическая система, энергия, резонанс, обмен.

Energy exchange in resonant reversible mechanical systems

V. N. Tkhai

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow 117997.

Abstract. In the vicinity of equilibrium, a reversible mechanical system is studied. It is shown that in the absence of resonance energy exchange between the subsystems is impossible. In the situation of 1:2 and 1:3 resonances, the scenario of energy exchange between the subsystems is described.

Keywords: reversible mechanical system, energy, resonance, exchange.

MSC 2010: 37C80, 70G65, 70K30, 70S10

1. Введение

Явление обмена энергией между подсистемами наглядно демонстрируется [1] в биениях симпатических маятников: перекачка энергии сопровождается биениями маятников. В рамках линейной теории колебаний (см., например, [1]) явление объясняется близостью с близостью частот линейной связанной системы. При описании колебаний механической системы под действием позиционных сил в окрестности равновесия линейная система распадается на несвязанные линейные осцилляторы [2]. Значит, обмен энергией возможен при нелинейной связи.

Механическая система, подверженная действию потенциальных и неконсервативных позиционных сил [2], принадлежит к классу обратимых механических систем [3]. Обратимая динамическая система с фазовым вектором x и невырожденным отображением G обладает свойством пространственно-временной симметрии в смысле инвариантности относительно преобразования: $(x, t) \rightarrow (Gx, -t)$. В случае

$$G = \left\| \begin{array}{cc} I_l & 0 \\ 0 & I_n \end{array} \right\|, \quad l \geq n$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант No. № 19-01-00146

(I_j – единичная $(j \times j)$ -матрица) получим обратимую механическую систему. Фазовое пространство этой системы задается векторами u и v , так что $\dim u = l$, $\dim v = n$, а преобразование симметрии имеет вид: $(u, v, t) \rightarrow (u, -v, -t)$. Множество $M = \{u, v : v = 0\}$ называется неподвижным множеством обратимой механической системы.

Обратимыми механическими системами описывается динамика большинства моделей классической и небесной механики [3]. При этом за вектор u обычно принимается вектор обобщенных координат (квазикоординат), а за вектор v – вектор обобщенных скоростей (квазискоростей).

В нерезонанной ситуации в нормализованной (до сколь угодно большого конечного порядка) системе нелинейные связи между подсистемами отсутствуют [2]. Следовательно, обмен энергией между подсистемами возможен только при резонансе. Ниже рассматриваются резонансы третьего (1:2) и четвертого (1:3) порядков.

Такие резонансы важны для объяснения явлений в квантовой механике [5, 6] (1:2), нелинейной оптике [7] (1:2), физике плазмы [8] (1:2), небесной механике [9, 10] (1:2, 1:3), механике [2, 11] (1:3, 1:2). Обмен энергией между осцилляторами в гамильтоновой системе рассматривался [12] (резонанс 1:2) для системы первого нелинейного приближения. Обмен энергией наблюдается в конкретных механических задачах (см., например, [11, 13]). Явление обмена энергией проявляется на условно-периодических движениях [14, 15, 16, 17]: изучался резонанс 1:2. Качественное исследование обратимой системы при резонансе 1:3 дано в [18].

Цель работы – описать процесс обмена энергией в обратимых механических системах при резонансах 1:2 и 1:3.

2. Обратимая механическая система в окрестности равновесия

Постоянные решения обратимой механической системы, принадлежащие неподвижному множеству M , называются равновесиями этой системы. Полагая, что для равновесия $u = 0, v = 0$, и выделяя явно линейное приближение, запишем уравнения обратимой механической системы

$$\dot{u}_* = A_* v + U_*(u_*, v_*), \quad \dot{v}_* = B_* u_* + V_*(u_*, v_*), \quad (2.1)$$

$$U_*(u_*, -v_*) = -U_*(u_*, v_*), \quad V_*(u_*, -v_*) = V_*(u_*, v_*); u_* \in R^l, v_* \in R^n, l \geq n. \quad (2.2)$$

Постоянные матрицы A_* и B_* имеют размеры $(l \times n)$ и $(n \times l)$, соответственно.

Матрица A_* имеет не более n линейно независимых строк. Элементарное преобразование приводит A_* к виду, в котором $l - n$ строк заполнены нулями. Обозначим через ξ переменные u_* , отвечающие этим строкам. Тогда система (2.1) переписывается в виде

$$\dot{\xi} = \Xi(\xi, u, v), \quad \dot{u} = Av + U(\xi, u, v), \quad \dot{v} = Bu + B_1 \xi + V(\xi, u, v), \quad \xi \in R^{l-n}; u, v \in R^n, \quad (2.3)$$

где A и B — квадратные $(n \times n)$ -матрицы. Видно, что характеристическое уравнение в системе (2.3) имеет $l - n$ простых нулевых корней. Остальные корни λ находятся из уравнения

$$\det \|AB - \lambda^2 I_n\| = \det \|B - \lambda^2 I_n\| = 0 \quad (2.4)$$

и распадаются на пары $\pm \lambda_s, s = 1, \dots, n$.

Далее рассмотрим случай, когда $\det B \neq 0$, что обычно выполняется в механических задачах. Тогда, заменяя в (2.3) переменную u на $u + B^{-1}B_1\xi$, получим систему (2.3) с матрицей $B_1 = 0$.

Пусть все $\lambda_s^2 < 0, s = 1, \dots, n$ и среди них нет равных между собой. В этом случае $\text{rank}A = \text{rank}B = n$. Приведем систему линейного приближения к каноническому виду. Тогда получим

$$\frac{d\xi}{dt} = \Xi(\xi, \eta, \bar{\eta}), \quad \frac{d\eta}{dt} = \Lambda\eta + H(\xi, \eta, \bar{\eta}), \quad \frac{d\bar{\eta}}{dt} = -\Lambda\bar{\eta} + \bar{H}(\xi, \eta, \bar{\eta}), \quad (2.5)$$

где $\eta, \bar{\eta}$ — комплексно-сопряженные n -векторы, а $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Соответствующее линейное преобразование выберем в виде

$$\eta = P_*u + Q_*, \quad \bar{\eta} = \bar{P}_*u + \bar{Q}_*v, \quad (2.6)$$

в котором $P_*, \bar{P}_*(Q_*, \bar{Q}_*)$ — комплексно-сопряженные $(n \times n)$ -матрицы. Тогда матрицы P_* и Q_* удовлетворяют уравнениям

$$P_*AB = \Lambda^2 P_*, \quad Q_*BA = \Lambda^2 Q_*. \quad (2.7)$$

Уравнения (2.7) совместны в силу справедливости характеристического уравнения (2.4). Решения их не единственны. Найдем такое решение, чтобы система (2.5) была инвариантна относительно замены: $(\xi, \eta, \bar{\eta}, t) \rightarrow (\xi, \bar{\eta}, \eta, -t)$. Тогда обратимая механическая система (2.5) будет иметь такое неподвижное множество: $M^* = \{\xi, \eta, \bar{\eta} : \eta = \bar{\eta}\}$. Соответственно, разложения правых частей системы (2.5) содержат только чисто мнимые коэффициенты.

Решения уравнений (2.7), удовлетворяющие указанному условию, имеют вид

$$P_* = \Lambda P, \quad Q_* = PA, \quad PC = \Lambda^2 P, \quad C = AB, \quad (2.8)$$

где матрица P содержит только чисто мнимые элементы. При этом матрица P — невырожденная: строки P являются собственными векторами оператора C^T , соответствующими различным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Обратное преобразование задается формулами

$$u = P^{-1} \left(\frac{\eta_1 + \bar{\eta}_1}{2\lambda_1}, \dots, \frac{\eta_n + \bar{\eta}_n}{2\lambda_n} \right), \quad v = A^{-1}P^{-1} \left(\frac{\eta_1 - \bar{\eta}_1}{2}, \dots, \frac{\eta_n - \bar{\eta}_n}{2} \right)^T.$$

Отсюда следует, что вектор u задается действительной матрицей, а вектор v — матрицей из чисто мнимых элементов. Поэтому разложение функции $U(\xi, \eta, \bar{\eta})$ содержит только чисто мнимые коэффициенты, а разложение $V(\xi, \eta, \bar{\eta})$ — только действительные коэффициенты. Поэтому разложения функций $\Xi(\xi, \eta, \bar{\eta}), H(\xi, \eta, \bar{\eta}), \bar{H}(\xi, \eta, \bar{\eta})$ содержат только чисто мнимые коэффициенты.

Лемма 1. Пусть корни $\lambda_s^2, s = 1, \dots, n$, уравнения (2.4) отрицательны. Тогда преобразованием (2.6), (2.7), (2.8) система (2.3) приводится к виду (2.5), в котором разложения правых частей уравнений содержат только чисто мнимые коэффициенты.

При нелинейной нормализации системы (2.5) чисто мнимость коэффициентов в разложениях правых частей сохраняется (см. [19, сохранение автоморфизма]). Выполним эту нормализацию до членов $(K - 1)$ -го порядка. Предположим, что в системе отсутствуют резонансы до K -го порядка

$$p_1\lambda_1 + \dots + p_n\lambda_n = K,$$

где p_1, \dots, p_n суть натуральные числа. Тогда с точностью до членов $(K - 1)$ -порядка нормальная форма системы (2.5) имеет вид

$$\frac{d\xi}{dt} = 0, \quad \frac{d\eta}{dt} = \Lambda\eta + i\Phi(\eta\bar{\eta}), \quad \frac{d\bar{\eta}}{dt} = -\Lambda\bar{\eta} - i\Phi(\eta\bar{\eta})$$

(Φ — полином по $\eta\bar{\eta}$ с действительными коэффициентами). Следовательно, нормальная форма допускает первые интегралы

$$\xi = const, \quad \eta\bar{\eta} = const,$$

и обмена энергией между подсистемами не происходит.

Лемма 2. При отсутствии в системе (2.3) резонансов до K -го порядка включительно в укороченной до членов $(K - 1)$ -го порядка системе обмена энергией между подсистемами не происходит.

Ниже положим $l = n = 2$.

3. Обмен энергией при резонансе 1:2

Рассмотрим резонанс третьего порядка $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$. Нормальная форма системы (2.3) записывается в виде

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \lambda_1\eta_1 + iB_1\bar{\eta}_2^2 + \dots, \quad \frac{d\eta_2}{dt} = \lambda_2\eta_2 + iB_2\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2 + \dots, \quad (3.1)$$

где B_1, B_2 — действительные коэффициенты, а не выписанные явно слагаемые имеют порядок не выше второго; комплексно-сопряженная группа уравнений опущена.

Рассмотрим укороченную до квадратичных членов систему. В полярных координатах

$$\eta_s = \rho_s \exp(i\theta_s), \quad \bar{\eta}_s = \rho_s \exp(-i\theta_s), \quad s = 1, 2,$$

имеем

$$\dot{\rho}_1 = B_1\rho_2^2 \sin(\theta_1 + 2\theta_2), \quad \dot{\rho}_2 = B_2\rho_1\rho_2 \sin(\theta_1 + 2\theta_2),$$

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 + B_1 \rho_1^{-1} \rho_2^2 \cos(\theta_1 + 2\theta_2), \quad \dot{\theta}_2 = -\omega_2 + B_2 \rho_1 \cos(\theta_1 + 2\theta_2), \quad \lambda_1 = i\omega_1, \lambda_2 = -i\omega_2.$$

Учитывая равенство

$$\omega_1 + 2\omega_2 = 0,$$

группу уравнений для угловых переменных заменим одним уравнением для $\theta = \theta_1 + 2\theta_2$. Тогда получим замкнутую систему уравнений

$$\dot{\rho}_1 = B_1 \rho_2^2 \sin \theta, \quad \dot{\rho}_2 = B_2 \rho_1 \rho_2 \sin \theta, \quad \dot{\theta} = (B_1 \rho_1^{-1} \rho_2^2 + 2B_2 \rho_1) \cos \theta. \quad (3.2)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в существовании двух первых интегралов

$$B_2 \rho_1^2 - B_1 \rho_2^2 = \gamma(\text{const}), \quad \rho_1 \rho_2^2 \cos \theta = h(\text{const}), \quad (3.3)$$

в системе (3.2). Интегралы позволяют выполнить полный анализ системы.

Система (3.2) обладает очевидным многообразием решений, на котором

$$\rho_1 = \rho_1^0 > 0, \quad \rho_2 = 0, \quad \dot{\theta} = 2B_2 \rho_1^0 \cos \theta. \quad (3.4)$$

Из третьего уравнения системы (3.2) следует возможность существования решения, на котором $\theta(t) \equiv \pm\pi/2$, а углы меняются таким образом: $\dot{\rho}_1 = \pm B_1 \rho_2^2, \dot{\rho}_2 = \pm B_2 \rho_1 \rho_2$. При $B_1 B_2 > 0$ это означает существование решения, асимптотического к постоянному решению многообразия (3.4). В случае $B_1 B_2 < 0$ первый интеграл будет знакоопределенным: решение $\rho_1 = \rho_2 = 0$ системы (3.2) будет устойчивым, а ее траектории принадлежат эллипсам в первом квадранте плоскости (ρ_1, ρ_2) . Исследуем случай устойчивости.

Невозможность существования решения, на котором $\dot{\theta} = 0, \cos \theta \neq 0$, доказывается вычислениями:

$$B_1 \rho_2^2 = -2B_2 \rho_1^2, \quad \rho_2 = \sqrt{-2B_2/B_1} \rho_1,$$

$$\dot{\rho}_1 = B_1 (-2B_2/B_1) \rho_1^2 \sin \theta, \quad \sqrt{-2B_2/B_1} \dot{\rho}_1 = 2B_2 \rho_1^2 \sqrt{-2B_2/B_1} \sin \theta.$$

Рассмотрим решения, на которых $\rho_2 > 0, \theta(t) \neq \pm\pi/2$. Записывая второй интеграл в (3.3) в виде

$$\rho_1 (B_2 \rho_1^2 - \gamma) \cos \theta = h/B_1,$$

убеждаемся в колебательном характере радиуса $\rho_1(\cos \theta(t))$. Далее, из равенства

$$d\rho_1/d\rho_2 = B_1 \rho_1 / (B_2 \rho_2) \quad (3.5)$$

с учетом первого интеграла в (3.3) получается вывод об колебательном характере радиуса ρ_2 , противоположным характеру ρ_1 . Отсюда следует обмен энергией между подсистемами.

При $B_1 B_2 > 0$ нулевое решение системы (3.1) неустойчиво [2]. Отсутствие обмена энергией между подсистемами в этом случае следует из равенства

$$B_2 \rho_1^2 = B_1 \rho_2^2 + \gamma. \quad (3.6)$$

4. Обмен энергией при резонансе 1:3

Обратимся к двухчастотному резонансу четвертого порядка

$$\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0.$$

Здесь нормальная форма системы (2.3) записывается в виде

$$\begin{aligned}\frac{d\eta_1}{dt} &= \lambda_1\eta_1 + i(A_{11}|\eta_1|^2 + A_{12}|\eta_2|^2)\eta_1 + iB_1\bar{\eta}_2^3 + \dots, \\ \frac{d\eta_2}{dt} &= \lambda_2\eta_2 + i(A_{21}|\eta_1|^2 + A_{22}|\eta_2|^2)\eta_2 + iB_2\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2^2 + \dots,\end{aligned}$$

где $A_{ij}, B_i (i, j = 2)$ — действительные коэффициенты, а не выписанные явно слагаемые имеют порядок не выше третьего; комплексно-сопряженная группа уравнений опущена.

Рассмотрим случай, когда $B_1B_2 \neq 0$. Тогда, согласно ранее полученным результатам [2], необходимым и достаточным условием укороченной до членов третьего порядка системы является выполнение одного из двух условий: а) $B_1B_2 < 0$, б) $B_1B_2 > 0, |A_1B_1 + A_2B_2| > |B_1||B_2|^{3/2}$. Как следует из рассмотрения резонанса 1:2 обмен энергией происходит в случае устойчивости.

Выпишем укороченную систему в полярных координатах

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_1 &= B_1\rho_2^3 \sin \theta, \quad \dot{\rho}_2 = B_2\rho_1\rho_2^2 \sin \theta, \\ \dot{\theta}_1 &= \omega_1 + A_{11}\rho_1^2 + A_{12}\rho_2^2 + B_1\rho_1^{-1}\rho_2^3 \cos \theta, \quad \dot{\theta}_2 = -\omega_2 + A_{21}\rho_1^2 + A_{22}\rho_2^2 + B_2\rho_1\rho_2 \cos \theta, \\ \lambda_1 &= i\omega_1, \lambda_2 = -i\omega_2, \theta = \theta_1 + 3\theta_2.\end{aligned}$$

Учитывая равенство

$$\omega_1 + 3\omega_2 = 0,$$

группу уравнений для углов заменим одним уравнением для θ . Тогда получим замкнутую систему уравнений

$$\dot{\rho}_1 = B_1\rho_2^3 \sin \theta, \quad \dot{\rho}_2 = B_2\rho_1\rho_2^2 \sin \theta, \quad \dot{\theta} = A_1\rho_1^2 + A_2\rho_2^2 + (B_1\rho_1^{-1}\rho_2^3 + 3B_2\rho_1\rho_2) \cos \theta, \quad (4.1)$$

$$A_j = A_{1j} + 3A_{2j}, \quad j = 1, 2.$$

Система (4.1) обладает очевидным многообразием периодических решений, на котором

$$\rho_1 = \rho_1^0 > 0, \quad \rho_2 \equiv 0, \quad \dot{\theta} = A_1(\rho_1^0)^2. \quad (4.2)$$

На постоянных решениях системы (4.1) имеем: $\rho_1 = const, \rho_2 = const, \theta \equiv 0$: значения радиусов вычисляются из третьего уравнения системы. Для остальных решений справедливо равенство (3.5).

Система (4.1) допускает два первых интеграла [2]

$$V \equiv B_2\rho_1^2 - B_1\rho_2^2 = \gamma(const),$$

$$W \equiv A_1 B_2 \rho_1^4 + A_2 B_1 \rho_2^4 + 4B_1 B_2 \rho_1 \rho_2^3 \cos \theta = h(const).$$

Из интеграла V и равенства (3.5) следует, что в случае $B_1 B_2 < 0$, радиусы ρ_1 и ρ_2 меняются разно направлено: присходит обмен энергией между подсистемами.

Исследуем случай $B_1 B_2 > 0$. Связка интегралов

$$H = V^2 + W^2$$

будет знакоопределенной, если на многообразии $V = 0$ функция $W|_{V=0} \neq 0$. Вычислим

$$W|_{V=0} = B_1^{-1} B_2 [A_1 B_1 + A_2 B_2 + 4|B_1|^{1/2} |B_2|^{3/2} \cos \theta] \rho_1^4 \neq 0,$$

если

$$|A_1 B_1 + A_2 B_2| > 4|B_1|^{1/2} |B_2|^{3/2}.$$

Отсюда следует устойчивость. Однако обмен энергией между подсистемами не наблюдается, что следует из записи

$$B_2 \rho_1^2 = B_1 \rho_2^2 + \gamma.$$

5. Заключение

Изучение обратимой механической системы в окрестности равновесия показывает, что при отсутствии резонанса обмен энергией между подсистемами невозможен. В случае резонанса 1:2 подсистемы обмениваются энергией, когда само равновесие устойчиво. В ситуации резонанса 1:3 явление наблюдается в случае знакоопределенности квадратичного интеграла, в противном случае подсистемы не обмениваются энергией как в окрестности устойчивого, так и неустойчивого равновесия.

Список цитируемых источников

1. *Зоммерфельд А.* Механика. — Москва-Ижевск: РХД, 2001. — 368 с.
Sommerfeld, A. Vorlesungen über theoretische Physik. Bd. 1: Mechanik. Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft Becker & Erler Kom.-Ges. (1943).
2. *Тхай В.Н.* Об устойчивости механических систем под действием позиционных сил // Прикладная математика и механика. — 1980. — Т.44, вып.1. — С. 40–48.
Thai, V. N. On stability of mechanical systems under the action of position forces. Journal of Applied Mathematics and Mechanics 44, No.1, 24-29 (1980).
3. *Тхай В.Н.* Обратимость механических систем // Прикладная математика и механика. — 1991. — Т. 55, вып.4. — С. 578–586.
Thai, V. N. The reversibility of mechanical systems. Journal of Applied Mathematics and Mechanics 55, No.4, 461-468 (1991).
4. *Lamb J.S.W., Roberts J.A.G.* Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey // Physica D. — 1998. — V.112. No.1-2. P. 1–39.

5. *Fermi E.* Über der Ramanefect des kohlendioxyds // *Z. Phys.*— 1931. — Т.71, №2. — S. 250–259.
6. *Vitt A., Gorelik G.* Колебания упругого маятника как пример колебаний двух параметрически связанных линейных систем // *Журнал технической физики.* — 1933. — Т. III, вып. 2-3. — С. 294–307.
Vitt, A., Gorelik, G. Oscillations of an elastic pendulum as an example of oscillations of two parametrically coupled linear systems. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* 3, issue 2-3, 294–307 (1933). (in Russian)
7. *Ахманов С.А., Хохлов Р.В.* Проблемы нелинейной оптики (электромагнитные волны в нелинейных диспергирующих средах). М.: АН СССР, Институт научной информации, 1964. — 298 с.
Akhmanov, S. A., Khokhlov, R. V. Problems of nonlinear optics (electromagnetic waves in nonlinear dispersive media). Moscow: AN SSSR, 1964. (in Russian)
8. *Wersinger J.M., Finn J.M., Ott E.* Bifurcation and strange behavior in instability saturation by nonlinear three-wave mode coupling // *Physics of Fluids.* — 1980. — Т. 23, №6. — P. 1142–1164.
9. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. — М.: Наука, 1978. — 312 с.
Markeev, A. P. Libration points in celestial mechanics and cosodynamics. Moscow: Nauka, 1978. (in Russian)
10. *Кунцын А.Л., Маркеев А.П.* Устойчивость в резонансных случаях // *Итоги науки и техники. Общая механика.* М.: ВИНТИ, 1979. — Т.4. — С. 58–139.
Kunitsyn, A. L.; Markeev, A. P. Stability in resonance cases. *Itoги Nauki Tekh., Ser. Obshch. Mekh.* 4, 58-139 (1979). (in Russian)
11. *Морозов Н.Ф., Товстик П.Е.* Поперечные колебания стержня, вызванные продольным ударом. — *Доклады РАН.* — 2013. — Т. 452, № 1. — С. 37–41.
Morozov, N. F.; Tovstik, P. E. Transverse vibrations of the rod caused by longitudinal impact. *Doklady RAN* 452, No.1, 37-41 (2013). (in Russian)
12. *Цельман Ф.Х.* О перекачке энергии между связанными осцилляторами в случае резонанса третьего порядка // *Прикладная математика и механика.* — 1970. — Т.14, вып.5. — С. 957–962.
Tsel'man, F. Kh. On “pumping transfer of energy” between nonlinearly coupled oscillators in third-order resonance. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 34, No.5, 916-922 (1970).
13. *Алдошин Г.Т., Яковлев С.П.* Динамика качающейся пружины с подвижным подвесом // *Вестник СПбГУ. Сер.1.* — 2012. — Вып.4. — С. 45–52.
Aldoshin, G. T.; Yakovlev, S. P. Dynamics of a swinging spring with a movable suspension. *Vestnik SPBGU, ser.1, No.4,* 45-52 (2012). (in Russian)
14. *Knobloch E., Proctor R.E.* The double Hopf bifurcation with 2:1 resonance // *Proceedings of the Royal Society of London. A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* — 1988. — Т. 415, №1848. — С. 61-90.
15. *LeBlanc V.G., Langford W.F.* Classification and unfoldings of 1:2 resonant Hopf bifurcations. *Arhive for rational mechanics and analysis* 136, No.4, 305–357 (1996).

16. *Volkov D.Yu.* The Andronov-Hopf bifurcations with 2:1 resonance. *Journal of Mathematical Sciences* 128, No.2, 2831–2834 (2005).
17. *Холостова О.В.* О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе третьего порядка // *Прикладная математика и механика*. — 2010. — Т.74, вып.5. — С. 789–811.
Kholostova, O.V. Non-linear oscillations of a Hamiltonian system with two degrees of freedom with 2:1 resonance. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 74, No.5, 563-578 (2010).
18. *Тхай В.Н.* Качественное исследование обратимой системы на плоскости при резонансе 1:3 // *Некоторые задачи динамики механических систем*. — М.: МАИ, 1991. — С. 50–56.
Thai, V. N. Qualitative investigation of a reversible system on a plane at a 1: 3 resonance. In *Nekotorye zadachi dinamiki mekhanicheskikh sistem* (pp. 50-56), Moscow: MAI, 1991.
19. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979. — 253 с.
Bruno, A. D. Local methods in nonlinear differential equations. Part I: The local method of nonlinear analysis of differential equations; Part II: The sets of analyticity of a normalizing transformation. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1989.

Получена 26.10.2018

УДК 517.98

Колебания идеальной стратифицированной жидкости с упругой мембраной

Д. О. Цветков

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Симферополь, 295007, e-mail: *tsvetdo@gmail.com*

Аннотация. Изучается задача о малых движениях и нормальных колебаниях идеальной стратифицированной жидкости с упругой мембраной на «свободной» поверхности. Используя метод ортогонального проектирования и введения вспомогательных задач, исходная начально-краевая задача сводится к равносильной задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в некотором гильбертовом пространстве. Получены условия, при которых существует сильное по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию данной гидросистемы. Изучена структура спектра, вопросы базисности собственных функций.

Ключевые слова: стратифицированная жидкость, упругая мембрана, начально-краевая задача, метод ортогонального проектирования, задача Коши в гильбертовом пространстве, сильное решение, спектральная задача, собственные функции.

Oscillations of an ideal stratified fluid with an elastic membrane

D. O. Tsvetkov

V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. We study the problem on small motions and normal oscillations of an ideal stratified fluid with an elastic membrane on the «free» surface. Using method of orthogonal projecting the boundary conditions on the moving surface and the introduction of auxiliary problems of the original initial-boundary value problem is reduced to the equivalent Cauchy problem for a differential equation of second order in some Hilbert space. We find sufficient existence conditions for a strong (with respect to the time variable) solution of the initial-boundary value problem describing the evolution of the specified hydrodynamics system. The spectrum of normal oscillations, basic properties of eigenfunctions and other questions are studied.

Keywords: stratification effect in ideal fluids, differential equation in Hilbert space, strong solution, normal oscillations, spectral problem, eigenvalues, Riesz basis.

MSC 2010: 76B70, 35D35, 35P05

Введение

Создание резервуаров большой емкости для хранения жидкости в сейсмоопасных районах и транспортировки жидких грузов требует тщательного анализа возможного резонансного возбуждения волновых движений жидкости. Одним из средств ограничения ее подвижности могут быть мембраны или пластинки, закрывающие свободную поверхность жидкости.

© Д. О. ЦВЕТКОВ

В статье [1] исследована плоская задача о малых колебаниях физического маятника, содержащего идеальную двухслойную жидкость с упругой мембраной на «свободной» поверхности. (Под «свободной» будем понимать верхнюю границу жидкости. Поскольку мембрана все же является механическим ограничителем движений жидкости, то этот термин используется в кавычках.) С использованием теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве доказано существование дискретного спектра собственных частот колебаний. В работах [2] — [6] рассмотрены задачи о колебаниях однородной и многослойной идеальной и вязкой жидкости с упругими мембранами на «свободной» поверхности и границах раздела жидкостей. Методами функционального анализа были изучены вопросы разрешимости начально-краевых задач, структуры и характера спектра нормальных колебаний.

В представленной работе рассматривается задача о малых движениях и нормальных колебаниях идеальной стратифицированной жидкости с упругой мембраной на «свободной поверхности». В частности, исходная задача сводится к дифференциально-операторному уравнению второго порядка в некотором гильбертовом пространстве, при этом структура операторных коэффициентов имеет более сложную структуру, чем в представленных выше работах (многослойные однородные жидкости), что приводит к усложнению получения итоговой теоремы о разрешимости.

1. Эволюционная задача

1.1. Математическая формулировка задачи

Пусть идеальная стратифицированная жидкость, плотность которой в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси, частично заполняет неподвижный сосуд и занимает в состоянии покоя область Ω , ограниченную твердой стенкой S и горизонтальной границей Γ , на которой находится упругая мембрана. Обозначим через ρ_m поверхностную плотность мембраны, а через σ — величину ее предварительного растяжения. Считаем, что на границе $\partial\Gamma$ мембрана закреплена, то есть ее смещение равно нулю. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с сосудом, таким образом, что ось Ox_3 направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится на Γ . Обозначим через \vec{n} единичный вектор, нормальный к $\partial\Omega$ и направленный вне Ω , через $\rho_0 = \rho_0(x_3)$ — плотность жидкости в состоянии покоя. Предполагаем далее, что твердая стенка $S \subset \partial\Omega$ является липшицевой поверхностью, причем $\partial S = \partial\Gamma$ — липшицева кривая.

Отметим, что вертикальное отклонение мембраны $x_3 = \zeta(t, \hat{x})$, $\hat{x} = (x_1, x_2) \in \Gamma$, при ее малых колебаниях удовлетворяет уравнению (см., например, [7, с.34]):

$$\rho_m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \sigma \Delta_2 \zeta + P(t, \hat{x}), \quad (1.1)$$

где Δ_2 — двухмерный Лапласиан, а $P(t, \hat{x})$ — давление, действующее на единицу площади мембраны сверху вниз.

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкости по плотности:

$$0 < N_{min}^2 \leq N^2(x_3) \leq N_{max}^2 = N_0^2 < \infty, \quad N^2(x_3) = -\frac{g\rho_0'(x_3)}{\rho_0(x_3)}, \quad \rho_0(0) > 0, \quad (1.2)$$

Функцию $N(x_3)$ называют частотой Вьяйсяля-Брента, или частотой плавучести.

В состоянии покоя давление в жидкости распределено по закону

$$p_0 = p_0(x_3) = p_0(0) - g \int_0^{x_3} \rho_0(\tau) d\tau. \quad (1.3)$$

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Обозначим через $\vec{u} = \vec{u}(t, x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ поле скорости в жидкости, $p = p(t, x)$ — отклонение поля давлений от равновесного давления (1.3), а через $\rho = \rho(t, x)$ — отклонения поля плотности от исходного поля $\rho_0(x_3)$. Кроме того, полагаем, что на исследуемую гидродинамическую систему дополнительно к гравитационному полю действует малое поле внешних сил $\vec{f} = \vec{f}(t, x)$, $x \in \Omega$.

Линеаризованные уравнения для определения функций \vec{u} , p , ρ имеют вид:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \rho_0^{-1}(x_3) (-\nabla p - g\rho \vec{e}_3 + \mu \Delta \vec{u}) + \vec{f}(x, t) \quad (\text{в } \Omega), \quad (1.4)$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega). \quad (1.5)$$

На твердой стенке S для вязкой жидкости должно выполняться условие непротекания:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} =: \vec{u}_n = 0 \quad (\text{на } S). \quad (1.6)$$

Кроме того, вертикальные отклонения жидкости на мембранной перегородке равно вертикальному отклонению мембраны. Отсюда вытекает следующие кинематическое условие:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = u_n = \vec{u} \cdot \vec{n} \quad (\text{на } \Gamma). \quad (1.7)$$

Динамическое граничное условие получается из уравнения мембраны (1.1). Раскладывая давление $P(t, \hat{x})$ по формуле Тейлора в точке $x_3 = 0$ и оставляя при этом только линейный член, приходим к условию:

$$\rho_m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \sigma \Delta_2 \zeta - g\rho_0(0)\zeta + p \quad (\text{на } \Gamma). \quad (1.8)$$

Таким образом, малые движения исходной системы описываются следующей начально-краевой задачей:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \rho_0^{-1}(x_3) (-\nabla p - g\rho \vec{e}_3) + \vec{f}(t, x) \quad (\text{в } \Omega), \quad (1.9)$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad (1.10)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n} =: u_n = 0 \quad (\text{на } S), \quad u_n = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta \, d\Gamma = 0,$$

$$\rho_m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \sigma \Delta_2 \zeta - g \rho_0(0) \zeta + p \quad (\text{на } \Gamma), \quad \zeta = 0 \quad (\text{на } \partial \Gamma), \quad (1.11)$$

$$\vec{u}(0, x) = \vec{u}^0(x), \quad \rho(0, x) = \rho^0(x) \quad (x \in \Omega), \quad \zeta(0, \hat{x}) = \zeta_0(\hat{x}) \quad (\hat{x} \in \Gamma). \quad (1.12)$$

Последние три условия – это начальные условия, которые добавлены к задаче для полноты ее формулировки, $\int_{\Gamma} \zeta \, d\Gamma = 0$ – условия сохранения объема, второе условие (1.11) – условие закрепления мембраны по контуру.

1.2. Закон баланса полной энергии

Прежде чем исследовать задачу (1.9) – (1.12), выведем закон баланса полной энергии данной гидродинамической системы. Будем считать, что задача имеет классическое решение, то есть такие функции $\vec{u}(t, x)$, $p(t, x)$, $\rho(t, x)$ и $\zeta(t, \hat{x})$, для которых все слагаемые в уравнениях и краевых условиях являются непрерывными функциями своих переменных.

Лемма 1. *Для классического решения задачи (1.9) – (1.12) имеет место закон баланса полной энергии:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left[\left(g^2 \int_{\Omega} [\rho_0(x_3) N^2(x_3)]^{-1} |\rho|^2 \, d\Omega + \sigma \int_{\Gamma} (|\nabla_2 \zeta|^2 + \sigma^{-1} g \rho_0(0) |\zeta|^2) \, d\Gamma \right) + \right. \\ \left. + \left(\int_{\Omega} \rho_0(x_3) |\vec{u}|^2 \, d\Omega + \rho_m \int_{\Gamma} |\partial \zeta / \partial t|^2 \, d\Gamma \right) \right] = \int_{\Omega} \rho_0(x_3) \vec{f} \cdot \vec{u} \, d\Omega. \quad (1.13) \end{aligned}$$

Левая часть (1.13) представляет собой сумму производной по t полной кинетической энергии системы и ее потенциальной энергии. Полная кинетическая энергия (вторая скобка слева) равна сумме кинетической энергии жидкости в области Ω и кинетической энергии мембраны. Полная потенциальная энергия (первая скобка) равна сумме потенциальной энергии, обусловленной наличием сил плавучести и потенциальной энергии мембраны. Правая часть (1.13) есть мощность внешних сил.

1.3. Исключение поля плотности

В начально-краевой задаче (1.9) – (1.12) можно исключить одну искомую функцию – поле плотности $\rho(t, x)$, если ввести взамен поля скорости $\vec{u}(t, x)$ поле малых смещений частиц жидкости $\vec{v}(t, x)$, связанное с $\vec{u}(t, x)$ соотношениями

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{u}, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad (1.14)$$

тогда $\rho(t, x) = -\rho'_0(x_3) v_3(t, x) + f_0(x)$, где $f_0(x) := \rho(0, x) + \rho'_0(x_3) v_3(0, x)$, $v_3 := \vec{v} \cdot \vec{e}_3$.

С учетом сказанного перепишем исходную задачу (1.9) — (1.12) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} &= -\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p - N^2(x_3)v_3\vec{e}_3 + \psi_0(x), \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \\ \vec{v} \cdot \vec{n} &=: v_n = 0 \quad (\text{на } S), \quad \int_{\Gamma} v_3 d\Gamma = 0, \quad p = \sigma B_{\sigma} v_3 + \rho_m \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \quad (\text{на } \Gamma), \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(0, x) &= \vec{u}(0, x) = \vec{u}^0(x), \quad \vec{v}(0, x) = \vec{v}^0(x), \quad v_3(0, \hat{x}) = \zeta(0, \hat{x}) = \zeta^0(\hat{x}) \quad (\hat{x} \in \Gamma). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Линейный дифференциальный оператор B_{σ} задается выражением:

$$B_{\sigma} := -\Delta_2 v_3 + \sigma^{-1} g \rho_0(0) v_3 \quad (1.16)$$

на области определения $\mathcal{D}(B_{\sigma}) = \{ \zeta \in H^2(\Gamma) \mid \zeta = 0 \text{ } (\partial\Gamma) \}$.

1.4. Проектирование уравнений движения

Начально-краевую задачу (1.15) приведем в дальнейшем к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве. Для этого применим прием проектирования первого уравнения (1.15) на ортогональные подпространства (см. [8]). Свяжем с функцией ρ_0 гильбертово пространство $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ вектор-функций со скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \rho_0(x_3) \vec{u}(x) \overline{\vec{v}(x)} d\Omega.$$

Имеет место следующее разложение (см. подробнее, например, [9]):

$$\vec{L}_2(\Omega, \rho_0) = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0), \quad (1.17)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) &= \{ \vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) : \operatorname{div} \vec{v} = 0 \text{ (в } \Omega), v_n = 0 \text{ (на } \partial\Omega) \}, \\ \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) &= \{ \vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) : \vec{v} = \rho_0^{-1} \nabla p, v_n = 0 \text{ (на } S), \nabla \cdot \vec{v} = 0 \text{ (в } \Omega), \int_{\Gamma} p d\Gamma = 0 \}, \\ \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0) &= \{ \vec{w} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) : \vec{w} = \rho_0^{-1} \nabla \varphi, \varphi = 0 \text{ (на } \Gamma) \}. \end{aligned}$$

Будем считать $\vec{v}(t, x)$ и $\rho_0^{-1} \nabla p(t, x)$ функциями переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$, тогда в силу уравнений и граничных условий (1.15), ортогонального разложения (1.17) имеем

$$\begin{aligned} \vec{v}(t, x) &\in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) =: \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0), \\ \rho_0^{-1} \nabla p(t, x) &\in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) =: \vec{G}(\Omega, \rho_0). \end{aligned}$$

Поэтому при каждом t будем разыскивать их в виде

$$\begin{aligned} \vec{v}(t, x) &= \vec{w}(t, x) + \rho_0^{-1} \nabla \Phi(t, x), \quad \vec{w}(t, x) \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad \rho_0^{-1} \nabla \Phi(t, x) \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0), \\ \rho_0^{-1} \nabla p(t, x) &= \rho_0^{-1} \nabla p_1(t, x) + \rho_0^{-1} \nabla p_2(t, x), \\ \rho_0^{-1} \nabla p_1(t, x) &\in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0), \quad \rho_0^{-1} \nabla p_2(t, x) \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Обозначим через P_0 , $P_{h,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ ортопроекторы на подпространства $\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$, $\vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$, $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0)$ соответственно. Тогда, подставляя (1.18) в первое уравнение (1.15) и применяя ортопроекторы, получаем

$$\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} + P_0 \left[N^2(x_3) \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + w_3 \right) \vec{e}_3 \right] = P_0 \psi_0, \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_0^{-1} \nabla \Phi) + \rho_0^{-1} \nabla p_1 + P_{h,S} \left[N^2(x_3) \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + w_3 \right) \vec{e}_3 \right] = P_{h,S} \psi_0, \quad (1.20)$$

$$\rho_0^{-1} \nabla p_2 + P_{0,\Gamma} \left[N^2(x_3) \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + w_3 \right) \vec{e}_3 \right] = P_{0,\Gamma} \psi_0. \quad (1.21)$$

Из соотношения (1.21) следует, что составляющая поля давлений, обусловленная слагаемым $\rho_0^{-1} \nabla p_2$, определяется лишь полем вертикального смещения v_3 и начальными условиями, следовательно, достаточно ограничиться рассмотрением первых двух соотношений, а также граничного условия с соответствующей заменой $p \rightarrow p_1$, так как $p = p_1 + p_2$, $p_2 = 0$ (на Γ).

Для перехода от (1.19), (1.20) к системе уравнений с двумя искомыми функциями введем новые элементы:

$$P_{h,S} \left[N^2(x_3) w_3 \vec{e}_3 \right] := \rho_0^{-1} \nabla \Psi, \quad P_{h,S} \left[N^2(x_3) \rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \vec{e}_3 \right] := \rho_0^{-1} \nabla \eta. \quad (1.22)$$

Тогда (1.20) дает интеграл Коши-Лагранжа

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + p_1 + \Psi + \eta - F = c(t) \quad (\text{в } \Omega), \quad (1.23)$$

где $c(t)$ – произвольная функция времени, $P_{h,S} \psi_0 = \rho_0^{-1} \nabla F$.

Рассмотрим (1.23) на Γ и воспользуемся равенством

$$p_1 = \rho_m \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \sigma B_\sigma v_3 = \rho_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) + \sigma B_\sigma \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) \quad (\text{на } \Gamma);$$

получим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \sigma B_\sigma \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) + \rho_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на } \Gamma). \quad (1.24)$$

Это соотношение вместе с (1.19) дают уравнения для определения двух искоемых функций $\vec{w}(t, x)$ и $\Phi(t, x)$, при этом учитываются связи (1.22). Таким образом, начально-краевую задачу (1.15) перепишем в виде:

$$\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} + P_0 \left[N^2(x_3) \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + w_3 \right) \vec{e}_3 \right] = P_0 \psi_0 \quad (\text{в } \Omega), \quad (1.25)$$

$$\operatorname{div} \vec{w} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{w} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } \partial \Omega),$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \sigma B_\sigma \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) + \rho_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на } \Gamma), \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\rho_0^{-1}(x) \nabla \Phi) &= 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x) \nabla \Phi \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \\
\int_{\Gamma} \Phi d\Gamma &= 0, \quad \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} d\Gamma = 0, \\
\frac{\partial}{\partial t} \vec{w}(0, x) &= P_0 \vec{u}^0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} (0, \hat{x}) \right)_{\Gamma} = [(P_{h,S} \vec{u}^0(x)) \cdot \vec{n}]_{\Gamma}, \\
\vec{w}(0, x) &= P_0 \vec{v}^0, \quad \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} (0, \hat{x}) \right)_{\Gamma} = \zeta^0(\hat{x}) \quad (\hat{x} \in \Gamma).
\end{aligned} \tag{1.27}$$

1.5. Переход к системе дифференциально операторных уравнений

Свяжем с поверхностью Γ гильбертово пространство (скалярных) функций $L_2(\Gamma)$ со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_{\Gamma} := \int_{\Gamma} \varphi(\hat{x}) \psi(\hat{x}) d\Gamma$$

и соответствующей нормой.

Лемма 2. *Оператор $B_{\sigma} : \mathcal{D}(B_{\sigma}) \subset L_2(\Gamma) \rightarrow L_2(\Gamma)$ является симметричным положительно определенным оператором, действующим в $L_2(\Gamma)$.*

Доказательство. В силу формулы Грина и граничных условий для ζ из области определения оператора B_{σ} получаем:

$$\begin{aligned}
(B_{\sigma} \zeta, \zeta) &= - \int_{\Gamma} \Delta_2 \zeta \cdot \zeta d\Gamma + \sigma^{-1} g \rho_0(0) \int_{\Gamma} |\zeta|^2 d\Gamma = \int_{\Gamma} |\nabla_2 \zeta|^2 d\Gamma + \sigma^{-1} g \rho_0(0) \int_{\Gamma} |\zeta|^2 d\Gamma \geq \\
&\geq \sigma^{-1} g \rho_0(0) \int_{\Gamma} |\zeta|^2 d\Gamma = \sigma^{-1} g \rho_0(0) \|\zeta\|_{L_2(\Gamma)}^2.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, симметрия оператора B_{σ} и положительная определенность в $L_2(\Gamma)$. \square

Известно, что симметричный положительно определенный оператор, действующий в (вещественном) гильбертовом пространстве и заданный на плотном в этом пространстве множестве, допускает расширение по Фридрихсу до самосопряженного положительно определенного оператора с той же нижней гранью. Поэтому далее будем считать, в силу леммы 2, что оператор B_{σ} уже расширен по Фридрихсу на более широкое множество, обеспечивающее самосопряженность расширенного оператора, который снова будем обозначать через B_{σ} . Кроме того, $\mathcal{D}(B_{\sigma}) \subset H_{B_{\sigma}}$, где $H_{B_{\sigma}}$ — энергетическое пространство оператора B_{σ} .

Лемма 3. Оператор $B_\sigma : \mathcal{D}(B_\sigma) \subset L_2(\Gamma) \rightarrow L_2(\Gamma)$ (после расширения по Фридрихсу) – неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор с дискретным спектром, то есть его спектр состоит из конечнократных положительных собственных значений $\{\lambda_k(B_\sigma)\}_{k=1}^\infty$ с предельной точкой $\lambda = +\infty$, а собственные функции образуют ортогональный базис как в $L_2(\Gamma)$, так и в энергетическом пространстве H_{B_σ} . Обратный оператор B_σ^{-1} является компактным и положительным в $L_2(\Gamma)$. Энергетическое пространство $H_{B_\sigma} \subset L_2(\Gamma)$ оператора B_σ состоит из тех элементов из $L_2(\Gamma)$, для которых конечна квадратичная форма

$$\|u\|_{B_\sigma}^2 = \int_\Gamma |\nabla_2 \zeta|^2 d\Gamma + \sigma^{-1} g \rho_0(0) \int_\Gamma |\zeta|^2 d\Gamma, \quad (1.28)$$

причем $\mathcal{D}(B_\sigma^{1/2}) = H_{B_\sigma}$.

Доказательство. Доказательство основано на положениях общей теории положительно определенных операторов, теоремах вложения функциональных пространств и понятии эквивалентных норм. Действительно, нормы $\|\cdot\|_{B_\sigma}^2$ и $\|\cdot\|_{H^1(\Gamma)}^2$ эквивалентны. Так как согласно теореме вложения С.Л.Соболева пространство $H^1(\Gamma)$ компактно вложено в $L_2(\Gamma)$, то H_{B_σ} также компактно вложено в $L_2(\Gamma)$. Поэтому, по теореме С.Г.Михлина (см., например, [10, с.145]) оператор B_σ имеет дискретный спектр со свойствами, описанными в формулировке данной теоремы, а обратный оператор B_σ^{-1} является компактным положительным оператором: $0 < B_\sigma^{-1} = (B_\sigma^{-1})^*$. \square

Для перехода к операторной формулировке исследуемой задачи рассмотрим ряд вспомогательных задач.

Напомним, что отклонение $v_3|_\Gamma = (\rho_0^{-1}(\partial\Phi/\partial x_3) + w_3)|_\Gamma$ частиц подвижной поверхности должно удовлетворять условию сохранения объема жидкости при колебаниях:

$$\begin{aligned} \int_\Gamma v_3 d\Gamma &= \int_\Gamma \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3 \right) d\Gamma = 0 \implies \\ &\implies \int_\Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} d\Gamma = 0, \quad \text{так как } w_3|_\Gamma = 0, \quad \rho_0^{-1}|_\Gamma = \text{const}. \end{aligned}$$

Это же условие является необходимым условием разрешимости следующей задачи.

Вспомогательная задача (задача Неймана).

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_0^{-1}(x) \nabla \Phi) &= 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x) \nabla \Phi \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \\ \rho_0^{-1}(0) \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} &= \psi \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_\Gamma \psi d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Введем в пространстве $H_0 = L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$ его оснащение в виде $H_+ \subset H_0 \subset H_-$, где $H_+ = H^{1/2}(\Gamma) \cap H_0 =: H_\Gamma^{1/2}$, $H_- = (H_+)^* =: \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}$. Здесь через $\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ обозначено пространство, сопряженное с $H_\Gamma^{1/2}$ с центральным пространством $L_{2,\Gamma}$. В частности, $\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ состоит из тех элементов из $H^{-1/2}(\Gamma)$, которые продолжимы нулем в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ (см. [11], гл. 3).

Будем считать, что $\psi = \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} \right)_\Gamma$ есть заданная функция из пространства $\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}$. Тогда, рассматривая задачу Неймана с заданной ψ , получим (см., например, [12]), что

$$\Phi(x) = T\psi \in H_{h,S}^1(\Omega, \rho_0),$$

где $T : \tilde{H}_\Gamma^{-1/2} \rightarrow H_{h,S}^1(\Omega, \rho_0)$ — ограниченный линейный оператор. Здесь $H_{h,S}^1(\Omega, \rho_0)$ — подпространство квазигармонических функций, удовлетворяющих условию Неймана на S , пространства $H_\Gamma^1(\Omega, \rho_0)$ с квадратом нормы

$$\|\Phi\|_{H_\Gamma^1(\Omega, \rho_0)}^2 := \int_\Omega \rho_0^{-1} |\nabla\Phi|^2 d\Omega, \quad \int_\Gamma \Phi d\Gamma = 0.$$

Введем теперь оператор следа γ_Γ : для любой $\Phi(x) \in H_{h,S}^1(\Omega, \rho_0)$ по определению

$$\gamma_\Gamma\Phi := \Phi|_\Gamma.$$

Отметим, что оператор γ_Γ ограниченно действует из $H^1(\Omega, \rho_0)$ (а потому и из подпространства $H_{h,S}^1(\Omega, \rho_0)$) в $H_+ = H_\Gamma^{1/2}$. Отсюда получаем, что

$$\gamma_\Gamma\Phi = \Phi|_\Gamma = \gamma_\Gamma T\psi = \gamma_\Gamma T \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} \right)_\Gamma =: C \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} \right)_\Gamma, \quad (1.30)$$

где оператор $C = \gamma_\Gamma T : \tilde{H}_\Gamma^{-1/2} = H_- \rightarrow H_\Gamma^{1/2} = H_+$ является линейным ограниченным оператором.

В работе [12] доказана следующая лемма.

Лемма 4. *Сужение оператора C на $H_0 \subset H_-$ является линейным компактным самосопряженным положительным оператором, действующим в пространстве H_0 .*

Следствием доказанной леммы является такое утверждение: оператор $C : H_0 \rightarrow H_0$ имеет обратный оператор C^{-1} , который является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором, действующим в H_0 и заданным на области определения $\mathcal{D}(C^{-1}) = \mathcal{R}(C)$, плотной в H_0 . Кроме того, оператор $C^{-1/2}$ переводит $\mathcal{D}(C^{-1/2}) = H_+$ в H_0 , а оператор $C^{1/2}$ — соответственно H_0 в $\mathcal{D}(C^{-1/2}) = H_+$ (изометрическим образом). Как следует из общей теории оснащенных гильбертовых пространств, расширение оператора $C^{-1/2}$ (которое будем обозначать так же) с $\mathcal{D}(C^{-1/2}) = H_+$ на H_0 является изометрическим оператором,

переводящим все H_0 на все $H_- = \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}$. Соответственно оператор $C^{1/2}$ (после расширения на H_-) переводит изометрически все H_- на все H_0 .

Согласно выше приведенным построениям, перепишем систему уравнений (1.25) и (1.26) вместе, проектируя дополнительно (1.26) на H_0 ; затем осуществим замену:

$$\psi = \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_\Gamma = C^{-1/2} y, \quad y \in H_0, \quad (1.31)$$

считая, что $P_{H_0} F \in \mathcal{D}(C^{-1/2})$, и применим к преобразованному уравнению (1.26) оператор $C^{-1/2}$, в результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} + P_0 \left[N^2(x_3) ((UC^{-1/2}y)\vec{e}_3) \vec{e}_3 \right] + P_0 \left[N^2(x_3) w_3 \vec{e}_3 \right] &= P_0 \psi_0, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[I + \rho_m C^{-1} \right] y + \sigma C^{-1/2} B C^{-1/2} y + C^{-1/2} P_{H_0} (\Psi + \eta) &= C^{-1/2} P_{H_0} F. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Здесь через $U : \tilde{H}_\Gamma^{-1/2} \rightarrow \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$ обозначен оператор, который посредством решения задачи (1.29) ставит в соответствие элементу $\psi \in \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ функцию $\rho_0^{-1} \nabla \Phi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$; $B = P_{H_0} B_\sigma P_{H_0}$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} M_{11} \vec{w} &:= P_0 \left[N^2(x_3) w_3 \vec{e}_3 \right], \quad M_{12} y := P_0 \left[N^2(x_3) ((UC^{-1/2}y)\vec{e}_3) \vec{e}_3 \right], \\ M_{21} \vec{w} &:= C^{-1/2} P_{H_0} \Psi, \quad \rho_0^{-1} \nabla \Psi = P_{h,S} \left[N^2(x_3) w_3 \vec{e}_3 \right], \\ M_{22} y &:= C^{-1/2} P_{H_0} \eta, \quad \rho_0^{-1} \nabla \eta = P_{h,S} \left[N^2(x_3) ((UC^{-1/2}y)\vec{e}_3) \vec{e}_3 \right]. \end{aligned} \quad (1.33)$$

В дальнейшем все искомые функции и заданные функции переменной t и пространственных переменных будем считать функциями одной переменной t со значениями в соответствующих гильбертовых пространствах, что уже и было учтено в проведенных выше построениях. В связи с этим далее все производные $\partial/\partial t$ будем заменять на d/dt .

Начально-краевая задача (1.25) – (1.27) свелась к задаче Коши для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H_0$:

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{C} \mathcal{X} + (\mathcal{B} + \mathcal{M}) \mathcal{X} = \mathcal{F}, \quad \mathcal{X}(0) = \mathcal{X}^0, \quad \mathcal{X}'(0) = \mathcal{X}^1, \quad (1.34)$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & I + \rho_m C^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma C^{-1/2} B C^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.35)$$

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} P_0 \psi_0 \\ C^{-1/2} P_{H_0} F \end{pmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{pmatrix} \vec{w} \\ y \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Лемма 5. Оператор $B = P_{H_0} B_\sigma P_{H_0}$ — положительно определенный неограниченный в H_0 оператор с компактным положительным обратным оператором B^{-1} .

Доказательство. В силу самосопряженности оператора ортогонального проектирования P_{H_0} , для $\forall u, v \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B_\sigma) \ominus \{1_\Gamma\} \subset H_0$ имеем:

$$\begin{aligned} (Bu, v) &= (P_{H_0} B_\sigma P_{H_0} u, v) = (B_\sigma P_{H_0} u, P_{H_0} v) = (B_\sigma u, v) = \\ &= (u, B_\sigma v) = (P_{H_0} u, B_\sigma P_{H_0} v) = (u, P_{H_0} B_\sigma P_{H_0} v) = (u, Bv) \end{aligned}$$

откуда следует, что оператор B — самосопряженный. Далее имеем:

$$(Bu, u) = (B_\sigma u, u) \geq c \|u\|^2, \quad (1.37)$$

значит, B — положительно определенный оператор, и следовательно, ограниченно обратим. Обратный B^{-1} при этом является положительным оператором.

Покажем, что обратный к B оператор является компактным. Для этого достаточно доказать, что H_B компактно вложено в H_0 . Любое ограниченное множество X из H_B , в силу (1.37), будет ограниченным и в H_{B_σ} . Как было показано ранее, H_{B_σ} компактно вложено в $L_2(\Gamma)$. Но в силу вложения $X \subset H_B \subset H_0 = L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\} \subset L_2(\Gamma)$ получаем, что X компактно в H_0 . Таким образом, любое ограниченное множество в H_B компактно в H_0 , а следовательно, B^{-1} — компактный оператор, что и требовалось доказать. \square

Лемма 6. Оператор-матрица \mathcal{M} из (1.35) обладает свойствами $\mathcal{O} \leq \mathcal{M} \leq N_0^2 \mathcal{I}$, где N_0^2 — константа из (1.2), \mathcal{O} и \mathcal{I} — нулевой и единичный операторы в \mathcal{H} .

Доказательство приведено в лемме 5 работы [12].

1.6. Теорема существования сильного решения

Сделаем в задаче (1.34) замену $C^{-1/2}y = z$ и подействуем оператором $\text{diag}(I; C^{1/2})$ к обеим частям уравнения (1.34), в результате приходим к следующей задаче Коши

$$\begin{aligned} C_1 \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{X}_1 + \mathcal{M}_B \mathcal{X}_1 &= \mathcal{F}_1, \quad \mathcal{X}_1(0) = \mathcal{X}_1^0, \quad \mathcal{X}_1'(0) = \mathcal{X}_1^1, \quad (1.38) \\ C_1 &= \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & C + \rho_m I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_1 + \mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} C^{1/2} \\ C^{1/2} M_{21} & C^{1/2} M_{22} C^{1/2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma B \end{pmatrix}, \\ \mathcal{X}_1 &= \begin{pmatrix} \vec{w} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{w} \\ C^{-1/2} y \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_1 = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix} \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Из построений, приведенных выше, следует, что

$$0 \ll C_1 = C_1^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad 0 \ll B = B^*, \quad \overline{\mathcal{D}(B)} = H_0, \quad 0 \leq \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),$$

где \mathcal{L} — пространство ограниченных операторов. Таким образом, операторный коэффициент при искомой функции не является положительно определенным оператором. Данный факт не позволяет воспользоваться известной теоремой о существовании и единственности сильного решения (см., например, [13, с.44]), в связи с этим требуются дополнительные построения.

Перепишем уравнение (1.38) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \vec{w} \\ Az \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_0 + \widehat{M}_{11} & \widehat{M}_{12} \\ \widehat{M}_{21} & \widehat{B} + \widehat{M}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{w} \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{w} \\ z \end{pmatrix}, \\ \widehat{M}_{11} = M_{11}, \quad \widehat{M}_{12} = M_{12}C^{1/2}, \quad \widehat{M}_{21} = C^{1/2}M_{21}, \quad \widehat{M}_{22} = C^{1/2}M_{22}C^{1/2}, \\ A = C + \rho_m I, \quad \widehat{B} = \sigma B, \quad f_1 = P_0\psi_0, \quad f_2 = P_{H_0}F. \end{aligned}$$

Осуществим замену $\widehat{B}^{1/2}z = w_1$ в последнем уравнении и применим оператор $\text{diag}(I_1; \widehat{B}^{-1/2})$ к обеим частям уравнения, в результате приходим к задаче

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \vec{w} \\ \widehat{B}^{-1/2}A\widehat{B}^{-1/2}w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_0 + \widehat{M}_{11} & \widehat{M}_{12}\widehat{B}^{-1/2} \\ \widehat{B}^{-1/2}\widehat{M}_{21} & I + \widehat{B}^{-1/2}\widehat{M}_{22}\widehat{B}^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{w} \\ w_1 \end{pmatrix} &= \\ = \begin{pmatrix} f_1 \\ \widehat{B}^{-1/2}f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{w} \\ w_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Пусть теперь $\widehat{B}^{-1/2}A\widehat{B}^{-1/2}w_1 = w_2$, что равносильно

$$A_B w_1 := \widehat{B}^{-1/2}A\widehat{B}^{-1/2}w_1 = \widehat{B}^{-1/2}A\widehat{B}^{-1/2}(\widehat{B}^{1/2}z) = \widehat{B}^{-1/2}Az = w_2. \quad (1.40)$$

С учетом сказанного приходим к следующей задаче Коши:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \mathcal{A}v = f + Rv, \quad v(0) = (\vec{w}(0); w_2(0))^t, \quad v'(0) = (\vec{w}'(0); w_2'(0))^t, \quad (1.41)$$

$$\mathcal{A} := I_B F, \quad R = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = (f_1; \widehat{B}^{-1/2}f_2)^t, \quad v = (\vec{w}; w_2)^t,$$

$$I_B = \begin{pmatrix} I_0 + \widehat{M}_{11} & \widehat{M}_{12}\widehat{B}^{-1/2} \\ \widehat{B}^{-1/2}\widehat{M}_{21} & I + \widehat{B}^{-1/2}\widehat{M}_{22}\widehat{B}^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & A_B^{-1} \end{pmatrix}, \quad (1.42)$$

где I_B — самосопряженный, ограниченный и положительно определенный оператор, $\mathcal{D}(I_B F) = \mathcal{D}(F)$.

Введем эквивалентную норму в пространстве \mathcal{H} : $[v_1; v_2] := (I_B^{-1}v_1; v_2)$, тогда

$$[I_B F v_1; v_2] = (F v_1; v_2) = (v_1; F v_2) = (v_1; I_B^{-1} I_B F v_2) = [v_1; I_B F v_2],$$

следовательно, $I_B F$ — самосопряженный оператор, более того, он является неограниченным и положительно определенным оператором.

Определение 1. Сильным (по переменной t) решением задачи (1.41) на отрезке $[0, T]$ назовем такую функцию $v(t)$ со значениями в \mathcal{H} , для которой выполнены следующие условия:

1. $v(t) \in \mathcal{D}(I_B F)$ при любом $t \in [0; T]$, $I_B F v(t) \in C([0; T]; \mathcal{H})$,
2. $v(t) \in C^2([0; T]; \mathcal{H})$,
3. выполнено уравнение (1.41) и начальные условия.

Лемма 7. Если выполнены условия

$$v(0) \in \mathcal{D}(F), \quad v'(0) \in \mathcal{D}(F^{1/2}), \quad f(t) \in C^1([0; T]; \mathcal{H}). \quad (1.43)$$

тогда задача (1.41) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0; T]$.

Доказательство. Так как оператор $I_B F$ является самосопряженным и положительно определенным в пространстве с эквивалентной нормой, поэтому он является генератором семейства косинус-функций, действующих в этом пространстве (см. [14, с.175-177]). Далее, так как оператор R из (1.41) ограничен, то возмущенный оператор $I_B F - R$, согласно теореме 8.5 из [14, с.177], также является генератором семейства косинус-функций. Отсюда следует, что при выполнении условий (1.43) задача (1.41) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0, T]$. \square

Вернемся по всем преобразованиям обратно к задаче (1.38). Пусть выполнены условия (1.43), тогда задачи Коши (1.41), согласно лемме 7, имеет единственное сильное решение на отрезке $[0; T]$. С учетом замены (1.40) имеем

$$\begin{aligned} (v^0 = (\vec{w}^0; w_2^0)^t \in \mathcal{D}(F)) &\iff (\vec{w}^0 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad w_2^0 \in \mathcal{D}(A_B^{-1})) \iff \\ &\iff (\vec{w}^0 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad A_B^{-1} w_2^0 = A_B^{-1} (A_B \widehat{B}^{1/2} z^0 \in H_0)) \iff \\ &\iff (\vec{w}^0 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad z^0 \in \mathcal{D}(B^{1/2})). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} (v^1 = (\vec{w}^1; w_2^1)^t \in \mathcal{D}(F^{1/2})) &\iff (\vec{w}^1 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad w_2^1 \in \mathcal{D}(A_B^{-1/2})) \iff \\ &\iff (\vec{w}^1 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad A_B^{-1/2} w_2^1 = A_B^{-1/2} A_B \widehat{B}^{1/2} z^1 = A_B^{1/2} \widehat{B}^{1/2} z^1 \in H_0) \iff \\ &\iff (\vec{w}^1 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad z^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2})). \end{aligned}$$

$$f(t) \in C^1([0; T]; \mathcal{H}) \iff f_1 = P_0 \psi_0 \in C^1([0; T]; \vec{J}_0(\Omega, \rho_0)),$$

$$\widehat{B}^{-1/2} f_2 = \widehat{B}^{-1/2} P_{H_0} F \in C^1([0; T]; H_0) \iff P_0 \psi_0 \in C^1([0; T]; \vec{J}_0(\Omega, \rho_0)),$$

$$P_{H_0} F \in C^1([0; T]; H_0) \iff \mathcal{F}_1(t) \in C^1([0, T]; \mathcal{H}).$$

Здесь оператор $\widehat{B}^{-1/2}$ является ограниченным оператором.

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 8. Если выполнены условия:

$$\mathcal{X}_1^0 = (\vec{w}^0; z^0)^t \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \mathcal{D}(B^{1/2}) \quad \mathcal{X}_1^1 = (\vec{w}^1; z^1)^t \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \mathcal{D}(B^{1/2}),$$

$$\mathcal{F}_1(t) \in C^1([0, T]; \mathcal{H}), \quad \mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H_0,$$

то существует единственное сильное решение задачи (1.38).

Определение 2. Сильным (по переменной t) решением задачи (1.9) — (1.12) на промежутке $[0, T]$ назовем набор функций $\vec{u}(t, x)$, $p(t, x)$, $\rho(t, x)$ и $\zeta(t, \hat{x})$, для которых выполнены следующие условия:

$$1^\circ. \quad \vec{u}(t) \in C^1([0, T]; \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)), \quad \rho_0^{-1} \nabla p \in C([0, T]; \vec{G}(\Omega, \rho_0)),$$

$\rho(t) \in C^1([0, T]; \mathfrak{L}(\Omega, \rho_0))$, где $\mathfrak{L}_2(\Omega)$ — гильбертово пространство скалярных функций со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} := g^2 \int_{\Omega} [\rho_0(x_3) N^2(x_3)]^{-1} \varphi(x) \overline{\psi(x)} d\Omega$$

и при любом $t \in [0, T]$ справедливо первое уравнение (1.9);

$$2^\circ. \quad u_n = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \in C([0, T]; H_0); \text{ выполнено граничное условие на } \Gamma:$$

$$p = \rho_m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \sigma \Delta_2 \zeta + g \rho_0(0) \zeta \in C([0, T]; L_2(\Gamma)),$$

где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями в $L_2(\Gamma)$.

3°. выполнены начальные условия (1.12).

Возвращаясь от задачи (1.38) по всем преобразованиям назад, приходим к условиям существования сильного (по переменной t) решения исходной начально-краевой задачи (1.9) — (1.12).

Теорема 1. Пусть выполнены условия

$$\vec{u}^0 \in \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0), \quad \rho^0 \in \mathfrak{L}_2(\Omega), \quad f(t) \in C([0, T]; \vec{L}_2(\Omega, \rho_0))$$

$$\zeta^0 \in \mathcal{D}(B) = \{ \zeta \in H^2(\Gamma), \zeta = 0 \text{ (на } \partial\Gamma) \} \cap H_0, \quad H_0 = L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\},$$

$$\zeta^1 = [(P_{h,S} \vec{u}^0(x)) \cdot \vec{n}]_\Gamma \in \mathcal{D}(B^{1/2}) = \{ \zeta \in H^1(\Gamma), \zeta = 0 \text{ (на } \partial\Gamma) \} \cap H_0.$$

Тогда задача (1.9) — (1.12) имеет единственное сильное по t решение.

2. Спектральная задача

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях, положим $\mathcal{F}_1 = 0$ в уравнении (1.38) и будем считать, что $\mathcal{X}_1(t) = e^{i\omega t} \mathcal{X}_1$, где ω – частота, а $\mathcal{X}_1 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H_0$ – мода колебаний. Задача (1.38) переходит в спектральную задачу

$$\lambda \mathcal{C}_1 \mathcal{X}_1 = \mathcal{M}_B \mathcal{X}_1, \quad \lambda := \omega^2. \quad (2.1)$$

Отметим несколько предварительных соображений.

1. Так как оператор $\mathcal{M}_B = \mathcal{M}_B^* \geq 0$, кроме того существует \mathcal{C}_1^{-1} и при этом $0 \leq \mathcal{C}_1^{-1} = (\mathcal{C}_1^{-1})^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, тогда из (2.1) приходим к задаче $\lambda \mathcal{I} \mathcal{X}_1 = \mathcal{C}_1^{-1} \mathcal{M}_B \mathcal{X}_1$. Спектр оператора $\mathcal{C}_1^{-1} \mathcal{M}_B$ вещественный и неотрицательный: $\sigma(\mathcal{C}_1^{-1} \mathcal{M}_B) \subset \mathbb{R}_+$.

2. В случае, когда идеальная стратифицированная жидкость полностью заполняет произвольный сосуд, соответствующая спектральная задача может быть приведена к задаче

$$M_{11} \vec{w} = \lambda \vec{w}, \quad \vec{w} \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0).$$

При этом спектр задачи точечный, плотный на отрезке $[0; N_0^2]$, а моды собственных колебаний дают внутренние волны, обусловленные наличием стратифицированной жидкости.

2.1. О существовании внутренних волн

Рассмотрим случай $\lambda \in [0; N_0^2]$ и установим наличия внутренних волн в стратифицированной жидкости.

Записав уравнение (2.1) в компонентах, перепишем в следующем виде

$$\begin{cases} \lambda I_0 \vec{w} = M_{11} \vec{w} + M_{12} C^{1/2} z, \\ -M^{1/2} B_{21} \vec{w} = (-\lambda (C + \rho_m I) + C^{1/2} M_{22} C^{1/2} + \sigma B) z =: T(\lambda) z. \end{cases} \quad (2.2)$$

Сделаем предположение

$$N_0^2 (C + \rho_m I) < C^{1/2} M_{22} C^{1/2} + \sigma B, \quad (2.3)$$

тогда оператор-функция $T(\lambda)$ при любых $\lambda \in [0; N_0^2]$ положительно определена, поэтому при этих λ существует обратный оператор $T^{-1}(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Выразим из второго уравнения системы (2.2) величину z и подставим в первое, получим

$$R(\lambda) \vec{w} := (\lambda I_0 - M_{11} + M_{12} C^{1/2} T^{-1}(\lambda) C^{1/2} M_{21}) \vec{w} = 0, \quad \lambda \in [0; N_0^2]. \quad (2.4)$$

Теорема 2. *Предельный спектр пучка $R(\lambda)$ совпадает с отрезком $[0; N_0^2]$.*

Доказательство. Пусть выполнено условие (2.3). Зафиксируем произвольное $\lambda_1 \in [0; N_0^2]$ и рассмотрим задачу

$$(\lambda I_0 - M_{11} + M_{12} C^{1/2} T^{-1}(\lambda_1) C^{1/2} M_{21}) \vec{w} = 0, \quad \vec{w} \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0).$$

Эта задача на собственные значения для самосопряженного оператора M_{11} , возмущенным компактным оператором $M_{12}C^{1/2}T^{-1}(\lambda_1)C^{1/2}M_{21}$. Весь спектр оператора M_{11} является предельным и заполняет весь отрезок $[0; N_0^2]$. Согласно теореме Вейля, для каждого $\lambda_2 \in [0; N_0^2]$ существует ортонормированная последовательность Вейля $\{\vec{w}_i\}_{i=1}^\infty$, зависящая от λ_1 и λ_2 , для которой

$$\|(\lambda_2 I_0 - M_{11} + M_{12}C^{1/2}T^{-1}(\lambda_1)C^{1/2}M_{21})\vec{w}_i\| \rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty).$$

Выбирая $\lambda_2 = \lambda_1$ и соответствующую последовательность Вейля, приходим к выводу, что для нее

$$\|(\lambda_1 I_0 - M_{11} + M_{12}C^{1/2}T^{-1}(\lambda_1)C^{1/2}M_{21})\vec{w}_i\| \rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty).$$

Это означает, что произвольно выбранная точка $\lambda_1 \in [0; N_0^2]$ принадлежит предельному спектру задачи (2.4). Поскольку точки, лежащие вне отрезка $[0; N_0^2]$, могут быть только конечнократными собственными значениями, указанный отрезок совпадает с предельным спектром пучка $R(\lambda)$. \square

Важным следствием полученной теоремы является следующее утверждение: в устойчиво стратифицированной идеальной жидкости, частично заполняющей сосуд произвольной формы с упругой мембраной на свободной поверхности, существуют внутренние волны, обусловленные наличием сил плавучести; квадрат частот внутренних волн образуют множество $[0; N_0^2]$.

2.2. О свойствах мод поверхностных волн

Рассмотрим случай $\lambda > N_0^2$, когда ожидаются поверхностные волны.

Осуществляя замену $z = \sigma^{-1/2}B^{-1/2}\tilde{z} = \tilde{B}^{-1/2}\tilde{z}$ и применив оператор $\tilde{B}^{-1/2}$ ко второму уравнению (2.2), получим

$$\begin{cases} (I_0 - \lambda^{-1}M_{11})\vec{w} - \lambda^{-1}M_{12}C^{1/2}\tilde{B}^{-1/2}\tilde{z} = 0, \\ I\tilde{z} - \lambda\tilde{B}^{-1/2}(C + \rho_1 I)\tilde{B}^{-1/2}\tilde{z} + \tilde{B}^{-1/2}C^{1/2}M_{21}\vec{w} + \tilde{B}^{-1/2}C^{1/2}M_{22}C^{1/2}\tilde{B}^{-1/2}\tilde{z} = 0. \end{cases}$$

В силу предположения $\lambda > N_0^2$ и оценки $\|B_{11}\| \leq N_0^2$, оператор $I - \lambda^{-1}B_{11}$ обратим, с учетом этого перепишем последнюю систему

$$\begin{cases} I_0\vec{w} - \lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}M_{11})^{-1}M_{12}C^{1/2}\tilde{B}^{-1/2}\tilde{z} = 0, \\ I\tilde{z} - \lambda\tilde{B}^{-1/2}(C + \rho_m I)\tilde{B}^{-1/2}\tilde{z} + \tilde{B}^{-1/2}C^{1/2}M_{21}\vec{w} + \tilde{B}^{-1/2}C^{1/2}M_{22}C^{1/2}\tilde{B}^{-1/2}\tilde{z} = 0. \end{cases}$$

В последней системе исключая \vec{w} , приходим к спектральной задаче для операторного пучка $L(\lambda)$:

$$\begin{aligned} L(\lambda)\tilde{z} &:= (I - \lambda B_C + B_0 + \lambda^{-1}F(\lambda))\tilde{z} = 0, & \lambda > N_0^2, \\ B_C &:= \tilde{B}^{-1/2}(\rho_m I + C)\tilde{B}^{-1/2}, & B_0 &:= \tilde{B}^{-1/2}C^{1/2}M_{22}C^{1/2}\tilde{B}^{-1/2}, \\ F(\lambda) &:= \tilde{B}^{-1/2}C^{1/2}M_{21}\tilde{R}(\lambda)M_{12}C^{1/2}\tilde{B}^{-1/2}, & R(\lambda) &:= (I - \lambda^{-1}M_{11})^{-1}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Дальнейшее исследование основано на идее факторизации пучка $L(\lambda)$, т.е. на разложении его на операторные множители определенного вида. Для этого понадобиться следующий результат (см., [15, с.81]).

Теорема 3. Пусть для самосопряженного операторного пучка

$$M(\mu) := \mu I - A - B(\mu) \quad (2.6)$$

выполнены условия: 1. $\exists t \in (0, r) : \|A\|t^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \|B_k\|t^{k-1} < 1$,

2. $B(\mu) := \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k B_k$, $|\mu| < r$, $0 < r < \infty$; $A = A^*$, $B_k = B_k^*$, $k = 1, 2, \dots$

Тогда

1. Пучок $M(\mu)$ допускает факторизацию $M(\mu) = M_+(\mu)(\mu I - Z)$, т.е. такое разложение на множители, при котором $M_+(\mu)$ голоморфна и голоморфна обратима в круге $|\mu| \leq t$, $t \in (0, r)$, а спектр $\sigma(Z) \subset (-t; t)$ и оператор Z подобен самосопряженному оператору.

2. Если выполнены условия $A \in \mathfrak{S}_{\infty}(\mathcal{H})$, $\ker A = \{0\}$, $B_1 \in \mathfrak{S}_{\infty}(\mathcal{H})$, то задача $M(\mu)z = 0$ имеет на промежутке $(-t, t)$ дискретный спектр

$$\sigma(Z) = \{0\} \cup \{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}, \quad \mu_j \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty),$$

где $\mu_j = \mu_j(Z)$ – изолированные конечнократные собственные значения оператора Z . Этим значениям отвечает совокупность $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ собственных элементов (присоединенных нет), образующих базис Рисса в \mathcal{H} : $\varphi_j = F^{1/2}z_j$, $j = 1, 2, \dots$, где $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис, составленный из элементов самосопряженного компактного оператора $F^{-1/2}(ZF)F^{-1/2}$.

Чтобы воспользоваться этой теоремой, осуществим в (2.5) замену $\lambda = \mu^{-1}$ и умножим обе части уравнения на μ :

$$\begin{aligned} G(\mu)\tilde{z} &:= \mu L(\mu^{-1})\tilde{z} = (\mu I - B_C - B(\mu))\tilde{z} = 0, \\ B(\mu) &:= -\mu B_0 - \mu^2 F(\mu^{-1}), \quad \mu < N_0^{-2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Задача (2.7) есть задача для пучка вида (2.6), так как $F(\mu^{-1})$ является голоморфной функцией относительно μ :

$$F(\mu^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k F_k, \quad F_k = \tilde{B}^{-1/2} C^{1/2} M_{21} M_{11}^k M_{12} C^{1/2} \tilde{B}^{-1/2}.$$

При этом справедливо

$$\begin{aligned} B(\mu) &:= -\mu B_0 - \mu^2 F(\mu^{-1}) = -\mu B_0 - \mu^2 \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k F_k = -\mu \tilde{B}^{-1/2} C^{1/2} M_{22} C^{1/2} \tilde{B}^{-1/2} - \\ &- \mu^2 \tilde{B}^{-1/2} C^{1/2} M_{21} M_{12} C^{1/2} \tilde{B}^{-1/2} - \mu^3 \tilde{B}^{-1/2} C^{1/2} M_{21} M_{11}^2 M_{12} C^{1/2} \tilde{B}^{-1/2} - \dots = \\ &=: - \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k B_k, \quad \text{где } \|B_k\| \leq (N_0^2)^k \cdot \|\tilde{B}^{-1}\| \cdot \|C\|. \end{aligned}$$

Лемма 9. При $|\mu| = t < N_0^{-2}$ для $G(\mu)$ имеет место оценка

$$\|B_C\| \cdot t^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \|B_k\| \cdot t^{k-1} < \frac{\rho_m \|\tilde{B}^{-1}\|}{t} + \frac{\|\tilde{B}^{-1}\| \cdot \|C\|}{t \cdot (1 - tN_0^2)}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|B_C\|t^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \|B_k\|t^{k-1} &= \frac{\|\tilde{B}^{-1/2}(\rho_1 I + C)\tilde{B}^{-1/2}\|}{t} + \|B_1\| + \|B_2\|t + \|B_3\|t^2 + \dots \leq \\ &\leq \frac{\rho_m \|\tilde{B}^{-1}\| + \|\tilde{B}^{-1}\| \cdot \|C\|}{t} + N_0^2 \cdot \|\tilde{B}^{-1}\| \cdot \|C\| + (N_0^2)^2 \cdot \|\tilde{B}^{-1}\| \cdot \|C\|t + \dots = \\ &= \frac{\rho_m \|\tilde{B}^{-1}\|}{t} + \frac{\|\tilde{B}^{-1}\| \cdot \|C\|}{t} \cdot (1 + N_0^2 t + (N_0^2)^2 t^2 + \dots) = \\ &= \frac{\rho_m \|\tilde{B}^{-1}\|}{t} + \frac{\|\tilde{B}^{-1}\| \cdot \|C\|}{t \cdot (1 - tN_0^2)}. \end{aligned}$$

□

Следствием леммы 9 и теоремы 3 является

Лемма 10. Пусть

$$D := \left(\rho_m \cdot \|\tilde{B}^{-1}\| \cdot N_0^2 - 1 \right)^2 - 4 \cdot N_0^2 \cdot \|\tilde{B}^{-1}\| \cdot \|C\| > 0. \quad (2.8)$$

Тогда пучок $G(\mu)$ из (2.7) допускает спектральную факторизацию

$$\begin{aligned} G(\mu) &= G_+(\mu)(\mu I - Z), \quad |\mu| < t \in (t_-, t_+), \\ t_{\pm} &:= \frac{\left(\rho_m \cdot \|\tilde{B}^{-1}\| \cdot N_0^2 + 1 \right) \pm \sqrt{D}}{2N_0^2}, \quad t_+ < N_0^{-2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

При этом $G_+(\mu)$ голоморфна и голоморфна обратима для $|\mu| \leq t \in (t_-, t_+)$, а спектр $\sigma(Z) \subset (-t; t)$.

Полученные факты позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 4. Если выполнено условие (2.8), тогда операторный пучок $L(\lambda)$ из (2.5) допускает спектральную факторизацию

$$L(\lambda) = L_+(\lambda)(I - \lambda Z); \quad (2.10)$$

при этом $L_+(\lambda)$ голоморфна и голоморфна обратима для

$$\lambda \geq (t_-)^{-1} > N_0^2, \quad t_- = \frac{\left(\rho_m \cdot \|\tilde{K}^{-1}\| \cdot N_0^2 + 1 \right) - \sqrt{D}}{2N_0^2},$$

а также задача (2.5) имеет дискретный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$, $\lambda_k = [\lambda_k(Z)]^{-1}$, состоящий из изолированных конечнократных собственных значений с предельной точкой $+\infty$. Собственные элементы $\{\tilde{z}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\tilde{z}_k = \tilde{z}_k(Z)$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [(t_-)^{-1}, +\infty)$, образуют базис Рисса в H_0 .

2.3. Об асимптотике спектра поверхностных волн

Лемма 11. На промежутке $((t_-)^{-1}, +\infty)$ собственные значения λ_k задачи (2.5) при $k \rightarrow \infty$ имеют асимптотическое поведение:

$$\lambda_k = \frac{\rho_0 g}{\rho_m} \left(1 + \frac{\sigma}{\rho_0 g} \left(\frac{4\pi}{\text{mes } \Gamma} \right) k [1 + o(1)] \right) \quad (k \rightarrow +\infty). \quad (2.11)$$

Доказательство. Рассмотрим спектральную задачу (2.5) для операторного пучка $L(\lambda)$:

$$L(\lambda)\tilde{z} := (I - \lambda B_C + B_0 + \lambda^{-1}F(\lambda))z = 0,$$

где $\lambda^{-1}F(\lambda)$ – аналитическая оператор-функция при $\lambda \rightarrow +\infty$, и при этом $\lambda^{-1}F(\lambda) \rightarrow 0$; оператор B_0 – компактный оператор. Тогда для операторного пучка (2.5) справедлива теорема Маркуса-Мацаева (см., например, [8, с.71-72]) и асимптотика задачи определяется асимптотикой укороченного пучка $(I - \lambda B_C)\tilde{z} = 0$. Известно, что при $k \rightarrow \infty$ асимптотическое поведение собственных чисел $\lambda_k(B_C)$ имеет вид (см., [5]) $\lambda_k(B_C) = \frac{\rho_0 g}{\rho_m} \left(1 + \frac{\sigma}{\rho_0 g} \left(\frac{4\pi}{\text{mes } \Gamma} \right) k [1 + o(1)] \right)$ ($k \rightarrow +\infty$). \square

Список цитируемых источников

1. Capodanno, P. Small planar oscillations of a container with elastic cover containing two immiscible liquids // Eur. J. Mech. B. – 1990. – Vol. 9, No. 3. – P. 289–306.
2. Capodanno, P. Vibrations d'un Liquide dans un Container Cylindrique Symmetrique a Fond Elastique en Apesanteur // Mecanique Appliquee. – 1993. – Vol. 38, No.1. – P. 59–72.
3. Capodanno, P. Vibrations d'un Fluide Compressible une Cavite Fermee par Une Membran Supportee par un Ecrue // Mech. Resch Communicat. – 1995. – Vol. 22, No.1. – P. 1–7.
4. Копачевский, Н. Д., Орлова, Л. Д., Пашкова, Ю. С. Дифференциально-операторные и интегро-дифференциальные уравнения в проблеме малых колебаний гидродинамических систем // Ученые записки Симф. ун-та. – 1995 – Т. 41, № 2. – С. 98–108.
Kopachevsky, N. D., Orlova, L. D., Pashkova, Yu. S. Differential-operator and integro-differential equations in the problem of small oscillations of hydrodynamic systems. TJSM, 41:2, 98-108 (1995).
5. Пашкова, Ю. С. Колебания жидкости в сосуде, закрытом упругой мембраной, и общие вопросы эволюции гидродинамических систем. – Донецк: Автореф. дис., 1996. – 15 с.

Pashkova, Yu. S. Fluid oscillations in a vessel closed by an elastic membrane, and general questions of evolution hydrodynamic systems. PhD thesis, Donetsk, 1996. (in Russian)

6. Кононов, Ю. Н., Шевченко, В. П. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими инерционными мембранами на свободной и внутренней поверхностях // Теор. прикл. мех. — 2001. — №32. — С. 158–163.
Kononov, Yu. N., Shevchenko, V. P. Free vibrations of two-layer fluid with an inertial elastic membrane on free and inner surfaces, Theoretical and applied mechanics, 32, 158–163 (2001).
7. Тихонов, А. Н., Самарский, А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. — 592 с.
Tikhonov, A. N., Samarskii, A. A. Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1972. (in Russian)
8. Korachevsky, N. D., Krein, S. G. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid. — Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2001.
9. Цветков, Д. О. Колебания стратифицированной жидкости, частично покрытой крошечным льдом // Известия вузов. Математика. — 2018. — Т. 12 — С. 70–85.
Tsvetkov, D. O. Oscillations of Stratified Liquid Partially Covered by Crumpling Ice. Russian Mathematics, 62:12, 58–72 (2018).
10. Михлин, С. Г. Курс математической физики. — М.: Наука, 1968. — 576 с.
Mikhlin, S. G. A course of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1968. (in Russian)
11. Копачевский, Н. Д. Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения. — Симферополь: ООО "Форма". 2016. — 280 с.
Korachevsky, N. D. Abstract Green formula and some of its applications. Simferopol, 2016. (in Russian)
12. Копачевский, Н. Д., Цветков, Д. О. Малые движения идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, полностью покрытой крошечным льдом // Уфимский математический журнал. — 2018. — Том 10, №3. — С. 44–59.
Korachevsky, N. D., Tsvetkov, D. O. Small motions of ideal stratified liquid with a free surface totally covered by a crumbled ice, Ufa Math. J., 10:3, pp. 43–58 (2018).
13. Копачевский, Н. Д. Интегродифференциальные уравнения Вольтера в гильбертовом пространстве: Специальный курс лекций. — Симферополь, 2012. — 152 с.
Korachevsky, N. D. Volterra integro-differential equations in Hilbert space: Special lecture course. Simferopol, 2012. (in Russian)
14. Голдстейн, Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Вища школа, 1989. — 347 с.
Goldstein, J. A. Semigroups of linear operators and applications. Oxford: Oxford University Press, 1985.
15. Копачевский, Н. Д. Спектральная теория операторных пучков: Специальный курс лекций. — Симферополь, 2009. — 128 с.
Korachevsky, N. D. Spectral theory of operator pencil. Simferopol, 2009. (in Russian)

Получена 01.03.2019

УДК 514.7

Канонические системы базисных инвариантов конечных примитивных групп отражений четырехмерного унитарного пространства

О. И. Рудницкий

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. E-mail: oirud58@gmail.com

Аннотация. Для неприводимой конечной унитарной группы отражений G , действующей в n -мерном унитарном пространстве, любой G -инвариантный многочлен от n переменных над полем комплексных чисел может быть записан в виде многочлена от n алгебраически независимых однородных многочленов, называемых базисными инвариантами. Выбор базисных инвариантов неоднозначен. Задание дополнительных условий позволяет определить их однозначно. Так, доказано существование базисных инвариантов, удовлетворяющих некоторой системе дифференциальных уравнений (L. Flatto, N. Nakashima, H. Terao, S. Tsujie). Такие системы базисных инвариантов называются каноническими. В работе находятся в явном виде канонические системы для всех конечных примитивных групп отражений четырехмерного унитарного пространства.

Ключевые слова: унитарное пространство, группа отражений, алгебра инвариантов, базисный инвариант, каноническая система.

Canonical system of basic invariants for primitive reflection groups of four-dimensional unitary space

O. I. Rudnitskii

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. The irreducible finite group G , generated by reflections in the n -dimensional unitary space, acts on the polynomial ring in n variables over the field of complex numbers in a natural manner. It is well known that there exist n algebraically independent G -invariant homogeneous polynomials, called basic invariants, such that all G -invariant polynomials can be uniquely written as polynomials of the basic invariants. Given the group G , there are infinitely many possible choices of a basic invariants, but their degrees are well known and typical of the given group G . It is possible to select, among the infinitely many basic invariants, some basic invariants, by requiring some supplementary conditions to be satisfied. So, it has been proved (L. Flatto, N. Nakashima, H. Terao, S. Tsujie) that it is possible to choose basic invariants in such a way that they satisfy a certain system of differential equations. Basic invariants of this kind are called canonical system of basic invariants. In this article we consider a finite primitive groups G , generated by reflections in four-dimensional unitary space. For all groups G were constructed in explicit form canonical systems of basic invariants.

Keywords: Unitary space, reflection groups, algebra of invariants, basic invariant, canonical system of basic invariants.

MSC 2010: 51F15, 14L24

© О. И. РУДНИЦКИЙ

1. Введение

Пусть в n -мерном унитарном пространстве U^n задана координатная система началом O и ортонормированным базисом \vec{e}_i ($i = 1, \dots, n$); вектор $\vec{x} = (x_i)$. Конечная неприводимая группа G , порожденная отражениями относительно гиперплоскостей пространства U^n , естественным образом действует в кольце многочленов $R = \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$. Множество всех многочленов $f(\vec{x}) = f(x_i) \in R$, инвариантных относительно G , образует алгебру I^G , порожденную n алгебраически независимыми однородными многочленами f_i степеней m_i (показатели группы G) [11]; не нарушая общности, можно считать, что $m_1 \leq \dots \leq m_n$. Система образующих $\{f_1, \dots, f_n\}$ называется также *системой базисных инвариантов* группы G .

Система $\{f_1, \dots, f_n\}$ базисных инвариантов группы G называется *канонической системой базисных инвариантов* группы G , если она удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных [10]:

$$\bar{f}_i(\partial)f_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (i < j), \quad (1.1)$$

где дифференциальный оператор $\bar{f}_i(\partial)$ получается из многочлена f_i , если коэффициенты многочлена заменить на комплексно сопряженные, а переменные x_i^p – на $\frac{\partial^p}{\partial x_i^p}$.

Впервые понятие канонической системы базисных инвариантов для конечных вещественных групп, порожденных отражениями в евклидовом пространстве, ввел Л. Флатто при изучении свойства «среднего значения» для непрерывных вещественнозначных функций (см., например, [9]). Он же доказал существование канонических систем для указанных групп. В [10] понятие канонической системы было обобщено для групп G , порожденных отражениями в унитарном пространстве U^n , доказано существование канонических систем для конечных групп G , а также предложен метод построения канонических систем (в [12] этот метод был реализован для построения канонической системы базисных инвариантов бесконечного семейства импримитивных групп $G(m, p, n)$).

В работах [3, 4, 5, 6] автором предложен другой подход к построению в явном виде канонических систем базисных инвариантов для групп G .

Алгоритм предлагаемого метода состоит в следующем (см. также [6]):

1. Возьмем известную систему $\{P_{m_1}, \dots, P_{m_n}\}$ базисных инвариантов группы G (см., например, [2]).

2. Строим новую систему базисных G -инвариантных многочленов J_{m_t} ($t = 1, \dots, n$) в виде многочленов подходящей степени с неопределенными коэффициентами a_α от базисных инвариантов P_{m_k} . Так как многочлен J_{m_t} должен быть базисным, то форма P_{m_t} должна обязательно присутствовать в записи этого многочлена.

3. Подставляя в формы J_{m_t} явные выражения базисных инвариантов P_{m_k} , получим однородные многочлены степени m_t относительно переменных x_1, \dots, x_n . При этом коэффициент у каждого одночлена этого однородного многочлена есть линейная комбинация неопределенных коэффициентов a_α .

4. Обозначим $f_1 = J_{m_1} = P_{m_1}$ и последовательно применим условие (1.1) к формам J_{m_t} , $t > 1$.

5. На каждом шаге уравнения (1.1) приводят к системе линейных однородных уравнений относительно неопределенных коэффициентов a_α . Находим общее решение полученной системы линейных уравнений и вводим обозначение $f_t = J_{m_t}$ найденных значений a_α .

Построенная таким образом система базисных инвариантов $\{f_1, \dots, f_n\}$ является канонической системой.

Используя данный метод, автор в работах [3, 4, 5, 6] построил в явном виде канонические системы базисных инвариантов для всех конечных примитивных групп G унитарных пространств U^n , $n = 2, 3$ и 5 .

Цель настоящей статьи – используя результаты работы [1], реализовать указанный метод для построения в явном виде канонических систем базисных инвариантов для всех конечных не вещественных примитивных групп G четырехмерного унитарного пространства U^4 .

2. Канонические системы базисных инвариантов

В пространстве U^4 существуют только такие группы G : $W(N_4)$, $EW(N_4)$, $W(L_4)$ [7]. Рассмотрим каждую из них.

2.1. Группа $W(N_4)$ порядка 7680 порождена отражениями второго порядка относительно 3-мерных плоскостей с уравнениями $x_1 = 0, x_2 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0, x_1 + ix_2 + x_3 + ix_4 = 0, i^2 = -1$, и содержит отражения второго порядка относительно 40 3-мерных плоскостей. Множество их нормальных векторов (система корней группы) состоит из 160 векторов

$$i^h \vec{e}_i, \frac{i^h}{\sqrt{2}} \eta(\vec{e}_i \pm \vec{e}_j) \quad (i < j), \frac{i^h}{2} (\vec{e}_1 \pm \vec{e}_k \pm i \vec{e}_l \pm i \vec{e}_m), \quad (2.1)$$

где η – первообразный корень восьмой степени из единицы, $i, j, h = 1, \dots, 4$, а индексы $k, l, m = 2, 3, 4$ (циклически) [7, 1]. Показатели группы $m_i = 4, 8, 12, 20$ [11].

Группа $EW(N_4) \supset W(N_4)$ и является ее «хорошим расширением» [7]. Она имеет порядок $64 \cdot 6!$ и порождается отражениями второго порядка относительно 40 3-мерных плоскостей с нормальными векторами (2.1) и 20 3-мерных плоскостей с уравнениями

$$x_i \pm ix_j = 0, \quad (i < j), \quad x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 = 0, \quad i, j = 1, \dots, 4.$$

Система корней группы состоит из 240 векторов вида

$$i^h \vec{e}_i, \frac{i^h}{\sqrt{2}} \eta(\vec{e}_i + i^p \vec{e}_j) \quad (i < j), \frac{i^h}{2} (\vec{e}_1 \pm \vec{e}_k \pm i^q \vec{e}_l \pm i^q \vec{e}_m),$$

где $i, j, h, p = 1, \dots, 4, q = 1, 2$; как и ранее, индексы $k, l, m = 2, 3, 4$ (циклически) [1]. Степени $m_i = 8, 12, 20, 24$ [11].

Используя многочлены Погорелова, автор (см. [1]) построил следующую систему базисных инвариантов группы $EW(N_4)$:

$$P_8 = \sum x_i^8 + 14 \sum_{i<j} x_i^4 x_j^4 + 168 \prod x_i^2, \quad (2.2)$$

$$P_{12} = \sum x_i^{12} - 33 \sum x_i^8 x_j^4 + 330 \sum_{i<j<k} x_i^4 x_j^4 x_k^4 + 792 \sum_{j<k<l} x_i^6 x_j^2 x_k^2 x_l^2, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} P_{20} = & 127 \sum x_i^{20} - 2413 \sum x_i^{16} x_j^4 - 62738 \sum x_i^{12} x_j^8 + 34580 \sum_{j<k} x_i^{12} x_j^4 x_k^4 + \\ & + 244530 \sum_{i<j} x_i^8 x_j^8 x_k^4 + 13680 \sum_{j<k<l} x_i^{14} x_j^2 x_k^2 x_l^2 + 912912 \sum_{k<l} x_i^{10} x_j^6 x_k^2 x_l^2 + \\ & + 12780768 \sum_{i<j<k} x_i^6 x_j^6 x_k^6 x_l^2 + 17117100 \sum_{j<k<l} x_i^8 x_j^4 x_k^4 x_l^4, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} P_{24} = & 3075 \sum x_i^{24} + 31878 \sum x_i^{20} x_j^4 + 2206413 \sum x_i^{16} x_j^8 + \\ & + 8112468 \sum_{i<j} x_i^{12} x_j^{12} + 301070 \sum_{j<k} x_i^{16} x_j^4 x_k^4 + 7827820 \sum x_i^{12} x_j^8 x_k^4 + \\ & + 55353870 \sum_{i<j<k} x_i^8 x_j^8 x_k^8 + 70840 \sum_{j<k<l} x_i^{18} x_j^2 x_k^2 x_l^2 + 14451360 \sum_{k<l} x_i^{14} x_j^6 x_k^2 x_l^2 + \\ & + 68884816 \sum_{\substack{i<j \\ k<l}} x_i^{10} x_j^{10} x_k^2 x_l^2 + 964387424 \sum_{j<k} x_i^{10} x_j^6 x_k^6 x_l^2 + \\ & + 547947400 \sum_{j<k<l} x_i^{12} x_j^4 x_k^4 x_l^4 + 3874770900 \sum_{\substack{i<j \\ k<l}} x_i^8 x_j^8 x_k^4 x_l^4 + \\ & + 13501423936 \prod x_i^6; \end{aligned} \quad (2.5)$$

здесь и далее в записи многочленов, индексы $i, j, k, l = 1, \dots, 4$ и удовлетворяют неравенствам, указанным под знаком суммы.

При этом в работе [2] доказано, что формы (2.2), (2.3), (2.4) и форма

$$P_4 = \sum x_i^4 - 6 \sum_{i<j} x_i^2 x_j^2 \quad (2.6)$$

задают систему базисных инвариантов группы $W(N_4)$.

Используем приведенные выше системы базисных инвариантов для построения канонических систем $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ базисных инвариантов для групп $W(N_4)$ и $EW(N_4)$.

2.1.1. Группа $W(N_4)$. Пусть $f_1 = P_4$. Форму f_2 канонической системы будем искать среди всех инвариантов восьмой степени группы $W(N_4)$. Их можно задать следующим образом

$$J_8 = a_1 P_4^2 + a_2 P_8,$$

где a_1, a_2 – неопределенные коэффициенты.

Тогда соотношение (1.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(\partial)J_8 \equiv & \frac{\partial^4 J_8}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 J_8}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 J_8}{\partial x_3^4} + \frac{\partial^4 J_8}{\partial x_4^4} - 6\left(\frac{\partial^4 J_8}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 J_8}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^4 J_8}{\partial x_1^2 \partial x_4^2} + \frac{\partial^4 J_8}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} + \frac{\partial^4 J_8}{\partial x_2^2 \partial x_4^2} + \frac{\partial^4 J_8}{\partial x_3^2 \partial x_4^2}\right) = 0, \end{aligned}$$

и приводит к линейной однородной системе двух уравнений относительно неизвестных a_1, a_2 . Ее общее решение: $a_1 = -7c, a_2 = 34c$. Следовательно, с точностью до постоянного множителя, форма f_2 (многочлен J_8 при найденных значениях a_1, a_2) имеет следующий развернутый вид

$$f_2 = 9 \sum x_i^8 + 28 \sum x_i^6 x_j^2 + 70 \sum_{i < j} x_i^4 x_j^4 - 140 \sum_{j < k} x_i^4 x_j^2 x_k^2 + 1400 \prod x_i^2. \quad (2.7)$$

Далее, любой инвариант двенадцатой степени группы $W(N_4)$ представим в виде $J_{12} = a_1 P_{12} + a_2 P_4 P_8 + a_3 P_4^3$. Поэтому форму f_3 находим из условий

$$\bar{f}_1(\partial)J_{12} = 0, \bar{f}_2(\partial)J_{12} = 0.$$

Они приводят к линейной однородной системе шести уравнений относительно трех неизвестных a_1, a_2, a_3 . Ее общее решение: $a_1 = -3182c, a_2 = 2442c, a_3 = -781c$. Поэтому, с точностью до постоянного множителя,

$$\begin{aligned} f_3 = & 169 \sum x_i^{12} + 66 \sum x_i^{10} x_j^2 - 6105 \sum x_i^8 x_j^4 + 924 \sum_{i < j} x_i^6 x_j^6 + \\ & + 18810 \sum_{j < k} x_i^8 x_j^2 x_k^2 - 17820 \sum x_i^6 x_j^4 x_k^2 + 21450 \sum_{i < j < k} x_i^4 x_j^4 x_k^4 + \\ & + 178200 \sum_{j < k < l} x_i^6 x_j^2 x_k^2 x_l^2 + 49500 \sum_{\substack{i < j \\ k < l}} x_i^4 x_j^4 x_k^2 x_l^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Инварианты двадцатой степени группы $W(N_4)$ можно задать следующим образом:

$$J_{20} = a_1 P_4^5 + a_2 P_4^3 P_8 + a_3 P_4^2 P_{12} + a_4 P_4 P_8^2 + a_5 P_8 P_{12} + a_6 P_{20}.$$

Следовательно, форма f_4 совпадает с J_{20} для тех значениях $a_t, t = 1, \dots, 6$, при которых форма J_{20} является решением системы (1.1), то есть системы вида

$$\bar{f}_1(\partial)J_{20} = 0, \bar{f}_2(\partial)J_{20} = 0, \bar{f}_3(\partial)J_{20} = 0.$$

Это приводит к линейной однородной системе 29 уравнений относительно переменных $a_t, t = \overline{1, 6}$. Общее решение системы:

$$a_1 = -5118284805447c, \quad a_2 = 29206693567700c, \quad a_3 = -14697884190660c,$$

$$a_4 = -42971969015250c, \quad a_5 = -131671242738776c, \quad a_6 = 1356920320698c.$$

Таким образом, с точностью до постоянного множителя,

$$\begin{aligned} f_4 = & 807473 \sum x_i^{20} + 7078830 \sum x_i^{18} x_j^2 - 35318435 \sum x_i^{16} x_j^4 - \\ & -168334680 \sum x_i^{14} x_j^6 - 112071310 \sum x_i^{12} x_j^8 - 211176108 \sum_{i<j} x_i^{10} x_j^{10} + \\ & +185689470 \sum_{j<k} x_i^{16} x_j^2 x_k^2 + 1093613400 \sum x_i^{14} x_j^4 x_k^2 - 701904840 \sum x_i^{12} x_j^6 x_k^2 + \\ & +1227703620 \sum x_i^{10} x_j^8 x_k^2 + 5887417900 \sum_{j<k} x_i^{12} x_j^4 x_k^4 - 1513151640 \sum x_i^{10} x_j^6 x_k^4 - \\ & -18228488850 \sum_{i<j} x_i^8 x_j^8 x_k^4 + 17187850680 \sum_{j<k} x_i^8 x_j^6 x_k^6 - \\ & -10936134000 \sum_{j<k<l} x_i^{14} x_j^2 x_k^2 x_l^2 - 8553363000 \sum_{k<l} x_i^{12} x_j^4 x_k^2 x_l^2 + \\ & +15131516400 \sum_{k<l} x_i^{10} x_j^6 x_k^2 x_l^2 + 59237392500 \sum_{\substack{i<j \\ k<l}} x_i^8 x_j^8 x_k^2 x_l^2 - \\ & -969969000 \sum_{j<k} x_i^{10} x_j^4 x_k^4 x_l^2 - 49468419000 \sum x_i^8 x_j^6 x_k^4 x_l^2 + \\ & +211841229600 \sum_{i<j<k} x_i^6 x_j^6 x_k^6 x_l^2 - 65472907500 \sum_{j<k<l} x_i^8 x_j^4 x_k^4 x_l^4 - \\ & -13579566000 \sum_{\substack{i<j \\ k<l}} x_i^6 x_j^6 x_k^4 x_l^4 \end{aligned} \quad (2.9)$$

и каноническая система базисных инвариантов группы $W(N_4)$ состоит из форм (2.6), (2.7), (2.8) и (2.9).

2.1.2. Для построения канонической системы базисных инвариантов группы $EW(N_4)$ в качестве f_1 возьмем форму (2.2). Тогда f_2 совпадает с формой (2.3), так как уравнение (1.1) обращается в тождество для $f_1 = P_8$ и $f_2 = P_{12}$.

Так как все инварианты двадцатой степени группы $EW(N_4)$ можно записать в виде $J_{20} = a_1 P_{20} + a_2 P_8 P_{12}$, то систему (1.1) запишем следующим образом

$$\bar{f}_1(\partial) J_{20} = 0, \quad \bar{f}_2(\partial) J_{20} = 0.$$

Получим систему семи линейных однородных уравнений относительно двух неизвестных, с общим решением $a_1 = -3413c, a_2 = 414960c$. Следовательно, форма f_3 , с точностью до постоянного множителя, имеет вид

$$f_3 = 41 \sum x_i^{20} - 779 \sum x_i^{16} x_j^4 - 20254 \sum x_i^{12} x_j^8 + 795340 \sum_{j<k} x_i^{12} x_j^4 x_k^4 -$$

$$\begin{aligned}
& -1489410 \sum_{i<j} x_i^8 x_j^8 x_k^4 - 779760 \sum_{j<k<l} x_i^{14} x_j^2 x_k^2 x_l^2 + 1078896 \sum_{k<l} x_i^{10} x_j^6 x_k^2 x_l^2 + \\
& + 15104544 \sum_{i<j<k} x_i^6 x_j^6 x_k^6 x_l^2 - 4668300 \sum_{j<k<l} x_i^8 x_j^4 x_k^4 x_l^4.
\end{aligned} \quad (2.10)$$

Далее, семейство всех инвариантов 24-й степени группы $EW(N_4)$ запишем в виде $J_{24} = a_1 P_{24} + a_2 P_8^3 + a_3 P_{12}^2$.

Форма J_{24} принадлежит канонической системе, если является решением следующей системы дифференциальных уравнений

$$\bar{f}_1(\partial)J_{24} = 0, \bar{f}_2(\partial)J_{24} = 0, \bar{f}_3(\partial)J_{24} = 0.$$

Третье уравнение выполняется тождественно, а первые два приводят к линейной однородной системе 11 уравнений относительно трех неизвестных. Ее решение: $a_1 = 4448817c, a_2 = -10032581416c, a_3 = -3235878464c$.

Следовательно, форма f_4 , с точностью до постоянного множителя, имеет следующий развернутый вид

$$\begin{aligned}
f_4 = & 995 \sum x_i^{24} - 159482 \sum x_i^{20} x_j^4 + 1393133 \sum x_i^{16} x_j^8 + \\
& + 1606228 \sum_{i<j} x_i^{12} x_j^{12} - 48495730 \sum_{j<k} x_i^{16} x_j^4 x_k^4 + 7827820 \sum x_i^{12} x_j^8 x_k^4 - \\
& - 749793330 \sum_{i<j<k} x_i^8 x_j^8 x_k^8 - 23849160 \sum_{j<k<l} x_i^{18} x_j^2 x_k^2 x_l^2 + \\
& + 209638560 \sum_{k<l} x_i^{14} x_j^6 x_k^2 x_l^2 - 861507504 \sum_{\substack{i<j \\ k<l}} x_i^{10} x_j^{10} x_k^2 x_l^2 + \\
& + 1966348384 \sum_{j<k} x_i^{10} x_j^6 x_k^6 x_l^2 - 1046081400 \sum_{j<k<l} x_i^{12} x_j^4 x_k^4 x_l^4 + \\
& + 654182100 \sum_{\substack{i<j \\ k<l}} x_i^8 x_j^8 x_k^4 x_l^4 - 526029504 \prod x_i^6,
\end{aligned} \quad (2.11)$$

а каноническая система базисных инвариантов группы $EW(N_4)$ состоит из форм (2.2), (2.3), (2.10) и (2.11).

2.2. Группа $W(L_4)$ симметрий правильного комплексного многоугольника Виттинга $3(3)3(3)3(3)3$ имеет порядок $216 \cdot 6!$; степени $m_i = 12, 18, 24, 30$ [8, 11]. Она порождается отражениями третьего порядка относительно 40 его 3-мерных плоскостей симметрии с уравнениями

$$\begin{aligned}
x_i = 0, x_1 + \omega^p x_2 + \omega^q x_3 = 0, x_1 - \omega^p x_2 - \omega^q x_4 = 0, \\
x_1 - \omega^p x_3 + \omega^q x_4 = 0, x_2 - \omega^p x_3 - \omega^q x_4 = 0,
\end{aligned}$$

($i = 1, \dots, 4, p, q = 1, \dots, 3; \omega$ – первообразный корень третьей степени из единицы). При этом система корней группы $W(L_4)$ состоит из 120 векторов

$$i\omega^h \vec{e}_i, \frac{\omega^h}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \omega^p \vec{e}_2 + \omega^q \vec{e}_3), \frac{\omega^h}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 - \omega^p \vec{e}_2 - \omega^q \vec{e}_4),$$

$$\frac{\omega^h}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 - \omega^p \vec{e}_3 + \omega^q \vec{e}_4), \frac{\omega^h}{\sqrt{3}}(\vec{e}_2 - \omega^p \vec{e}_3 - \omega^q \vec{e}_4), (h = \overline{1, 3}).$$

В работе [1] на основе многочленов Погорелова построена следующая система базисных инвариантов группы $W(L_4)$:

$$I_{12} = \sum x_i^{12} + 22 \sum_{i < j} x_i^6 x_j^6 + 220 \sum_{i < k} (-1)^\alpha x_i^3 x_j^6 x_k^3, \quad (2.12)$$

$$I_{18} = \sum x_i^{18} - 17 \sum x_i^{12} x_j^6 - 170 \sum_{i < k} (-1)^\alpha x_i^3 x_j^{12} x_k^3 - \\ - 1870 \sum (-1)^\alpha x_i^9 x_j^6 x_k^3 - 7854 \sum_{i < j < k} x_i^6 x_j^6 x_k^6, \quad (2.13)$$

$$I_{24} = 111 \sum x_i^{24} + 506 \sum x_i^{18} x_j^6 + 10166 \sum_{i < j} x_i^{12} x_j^{12} + \\ + 5060 \sum_{i < k} (-1)^\alpha x_i^3 x_j^{18} x_k^3 + 206448 \sum (-1)^\alpha x_i^{15} x_j^6 x_k^3 + \\ + 1118260 \sum (-1)^\alpha x_i^9 x_j^{12} x_k^3 + 4696692 \sum_{j < k} x_i^{12} x_j^6 x_k^6 + \\ + 12300860 \sum_{i < k} (-1)^\alpha x_i^9 x_j^6 x_k^9, \quad (2.14)$$

$$I_{30} = 584 \sum x_i^{30} - 435 \sum x_i^{24} x_j^6 - 63365 \sum x_i^{18} x_j^{12} - 4350 \sum_{i < k} (-1)^\alpha x_i^3 x_j^{24} x_k^3 - \\ - 440220 \sum (-1)^\alpha x_i^{21} x_j^6 x_k^3 - 6970150 \sum (-1)^\alpha x_i^9 x_j^{18} x_k^3 - \\ - 25852920 \sum (-1)^\alpha x_i^{15} x_j^{12} x_k^3 - 29274630 \sum_{j < k} x_i^{18} x_j^6 x_k^6 - \\ - 284382120 \sum (-1)^\alpha x_i^{15} x_j^6 x_k^9 - 588153930 \sum_{i < j} x_i^{12} x_j^{12} x_k^6 - \\ - 1540403150 \sum_{i < k} (-1)^\alpha x_i^9 x_j^{12} x_k^9 \quad (2.15)$$

Здесь и далее $i, j, k = 1, \dots, 4$ и удовлетворяют неравенствам, указанным под знаком суммы; при этом $\alpha = 2$, если i, j, k принимают соответствующие значения троек чисел $(2, 1, 4), (4, 1, 2), (1, 3, 4), (4, 3, 1), (3, 2, 4), (4, 2, 3)$ или любые перестановки чисел $(1, 2, 3)$; $\alpha = 1$, если i, j, k принимают значения оставшихся перестановок троек чисел $(1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4)$.

Как в п.2.1, для построения канонической возьмем $f_1 = I_{12}$. Тогда $f_2 = I_{18}$, так как в этом случае соотношение (1.1) выполняется тождественно. Далее, совокупность всех инвариантов 24-й степени группы $W(L_4)$ запишем в виде

$$J_{24} = a_1 I_{12}^2 + a_2 I_{24},$$

и форму f_3 будем искать из условий $\bar{f}_1(\partial)J_{24} = 0, \bar{f}_2(\partial)J_{24} = 0$. Второе условие выполняется тождественно, а первое приводит к совместной системе линейных однородных уравнений относительно двух неизвестных с общим решением:

$$a_1 = 13449618c, a_2 = -132941c.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} f_3 = & 597 \sum x_i^{24} - 239614 \sum x_i^{18} x_j^6 - 2368678 \sum_{i < j} x_i^{12} x_j^{12} + \\ & - 2396140 \sum_{i < k} (-1)^\alpha x_i^3 x_j^{18} x_k^3 + 9834432 \sum (-1)^\alpha x_i^{15} x_j^6 x_k^3 + \\ & + 8437780 \sum (-1)^\alpha x_i^9 x_j^{12} x_k^3 - 18359796 \sum_{j < k} x_i^{12} x_j^6 x_k^6 + \\ & + 92815580 \sum_{i < k} (-1)^\alpha x_i^9 x_j^6 x_k^9 - 537984720 \prod x_l^3 \sum (-1)^\beta x_i^9 x_j^3 + \\ & + 3550699152 \prod x_l^6, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где i, j, k, α принимают те же значения, что и ранее, $\beta = 2$, если $(i, j) = (1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 1), (4, 3), (4, 2)$ и $\beta = 1$ – в остальных случаях; $l = 1, \dots, 4$.

Для нахождения формы f_4 , все инварианты 30-й степени группы $W(L_4)$ представим в виде $J_{30} = a_1 I_{12} I_{18} + a_2 I_{30}$. Как и ранее, форма J_{30} принадлежит канонической системе, если является решением следующей системы:

$$\bar{f}_1(\partial)J_{30} = 0, \bar{f}_2(\partial)J_{30} = 0, \bar{f}_3(\partial)J_{30} = 0.$$

Третье уравнение выполняется тождественно, а первые два приводят к линейной однородной системе восьми уравнений относительно двух неизвестных. Ее решение: $a_1 = 145308618c, a_2 = -249517c$. Следовательно, с точностью до постоянного множителя,

$$\begin{aligned} f_4 = & 122 \sum x_i^{30} - 248907 \sum x_i^{24} x_j^6 + 12178753 \sum x_i^{18} x_j^{12} - \\ & - 2489070 \sum_{i < k} (-1)^\alpha x_i^3 x_j^{24} x_k^3 + 38723352 \sum (-1)^\alpha x_i^{21} x_j^6 x_k^3 - \\ & - 113423350 \sum (-1)^\alpha x_i^9 x_j^{18} x_k^3 + 28438212 \sum (-1)^\alpha x_i^{15} x_j^{12} x_k^3 - \\ & - 185760834 \sum_{j < k} x_i^{18} x_j^6 x_k^6 + 312820332 \sum (-1)^\alpha x_i^{15} x_j^6 x_k^9 - \\ & - 588153930 \sum_{i < j} x_i^{12} x_j^{12} x_k^6 - 364095290 \sum_{i < k} (-1)^\alpha x_i^9 x_j^{12} x_k^9 + \\ & + 1453086180 \prod x_l^3 (2 \sum (-1)^\beta x_i^{15} x_j^3 + 17 \sum (-1)^\gamma x_i^9 x_j^6 x_k^3) - \\ & - 88928874216 \prod x_l^6 \sum x_i^6; \end{aligned} \quad (2.17)$$

здесь $\gamma = 2$, если индексы (i, j, k) принимают соответствующие значения троек чисел $(1, 2, 4), (2, 3, 4), (1, 3, 4), (1, 4, 3), (2, 1, 4), (2, 4, 1), (3, 1, 4), (3, 2, 4), (3, 4, 2)$ или циклические перестановки тройки чисел $(1, 2, 3)$, и $\gamma = 1$ – в остальных случаях.

Таким образом, **каноническая система базисных инвариантов** группы $W(L_4)$ состоит из форм (2.12), (2.13), (2.16) и (2.17)

3. Заключение

В статье продолжена, начатая в [3, 4, 5, 6], работа по построению канонических систем базисных инвариантов для конечных примитивных групп G , порожденных отражениями, в унитарном пространстве U^n . Построены в явном виде канонические системы базисных инвариантов для конечных примитивных групп G , порожденных отражениями, в пространстве U^4 , а именно: **каноническая система базисных инвариантов** для группы $W(N_4)$ состоит из форм (2.6), (2.7), (2.8), (2.9), группы $EW(N_4)$ – из форм (2.2), (2.3), (2.10), (2.11) и группы $W(L_4)$ – из форм (2.12), (2.13), (2.16) и (2.17).

Список цитируемых источников

1. Rudnitskii, O. I. Basis invariants of finite primitive groups generated by reflections in four-dimensional unitary space. Journal of Mathematical Sciences, V. 48, N 1, 95–99 (1990).
2. Рудницкий, О. И. Алгебраические поверхности с конечными группами симметрий в унитарном пространстве. Дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук: 01.01.04. Минск, 1990.
Rudnitskii, O. I. Algebraic surfaces with finite symmetry groups in unitary space. The thesis for the degree of Candidate of Physico-Mathematical Sciences: 01.01.04. Minsk, 1990.
3. Рудницкий, О. И. Канонические системы базисных инвариантов для групп симметрий многогранников Гессе. Таврический вестник информатики и математики. № 3(36), 73–78 (2017).
Rudnitskii, O. I. Canonical system of basic invariants for symmetry groups of Hessian polyhedrons. № 3(36), 73–78 (2017).
4. Рудницкий, О. И. Канонические системы базисных инвариантов для унитарных групп $W(J_3(m))$, $m = 4, 5$. Таврический вестник информатики и математики. № 1(38), 89–96 (2018).
Rudnitskii, O. I. Canonical systems of basic invariants for unitary groups $W(J_3(m))$, $m = 4, 5$. № 1(38), 89–96 (2018).
5. Рудницкий, О. И., Бочко, А. Ю. Рольская, Е. Н. Канонические системы базисных инвариантов для примитивных групп, порожденных отражениями, на унитарной плоскости. В кн. В. А. Лукьяненко (Ред.). Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование: сборник научных трудов Всероссийской научно-практической конференции МИКМО-2018 и Таврической научной школы-конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике (стр. 59–71). Симферополь: ИП А. А. Корниенко, 2018. Вып. 1.

- Rudnitskii, O. I., Bochko, A. Yu., Rolskaya, E. N. Canonical systems of basic invariants for primitive groups generated by reflections on the unitary plane. Mathematics, informatics, computer science, modeling, education (pp. 59–71). Simferopol, (2018), № 1.
6. *Рудницкий, О. И.* Каноническая система базисных инвариантов унитарной группы $W(K_5)$. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. № 58, 32–40 (2019). DOI 10.17223/19988621/58/3
Rudnitskii, O. I. Canonical system of basic invariants for unitary group $W(K_5)$. № 58, 32–40 (2019).
 7. *Cohen, A. M.* Finite complex reflection groups. Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4, 379–436 (1976).
 8. *Coxeter, H. S. M.* Regular complex polytopes. London Cambridge Univ. Press, 1974.
 9. *Flatto, L.* Invariants of finite reflection group. Enseign. Math. Vol.24, № 3-4, 237–292 (1978).
 10. *Nakashima, N., Terao, H., Tsujie, S.* Canonical systems of basic invariants for unitary reflection groups. Canad. Math. Bull. Vol.59, № 3, 617–623 (2016) (arXiv:1310.0570 (2017)).
 11. *Shephard, G. C., Todd, J. A.* Finite reflection groups. Can. J. Math. Vol.6, № 2, 274–304 (1954).
 12. *Tsujie, S.* Construction of canonical systems of basic invariants for finite reflection groups. The thesis (doctoral). Hokkaido, 2014.

Получена 21.03.19

УДК 517.956.6

Внутреннекраевая задача для уравнения смешанного типа с негладкой линией параболического вырождения

В. А. Водахова, Ф. М. Нахушева, А. Г. Езаова,
Л. В. Канукоева

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
Нальчик 360004. E-mail: alena_ezaova@mail.ru

Аннотация. В данной работе для уравнения смешанного эллипτικο-гиперболического типа с двумя линиями параболического вырождения исследован вопрос однозначной разрешимости нелокальной задачи, когда на эллиптической части границы области задано условие Дирихле, а на гиперболических частях границы заданы условия, поточечно связывающие значения дробных производных от решения на характеристиках со значениями решения на линиях параболического вырождения внутри области. При определенных ограничениях неравенственного типа на заданные функции и порядки дробных производных в краевых условиях методом интегралов энергии доказана единственность решения задачи. Вопрос существования решения задачи эквивалентно редуцирован к вопросу разрешимости системы сингулярных интегральных уравнений второго порядка с ядром Коши относительно производных от следов искомого решения на линиях вырождения. Выписаны условия, гарантирующие существование регуляризаторов, приводящих сингулярные интегральные уравнения к уравнениям Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которых следует из единственности решения задачи. Исследованы дифференциальные свойства решения. Установлено влияние на корректность постановки задачи порядков дробных производных в краевых условиях и их связь с порядком вырождения уравнения.

Ключевые слова: краевая задача, оператор дробного интегрирования, оператор дробного дифференцирования, задача Коши, задача Дирихле, уравнение Фредгольма, сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши.

The inner-boundary value problem for a mixed type equation with a nonsmooth parabolic degeneration line

V. A. Vodakhova, F. M. Nakhushева, A. G. Ezaova, L. V. Kanukoeva

H. M. Berbekov Kabardino-Balkarian State University, Nalchik 360004.

Abstract. In this paper, equations of mixed elliptic-hyperbolic type with two degeneration lines parabolic investigated the question of unique solvability of a nonlocal problem, when on the elliptic part of the boundary region is set to a Dirichlet condition, and on the hyperbolic parts of the border, conditions are defined, point-by-point linking the values of the fractional derivative of the solution on the characteristics with the values of the solution at the parabolic lines of degeneracy within the region. Under certain restrictions preventing type on the specified functions and fractional order derivatives

in boundary conditions is the method of energy integrals is proved the uniqueness of the solution of the problem. The question of existence of the solution are equivalent is reduced to the question of solvability of system of singular integral equations of the second order Cauchy kernel with respect to derivatives of the traces of the sought solution on the lines of degeneration. Discharged conditions which guarantee the existence of regularizers, leading to singular integral equations to the Fredholm equation of the second kind, unconditional solvability of which follows from the uniqueness of the problem solution. Investigated differential properties of the solution. The influence on the posedness of the problem of orders of fractional derivatives in boundary conditions and their connection with the order of degeneracy of the equation.

Keywords: boundary value problem, operator of fractional integration operator of fractional differentiation, Cauchy problem, Dirichlet problem, Fredholm equation, singular integral equation with Cauchy kernel.

MSC 2010: 35M12

Введение

Теория краевых задач для уравнений смешанного типа является одним из важнейших разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Это обусловлено как непосредственными связями уравнений смешанного типа с проблемами теории сингулярных интегральных уравнений, теорией интегральных преобразований и специальных функций, так и прикладными задачами околосзвуковой газовой динамики, математической физики, биологии. Локальные и нелокальные задачи для уравнений смешанного типа встречаются при математическом моделировании нефтяных пластов, фильтрации грунтовых вод, переноса тепла и массы в объекте, имеющем сложное строение, электрических колебаний в проводах, движения жидкости в канале, окруженном пористой средой и других явлениях. В настоящее время исследования нелокальных задач для уравнений смешанного типа ведутся интенсивно. В опубликованных работах краевые условия содержат классические операторы или операторы дробного в смысле Римана-Лиувилля интегро-дифференцирования [15, 6]. Много работ посвящено исследованию краевых задач для линейных уравнений смешанного типа с одной линией вырождения [5]–[12], [16, 17, 6, 7] и лишь малая часть их посвящена изучению локальных и нелокальных краевых задач для уравнений смешанного типа с двумя и более линиями вырождения [14, 20]. Такими задачами занимались А. М. Нахушев, М. М. Зайнулабидов, В. Ф. Волкодавов, М. С. Салахитдинов, К. Б. Сабитов, О. А. Репин, С. К. Кумыкова и другие авторы. В связи с этим возникает необходимость дальнейшего развития теории нелокальных краевых задач для различных классов уравнений смешанного типа с негладкими линиями параболического вырождения и разрывными условиями сопряжения.

В работе с учетом влияния порядка дробной производной в краевом условии на однозначную разрешимость задачи сформулирована корректная внутреннекраевая задача для уравнения смешанного типа с негладкой линией параболического вырождения. Доказаны существование и единственность решения задачи.

Единственность решения задачи доказывается методом интегралов энергии, при этом устанавливаются определенные ограничения неравенственного типа на

заданные функции и порядки дробных производных в краевых условиях. Вопрос существования решения задачи эквивалентно редуцирован к вопросу разрешимости системы сингулярных интегральных уравнений второго порядка с ядром Коши относительно производных от следов искомого решения на линиях вырождения. Выписаны условия, гарантирующие существование регуляризаторов, приводящих сингулярные интегральные уравнения к уравнениям Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которых следует из единственности решения задачи. Исследованы дифференциальные свойства решения. Установлено влияние на корректность постановки задачи порядков дробных производных в краевых условиях и их связь с порядком вырождения уравнения.

Цель исследования — доказать однозначную разрешимость внутреннекраевой задачи для уравнения смешанного типа с негладкой линией изменения параболического вырождения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$|y|^k u_{xx} + \operatorname{sgn}(xy) |x|^k u_{yy} = 0, \tag{1}$$

где $k = \operatorname{const} > 0$, в конечной односвязной области Ω , ограниченной кусочно-гладкой кривой Жордана σ с концами в точках $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, расположенной в первом квадранте и характеристиками уравнения (1) $BC : (-x)^p + y^p = 1$, $AD : x^p + (-y)^p = 1$, $CD : x + y = 0$, где $2p = k + 2$. Обозначим через Ω_1 , Ω_2 — гиперболические части смешанной области Ω , где $x > 0$ и $x < 0$, соответственно; Ω_3 — эллиптическую часть области Ω ; $I_1(I_2)$ — интервал $0 < x < 1$ ($0 < y < 1$) прямой $y = 0$ ($x = 0$).

Задача. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, y)|_{\sigma} = \varphi(x, y), \tag{2}$$

$$a_1(x) D_{0x}^{\beta} x^{2\beta-1} u[\theta_0(x)] + b_1(x) u(x, 0) = c_1(x), \quad \forall x \in I_1, \tag{3}$$

$$a_2(y) D_{0y}^{\beta} y^{2\beta-1} u[\theta_0(y)] + b_2(y) u(0, y) = c_2(y), \quad \forall y \in I_2, \tag{4}$$

где $\beta = \frac{k}{2k+4}$, $\theta_0(x)$ — точка пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки $(x, 0) \in I_1$ с характеристикой OD ; $\theta_0(y)$ — точка пересечения характеристики, выходящей из точки $(0, y) \in I_2$ с характеристикой OC ; $\varphi(x)$, $a_i(t)$, $b_i(t)$, $c_i(t)$, — непрерывные функции, причем

$$a_i^2(t) + b_i^2(t) \neq 0, \quad t \in I_i, \quad i = 1, 2 \tag{5}$$

$\varphi(x, y) \in C^1(\sigma)$; $a_i(t)$, $b_i(t)$, $c_i(t) \in C^{(2,h)}(\bar{I}_i)$, $h > 0$, D_{ax}^{α} — операторы дробного в смысле Римана – Лиувилля интегро-дифференцирования [18].

Доказательство единственности решения задачи. Известно, что решение задачи Коши для уравнения (1) с данными на линии $y = 0$ в области Ω_1 задается формулой [14, 20, 2]

$$u(x, y) = -2^{3-4\beta} p \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} xy \int_{a^{\frac{1}{p}}}^{b^{\frac{1}{p}}} t^{2p-1} (t^{2p} - a^2)^{-1+\beta} (b^2 - t^{2p}) \tau_1(t) dt - \\ - 2^{4\beta-1} p \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)} \int_{a^{\frac{1}{p}}}^{b^{\frac{1}{p}}} t^{2p-2} (t^{2p} - a^2)^{-\beta} (b^2 - t^{2p}) \nu_1(t) dt, \quad (6)$$

где $a = x^p - (-y)^p$, $b = x^p + (-y)^p$, $\tau_1(x) = u(x, 0)$, $\nu_1(x) = u_y(x, 0)$, и в области Ω_2

$$u(x, y) = -2^{3-4\beta} p \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} xy \int_{c^{\frac{1}{p}}}^{d^{\frac{1}{p}}} t^{2p-1} (t^{2p} - c^2)^{-1-\beta} (d^2 - t^{2p})^{-1+\beta} \tau_2(t) dt - \\ - 2^{4\beta-1} p \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)} \int_{c^{\frac{1}{p}}}^{d^{\frac{1}{p}}} t^{2p-2} (t^{2p} - c^2)^{-\beta} (d^2 - t^{2p})^{-\beta} \nu_2(t) dt, \quad (7)$$

где $c = y^p - (-x)^p$, $d = y^p + (-x)^p$, $\tau_2(y) = u(0, y)$, $\nu_2(y) = u_x(0, y)$, $\Gamma(\alpha)$ – гамма функция Эйлера [10].

Удовлетворив $U[\theta_0(x)]$, $U[\theta_0(y)]$ условиям (3) задачи, получим

$$\left[\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)} a_1(x) x^{\beta-1} + b_1(x) \right] \tilde{\tau}_1(x) - \\ - 2^{4\beta-2} \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)} a_1(x) D_{0x}^\beta x^{2\beta-1} D_{0x}^{\beta-1} x^{-\frac{1}{2p}-\beta} \tilde{\nu}_1(x) = c_1(x), \quad (8)$$

где $\tau_1(x) = \tilde{\tau}_1(x^{2p})$, $\nu_1(x) = \tilde{\nu}_1(x^{2p})$.

Для упрощения (8) воспользуемся известным соотношением [15, 14, 18, 9]

$$D_{0x}^{1-\varepsilon} x^{1-2\varepsilon} D_{0x}^{-\varepsilon} x^{\varepsilon-1} f(x) = x^{-\varepsilon} D_{0x}^{1-2\varepsilon} f(x). \quad (9)$$

Полагая в (9) $\varepsilon = 1 - \beta$, $f(x) = x^{-\frac{1}{2p}} \cdot \tilde{\nu}_1(x)$, получим [14,18]

$$D_{0x}^\beta x^{2\beta-1} D_{0x}^{\beta-1} x^{-\frac{1}{2p}} \tilde{\nu}_1(x) = x^{\beta-1} D_{0x}^{2\beta-1} x^{-\frac{1}{2p}} \tilde{\nu}_1(x).$$

С учетом последнего уравнение (8) после умножения на $x^{1-\beta}$ примет вид

$$\left[a_1(x) + \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} x^{1-\beta} b_1(x) \right] \tilde{\tau}_1(x) - \gamma a_1(x) D_{0x}^{2\beta-1} x^{-\frac{1}{2p}} \tilde{\nu}_1(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} x^{1-\beta} c_1(x). \quad (10)$$

Аналогично, функциональное соотношение, принесенное на I_2 из области Ω_2 , имеет вид

$$\left[a_2(y) + \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} y^{1-\beta} b_2(y) \right] \tilde{\tau}_2(y) - \gamma a_2(y) D_{0y}^{2\beta-1} y^{-\frac{1}{2p}} \tilde{\nu}_2(y) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} y^{1-\beta} c_2(y) \quad (11)$$

где $\tau_2(y) = \tilde{\tau}_2(y^{2p})$, $\nu_2(y) = \tilde{\nu}_2(y^{2p})$, $\gamma = \frac{2^{4\beta-2} \Gamma(\beta) \Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(2\beta) \Gamma(1-\beta)}$.

Теорема единственности. В области Ω не может существовать более одного регулярного решения задачи (1)–(4), если выполнены условия

$$a_i(t) \neq 0, a_i(t) + \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} t^{1-\beta} b_i(t) \neq 0, \quad \forall t \in I_i, \quad i = 1, 2, \tag{12}$$

$$\left[t^{-k-\frac{1}{2p}} \left(1 + \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} t^{1-\beta} \frac{b_i(t)}{a_i(t)} \right) \right]' \geq 0, \quad a_i(1) b_i(1) > 0. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ – решение однородной задачи (1)–(4). Тогда в области эллиптичности уравнения (1) имеет место соотношение [20, 19, 9]

$$\iint_{\Omega_3} (y^k u_x^2 + x^k u_y^2) dx dy + \int_0^1 x^k \tilde{\tau}_1(x) \nu_1(x) dx + \int_0^1 y^k \tilde{\tau}_2(y) \nu_2(y) dy \equiv 0. \tag{14}$$

Полагая $c_i(t) \equiv 0$, можно установить справедливость следующих неравенств

$$\bar{I}_i = \int_0^1 t^k \tilde{\tau}_i(t) \nu_i dt \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad t = x, y. \tag{15}$$

В самом деле, полагая $c_i(t) \equiv 0$ из (10) и (11) будем иметь

$$\tilde{\tau}_1(t) = A_i(t) D_{0t}^{2\beta-1} t^{-\frac{1}{2p}} \tilde{\nu}_i(t),$$

где $A_i(t) = \frac{\gamma a_i(t)}{a_i(t) + \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} t^{1-\beta} b_i(t)}$, $t = x, y$.

Отсюда, при $t = x$ (или $t = y$)

$$\bar{I}_i = \int_0^1 x^k \tilde{\tau}_i(x) \tilde{\nu}_i(x) dx = \int_0^1 x^k \tilde{\nu}_i(x) A_i(x) D^{2\beta-1} x^{-\frac{1}{2p}} dx.$$

Воспользуемся известной формулой для гамма функций [10]

$$\int_0^\infty t^{\mu-1} \cos kt dt = \frac{\Gamma(\mu)}{k^\mu} \cos \frac{\mu\pi}{2},$$

где $k > 0$, $0 < \mu < 1$.

Полагая в ней $k = |x - \xi|$, $\mu = 2\beta$, получим

$$\begin{aligned} & \Gamma(1 - 2\beta) \Gamma(2\beta) \cos \pi\beta \bar{I}_i = \\ & = \int_0^1 x^k A_i(x) \tilde{\nu}_i(x) dx \int_0^x \xi^{-\frac{1}{2p}} \tilde{\nu}_i(\xi) d\xi \int_0^\infty t^{2\beta-1} \cos t(x - \xi) dt. \end{aligned}$$

Поменяв порядок интегрирования и вводя обозначения $\nu_i^*(\xi) = \xi^{-\frac{1}{2p}} \tilde{\nu}_i(\xi)$, $\bar{A}_i(x) = x^{k+\frac{1}{2p}} A_i(x)$, получим

$$\frac{\pi}{2 \sin \pi\beta} \bar{I}_i = \int_0^\infty t^{2\beta-1} dt \int_0^1 \bar{A}_i(x) \tilde{\nu}_i^*(\xi) dx \int_0^x \nu_i^*(\xi) \cos t(x - \xi) d\xi.$$

С учетом того, что $\left[\left(\int_0^x \tilde{\nu}_i^*(\xi) \cos t\xi d\xi \right)^2 \right]' = 2\nu_i^*(x) \cos tx \int_0^x \nu_i^*(\xi) \cos t\xi d\xi$,

$$\left[\left(\int_0^x \tilde{\nu}_i^*(\xi) \sin t\xi d\xi \right)^2 \right]' = 2\nu_i^*(x) \sin tx \int_0^x \nu_i^*(\xi) \sin t\xi d\xi,$$

в результате преобразований, после интегрирования по частям, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2 \sin \pi\beta} \bar{I}_i &= \int_0^\infty t^{2\beta-1} dt \left\{ \bar{A}_i(1) \left[\left(\int_0^1 \nu_i^*(\xi) \cos t\xi d\xi \right)^2 + \left(\int_0^1 \nu_i^*(\xi) \sin t\xi d\xi \right)^2 \right] - \right. \\ &\left. - \int_0^1 \bar{A}_i'(x) dx \left[\left(\int_0^x \nu_i^*(\xi) \cos t\xi d\xi \right)^2 + \left(\int_0^x \nu_i^*(\xi) \sin t\xi d\xi \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Неравенства (15) будут выполняться при выполнении $\bar{A}_i(1) \geq 0, \bar{A}_i'(x) \leq 0$, что обеспечено выполнением условий (13) теоремы. Единственность решения задачи будет следовать из (14), (15).

Доказательство существования решения задачи. Переходя к доказательству существования решения задачи, будем считать, что $\varphi(x, y) \equiv 0$ и кривая σ совпадает с нормальным контуром $\sigma_0: x^{2p} + y^{2p} = 1$. Пусть $a_i(t) = t^{1-\beta} a_i^*(t)$, $a_i^*(t) \neq 0$.

Основные функциональные соотношения между $\tilde{\tau}_i(t)$ и $\tilde{\nu}_i(t)$, принесенные на I_i ($i = 1, 2$) из эллиптической Ω_3 и гиперболических Ω_1 и Ω_2 частей смешанной области, соответственно имеют вид [20]

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_i(t) &= -\frac{\gamma_1}{2p} \int_0^1 \xi^{\beta-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{|\xi-t|^{2\beta}} - \frac{1}{|1-\xi t|^{2\beta}} \right] \tilde{\nu}_i(\xi) d\xi - \\ &- \frac{\gamma_1}{2p} \int_0^1 \xi^{\beta-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{|\xi+t|^{2\beta}} - \frac{1}{|1+\xi t|^{2\beta}} \right] \tilde{\nu}_j(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\gamma_1 = \frac{\Gamma^2(\beta)}{\pi^{2-4\beta}\Gamma(2\beta)}$, $i, j = 1, 2, i \neq j$, и

$$\left[a_i(t) + \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} t^{1-\beta} b_i(t) \right] \tilde{\tau}_i(t) - \gamma a_i(t) D_{0t}^{2\beta-1} t^{-\frac{1}{2p}} \tilde{\nu}_i(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} t^{1-\beta} c_i(t) \quad (17)$$

Пусть выполняются условия (12) теоремы единственности. Тогда (17) можно переписать в виде

$$\tilde{\tau}_i(t) = A_i(t) D_{0t}^{2\beta-1} t^{-\frac{1}{2p}} \tilde{\nu}_i(t) + f_i(t), \quad (18)$$

где

$$f_i(t) = \frac{\Gamma(\beta) t^{1-\beta} c_i(t)}{\Gamma(2\beta) a_i(t) + \Gamma(\beta) t^{1-\beta} b_i(t)}.$$

Исключим $\tilde{\tau}_i(t)$ из (16) и (18). Получим

$$A_i(t) D_{0t}^{2\beta-1} t^{-\frac{1}{2p}} \tilde{\nu}_i(t) + f_i(t) = -\frac{\gamma_1}{2p} \int_0^1 \xi^{\beta-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{|\xi-t|^{2\beta}} - \frac{1}{|1-\xi t|^{2\beta}} \right] \tilde{\nu}_i(\xi) d\xi -$$

$$-\frac{\gamma_1}{2p} \int_0^1 \xi^{\beta-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{|\xi+t|^{2\beta}} - \frac{1}{|1+\xi t|^{2\beta}} \right] \tilde{\nu}_j(\xi) d\xi.$$

Пусть $a_i(t) \neq 0$, тогда подействуем на обе части полученного уравнения оператором $D_{0t}^{1-2\beta}$. После преобразований с учетом гладкости ядер будем иметь

$$\tilde{\nu}_i^*(t) + \int_0^1 \left(\frac{\xi}{t} \right)^{1-2\beta} \frac{\bar{k}_i^*(\xi, t)}{\xi+t} \tilde{\nu}_j^*(\xi) d\xi +$$

$$+ \int_0^1 \left(\frac{\xi}{t} \right)^{1-2\beta} \frac{\bar{k}_i^*(\xi, t)}{\xi-t} \tilde{\nu}_j^*(\xi) d\xi = -D_{0t}^{1-2\beta} \left[\frac{f_i(t)}{A_i(t)} \right],$$

где $k_i^*(\xi, t), \bar{k}_i^*(\xi, t) \in C(\bar{I} \times \bar{I}) \cap C^1(I \times I)$, $\tilde{\nu}_i^*(t) = \tilde{\nu}_i(t) t^{-\frac{1}{2p}}$, $i, j = 1, 2, i \neq j$.

Следовательно вопрос существования решения задачи эквивалентно редуцирован к вопросу разрешимости системы сингулярных интегральных уравнений (19) относительно неизвестных функций $\tilde{\nu}_i^*(t)$, $i = 1, 2$.

Условия $1 + \pi^2 [\bar{k}_i^*(t, t)]^2 = 1 + \frac{\pi^2}{A_i^2(t)} \neq 0$, $i = 1, 2$ гарантируют существование регуляризаторов [13], приводящих сингулярные интегральные уравнения (19) к уравнениям Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которых в требуемом классе функций будет следовать из единственности решения задачи. По найденным $\tilde{\nu}_i^*(t)$ можно найти $\tilde{\tau}_i(t)$ из (18), а следовательно, и решение задачи (1) – (4) как решение задачи Дирихле в области Ω_3 и решения задач Коши в областях Ω_1 и Ω_2 .

2. Заключение

В работе для уравнения смешанного эллипτικο-гиперболического типа с двумя линиями парболического вырождения доказана однозначная разрешимость внутренней краевой задачи. Единственность доказывается методом интегралов энергии, при этом на заданные функции и порядки дробных производных в краевых условиях выписываются определенные ограничения неравенственного типа. Для доказательства существования задача эквивалентно редуцирована к вопросу разрешимости системы сингулярных интегральных уравнений второго порядка с ядром Коши относительно производных от следов искомого решения на линиях вырождения. Система сингулярных интегральных уравнений сведена к уравнениям Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которых следует из единственности решения задачи. Так же, установлено влияние на корректность постановки задачи порядков дробных производных в краевых условиях и их связь с порядком вырождения уравнения.

Список цитируемых источников

1. *Repin O A., Kumukova S. K.* A problem with generalized fractional integro-differentiation operators of arbitrary order // Russian Mathematics, Vol. 56, No. 12, 50–60 (2012).
2. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
Bitsadze A. V. Some classes of partial differential equations. – Nauka, M., 2006. (in Russian)
3. *Водахова В. А., Гучаева З. Х.* Нелокальная задача для нагруженного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. Успехи современного естествознания. № 7. 90–92 (2014).
Vodakhova V. A., Guchaeva Z. Kh. A non-local task for a loaded third-order equation with multiple characteristics. Advances in modern science, 7, 90-92 (2014). (in Russian)
4. *Водахова В. А., Тлупова Р. Г., Шерметова М. Х.* Внутреннекраевая задача для нагруженного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. Успехи современного естествознания. № 1-1, 71–75 (2015).
Vodakhova V. A., Tlupova R. G., Shermetova M. Kh. Internal task for a loaded third-order equation with multiple characteristics. Successes of modern science, №1-1, 71-75 (2015). (in Russian)
5. *Водахова В. А., Яхутлова М. Р., Тлимахова Р. Г.* Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения. Современные наукоемкие технологии. № 2–3, 416–420 (2016).
Vodakhova V. A., Yakhutlova M. R., Tlimakhova R. G. Nonlocal problem for a mixed-type equation with two perpendicular lines of degeneracy. Modern high technologies. № 2–3, 416–420 (2016). (in Russian)
6. *Езаова А. Г.* Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка. Известия Кабардино–Балкарского государственного университета. 1, № 4. 26–31 (2011).
Ezaova A. G. About a non-local task for a third-order mixed-type equation. Transactions of the Kabardino-Balkarian State University, 1, №4, 26-31 (2011). (in Russian)
7. *Езаова А. Г., Думаева Л. В.* Об одной внутреннекраевой задаче для уравнения третьего порядка с группой младших членов. Фундаментальные исследования, № 2 (часть 27), 6032–6036 (2015).
Ezaova A. G., Dumaeva L. V. About one internal-boundary problem for a third-order equation with a group of lower terms. Fundamental Research, No. 2 (part 27), 6032-6036 (2015). (in Russian)
8. *Елеев В. А., Кумыкова С. К.* О некоторых краевых задачах со смещением на характеристиках для смешанного уравнения гиперболического типа. Украинский математический журнал, 52, № 5, 707–716 (2000).
Elev V. A., Kumukova S. K. On some boundary value problems with a shift on the characteristics for a mixed equation of a hyperbolic-parabolic type. Ukrainian Mathematical Journal, 52, №5, 707 – 716 (2000). (in Russian)
9. *Кумыкова С. К., Водахова В. А., Езаова А. Г.* Локальные и нелокальные задачи для вырождающихся гиперболических уравнений. Учебное пособие. Нальчик, 2017.

- Kumykova S. K., Vodakhova V. A., Ezaova A. G. Local and non-local problems for degenerate hyperbolic equations. Tutorial, Nalchik, 2017. (in Russian)
10. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М. – Л., 1963.
Lebedev N. N. Special functions and their applications. - М. - Л., 1963. (in Russian)
11. *Маричев О. И., Килбас А. А., Репин О. А.* Краевые задачи для уравнений с частными производными с разрывными коэффициентами. Самара: Изд-во Самарский гос. экономический университет, 2008.
Marichev O. I., Kilbas A. A., Repin O. A. Boundary value tasks for partial differential equations with discontinuous coefficients. Samara: Publishing house Samara State University of Economics, 2008. (in Russian)
12. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
Muskhelishvili N. I. Muskhelishvili N. I. Singular integral equations. –М.: Nauka, 1968. (in Russian)
13. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
Nakhushev A. M. Offset tasks for partial differential equations. М.: Nauka, 2006. (in Russian)
14. *Репин О. А., Кумыкова С. К.* Внутреннекраевая задача с операторами Римана – Лиувилля для уравнения смешанного типа с третьего порядка. Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 20, № 1, 43–53 (2016).
Repin O. A., Kumykova S. K. Internal task with Riemann-Liouville operators for a mixed-type equation from third order. Vestnik of Samara State Technical University. Ser.: Physics and mathematics. 20, №1, 43–53 (2016). (in Russian)
15. *Репин О. А., Кумыкова С. К.* О задаче с обобщенными операторами дробного дифференцирования для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки» №1(30), 150–158 (2013).
Repin O. A., Kumykova S. K. About the task with generalized fractional differentiation operators for a mixed-type equation with two lines of degeneracy. Vestnik of Samara State Technical University. Ser.: "Physics and Mathematics №1 (30), 150 – 158 (2013). (in Russian)
16. *Репин О. А., Кумыкова С. К.* О разрешимости нелокальной задачи для одного уравнения гиперболического типа второго рода. Известия высших учебных заведений. Математика, №9. 51–58 (2016). (in Russian)
Repin, O. A.; Kumykova, S. K. About the solvability of a non-local problem for a single equation of a hyperbolic type of the second kind. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Mathematics, №9. 51–58 (2016) (in Russian)
17. *Салахитдинов М. С., Менгзияев Б.* Об одной краевой задаче со смещением для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. Дифференциальные уравнения 13, №1, 133–139 (1977).

- Salakhitdinov M. S., Mengziyaev B. About a boundary value task with a shift for an equation of mixed type with two lines of degeneracy. *Differential Equations*, 13, No.1. 133 – 139 (1977). (in Russian)
18. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
Samko, St. G.; Kilbas, A. A.; Marichev, O. I. Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications, Minsk, 1987. (in Russian)
19. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966.
Smirnov M. M. Degenerate elliptic and hyperbolic equations. - М.: Nauka, 1966. (in Russian)
20. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985.
Smirnov M. M. Equations of mixed type. М.: Vysshaya Shkola, 1985. (in Russian)

Получена 22.11.2018 Переработана 15.03.19

УДК 514.12

Замкнутость базисных поверхностей, инвариантных относительно групп A_3 и B_3

В. А. Терновский, М. С. Бичулова

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,

E-mail: ternowskyva@mail.ru, masha.bichulova@yandex.ru

Аннотация. Одной из основных задач в теории инвариантов является построение образующих алгебры инвариантов некоторой группы. В настоящей статье изучается строение базисных поверхностей инвариантных относительно конечных групп, порожденных отражениями в вещественном пространстве. Получены достаточные условия замкнутости всех базисных поверхностей алгебр инвариантов для групп симметрии правильного симплекса и куба в трехмерном евклидовом пространстве.

Ключевые слова: инварианты, группы симметрий, базисные инварианты, алгебра инвариантов, группы порожденные отражениями.

Closedness of basis surfaces invariant with respect to the groups A_3 and B_3

V. A. Ternovskiy, M. S. Bichulova

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol.

Abstract. In the real m -dimensional Euclidean space E^m , the group G is generated by orthogonal reflections with respect to $N(G)$ hyperplanes with common point O . In a rectangular coordinate system, we assign the algebraic hypersurface of order n to $f(x) = 0$, where $f(x)$ is a polynomial degrees n with respect to the coordinates of the vector $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$. The set of all hypersurfaces invariant with respect to the same group G corresponds to the set $f(x)$, which forms the algebra I^G . The description of the algebra I^G is a fundamental problem in the theory of invariants. In this article, we study the structure of the basis surfaces invariant with respect to finite groups generated by reflections in real space. Sufficient conditions for the closure of all basis surfaces of the algebras of invariants for the symmetry groups of the regular simplex A_3 and the cube B_3 in three-dimensional Euclidean space are obtained.

Keywords: invariant, symmetry groups, basic invariant, algebra of invariants, groups generated by reflections.

MSC 2010: 20B30

Введение

В вещественном m -мерном евклидовом пространстве E^m группа G порождена ортогональными отражениями относительно $N(G)$ гиперплоскостей с общей точкой O . В прямоугольной системе координат алгебраическую гиперповерхность порядка n зададим уравнением $\varphi(x) = 0$, где $\varphi(x)$ — многочлен степени n относительно координат вектора $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$. Множеству всех гиперповерхностей,

инвариантных относительно одной и той же группы G , соответствует множество $\varphi(x)$, образующее алгебру I^G .

Описание алгебры I^G является фундаментальной проблемой теории инвариантов. Для конечных групп в 1890 году Д. Гильберт [1] доказал основную теорему теории инвариантов, утверждающую, что алгебра инвариантов имеет конечное число образующих. Для конечных групп отражений G К. Шевалье [2] получил фундаментальный результат, состоящий в том, что m алгебраически независимых однородных многочленов образуют базис инвариантов G . Как показали Шепард и Тодд [3], если базис инвариантов состоит из m однородных многочленов, то G — конечная группа отражений. Таким образом, алгебра I^G порождается m алгебраически независимыми формами I_{n_i} . Г. С. М. Коксетр [4] классифицировал все неприводимые группы G пространства E^m и нашел степени n_i форм I_{n_i} , $i = 1, \dots, m$.

Известны различные методы нахождения в явном виде базиса I^G для некоторых групп G [5]. В 1969–1970 годах Флатто и Винер [6, 7] впервые дали алгоритм нахождения I_{n_i} с помощью многочленов

$$P_t(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{\sigma \in G} (\vec{x}, \sigma \vec{y})^t, \quad t \geq 1, \quad (1)$$

где $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^m (x_i, y_i)$ — скалярное произведение векторов $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$ и $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m)$. Модификация (1): $\vec{x} = \vec{y}$, $\sigma \in G$ — отражения, предложенная в работе [8] требует четности n_i , но существенно уменьшает технические трудности, они становятся преодолимыми. Заведующим кафедрой геометрии Симферопольского государственного университета профессором Владимиром Федотовичем Игнатенко в 1983 году [9] полностью решена задача построения в явном виде базисов I^G всех алгебр с использованием многочленов Погорелова

$$\theta_{2t}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N(G)} \eta_j^{2t}(\vec{x}),$$

где $\eta_j(\vec{x}) = 0$ — нормированные уравнения гиперплоскостей отражения, и специальных дифференциальных операторов.

В. Ф. Игнатенко в работе [10] поставил задачу: получить уравнения всех базисных, отличных от сферы замкнутых поверхностей, инвариантных относительно конечных групп, порожденных ортогональными отражениями в евклидовом пространстве.

В данной статье получены достаточные условия замкнутости всех базисных поверхностей алгебр инвариантов для групп симметрии правильного трехмерного симплекса и куба.

1. Постановка задачи и основной результат

Зададим в вещественном трехмерном пространстве E^3 прямоугольную систему координат Ox_i , $i = 1, 2, 3$. Пусть G — конечная группа симметрий, порожденная

ортогональными отражениями относительно плоскостей симметрии с общей точкой O . Если $I_j(G)$, $j = 1, 2, 3$, — образующие алгебры всех инвариантов группы G , то уравнение двумерной базисной алгебраической поверхности можно задать так

$$I_j(G) = c, \tag{2}$$

где $c = const$.

Предположим, что поверхность (2) не замкнута, тогда существует действительный асимптотический конус этой поверхности, то есть, существует, по крайней мере, одна действительная точка, отличная от 0, удовлетворяющая уравнению

$$I_j(G) = 0.$$

Отметим, что для любой группы G поверхность, заданная уравнением $I_1 = c$ замкнута.

1.1.

Приведем достаточные условия замкнутости базисных алгебраических поверхностей конечной группы симметрии A_3 .

Итак, пусть $G = A_3$.

Возьмем следующие базисные инварианты [9]

$$I_1 = \sum_{i=1}^3 x_i^2, \quad I_2 = x_1 x_2 x_3, \quad I_3 = \sum_{i=1}^3 x_i^4 - 2 \sum_{i<j}^3 x_i^2 x_j^2.$$

Очевидно, что поверхность $I_2 = c$ не замкнута. Базисная поверхность четвертого порядка общего вида задается уравнением

$$I_3 + aI_1^2 = c,$$

где a — произвольная константа. Имеем

$$I_3 + aI_1^2 = (1 + a) \sum_{i=1}^3 x_i^4 + 2(a - 1) \sum_{i<j}^3 x_i^2 \cdot x_j^2.$$

Положим $y_i = x_i^2$ ($i = 1, 2, 3$), тогда приведенное выше выражение, приравняв к нулю, запишем так

$$b_0 y_1^2 + b_1 y_1 + b_2 = 0, \tag{3}$$

где $b_0 = 1 + a$, $b_1 = 2(a - 1)(y_2 + y_3)$, $b_2 = (1 + a)(y_2^2 + y_3^2) + 2(a - 1)y_2 y_3$.

Положим $y_2 = y_3 = 0$, тогда при $a = -1$ y_1 может быть любым действительным числом. Теперь предположим, что y_2 и y_3 неотрицательные действительные числа, одновременно не равные нулю. Найдем значение a , при которых уравнение (4) не имеет положительных корней. Если $a \leq -1$ ($a \geq 1$), то при любых y_2, y_3 , удовлетворяющих нашему предположению, $b_i \leq 0$ ($b_i \geq 0$), $i = 0, 1, 2$. Следовательно,

по правилу знаков Декарта уравнение (2) при $a \leq -1$, $a \geq 1$ положительных корней не имеет. Но это правило не утверждает, что при $-1 < a < 1$ всегда есть положительные корни. Поэтому найдено только достаточное условие: базисная поверхность четвертого порядка замкнута при $a < -1$, $a \geq 1$.

Таким образом, для группы A_3 мы получили следующий результат: базисная поверхность второго порядка замкнута; базисная поверхность третьего порядка не замкнута; базисная поверхность четвертого порядка замкнута при $a \leq -1$, $a \geq 1$.

1.2.

Теперь пусть $G = B_3$.

Алгебра всех инвариантов группы симметрий B_3 имеет следующие образующие [1]:

$$I_1 = \sum_{i=1}^3 x_i^2, \quad I_2 = \sum_{i=1}^3 x_i^4, \quad I_3 = \sum_{i=1}^3 x_i^6,$$

Базисная поверхность четвертого порядка задается уравнениями

$$I_2 + aI_1^2 = (1+a) \sum_{i=1}^3 x_i^4 + 2a \sum_{i<j}^3 x_i^2 x_j^2 = C$$

Положив $x_i^2 = y_i$, $i = 1, 2, 3$ и $C = 0$, получим уравнение

$$b_0 y_1^2 + b_1 y_1 + b_2 = 0, \quad (4)$$

где $b_0 = 1 + a$, $b_1 = 2a(y_2 + y_3)$, $b_2 = (1 + a)(y_2^2 + y_3^2) + 2ay_2y_3$. Так как y_2, y_3 неотрицательные действительные числа одновременно не равные нулю, то при $a \leq -1$ ($a \geq 0$) все $b_i \leq 0$ ($b_i \geq 0$), $i = 0, 1, 2$. Пусть, тогда y_1 будет положительным числом только при $a = -1$. Следовательно, при $a < -1$ и $a \geq 0$ базисная поверхность четвертого порядка замкнута.

Рассмотрим базисную поверхность шестого порядка, которая задается следующим уравнением

$$\begin{aligned} I_3 + a_1 I_1 I_2 + a_2 I_1^3 &= \sum_{i=1}^3 x_i^6 + a_1 \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^3 x_i^4 \right) + a_2 \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 \right)^3 = \\ &= \sum_{i=1}^3 x_i^6 + a_1 \left(\sum_{i=1}^3 x_i^6 + \sum_{i,j=1}^3 x_i^4 x_j^2 \right) + a_2 \left(\sum_{i=1}^3 x_i^6 + 3 \sum_{i,j=1}^3 x_i^4 x_j^2 + 6x_1^2 x_2^2 x_3^2 \right) = \\ &= (1 + a_1 + a_2) \sum_{i=1}^3 x_i^6 + (a_1 + a_2) \sum_{i,j=1}^3 x_i^4 x_j^2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 x_3^2 = C \end{aligned}$$

Положив $x_i^2 = y_i$, $i = 1, 2, 3$, и $C = 0$, получим

$$\begin{aligned} (y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) + (a_1 + a_2)(y_1^2 y_2 + y_2^2 y_3 + y_2^2 y_1 + y_2^2 y_3 + y_3^2 y_1 + y_3^2 y_2) + 6a_2 y_1 y_2 y_3 &= 0 \\ (1 + a_1 + a_2)y_1^3 + (a_1 + a_2)(y_2 + y_3)y_1^2 + ((a_1 + a_2)(y_2^2 + y_3^2) + 6a_2 y_2 y_3)y_1 + b_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$b_0 y_1^3 + b_1 y_1^2 + b_2 y_1 + b_3 = 0, \tag{5}$$

где $b_0 = 1 + a_1 + a_2$, $b_1 = (a_1 + 3a_2)(y_2 + y_3)$, $b_2 = (a_1 + 3a_2)(y_2^2 + y_3^2) + 6a_2 y_2 y_3$, $b_3 = (1 + a_1 + a_2)(y_2^3 + y_3^3) + (a_1 + 3a_2)(y_2^2 y_3 + y_2 y_3^2)$.

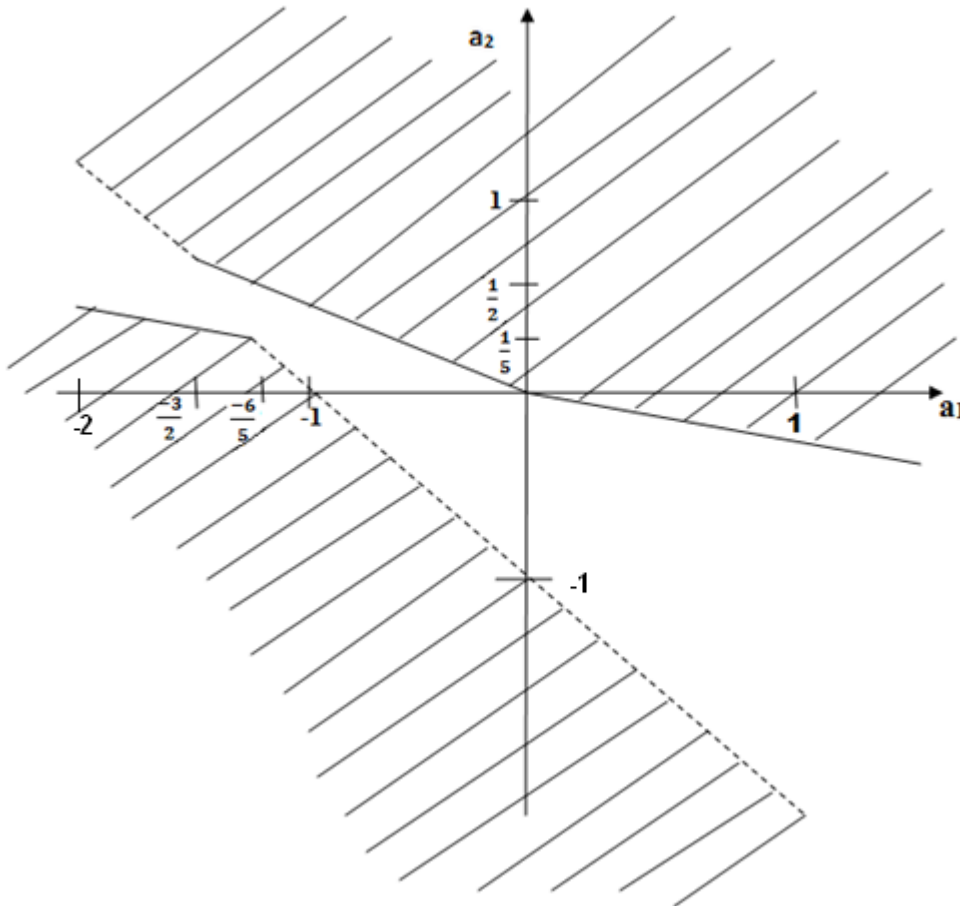


Рис. 1.

Считая y_2, y_3 неотрицательными действительными числами одновременно не равными нулю, находим, что при $a_2 \leq -\frac{1}{6}a_1$, $a_1 \leq -\frac{6}{5}$, $a_2 \leq -a_1 - 1$, $a_1 \geq -\frac{6}{5}$, все $b_i \leq 0$, а при $a_2 \geq -a_1 - 1$, $a_1 \leq -\frac{3}{2}$, $a_2 \geq -\frac{1}{3}a_1$, $-\frac{3}{2} < a_1 \leq 0$, $a_2 \geq -\frac{1}{6}a_1$, $a_1 > 0$, все $b_i \geq 0$.

Если $y_2 = y_3 = 0$, то уравнение (5) имеет положительные решения только при $a_2 + a_1 + 1 = 0$.

Таким образом, базисная поверхность шестого порядка замкнута, если a_1 и a_2

удовлетворяют следующим неравенствам (Рис. 1)

$$\begin{aligned}
 a_2 &> -a_1 - 1, \quad a_2 \leq -\frac{1}{6}a_1, \quad a_1 \leq -\frac{3}{2} \\
 a_2 &\geq -\frac{1}{3}a_1, \quad a_2 \leq -\frac{1}{6}a_1, \quad -\frac{3}{2} < a_1 \leq -\frac{6}{5} \\
 a_2 &\geq -\frac{1}{3}a_1, \quad a_2 < -a_1 - 1, \quad -\frac{6}{5} < a_1 \leq 0 \\
 a_2 &\geq -\frac{1}{6}a_1, \quad a_2 < -a_1 - 1, \quad a_1 > 0.
 \end{aligned}$$

Список цитируемых источников

1. *Hilbert, D.* Über die Theorie der algebraischen Formen. Math. Ann. 36, 473-534 (1890).
2. *Chevalley, Claude* Invariants of finite groups generated by reflections. Am. J. Math. 77, 778-782 (1955).
3. *Shephard, G. C., Todd, J. A.* Finite unitary reflection groups. Canad. J. Math. 6, 274-304 (1954).
4. *Coxeter, H. S. M.* Discrete groups generated by reflections. Ann. Math. 35, 588-621 (1934).
5. *Игнатенко, В. Ф.* Геометрия алгебраических поверхностей с симметриями. Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. 11, М.: ВИНТИ, 203-240 (1980).
Ignatenko, V. F. Geometry of algebraic surfaces with symmetries. J. Soviet Math. 17, No.1, 1689-1711 (1981).
6. *Flatto, Leopold; Weiner, Margaret M.* Invariants of finite reflection groups and mean value problems. Am. J. Math. 91, 591-598 (1969).
7. *Flatto, Leopold* Invariants of finite reflection groups and mean value problems. II. Am. J. Math. 92, 552-561 (1970).
8. *Игнатенко, В. Ф.* К проблеме нахождения полных базисов алгебр многочленов, инвариантных относительно групп симметрий пространства E^n . Тез. докл. Всесоюзного симпозиума по теории симметрии и ее обобщениям (стр. 50-51). Кишинев, 1980.
Ignatenko, V. F. On the problem of finding complete bases of algebras of polynomials that are invariant with respect to the symmetry groups of the space E^n . Tez. dokl. Vsesoyuznogo simpoziuma po teorii simmetrii i yeye obobshcheniyam (Tez. report All-Union Symposium on Theory of Symmetry and Its Generalizations) (pp. 50-51) Kishineyv, 1980. (in Russian)
9. *Игнатенко, В. Ф.* Об инвариантах конечных групп, порожденных отражениями. Мат. сб. 120(162), No.4, 556-568 (1983).
Ignatenko, V. F. On invariants of finite groups generated by reflections, Math. USSR-Sb. 48, No.2, 551-563 (1984).
10. *Игнатенко, В. Ф.* Об алгебраических поверхностях с группами симметрии A_n , B_n , D_n . Украинский геометрический сборник 24, 33-39 (1981).
Ignatenko, V. F. On algebraic surfaces with the symmetry groups A_n , B_n , D_n . Ukr. Geom. Sb. 24, 33-39 (1981). (in Russian)

Получена 21.01.2019

MSC 2010: 83C22, 78A25, 35Q76

Classical electrodynamics with non-point charge: big computational difficulties generated by small parameters

V. A. Temnenko

Crimean Engineering and Pedagogical University, Simferopol 295015. *E-mail:*
valery.temnenko@gmail.com

Abstract. We describe computational difficulties that may arise in the numerical solution of the stationary problem of classical electrodynamics with non-point particles [1]. These difficulties are associated with the presence of a small parameter in this theory, which takes into account the curvature of spacetime caused by the existence of a non-point charged particle. The energy of a gravitational coupling almost completely “eats” the electromagnetic energy of a particle. To calculate the observed particle mass, it is necessary to calculate these two opposite-sign contributions to the particle mass with an accuracy greater than 21 significant digits. Such unprecedented requirements for accuracy did not arise earlier in any problem of theoretical physics.

Keywords: non-point leptons, Stoney’s mass, electromagnetic mass, gravitational coupling energy.

1. Introduction

The author’s article [1] presented a new formulation of classical electrodynamics, which does not contain point charges. The non-point charges of this theory are some eigenstates of the current field J^i . The 4-current J^i (more precisely, J^i is the density of 4-current) inside the particle is a space-like vector: $J^i J_i < 0$. The motivation for the space-likeness of the current J^i is presented in [1]. The condition of the space-like current means that in the theory [1] the 4-current J^i has no mechanical interpretation. The space part \mathbf{J} of the 4-current J^i cannot be interpreted in terms of a motion, a space-transfer of a charge density ρ . Within the framework of this theory, the 4-current $J^i = \{\rho c, \mathbf{J}\}$ is the primary physical object, whose properties cannot be expressed in terms of the known properties of some other, simpler physical objects.

Within the framework of the theory [1], the electromagnetic field inside the particle is described by a vector dyad consisting of two 4-vectors: 4-current J^i and 4-potential A^i . Inside the particle, the current J^i is a space-like vector. On the outer boundary of a non-point particle, the 4-current J^i is an isotropic 4-vector: $J^i J_i = 0$. This boundary condition of the 4-current isotropy implicitly determines the outer boundary of the particle. On this boundary, the derivatives of the 4-potential A^i are continuous. The components A^i on the surface of a particle can undergo a discontinuity. Outside of charges, the current J^i is absent, and the 4-potential A^i satisfies the homogeneous Maxwell equations. In the framework of the classical theory [1], the 4-current J^i is taken into account in the Lagrangian density by the term L_J quadratic in the current:

$L_J = -\frac{1}{2}aJ^iJ_i$. For dimensional reasons, the constant factor a in L_J can be written as $a = \left(\frac{r_0}{c}\right)^2$, where c is the speed of light, and r_0 is the new fundamental constant of length dimension. The constant r_0 is some estimation of the size of non-point particles. It is well known that, up to distances of $\sim 10^{-16}$ cm, massive leptons do not demonstrate the presence of any internal structure in particle scattering experiments. Therefore, $r_0 < 10^{-16}$ cm. Below it is shown that the real particle size is much smaller than this experimental upper limit. Small particle sizes¹ mean a high density of the components of the energy-momentum tensor of the currents and the electromagnetic field T^{ij} inside the charge and in its vicinity. This means that classical electrodynamics of non-point particles requires taking into account the curvature of space-time inside and around the particles [1]. Consequently, the electrodynamics equations of non-point particles must be solved in a Riemannian space-time with geometry which obeys the Einstein equations and is unknown before the solution. When calculating the mass and angular momentum of a lepton, it is necessary to take into account not only the contribution of the tensor T^{ij} . It is necessary to take into account the contribution made to these integral characteristics by the pseudo-tensor of the energy-momentum of the gravitational field t^{ij} . This need to take into account the contribution t^{ij} to the integral characteristics of particles gives rise to the computational problem of such a difficulty, which, apparently, no one in the computational mathematics has ever faced before.

2. Dimensionless parameters of classical electrodynamics of non-point particles

The system of equations of classical electrodynamics of the non-point particles [1] includes the Einstein equation. Consequently, the theory contains a gravitational constant G . This means that along with the unknown fundamental constant r_0 , the theory contains another constant of the dimension of length. This is the so-called “the Stoney’s length” [3] $r_s : r_s = \frac{e}{\sqrt{2}}\sqrt{G} = 1.381 \cdot 10^{-34}$ cm, where e is the value of the electric charge of an electron. In the article [1] it was suggested that the value of r_s characterizes the dimensions of some current-free internal cavities inside the particles.

The theory [1] also contains some characteristic quantity having the dimension of mass, so-called “the Stoney’s mass” $m_s : m_s = \frac{e}{\sqrt{G}} = 1.859 \cdot 10^{-6}$ g². Note that “the Stoney’s units” r_s and m_s appeared in theoretical physics in 1881, i.e. earlier than

¹We are talking only about massive leptons. The study of hadrons in the framework of the approach [1] requires the construction of the classical theory of the Yang-Mills octuplet field, consisting of the octuplet dyad: the 4-current octuplet and the 4-potential octuplet. The author’s article [2] gives a general idea of a such theory. Quarks in theory [2] are one-current extended objects immersed in a triplet or a quadruplet of potentials that form a subset of the potential octuplet that is closed relative to the vector product in a vector octuplet. This vector product is specified by means of the structure anti-symmetric 3-symbol of the group $SU(3)$. This combination of three or four potentials forms what is commonly called the color of the quark. There are 8 quarks in theory [2], two of which are not yet open.

²The British-Irish physicist and astronomer George Johnstone Stoney not only introduced the fundamental system of units of measurement of physical quantities, but also proposed in 1874 a new

the Planck units that are more common for modern physicists: the Planck mass is $m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.176 \cdot 10^{-5}$ g and the Planck length is $r_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1.616 \cdot 10^{-33}$ cm (\hbar is Planck's constant). We believe that in the classical theory [1], the appearance of Planck's constant and, accordingly, of Planck units of length and mass is completely inappropriate.

The presence in the theory [1] of two constants with dimension of a length means that the classical electrodynamics of non-point particles “at the entrance” to the theory contains the dimensionless parameter $\kappa = \frac{r_s}{r_0}$. The presence of this parameter “at the entrance” to the theory – it is very reasonable to assume that it is a small parameter – makes it possible to calculate and explain some small parameters appearing “at the output” of the theory. The theory [1] allows, in principle, to calculate the masses of charged leptons, expressing them, for example, through the Stoney's mass. However, such a dimensionless electron mass μ is monstrously small: $\mu = \frac{m}{m_s} = 0.49 \cdot 10^{-21}$ (here m is the electron mass in grams).

The author provided an estimate of the possible value of the fundamental constant r_0 : $r_0 \approx (r_T r_s^2)^{1/3} \simeq 2 \cdot 10^{-27}$ cm [5], where $r_T = \frac{e^2}{mc^2}$ is the Thompson radius of the electron³.

It is unlikely that this estimate of the constant r_0 is very reliable, because r_0 is a fundamental constant that characterizes the structure of the world as a whole, and r_T is a constant that characterizes only one particle (electron). But there is currently no other estimation for r_0 . From this estimation for r_0 it follows that $\kappa \simeq \left(\frac{m}{m_s}\right)^{1/3} \simeq 0.8 \cdot 10^{-7}$ and, accordingly, $\mu \simeq \kappa^3$. These estimations for r_0 and κ are only by orders of magnitude. The relationship between μ and κ may contain a factor of $O(1)$.

This fundamental relation $\mu \simeq \kappa^3$ is based on the qualitative and not very reliable arguments given in [5]. Generally speaking, it should be an exact quantitative consequence of the numerical solution of the stationary problem about geometry, charge and current distribution for classical model of a non-point lepton [1]. However, this stationary problem has not yet been solved, and the difficulties of its numerical solution now seem insurmountable.

3. Small parameters of the theory [1] and high demands on the accuracy of the numerical solution

Without having the solution of the stationary single-particle problem of classical electrodynamics of non-point particles, we can present here only qualitative considerations illustrating the difficulty of numerically solving this problem. To estimate the observed lepton mass m , we can offer the following formula:

$$m = m_{em} - \frac{U_G}{c^2}, \tag{3.1}$$

term “electron” as the name of an elementary particle that was not yet open at that time ([4], p. 82).

³In formula (39) of article [4] in this expression, instead of the Stoney's length r_s , the Planck's length r_p appeared. The author believes now that the appearance of Planck units is inappropriate in the classical theory.

where m_{em} is the electromagnetic mass (it is the integral taken over the entire three-dimensional space in the particle rest system from the component T^{00} of the energy-momentum tensor of the current and the electromagnetic field). The value $-U_G$ is the energy of the gravitational coupling (it is the integral taken over the entire three-dimensional space in the particle rest system from the component t^{00} of the pseudo-tensor of the energy-momentum of the gravitational field).

Electromagnetic mass of the particle m_{em} for dimensional reasons can be written in the following form:

$$m_{em} = A \frac{e^2}{r_0 c^2}, \quad (3.2)$$

where A is some dimensionless constant. It can be assumed that $A \gg 1$, since the contribution to m_{em} is made not only by the Coulomb energy (the integral of ρ^2), but also by the interaction energy of the currents (the integral of \mathbf{J}^2). By virtue of the space-likeness of the 4-current $\mathbf{J}^2 \geq \rho^2 c^2$. In addition, the values of ρ^2 and \mathbf{J}^2 can increase with the deepening from the outer surface into the depth of the charge.

The energy of the gravitational coupling U_G can be estimated by the following ‘‘Newtonian’’ formula:

$$U_G = BG \frac{m_{em}^2}{r_0}, \quad (3.3)$$

where B is some dimensionless constant. We venture to assume that $B \gg 1$ and, moreover, we venture to assume that the factors A and B have the same order of magnitude.

Using formulas (3.1), (3.2) and (3.3) to for an estimation the observed lepton mass m , one can get the following expression:

$$m = m_s \cdot A\kappa\mathcal{R}, \quad (3.4)$$

where \mathcal{R} is the ‘‘reducing factor’’;

$$\mathcal{R} = 1 - AB\kappa^2. \quad (3.5)$$

Earlier we found that for an electron in order of magnitude:

$$\mu \simeq \frac{m}{m_s} \simeq \kappa^3.$$

Therefore, from (3.4) it follows that

$$A\kappa\mathcal{R} \simeq \kappa^3. \quad (3.6)$$

Taking into account (3.5), condition (3.6) can be satisfied if we assume that the unknown factors A and B have order κ^{-1} :

$$A = \frac{a}{\kappa}, \quad B = \frac{b}{\kappa}, \quad (3.7)$$

$$(a = O(1), \quad b = O(1)),$$

moreover, the values of a and b , appearing in (3.7), are related by a rigid relation:

$$\mathcal{R} = 1 - ab = \lambda\kappa^3. \quad (3.8)$$

$$(\lambda = O(1)).$$

Equation (3.8), connecting a and b , looks extremely unattractive. It resembles the well-known “fine-tuning” problem [6].

The term “fine-tuning” is used for the high-precision adjustment of some parameters of a physical theory (in this case, parameters a and b) in order to reconcile the theory with observations.

However, relations (3.7) and (3.8) only by appearance remind of the “fine-tuning” problem. Parameters A and B are not external parameters, the value of which can be specified arbitrarily. They should be found in the numerical solution of the stationary single-particle problem of classical electrodynamics with non-point leptons, described in [1]. This numerical solution, if and when it will be obtained, either demonstrates the validity of the estimation of the reducing factor \mathcal{R} (3.8) – and then the theory [1] agrees with the observed facts (at least qualitatively) – or does not confirm the estimate (3.8), – and then the theory [1] should be rejected.

If theory [1] is suitable for describing experimental facts, then relation (3.8) demonstrates the existence of a giant computational problem. Electromagnetic energy and the energy of a gravitational coupling compensate each other with an accuracy of 20 significant digits. On the Stoney’s mass scale, leptons are practically massless⁴. In order to obtain meaningful results when calculating the mass and angular momentum of a charged particle, these integral characteristics should be calculated, providing at least 21 reliable significant figures. The ratio of the muon mass to the electron mass is known with an accuracy of 7 significant digits. In order to reproduce this accuracy in calculations, the integral characteristics of two solutions with different topology must be calculated with an accuracy of 28 significant digits. Accordingly, when numerically solving this problem, for example, using the grid method, calculating local values of variables (the potential and current components, the electromagnetic field tensor, the metric tensor components and the Christoffel symbols), it is necessary to produce with an adequate margin of accuracy (probably at least 24-25 significant digits for comparison of integral characteristics with experience in order of magnitude, or with an accuracy of 31-32 significant figures to ensure accuracy in integral characteristics comparable to the experimental one). At present, there are no such exact numerical methods for solving a system of nonlinear partial differential equations in domains with unknown boundaries. In the past, not a single problem of theoretical physics and continuum mechanics put such high demands on the accuracy of calculations. However,

⁴Here we are faced with the “the inverted hierarchy problem” [7] the gravitational interaction is not at all extremely weak compared to other types of interaction (as is customary to think about it now). On the contrary, gravity *almost* completely “devours” the energy contributions of other types of interaction. The world is *almost* massless.

at present, there is no other classical theory, except [1], which would allow, in principle, to hope for the calculation of the masses of leptons⁵. Relation (3.8) can be checked by performing model calculations for given and not very small κ , for example, $\kappa \sim 0.1$ and $\kappa \sim 0.01$. Of course, any attempt to solve this problem numerically may be preceded by an attempt to prove a theorem on the existence of solutions to this problem. Currently, such evidence is missing.

The considered problem is a very rare example of the problem of theoretical physics, which requires proof of a theorem on the existence of a solution. Physicists usually do not have a need for theorems of this kind. In the scientific folklore of theoretical physics on this subject, the mocking phrase of the ruthless W. Pauli is known, allegedly pronounced in the 40s of the twentieth century to the famous mathematician John von Neumann: “Wenn Physik hauptsächlich aus Beweisen bestehen würde, wäre von Neumann ein guter Physiker geworden” (If physics consisted mainly of proofs, von Neumann would have become a good Physicist)⁶.

However, this is exactly the case when such a theorem is important. It is unlikely that anyone will decide to tackle the numerical solution of such a problem with unprecedentedly high demands on accuracy, without having confidence in the existence of a solution. Possible classical solutions to this problem may differ from each other in the topology of the external and internal boundaries of the current and charge distribution in the particle volume. These topologically different solutions (if they exist) are classical models of various massive leptons. If we confine ourselves to axisymmetric solutions, then there are only three solutions: the outer boundary with the topology of the sphere is compatible with the existence of the inner boundary with the topology of the sphere or the topology of the torus; the outer boundary with the topology of the torus admits the existence of an inner boundary with the topology of the torus. By now, three massive leptons are really known: an electron, a muon and a triton.

4. Questions that can be answered by the theorem on the existence of solutions for the theory [1]

Reducing the equations of classical electrodynamics with non-point charge [1] to a dimensionless form, it is convenient to choose the values of e , c and r_0 as units of measurement. The equations of electrodynamics themselves in such a dimensionless record do not contain any parameters⁷. The dimensionless constant of the theory appears in the Einstein equation:

$$\mathcal{R}_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}\mathcal{R} = Gr \cdot T_{ik} \quad (4.1)$$

⁵These monstrous computational difficulties are the price that must be paid for the abandonment of the existing physics with *point* particles, divergences and renormalizations.

⁶Unfortunately, the author cannot indicate the source of this phrase. This is probably one of the many jokes about Pauli.

⁷The theory [1], in addition to Maxwell's equations, contains one new and very simple equation of theoretical physics, relating 4-current and 4-potential in the 4-current region: $J^i + A^i = 0$.

where $Gr = 8\pi\kappa^2$. Gr is the dimensionless Einstein gravitational constant expressed in terms of the parameter κ .

In equations (4.1) (see [8], § 95) g_{ik} is the metric tensor, \mathcal{R}_{ik} is the Ricci tensor, \mathcal{R} is a trace of the Ricci tensor.

It follows from the Einstein equations (4.1) that, where the values of the components of the tensor T_{ik} are of the order of unity ($T_{ik} = O(1)$), the components of the Ricci tensor satisfy the estimate $\mathcal{R}_{ik} = O(\kappa^2)$. However, when calculating the components of the energy-momentum pseudo-tensor of the gravitational field t_{ik} (see [8], § 96), it is easy to verify that $t_{ik} = \frac{1}{2Gr}\Theta_{ik}$, where the components of the very cumbersome pseudo-tensor Θ_{ik} , constructed from the metric tensor and the Christoffel symbol, have the same order of magnitude as the Ricci tensor. Consequently, the components of the pseudo-tensor t_{ik} seem to “forget” about the smallness of the gravitational constant Gr and have the same order as the components of the tensor T_{ik} : the energy of the gravitational coupling has the same order of magnitude as the electromagnetic energy.

In units of e , c , r_0 , the mass unit m_0 is the value $m_0 = \frac{e^2}{r_0 c^2}$. This value is of the order of 10^{-13} g. In these units, the Stoney’s mass m_s is defined by the expression $m_s = \frac{1}{\kappa}$. Accordingly, the above considerations suggest that the observed electron mass m in units of m_0 satisfies the estimate $m = O(\kappa^2)$.

Constructing the existence theorem for the theory [1], it is necessary to establish the existence conditions for the solution of the stationary single-particle problem. In particular, it is necessary to establish: how many normalization conditions can be used? For what values of the parameter κ do exist solutions? (It seems plausible to assume that solutions exist only for sufficiently small κ). In addition, it is necessary to prove that $m > 0$ (the gravitational coupling energy cannot exceed the particle’s electromagnetic energy), and also to prove (or disprove) the ordinal estimation for m given above: $m = O(\kappa^2)$. It is also necessary to establish whether the angular momentum of a classical lepton is uniquely determined for a given topology of the particle boundaries.

It would be rash to expect that the classical electrodynamics of non-point charges [1] can accurately predict the parameters of leptons in full accordance with experience. The goal of developing a classical theory of this type (as Paul Dirac repeatedly insisted) is to be a good basis for the development of a quantum relativistic theory free from regularization and renormalization. A sketch of such a quantum theory is contained in the author’s article [9].

In essence, the classical relativistic theory of leptons [1], like the non-relativistic Bohr’s theory of the atom, can, in certain situations, correspond to experience only when some additional “quasi-Bohr’s” conditions are imposed on the solution. One such “quasi-Bohr’s” condition must be imposed when normalizing to a unit of a full charge of a lepton: staying within the framework of classical physics, we do not know why all massive leptons have the same electric charge. We simply use this fact to normalize the solutions.

Without having a theorem on the existence of a solution, we do not know whether we have the right to set another “quasi-Bohr’s” condition, normalizing own angular

momentum M to its empirical value: $M = \frac{1}{2\alpha}$ (in units of angular momentum $\frac{e^2}{c}$), where $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ is the fine-structure constant. If, to construct a solution, we have the right to use only one normalization condition (the “quasi-Bohr’s” condition for charge normalization), then we must simply humbly calculate own angular momentum M within the framework of the theory [1] and compare it with the experimental value: this will be a calculation of the quantum constant Planck \hbar in the framework of the classical theory!

Additional difficulties in this problem are caused by the pseudo-tensor nature of t_{ik} : local values of these quantities (which must be calculated with an accuracy of about 25-30 significant digits!) are generally not physically meaningful and can be arbitrarily changed by a simple coordinate transformation. Only integrals over the entire three-dimensional space have physical meaning. Those researchers who venture to tackle the question of the existence of stationary solutions of the theory [1] may first consider a simpler model problem of the lepton structure in a world without gravity. This is a flat world with the geometry of Minkowski and without the energy of a gravitational coupling. Such a world without gravity cannot be compared with the world in which we live, but the proof of the existence theorem and the numerical solution of the problem will undoubtedly be simpler (there is no small parameter κ , which is quite “bad” in the theory [1]: it is in the numerator in some equations and in the denominator in other expressions).

Probably, it would be of some interest to study the model problem with the opposite nature and with the apparent absence of matter – that is, with full local “devouring” of electromagnetic energy by the energy of gravitational coupling. Within the framework of such a model, the electrodynamics equations are not taken into account, and in the right-hand part of the Einstein equations the tensor T_{ik} is replaced by $-t_{ik}$. This model does not contain a constant of gravity. This model is questionable from the point of view of mathematics (a tensor is equated to a pseudo-tensor), but if the solution to such a problem exists in a certain coordinate system, then it describes a certain “geometric trap” that does not contain matter.

H. Kleinert considered a model in some sense related to such a geometric trap [10]. He studied the singular solutions of homogeneous Einstein equations as a model of dark matter.

Acknowledgement

The author is grateful to Ammar Sakaji and Ignazio Licata for publishing his articles [1], [2], [5], [9] in the EJTP and to Vladimir Lukyanenko for his proposal to publish this article in Dynamic Systems (DS). The author was honored to be a member of the DS editorial board many years ago.

References

1. *Temnenko, V. A.* Physics of current and potentials. I. Classical electrodynamics with non-point charge // *Electronic Journal of Theoretical Physics*. — 2014. — Vol. 11, No. 31. — P. 221–256.

2. *Temnenko, V. A.* Physics of current and potentials. III. Octuplet sector of classical field theory with non-point particles // *Electronic Journal of Theoretical Physics*. — 2016. — Vol. 13, No. 36. — P. 69–98.
3. *Ray, T. R.* Stoney's fundamental units // *Irish Astronomical Journal*. — 1981. — Vol. 15. — P. 152.
4. *Weinberg, S.* The discovery of subatomic particles. Revised edition. — Cambridge, Cambridge University Press, 2003. — 206 p.
5. *Temnenko, V. A.* Physics of current and potentials. II. Classical singlet-triplet electroweak theory with non-point particle // *Electronic Journal of Theoretical Physics*. — 2015. — Vol. 12, No. 32. — P. 179–294.
6. *Fine-tuning* [Electronic resource]. — <https://bit.ly/2SgprgD>, 25.12.2018.
7. *Hierarchy problem* [Electronic resource]. — <https://bit.ly/1jkEtAv>, 25.12.2018.
8. *Landau, L. D., Lifshitz, E. M.* The classical theory of fields. — Fourth rev. eng. edition. — Elsevier Ltd, Amsterdam e.a., 1975. — 428 p.
9. *Temnenko, V. A.* Physics of current and potentials. IV. Dirac space and Dirac vectors in the quantum relativistic theory // *Electronic Journal of Theoretical Physics*. — 2018. — Vol. 14, No. 37. — P. 213–249.
10. *Kleinert, H.* The GIMP Nature of dark matter // *Electronic Journal of Theoretical Physics*. — 2016. — Vol. 13, No. 36. — P. 1–12.

Получена 12.12.2018

УДК 517.929+616.9

Моделирование спонтанного перехода от критической K -емкости к альтернативным асимптотическим состояниям популяции¹

А. Ю. Переварюха

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН

Санкт-Петербург 199178. E-mail: temp_elf@mail.ru

Аннотация. Обсуждается моделирование критического развития инвазионного процесса популяции с большим репродуктивным r -параметром. Ситуации вселения чужеродных видов могут вариативно вызывать явление вспышек, что зависит от исходной группы $N(0)$, регуляции и сопротивления среды. Мы предлагаем описать вариативность новыми уравнениями с запаздыванием. Разработана модель, где в зависимости от соотношения параметров r, τ, γ реализуется два практически значимых сценария после монотонного достижения максимума $N(t) \rightarrow \max N(t_m)$ численности. Разрушение инвазионной популяции при истощении ресурсов через некоторое время $t_\infty > t_m$ реализуется с выходом траектории к $N(t) \rightarrow \infty$. При меньших значениях репродуктивной активности реализуется монотонное снижение от K -емкости к малочисленному равновесному уровню: $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = L, L < \max N(t_m)$. Подобным образом, в зависимости от изменений исходного состояния $N(0)$, может развиваться острая инфекция — по летальному пути, либо с превращением в хроническую на стабильном \mathfrak{H} -уровне. Рассмотрена модель с нелинейным противодействием инвазии. Получен сценарий прохождения популяцией предкритического минимума численности $\min N(t) < L < K$ после неустойчивого равновесного $N(t_k) \approx K, t_k < \infty$. Сценарий наблюдается при резком усилении активного сопротивления со стороны биотического окружения или выработке запаздывающего иммунного ответа, тогда $\exists N(0), N(t) \rightarrow L \ll K$. В сценариях не наблюдается разрушающихся релаксационных циклов $N_*(t; \tau r)$, как в ранее предложенном нами уравнении $\dot{N} = rf(N^2(t - \tau))(H - N(t - \tau))$ для ситуации деструкции биосистемы.

Ключевые слова: уравнения с запаздыванием, критические сценарии динамики популяции, механизмы регуляции, сценарии активных инвазий, иммунный ответ, неустойчивая K -емкость.

Modeling of invasive process with spontaneous transition from critical K -capacity of the environment to an alternative asymptotic states of population

A. Yu. Perevaryukha

St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg 199178 .

Abstract. In the article we discuss the simulation of critical development of the invasive process of a population with a high reproductive r -parameter. Situations of invasion of alien species can variably cause the phenomenon of outbreaks, depending on the regulation, $N(0)$ and resistance of the

¹Работа выполнена по проекту РФФИ 17-07-00125 и частично бюджетной темы АААА-А16-116051250009-8 СПИИРАН.

environment. We propose to describe variability by new equations with delay. We have developed a model where, depending on the ratio of the parameters r, τ, γ , two practically significant scenarios are realized after a monotonic attainment of the maximum of the invaded species $N(t) \rightarrow \max N(t_m)$. Destruction of the invasive population after depletion of the environment's exhaustion after a time $t_\infty > t_m$ is realized with the output of the trajectory to unlimited growth $N(t) \rightarrow \infty$. With the installation of slightly lower values of reproductive activity, a monotonic decrease to a small equilibrium level is realized: $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = L, L < \max N(t_m)$. Similarly, depending on minor changes in $N(0)$, an acute infection can develop — along the lethal pathway, or with the transformation into a chronic one, for example hepatitis C. In the second part, we considered the model of the scenario of the population passing through the critical minimum of the population $\min N(t) < L < K$ after an unstable equilibrium $N(t_k) = K$. The scenario is observed with a sharp increase in the resistance of the biotic environment or the development of a delayed immune response, then the situation occurs $N(t) \rightarrow L \ll K$. The appearance of relaxation cycles, as in the previously proposed equation $\dot{N} = rf(N^2(t - \tau))(H - N(t - \tau))$, we do not observe. The equation in a scenario with a spontaneous transition from the K -capacity of saturation of the environment to the minimum \mathfrak{H} -equilibrium describes the chronicization of viral hepatitis. Model scenarios consider the form of an immune response.

Keywords: ODE with delay, critical scenarios of population dynamics, regulation mechanisms, scenarios of acute invasions, immune response, hepatitis C, unstable K -capacity.

MSC 2010: 34A09, 65L07

1. Введение

В предыдущей работе [3] нами обсуждался вариант развития экстремально-го характера динамики численности популяции после бифуркации Андронова–Хопфа. Была предложена модель, являющаяся модификацией известного уравнения Хатчинсона из [16]:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right). \quad (1)$$

Модель (1) является расширением популярного уравнения Ферхюльста с известным свойством: для произвольного $N(0) > 0, \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$ [5]. В (1) K -емкость традиционно усредненный равновесный уровень. В модели (1) полагаем, что эффект авторегуляции действует с не от текущего состояния $N(t)$, но через функцию-предысторию от существовавшего в прошлом. Однако, квадратичный закон регуляции в правой части оставался и в нашей новой модели из [3], хотя $\dot{N} = rNf(N^2)$ исключительно умозрительная конструкция. Подобные уравнения ранее строились для объяснения некоторых лабораторных экспериментов [14] и их решения активно исследовались многими авторами [6].

Флуктуации численности с большой амплитудой возникали у изолированных популяций насекомых в лабораторных опытах [7]. Для (1) известно существование орбитально устойчивого цикла [1]. В уравнениях с несколькими включениями $N(t - \tau)$ можно получить сложную аperiодическую динамику [20], но не в аperiодичности и хаотичности состоит наша цель их усовершенствования. Проблема подобных моделей, как (1) (или «blowfly equation» [10]) — образование «глубоких минимумов» релаксационного цикла. Как отмечено в [2]: «лабораторная популяция, которую изучал Николсон, могла неожиданно вымереть...». В реальности

трудно представить гибель адаптированной популяции с высокой способностью к самовосстановлению. Вид мух *Lucilia cuprina* не разрушает природную среду.

В настоящей статье мы опишем альтернативные по отношению к классической квадратичной форме зависимости для математического выражения авторегуляции с запаздыванием $rf(N(t - \tau))$. Рассмотрим сценарии явного и неявного противодействия вселению со стороны биотического окружения. С такой запаздывающей регуляцией сталкивался каждый из нас в виде ответа иммунной системы, сложно устроенного набора из активирующихся по цепочке разновидностей групп клеток, действие которых можно описать наверно только феноменологически. Покажем в новых уравнениях альтернативность путей развития взрывообразного популяционного процесса, не связанного с образованием $N_*(t; r\tau)$ -циклов.

2. Базовая формализация для запаздывающей регуляции

Для цели приведения в соответствие поведения модели с запаздыванием и свойствами реально наблюдавшихся осцилляций с большой амплитудой мы предложили модификацию, увеличив степень нелинейности N^k в правой части [4]. Преодолев проблему «глубоких минимумов», модифицировав модель из [11], можно получить математическое описание весьма опасного, но нечастого сценария популяционной динамики. Подобный сценарий описан в [9] как начало пилообразной вспышки у насекомых-фитофагов — опасного кольчатого шелкопряда в лесах Канады. Мы получим описание для начала вспышки в уравнении:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left(\frac{K - N^2(t - \tau_1)}{(K + cN^3(t - \tau))} \right). \quad (2)$$

Полученная серия пиков в (2) без нереального свойства минимума $\min N_*(r\tau, t) \rightarrow 0 + \epsilon$ и с наибольшим $\max N_*(r\tau, t_{m1}) > \max N_*(r\tau, t_{m1} + t_p)$ в самом начале вспышки, как на рис. 1 после бифуркации: В биологической реальности, когда амплитуда

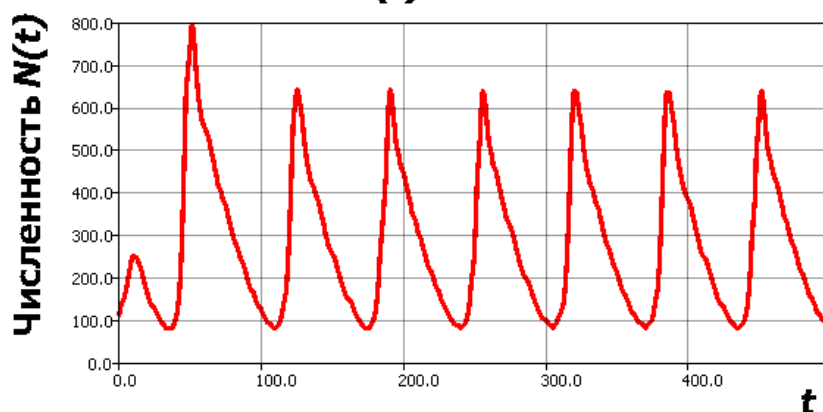


Рис. 1. Колебания в (2) с $\min N_*(r\tau, t_1) \rightarrow L > \epsilon$.

$|\max N_*(r\tau, t) - \min N_*(r\tau, t)| \rightarrow \mathcal{A}_*(r\tau)$ велика, то пульсирующая вспышка должна демпфироваться: $\overline{N}_*(r\tau, t) = K$. Либо полностью уничтожить поддерживающую среду за конечное время. Известные модели [13] предполагали возможность неограниченного возрастания амплитуды $\mathcal{A}_*(r\tau)$. Пилообразная вспышка насекомых должна затухать сама при $\mathcal{A}_*(r\tau) < K$ и переходить в иной режим.

Мы рассмотрели ранее расширение (1) как уравнение с ёмкостью полунасыщения $0 < \mathfrak{H} < K$ в (3). Эта введенная нами величина \mathfrak{H} альтернативна критически низкому — неустойчивому равновесию \mathfrak{L} -порогу численности $\mathfrak{L} < K$ из модели Базыкина²

$$\frac{dN}{dt} = r_1 N(t) \left(1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right) (\mathfrak{H} - N(t - \tau)). \quad (3)$$

Знак множителя $(\mathfrak{H} - N(t - \tau))$ тут может менять ролями слагаемые логистического уравнения. В уравнении (3) мы получили ситуацию, когда после бифуркации Андронова–Хопфа происходит появление и разрушение релаксационных колебаний с образованием псевдопериодической и не диссипативной траектории. На рис. 2 показан вычислительный эксперимент для сценария с выбросом цикла ($N(t) \rightarrow \infty, \bar{r} = 0.000173, K = 15000, \mathfrak{H} = 5000, \tau = 4$) после увеличения амплитуды. Расчет останавливается ошибкой переполнения, ведь любая популяция

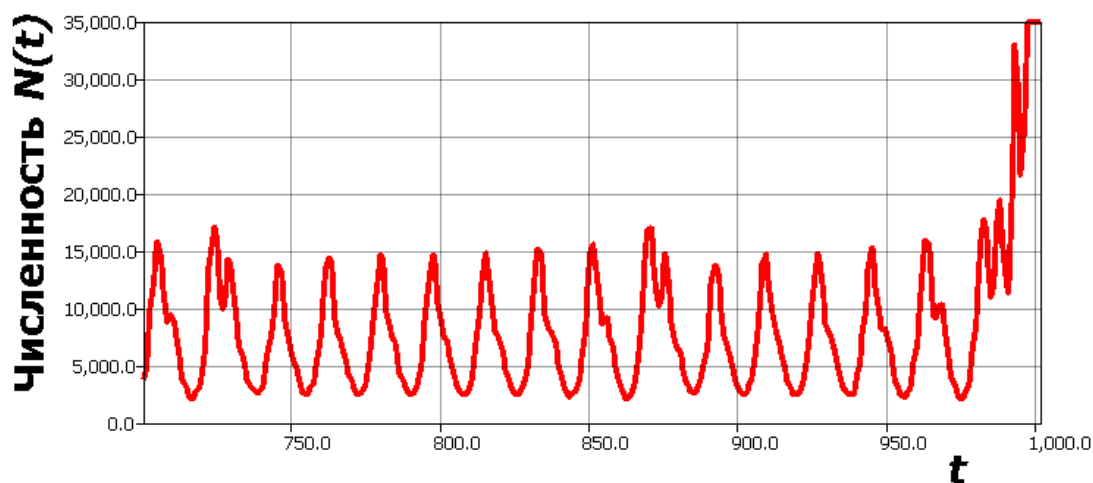


Рис. 2. Разрушение релаксационного цикла в модели (3).

конечна. Модель динамики в (3) трактует тот факт, что $\mathcal{A}_*(r\tau)$ не может быть неограниченной характеристикой при любых $r\tau$. Полученный сценарий описывает возможность разрушения видом среды, что может наблюдаться для специфического случая островной популяции. Как известно из наблюдений, популяционные циклы млекопитающих в арктических широтах — неустойчивое явление.

²Можно рассмотреть соединенное уравнение с регуляцией: $r f(N^2(t)) \times (\mathfrak{H} - N(t - \tau)) \times (N(t) - \mathfrak{L})$, но нам проблематично предложить его интерпретацию.

В моменты $\max N_*(r\tau, t_{m1})$ они способны изменять среду обитания. Северные ареалы испытывают помимо биотического нерегулярное климатическое воздействие. Как показал опыт с оленями на острове Беринга, для поддержания популяции в колеблющемся балансе необходимо независимое изъятие: $-\Psi(N)$ в уравнении $\dot{N} = rf(N(t-\tau)) - \Psi$. Иначе без охоты почва будет ими вытоптана. Простое решение $\Psi = const$. Возможен вариант $\Psi(N(0))$. Модель с постоянной независимой долей убыли Q :

$$\frac{dN}{dt} = r_1 N \left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K} \right) (\mathfrak{H} - N(t-\tau)) - QN(t).$$

Инвазионные процессы могут развиваться различным образом и необязательно проходить через выраженную колебательную динамику, подобную малярийной инфекции. Часто наблюдается явление вспышки численности. Быструю вспышку явно нелогично описывать как орбитально устойчивый цикл. Вспышка инвазионного вида — переходный режим существования вида в волатильной среде и не описывается асимптотическим состоянием траектории.

После первой фазы роста численности дальнейшая картина вспышек разнообразна. Вид может стать доминирующим в локальном ареале, вытеснив автохтонные и прийти в равновесие — этот сценарий описывается известными моделями: на основе квадратичной регуляции или «blowfly equation» с экспоненциальной.

Возникают и описаны экологами другие экстремальные ситуации инвазий, для которых авторегуляция как в (2) не соответствует реальности.

3. Логарифмическая авторегуляция для трех сценариев инвазии

Квадратичное давление плотности на размножение это только частная гипотетическая формализация. В реальности многие популяции предпочитают высокую стабильную плотность и с трудом переносят малочисленные состояния. Птицы образуют колонии, насекомые-фитофаги формируют большие скопления, как тли и псиллиды. Плотность не мешает социальным насекомым: пчелам и муравьям. Таким образом, выражение с отрицательным $-rN^2/K$ не обязательное условие поддержания баланса со средой в динамической модели с сосредоточенным запаздыванием типа (1). Дополнительно учтем, что популяция в модели должна быть при включенном действии регуляции ограниченной $\sup N(t) < \mathcal{M} \in \mathbb{N}$, так как $N(t) \rightarrow \infty$ мы считаем разрушением её экосистемы. Экстремальная динамика может провоцироваться без флуктуаций с большой амплитудой.

Выберем другую форму правой части $f(N) = rN \ln(K/N)$, достигающую равновесия при $\ln(K/N) = 1$, включим в уравнение запаздывание $rN(t) \ln(K/N(t-\tau))$ и предпороговую величину \mathfrak{H} :

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \ln \left(\frac{K}{N(t-\tau)} \right) (\mathfrak{H} - N(t-\tau)). \quad (4)$$

Уравнение может описывать достаточно актуальный характер инвазионного процесса, который может кардинально поменяться при небольшом изменении r -параметра, нас интересуют значительные значения $\tau \approx 50$. Более того, популяционная модель может иметь альтернативную асимптотику без возмущений параметров r, τ, \mathfrak{H} .

В первом сценарии происходит логистический рост численности и затухающие осцилляции (как в уравнении Хатчинсона при малых $r\tau$) $N(t) \rightarrow K$, но далее равновесие оказывается неустойчивым. Траектория покидает окрестность значения K и $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) \rightarrow \infty$ как на рис. 3. Решение не ограничено ($\tau = 58, K = 15000, r = 0.000003350, \mathfrak{H} = 5000$) и заканчивается ошибкой переполнения. Модель

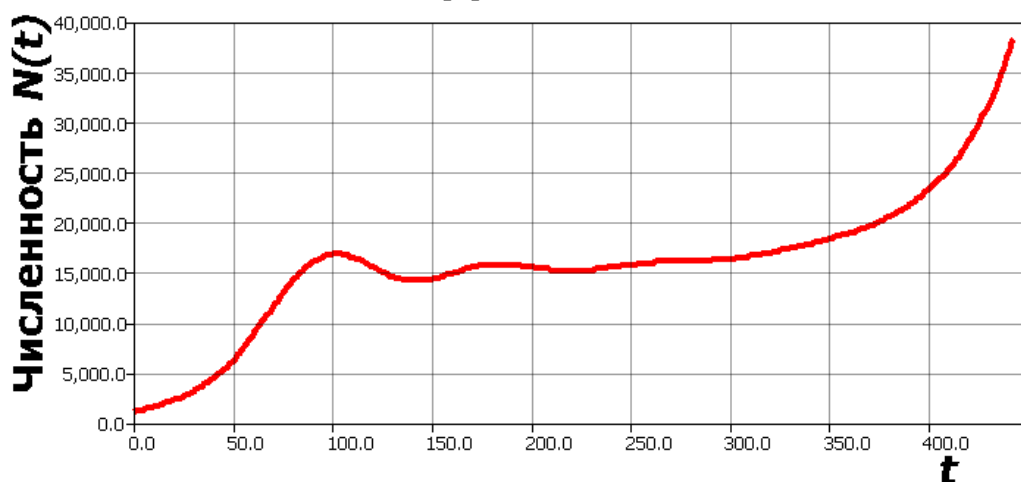


Рис. 3. $N(t) \rightarrow \infty$ после $N(t) \approx K$ в (4) при $N(0) = 190$.

демонстрирует разрушение среды после мнимой стабилизации, но как мы знаем вариант переходного режима зависит от начальных условий. Важно и \hat{t} — время квазистаблизации $N(t) \approx K$. Увеличим $N(0)$ так, что $N(0) < \mathfrak{H}$ и мы увидим другую картину на рис. 4 (аналогичные значения параметров) при изменении начальных условий — $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) \rightarrow \mathfrak{H}$. Очевидно $N(0) \rightarrow \mathfrak{H}$ сокращает длительность затухающих колебаний. Подобное произошло с инвазивным гребневиком в Черном море [17]. Существует сценарий перехода от затухающих колебаний в окрестности K к колебаниям в окрестности \mathfrak{H} , собственно в этот момент $\mathfrak{H} - N(t - \tau) = 0, t \rightarrow \infty$ и такое равновесие устойчиво к возмущениям (рис. 5а). Данный сценарий показывает естественное снижение численности после захвата ареала инвазивным видом с критически опасным K . Спонтанное падение после достижения K -емкости вызвано активным конкурентным противоборством с автохтонной биотой. Подобным ответом на чрезмерное размножение инвазионного агента может служить иммунная система организма, которая, тем не менее, не всегда способна подавить полностью чужеродный объект. Пороговой величиной выступает $N(0)$. Инвазионный процесс останавливается на равновесии, но это существенный уровень: в нашем эксперименте $\mathfrak{H} = K/3$.

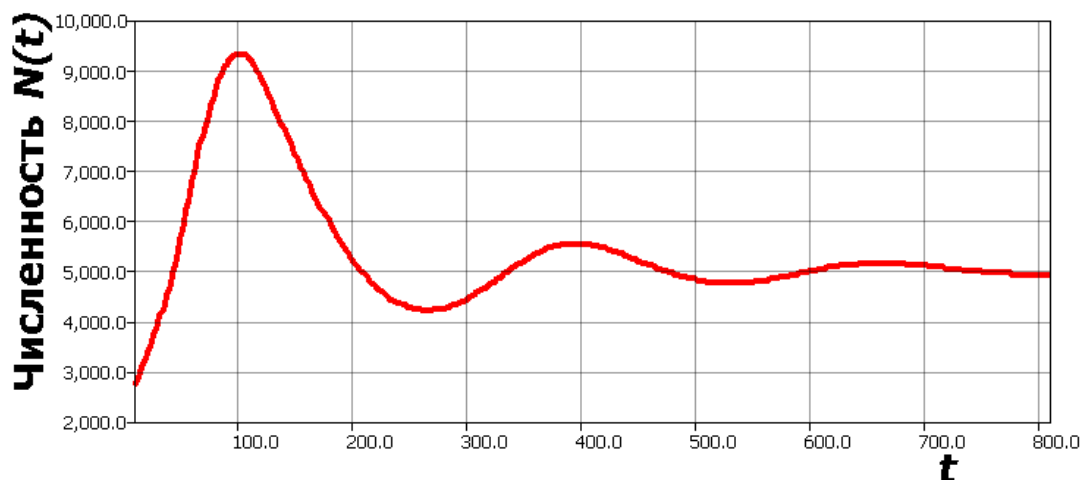


Рис. 4. Стабилизация инвазии $N(t) \rightarrow \mathfrak{N}$, $\max N(t) < K$ в (4) при $N(0) = 2190$.

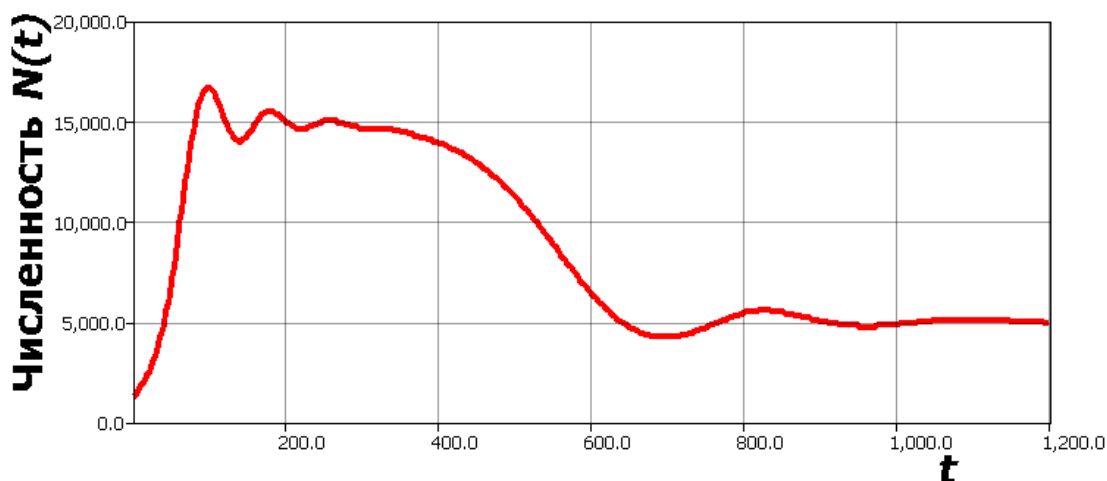


Рис. 5. Спонтанный переход $\lim_{t \rightarrow t_m} N(t) = K \pm \epsilon$, $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \mathfrak{N}$ в (4) при $N(0) = 1099 \ll \mathfrak{N}$.

Сценарий нашей модели (4) наилучшим образом укладывается в протекание хронического гепатита С. При немного запаздывающей выработке антител к вирусу HCV — из равновесия (рис. 5б), которое не может быть устойчивым (так как печень долго его не выдержит K -ёмкости), содержание вирусной РНК достигает предельно возможной для жизни концентрации.

ALT на графике протекания инфекции — *Alanine aminotransferase*, это фермент, который обнаруживается в крови при разрушении клеток печени. Появляется Аланинаминотрансфераза резко, но с запаздыванием по сравнению с РНК HCV-вируса.

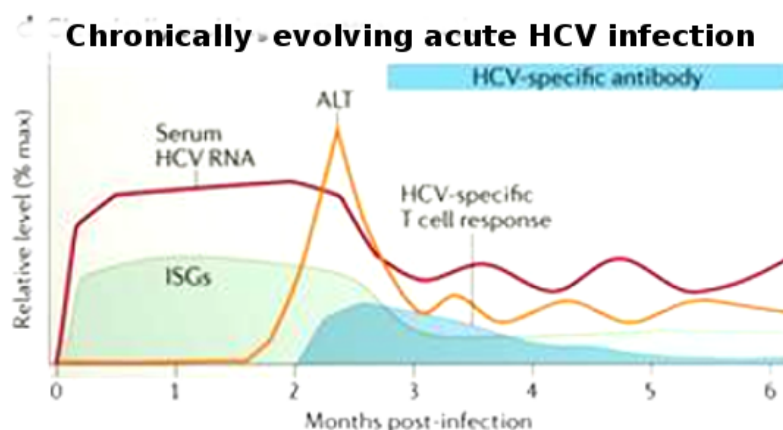


Рис. 6. Превращение гепатита из острой $N(t) \rightarrow K$ в хроническую $N(t) \rightarrow \mathfrak{H}$ форму [21].

Независимое постоянное изъятие Q (или антивирусная терапия):

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \ln \left(\frac{K}{N(t-\tau)} \right) (\mathfrak{H} - N(t-\tau)) - QN(t-\tau_1).$$

Уравновесит процесс с меньшим $\mathcal{L} < \mathfrak{H}$ значением равновесия. Воздействие может быть сложнее $Q = const$, как в форме с адаптационным запаздыванием $\Psi[N(t-\mathcal{T})]$.

4. Сценарий прохождения предкритического \mathcal{L} -минимума

В природе известно существование реликтовых популяций. Ранее эти виды были более многочисленными, даже доминирующими. Потом условия изменились. Конкурентное давление биотического окружения усилилось. Вид резко сокращает численность пройдя через глубокий овражный \mathcal{L} -минимум. Очевидно, не все популяции были способны преодолевать малочисленное состояние, иначе вторжения случайных вселенцев были бы постоянны. В экологии эффект коллапса до предельно малой численности назван стадией горлышка бутылки. Человеческая популяция Евразии тоже проходила малочисленное состояние горлышка на ранних этапах после выхода группы людей из Африки.

Дальнейшая судьба видов-реликтов может быть различна, рассмотрим варианты в следующих уравнениях.

4.1. Модель с активным сопротивлением

Предложим модель сильного конкурентного/иммунного давления с $\Psi(N^m(t)) \neq const$:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \ln \left(\frac{K}{N(t-\tau)} \right) (\mathfrak{H} - N(t-\tau)) - \gamma \frac{N^m(t)}{B + N^2(t)}. \quad (5)$$

Так мы получим сценарий прохождения критического минимума — эффект «bottleneck», после которого популяция уравнивается на уровне $\mathcal{L} < N(0)$, как на рис. 6 (при тех же значениях, что и ранее, $\gamma = 0.4, \mathfrak{H} < B < K, B = 10000, m = 3$) Сценарий описывает более сильную независимую реакции среды на

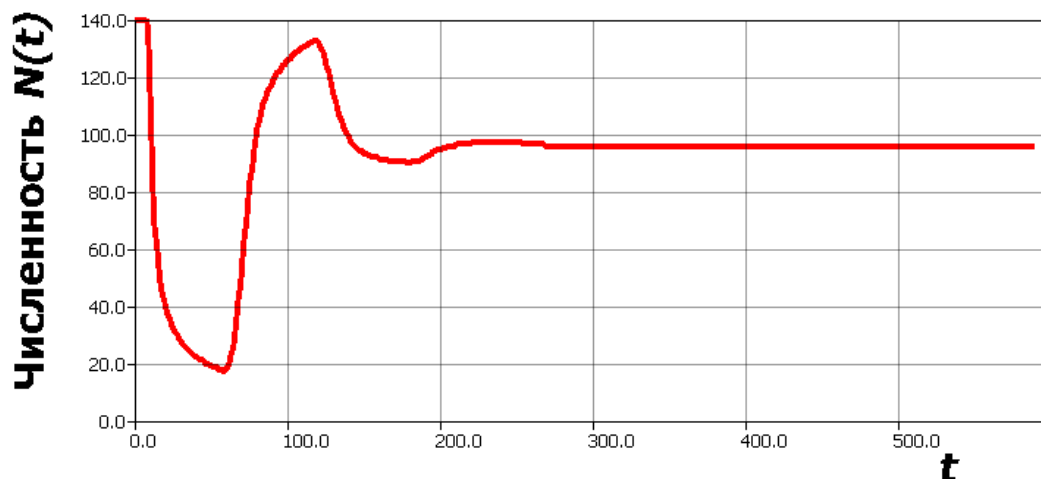


Рис. 7. Сценарий прохождения опасного \mathcal{L} -минимума численности.

увеличение численности вселенца. Слагаемое $N^m/(B + N^2(t))$ означает, что активность давления хищников/антител пропорционально скоплению доступных жертв. Уравнение было предложено Людвигом, Джонсом и Холлингом [15] для описания вспышек уничтожающей леса в Канаде еловой листовертки в такой форме:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) - \gamma \frac{N^2(t)}{B + N^2(t)}, \quad (6)$$

Для модификации в (6) использовалось базовое уравнение Ферхюльста.

В полученном нами сценарии многочисленная популяция приобретает статус «исчезающий вид». Процесс исчезновения может растянуться на много лет. Подобный сценарий реализуется для осетровых рыб Каспийского моря из-за сокращения путей для нереста и интенсивного промысла на миграционных путях [19].

4.2. Сценарий хронизации «bottleneck» опасной инвазии

Сценарий «bottleneck» для инвазионного вида с очень большим $r_g = 10^3 \times r$ отличается стремительным падением численности $t_l = \tau$ как на рис. 7. Следует стабилизация на низком уровне «бутылочного горлышка»: $N(t) \rightarrow \mathcal{L}, N(0) < \mathcal{L} < \mathfrak{H}$. В некоторых случаях модель можно переписать как зависимость изъятия от начальной численности:

$$\frac{dN}{dt} = r_g N(t) \ln \left(\frac{K}{N(t - \tau)} \right) (\mathfrak{H} - N(t - \tau)) - \gamma \frac{N^2(0)}{B + N^2(t - \tau)}. \quad (7)$$

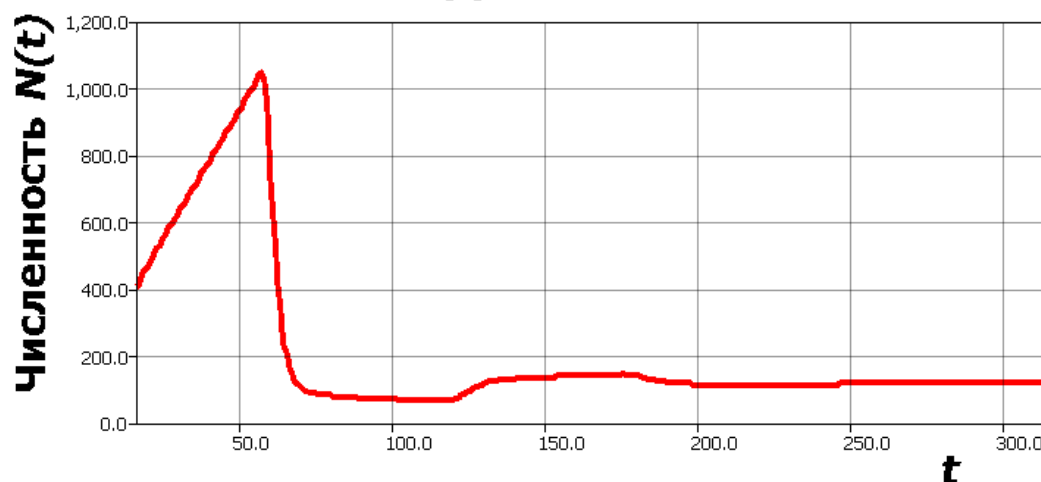


Рис. 8. “Bottleneck” в (5) при большом репродуктивном r_g -параметре.

Сценарий в (7) с $\Psi[N(0), N(t - \mathcal{T})]$, $\mathcal{T} \gg \tau$ требует в дальнейшей нашей работе отдельного экологического обоснования.

5. Заключение

Мы моделировали варианты развития агрессивного инвазионного процесса, для чего было формализовано запаздывающее противодействие распространению вторгшегося вида в уравнениях (4) и (5).

В теоретической экологии господствует представление о достижении (возможно, осциллирующим образом) для некоторого $t > 0$, $r = const$, $N(0) < K$ значения $N(t) > K$. Однако, в результате завершения активной фазы инвазии теория предполагает для $\forall N(0)$ равновесие $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$, где $N \approx K$ означает занятие доступной экологической ниши видом. В модели (4) рассмотрен специфический сценарий, когда уже достигнутое фиксированное равновесие $N(t) = K$ вызывает с некоторой задержкой \hat{t} разрушение самой среды. Состояние K -емкости в нашем сценарии может быть достигнуто, но не является устойчивым. Потеря после $N(t) > K$, $t > t_m$ диссипативных свойств траектории означает деструкцию экосистемы.

В предложенном уравнении сценарий развития зависит от $N(0)$. Следовательно, в прогнозировании сценария важно изначальное количество вторгшегося чужеродного объекта, стимулирующего ответную реакцию. Парадоксально, но если вторжение малозаметно, то и реакция слабая и медленная. Потому инфекции на первых фазах выгодно затаиться. Вычислительно можем определить пороговое $\bar{N}(0)$. Включение в модель регуляции противоборства Ψ , зависящего от степени $\Psi(N^2(t))$ опишет сценарий прохождения популяции критического минимума и превращения вселенца в реликтовую форму.

Наиболее интересно, что в модели можно описать перетекание острой инфек-

ции в хроническую стадию постоянного присутствия часто незаметного очага, например в примере развития заболевания гепатита-С [8], как показано на рис. 8 с динамикой фермента ALT и HCV-антител [21]. В динамике заболевания наглядно видно, что срабатывание эффективного ответа отражается на инвазионном виде именно резким образом.

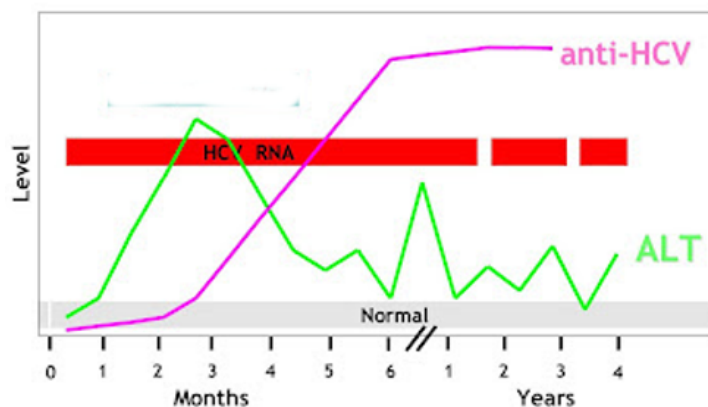


Рис. 9. Переход в хроническую стадию и повторная активность HCV.

В реальности опасный чужеродный агент будет ждать ослабления контроля по внешним причинам и вновь может попробовать перейти в острую фазу. Вирусам это необходимо для дальнейшего распространения. Вид функции $\Psi(N^m(t - \tau))$, отражающий характер сопротивления среды: $\dot{N} = rf(N^k; K; \mathfrak{H}) - \Psi(N^m(t - \tau))$ приобретает важную роль.

В данной интерпретации модели причина запаздывающей регуляция очевидна — это иммунный ответ организма. Уровень сопротивления организма контролирует достаточно сложно устроенная система взаимодействия иммунокомпетентных клеток различной специализации T -, B -лимфоцитов, проходящих отбор для производства необходимых антител. Естественным образом образуется запаздывание реакции ответа, которое в обычном случае корректируется нами вакцинацией. Фактически прививка позволят сдвигать влево момент проявления ответа лимфоцитарной реакции в нашем вычислительном сценарии рис. 7. Количественные показатели ответа — уровень присутствия антител, но это не достаточный показатель. Важна их качественная способность — связываться с нужной целью. В случае ВИЧ запаздывание эффективного ответа будет нарастать из-за увеличивающегося разнообразия вирионов, и становится критическим фактором в деструкции организма этим инвазионным агентом. Сценарий интересен взрывным моментом превращения латентной фазы вновь в острую стадию и летальную. Обратный переход к активности от \mathcal{L} -минимума мы обсудим в следующей работе.

Список цитируемых источников

1. Борздыко В. И. Об исследовании популяционной модели Хатчинсона // Дифференциальные уравнения. — 1985. — Т. 21. — С 316–318.

- Borzdyko V. I. An investigation of Hutchinson's population model. *Differ. Uravn.* 21:2, 316–318 (1985). (in Russian)
2. Глызин С. Д. Математическая модель эксперимента Николсона // Моделирование и анализ информационных систем. 2017. — №3. — С. 365–386.
Glyzin S. D. Mathematical model of the Nicholson experiment. *Modeling and analysis of information systems.* 24:3, 365–386 (2017). (in Russian)
 3. Переварюха А. Ю. Модель сценария популяционного кризиса в результате бифуркации Андронова–Хопфа // Динамические системы. — 2016. — Т. 6(34), №2. — С. 149–159.
Perevaryukha A. Yu. The scenario of the population crisis as a result of the Andronov-Hopf bifurcation. *Dinamicheskie Sistemy* 6(34):2, 121–130 (2016). (in Russian)
 4. Переварюха А. Ю. Импульсный процесс в анализе специфических популяционных сценариев коллапса // Динамические системы. — 2015. — Т. 5(33), №3-4. — С. 203–213.
Perevaryukha A. Yu. Pulsed process in the analysis of specific population scenarios of collapse. *Dinamicheskie Sistemy* 5(33):3-4, 203–213 (2015). (in Russian)
 5. *Vacaer N.* A Short History of Mathematical Population Dynamics. — London: Springer-Verlag, 2011. — 160 p.
 6. *Berezansky L., Braverman E., Idels L.* Nicholson's blowflies differential equations revisited: Main results and open problems // *Applied Mathematical Modelling.* — 2010. — Vol. 34. — P. 1405–1417.
 7. *Brillinger D.* The Nicholson blowfly experiments: some history and EDA // *Journal of Time Series Analysis.* — 2012. — Vol.33, Iss.5. — P. 718–723.
 8. *Busch M P., Shafer K A.* Acute-phase hepatitis C virus infection: implications for research, diagnosis, and treatment // *Clinical Infectious Diseases.* — 2005. — Vol. 40. — P. 959–961.
 9. *Cooke B., Neali S V., Regniere J.* Insect Defoliators as Periodic Disturbances in Northern Forest Ecosystems // *Plant disturbance ecology: the process and the response.* — Burlington.: Elsevier, 2007. — P. 487–525.
 10. *Gourley S. A., Ruan S.* Dynamics of the diffusive Nicholson's blowflies equation with distributed delay // *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A Mathematics.* — 2000. — Vol. 130. — P. 1275–1291.
 11. *Gopalsamy K., Kulenovic M., Ladas G.* Time lags in a «food-limited» population model // *Applicable Analysis.* — 1988. — Vol. 31. — P. 225–237.
 12. *Gopalsamy K.* Global stability in the Delay-logistic Equation with discrete delays // *Houston J. Math.* — 1990. — Vol. 16. — P. 347–356.
 13. *Gopalsamy K., Kulenovic M., Ladas G.* Environmental periodicity and time delays in a «food-limited» population model // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* — 1990. — Vol. 147. — P. 545–555.
 14. *Gurney W., Blythe S. P., Nisbet R. M.* Nicholson's blowflies revisited // *Nature.* — 1980. — Vol. 287. — P. 17–21.
 15. *Ludwig D., Jones D, Holling S* Qualitative Analysis of Insect Outbreak Systems: The Spruce Budworm and Forest // *The Journal of Animal Ecology.* — 1978. — Vol. 47. — № 1. — P 315–332.

16. *Hutchinson G.* An Introduction to Population Ecology. — New Haven.: Yale University Press. — 1978, 260 p.
17. *Kideys A. E.* The invasive ctenophore Mnemiopsis problem in the Black and Caspian Seas // Biomare Newsletter. — 2002. — Vol. 3. — P. 5–6.
18. *Nicholson A.* An outline of the dynamics of animal populations // Australian Journal of Zoology. — 1954. — Vol. 2, Iss. 1. — P. 9–65.
19. *Perevaryukha A. Y.* Uncertainty of asymptotic dynamics in bioresource management simulation // Journal of Computer and Systems Sciences International. — 2011. — Vol. 50. — P. 491–498.
20. *Ruan S.* Delay Differential Equations in Single Species Dynamics // Delay Differential Equations and Applications. — Berlin.: Springer, 2006. — P. 477–517.
21. *Shin E., Sung S.* Immune responses and immunopathology in acute and chronic viral hepatitis // Nature Reviews Immunology. — 2016. — Vol. 16. — P. 509–523.

Получена 09.03.2018

Памяти Виктора Александровича Плисса

4 января 2019 года ушел из жизни Виктор Александрович Плисс, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений Санкт-Петербургского университета. Плисс В. А. родился 10 февраля 1932 года в г. Сыктывкаре, с 1933 года жил в Ленинграде. Во время Великой Отечественной войны находился в эвакуации в Омске, после возвращения в Ленинград окончил среднюю школу и в 1949 году поступил на Математико-механический факультет Ленинградского университета, в 1954-1957 годах обучался в аспирантуре под руководством Николая Павловича Еругина. В 1957 году В. А. Плисс защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук на тему “Исследование нелинейных систем третьего порядка”, в 1959 году — диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук на тему “Некоторые проблемы устойчивости движения в целом”. С 1960 года и до последнего дня В. А. Плисс заведовал кафедрой дифференциальных уравнений Ленинградского (ныне Санкт-Петербургского) университета. В 1990 году был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР по специальности «Процессы управления», в 2004 году ему присвоено звание «Почетный профессор Санкт-Петербургского университета».

Виктор Александрович — выдающийся ученый в области качественной теории дифференциальных уравнений и теории нелинейных колебаний. В. А. Плисс разработал принципиально новые методы изучения устойчивости в целом и полностью исследовал проблему Айзермана в трехмерном случае, развил новые подходы к построению и исследованию функций Ляпунова для изучения диссипативности и конвергентности в многомерных системах. В. А. Плиссом был создан принцип сведения, редуцирующий исследование устойчивости точки покоя нелинейной системы к исследованию системы меньшей размерности, сейчас эта техника носит название “Теория центрального многообразия”. Виктор Александрович построил теорию диссипативных систем и показал, что системы Ван дер Поля имеют бесконечно много периодических движений тогда и только тогда, когда характеристическое множество содержит неразложимый континуум. В последние годы им создана теория структурной устойчивости для систем дифференциальных уравнений с произвольной зависимостью от времени, разработаны методы исследования систем на длинных промежутках времени.

Виктор Александрович Плисс — организатор науки. В 1969-1992 годах он был председателем Головного совета по математике и теоретической кибернетике Министерства высшего и среднего специального образования РСФСР. В последние годы В. А. Плисс — председатель методической комиссии Отделения математики математико-механического факультета, член Национального комитета по теоретической и прикладной механике, член редколлегии журнала “Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия: математика, механика, астрономия”, электронного журнала “Дифференциальные уравнения и процессы управления”, журнала “Нелинейные колебания” (Институт математики НАН Украины), член

Санкт-Петербургского математического общества с 1959 года, председатель совета Д 212.232.49 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при СПбГУ, руководитель Научно-образовательного центра “Математика” на математико-механическом факультете и коллектива Санкт-Петербургской ведущей научной школы качественной теории дифференциальных уравнений.

В. А. Плисс — автор более 120 научных работ (43 из них вышли после 1990 г.), в том числе 5 монографий, ни одна из которых не утратила своей актуальности. Эти книги постоянно цитируются как в России, так и за рубежом. Все работы В. А. Плисса имеют фундаментальный характер, и в свое время изменили сам предмет дифференциальных уравнений.

В. А. Плисс неоднократно участвовал а работе крымских конференций и летних математических школ, которые обычно проводились в поселке Кацивели. В последний раз Виктор Александрович с супругой (Елизаветой Юльевной Бенуа) был в Крыму в 2012 году. Они посетили Ялту, Ливадию и Севастополь.

В 2016-2018 годах в рамках гранта РФФИ “Предельные множества траекторий динамических систем” (руководитель В. А. Плисс) проходило сотрудничество кафедры дифференциальных уравнений СПбГУ и кафедры прикладной математики филиала МГУ в Севастополе, которое будет продолжено в рамках нового гранта № 19-01-00388 “Структура интегральных множеств периодических и автономных систем дифференциальных уравнений” в 2019-2021 годах.

Выражая глубокие соболезнования родным близким и коллегам в связи с кончиной Виктора Александровича Плисса, академики Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН отметили: «Выдающийся учёный и общественный деятель, он по праву пользовался высочайшим авторитетом и уважением. Среди его неоспоримых достижений — фундаментальные труды и исследования, крупная научная школа, целая плеяда талантливых учеников. Целеустремленный, творческий, увлечённый любимым делом человек, Виктор Александрович, всегда был полон новых идей и замыслов. Таким он навсегда останется в памяти родных, друзей и коллег».

О. В. Анашкин, Н. Д. Копачевский, В. А. Лукьяненко, М. А. Муратов, И. В. Орлов, Г. С. Осипенко, В. Н. Чехов.

Dinamicheskie sistemy (Dynamical Systems)

Volume 9(37) no.1

2019

Table of Contents

F. S. STONYAKIN. Some Analogue of Quadratic Interpolation for a Special Class of Non-Smooth Functionals and One Application to Adaptive Mirror Descent	3
V. N. TKHAI. Energy exchange in resonant reversible mechanical systems	17
D. O. TSVETKOV. Oscillations of an ideal stratified fluid with an elastic membrane	26
O. I. RUDNITSKII. Canonical system of basic invariants for primitive reflection groups of four-dimensional unitary space	46
V. A. VODAKHOVA, F. M. NAKHUSHEVA, A. G. EZAOVA, L. V. KANUKOEVA. The inner-boundary value problem for a mixed type equation with a nonsmooth parabolic degeneration line	57
V. A. TERNOVSKIY, M. S. BICHULOVA. Closedness of basis surfaces invariant with respect to the groups A_3 and B_3	67
V. A. TEMNENKO. Classical electrodynamics with non-point charge: big computational difficulties generated by small parameters	73
A. YU. PEREVARYUKHA. Modeling of invasive process with spontaneous transition from critical K -capacity of the environment to an alternative asymptotic states of population	82
In memory of Viktor Aleksandrovich Pliss	95

Динамические системы

Том 9(37) №1

2019

Содержание

Ф. С. СТОНЯКИН. Аналог квадратичной интерполяции для специального класса негладких функционалов и одно его приложение к адаптивному методу зеркального спуска	3
В. Н. ТХАЙ. Обмен энергией в резонансных обратимых механических системах	17
Д. О. ЦВЕТКОВ. Колебания идеальной стратифицированной жидкости с упругой мембраной	26
О. И. РУДНИЦКИЙ. Канонические системы базисных инвариантов конечных примитивных групп отражений четырехмерного унитарного пространства	46
В. А. ВОДАХОВА, Ф. М. НАХУШЕВА, А. Г. ЕЗАОВА, Л. В. КАНУКОЕВА. Внутреннекраевая задача для уравнения смешанного типа с негладкой линией параболического вырождения	57
В. А. ТЕРНОВСКИЙ, М. С. БИЧУЛОВА. Замкнутость базисных поверхностей, инвариантных относительно групп A_3 и B_3	67
V. A. TEMNENKO. Classical electrodynamics with non-point charge: big computational difficulties generated by small parameters	73
А. Ю. ПЕРЕВАРЮХА. Моделирование спонтанного перехода от критической K -емкости к альтернативным асимптотическим состояниям популяции	82
Памяти Виктора Александровича Плисса	95