Динамические системы, 2019, том 9(37), №1, 67–72

УДК 514.12

Замкнутость базисных поверхностей, инвариантных относительно групп A_3 и B_3

В. А. Терновский, М. С. Бичулова
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
E-mail: ternowskyva@mail.ru, masha.bichulova@yandex.ru

Аннотация. Одной из основных задач в теории инвариантов является построение образующих алгебры инвариантов некоторой группы. В настоящей статье изучается строение базисных поверхностей инвариантных относительно конечных групп, порожденных отражениями в вещественном пространстве. Получены достаточные условия замкнутости всех базисных поверхностей алгебр инвариантов для групп симметрии правильного симплекса и куба в трехмерном евклидовом пространстве.

Ключевые слова: инварианты, группы симметрий, базисные инварианты, алгебра инвариантов, группы порожденные отражениями.

Closedness of basis surfaces invariant with respect to the groups A_3 and B_3

V. A. Ternovskiy, M. S. Bichulova
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol.

Abstract. In the real m-dimensional Euclidean space E^m , the group G is generated by orthogonal reflections with respect to $N(G)$ hyperplanes with common point O. In a rectangular coordinate system, we assign the algebraic hypersurface of order n to $f(x) = 0$, where $f(x)$ is a polynomial degrees n with respect to the coordinates of the vector $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$. The set of all hypersurfaces invariant with respect to the same group G corresponds to the set $f(x)$, which forms the algebra I^G. The description of the algebra I^G is a fundamental problem in the theory of invariants. In this article, we study the structure of the basis surfaces invariant with respect to finite groups generated by reflections in real space. Sufficient conditions for the closure of all basis surfaces of the algebras of invariants for the symmetry groups of the regular simplex A_3 and the cube B_3 in three-dimensional Euclidean space are obtained.
Keywords: invariant, symmetry groups, basic invariant, algebra of invariants, groups generated by reflections.
MSC 2010: 20B30

Введение

В вещественном m-мерном евклидовом пространстве E^m группа G порождена ортогональными отражениями относительно $N(G)$ гиперплоскостей с общей точкой . В прямоугольной системе координат алгебраическую гиперповерхность порядка n зададим уравнением $\varphi(x) = 0$, где $\varphi(x)$ — многочлен степени n относительно координат вектора $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$. Множеству всех гиперповерхностей, инвариантных относительно одной и той же группы G, соответствует множество $\varphi(x)$, образующее алгебру I^G.

Описание алгебры I^G является фундаментальной проблемой теории инвариантов. Для конечных групп в 1890 году Д. Гильберт [1] доказал основную теорему теории инвариантов, утверждающую, что алгебра инвариантов имеет конечное число образующих. Для конечных групп отражений G К. Шевалье [2] получил фундаментальный результат, состоящий в том, что m алгебраически независимых однородных многочленов образуют базис инвариантов G. Как показали Шепард и Тодд [3], если базис инвариантов состоит из m однородных многочленов, то G — конечная группа отражений. Таким образом, алгебра I^G порождается m алгебраически независимыми формами I_{n_i}. Г. С. М. Коксетр [4] классифицировал все неприводимые группы G пространства E^m и нашел степени n_i форм I_{n_i}, $i = 1, \dots, m$.

Известны различные методы нахождения в явном виде базиса I^G для некоторых групп G [5]. В 1969–1970 годах Флатто и Винер [6, 7] впервые дали алгоритм нахождения I_{n_i} с помощью многочленов

$$P_t(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{\sigma \in G} (\vec{x}, \sigma\vec{y})^t, \quad t \geq 1, \tag{1}$$

где $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{i=1} (x_i, y_i)$ — скалярное произведение векторов $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$ и $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m)$. Модификация (1): $\vec{x} = \vec{y}$, $\sigma \in G$ — отражения, предложенная в работе [8] требует четности n_i, но существенно уменьшает технические трудности, они становятся преодолимыми. Заведующим кафедрой геометрии Симферопольского государственного университета профессором Владимиром Федотовичем Игнатенко в 1983 году [9] полностью решена задача построения в явном виде базисов I^G всех алгебр с использованием многочленов Погорелова

$$\theta_{2t}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N(G)} \eta_j^{2t}(\vec{x}),$$

где $\eta_j(\vec{x}) = 0$ — нормированные уравнения гиперплоскостей отражения, и специальных дифференциальных операторов.

В. Ф. Игнатенко в работе [10] поставил задачу: получить уравнения всех базисных, отличных от сферы замкнутых поверхностей, инвариантных относительно конечных групп, порожденных ортогональными отражениями в евклидовом пространстве.

В данной статье получены достаточные условия замкнутости всех базисных поверхностей алгебр инвариантов для групп симметрии правильного трехмерного симплекса и куба.

1. Постановка задачи и основной результат

Зададим в вещественном трехмерном пространстве E^3 прямоугольную систему координат Ox_i, $i = 1, 2, 3$. Пусть G — конечная группа симметрий, порожденная ортогональными отражениями относительно плоскостей симметрии с общей точкой O. Если $I_j(G)$, $j = 1, 2, 3,$ — образующие алгебры всех инвариантов группы G, то уравнение двумерной базисной алгебраической поверхности можно задать так

$$I_j(G) = c, \tag{2}$$

где $c = const$.

Предположим, что поверхность (2) не замкнута, тогда существует действительный асимптотический конус этой поверхности, то есть, существует, по крайней мере, одна действительная точка, отличная от 0, удовлетворяющая уравнению

$$I_j(G) = 0.$$

Отметим, что для любой группы G поверхность, заданная уравнением $I_1 = c$ замкнута.

1.1.

Приведем достаточные условия замкнутости базисных алгебраических поверхностей конечной группы симметрии A_3.

Итак, пусть $G = A_3$.

Возьмем следующие базисные инварианты [9]

$$I_1 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2, \quad I_2 = x_1x_2x_3, \quad I_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i^4 - 2\sum_{i<j}^{3} x_i^2x_j^2.$$

Очевидно, что поверхность $I_2 = c$ не замкнута. Базисная поверхность четвертого порядка общего вида задается уравнением

$$I_3 + aI_1^2 = c,$$

где a — произвольная константа. Имеем

$$I_3 + aI_1^2 = (1+a)\sum_{i=1}^{3} x_i^4 + 2(a-1)\sum_{i<j}^{3} x_i^2 \cdot x_j^2.$$

Положим $y_i = x_i^2$ $(i = 1, 2, 3)$, тогда приведенное выше выражение, приравняв к нулю, запишем так

$$b_0y_1^2 + b_1y_1 + b_2 = 0, \tag{3}$$

где $b_0 = 1 + a$, $b_1 = 2(a-1)(y_2 + y_3)$, $b_2 = (1+a)(y_2^2 + y_3^2) + 2(a-1)y_2y_3$.

Положим $y_2 = y_3 = 0$, тогда при $a = -1$ y_1 может быть любым действительным числом. Теперь предположим, что y_2 и y_3 неотрицательные действительные числа, одновременно не равные нулю. Найдем значение a, при которых уравнение (4) не имеет положительных корней. Если $a \leq -1$ $(a \geq 1)$, то при любых y_2, y_3, удовлетворяющих нашему предположению, $b_i \leq 0$ $(b_i \geq 0)$, $i = 0, 1, 2$. Следовательно, по правилу знаков Декарта уравнение (2) при $a \leq -1$, $a \geq 1$ положительных корней не имеет. Но это правило не утверждает, что при $-1 < a < 1$ всегда есть положительные корни. Поэтому найдено только достаточное условие: базисная поверхность четвертого порядка замкнута при $a < -1$, $a \geq 1$.

Таким образом, для группы A_3 мы получили следующий результат: базисная поверхность второго порядка замкнута; базисная поверхность третьего порядка не замкнута; базисная поверхность четвертого порядка замкнута при $a \leq -1$, $a \geq 1$.

1.2.

Теперь пусть $G = B_3$.

Алгебра всех инвариантов группы симметрий B_3 имеет следующие образующие [1]:

$$I_1 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2, \quad I_2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^4, \quad I_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i^6,$$

Базисная поверхность четвертого порядка задается уравнениями

$$I_2 + aI_1^2 = (1+a)\sum_{i=1}^{3} x_i^4 + 2a\sum_{i<j}^{3} x_i^2 x_j^2 = C$$

Положив $x_i^2 = y_i$, $i = 1,2,3$ и $C = 0$, получим уравнение

$$b_0 y_1^2 + b_1 y_1 + b_2 = 0, \tag{4}$$

где $b_0 = 1 + a$, $b_1 = 2a(y_2 + y_3)$, $b_2 = (1+a)(y_2^2 + y_3^2) + 2ay_2y_3$. Так как y_2, y_3 неотрицательные действительные числа одновременно не равные нулю, то при $a \leq -1$ ($a \geq 0$) все $b_i \leq 0$ ($b_i \geq 0$), $i = 0,1,2$. Пусть, тогда y_1 будет положительным числом только при $a = -1$. Следовательно, при $a < -1$ и $a \geq 0$ базисная поверхность четвертого порядка замкнута.

Рассмотрим базисную поверхность шестого порядка, которая задается следующим уравнением

$$I_3 + a_1 I_1 I_2 + a_2 I_1^3 = \sum_{i=1}^{3} x_i^6 + a_1\left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{3} x_i^4\right) + a_2\left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2\right)^3 =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} x_i^6 + a_1\left(\sum_{i=1}^{3} x_i^6 + \sum_{i,j=1}^{3} x_i^4 x_j^2\right) + a_2\left(\sum_{i=1}^{3} x_i^6 + 3\sum_{i,j=1}^{3} x_i^4 x_j^2 + 6x_1^2x_2^2x_3^2\right) =$$

$$= (1 + a_1 + a_2)\sum_{i=1}^{3} x_i^6 + (a_1 + a_2)\sum_{i,j=1}^{3} x_i^4 x_j^2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 x_3^2 = C$$

Положив $x_i^2 = y_i$, $i = 1,2,3$, и $C = 0$, получим

$$(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) + (a_1 + a_2)(y_1^2 y_2 + y_2^2 y_3 + y_2^2 y_1 + y_2^2 y_3 + y_3^2 y_1 + y_3^2 y_2) + 6a_2 y_1 y_2 y_3 = 0$$
$$(1 + a_1 + a_2)y_1^3 + (a_1 + a_2)(y_2 + y_3)y_1^2 + ((a_1 + a_2)(y_2^2 + y_3^2) + 6a_2 y_2 y_3)y_1 + b_3) = 0$$

$$b_0 y_1^3 + b_1 y_1^2 + b_2 y_1 + b_3 = 0, \tag{5}$$

где $b_0 = 1 + a_1 + a_2$, $b_1 = (a_1 + 3a_2)(y_2 + y_3)$, $b_2 = (a_1 + 3a_2)(y_2^2 + y_3^2) + 6a_2 y_2 y_3$, $b_3 = (1 + a_1 + a_2)(y_2^3 + y_3^3) + (a_1 + 3a_2)(y_2^2 y_3 + y_2 y_3^2)$.

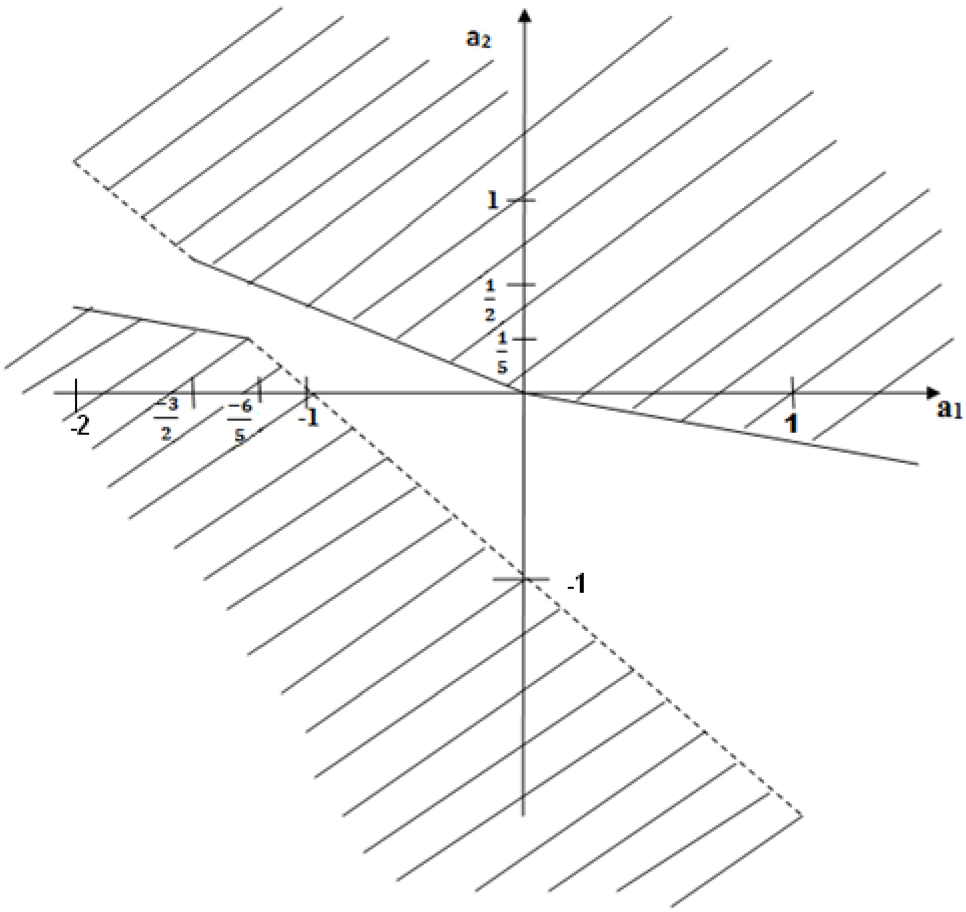

Рис. 1.

Считая y_2, y_3 неотрицательными действительными числами одновременно не равными нулю, находим, что при $a_2 \le -\frac{1}{6}a_1$, $a_1 \le -\frac{6}{5}$, $a_2 \le -a_1 - 1$, $a_1 \ge -\frac{6}{5}$, все $b_i \le 0$, а при $a_2 \ge -a_1 - 1$, $a_1 \le -\frac{3}{2}$, $a_2 \ge -\frac{1}{3}a_1$, $-\frac{3}{2} < a_1 \le 0$, $a_2 \ge -\frac{1}{6}a_1$, $a_1 > 0$, все $b_i \ge 0$.

Если $y_2 = y_3 = 0$, то уравнение (5) имеет положительные решения только при $a_2 + a_1 + 1 = 0$.

Таким образом, базисная поверхность шестого порядка замкнута, если a_1 и a_2

удовлетворяют следующим неравенствам (Рис. 1)

$$a_2 > -a_1 - 1,\ a_2 \leq -\frac{1}{6}a_1,\ a_1 \leq -\frac{3}{2}$$
$$a_2 \geq -\frac{1}{3}a_1,\ a_2 \leq -\frac{1}{6}a_1,\ -\frac{3}{2} < a_1 \leq -\frac{6}{5}$$
$$a_2 \geq -\frac{1}{3}a_1,\ a_2 < -a_1 - 1,\ -\frac{6}{5} < a_1 \leq 0$$
$$a_2 \geq -\frac{1}{6}a_1,\ a_2 < -a_1 - 1,\ a_1 > 0.$$

Список цитируемых источников

1. *Hilbert, D.* Über die Theorie der algebraischen Formen. Math. Ann. 36, 473-534 (1890).
2. *Chevalley, Claude* Invariants of finite groups generated by reflections. Am. J. Math. 77, 778-782 (1955).
3. *Shephard, G. C., Todd, J. A.* Finite unitary reflection groups. Canad. J. Math. 6, 274–304 (1954).
4. *Coxeter, H. S. M.* Discrete groups generated by reflections. Ann. Math. 35, 588–621 (1934).
5. *Игнатенко, В. Ф.* Геометрия алгебраических поверхностей с симметриями. Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. 11, М.: ВИНИТИ, 203–240 (1980).

   Ignatenko, V. F. Geometry of algebraic surfaces with symmetries. J. Soviet Math. 17, No.1, 1689–1711 (1981).
6. *Flatto, Leopold; Weiner, Margaret M.* Invariants of finite reflection groups and mean value problems. Am. J. Math. 91, 591-598 (1969).
7. *Flatto, Leopold* Invariants of finite reflection groups and mean value problems. II. Am. J. Math. 92, 552-561 (1970).
8. *Игнатенко, В. Ф.* К проблеме нахождения полных базисов алгебр многочленов, инвариантных относительно групп симметрий пространства E^n. Тез. докл. Всесоюзного симпозиума по теории симметрии и ее обобщениям (стр. 50–51). Кишенев, 1980.

   Ignatenko, V. F. On the problem of finding complete bases of algebras of polynomials that are invariant with respect to the symmetry groups of the space E^n. Tez. dokl. Vsesoyuznogo simpoziuma po teorii simmetrii i yeye obobshcheniyam (Tez. report All-Union Symposium on Theory of Symmetry and Its Generalizations) (pp. 50–51) Kishineyv, 1980. (in Russian)
9. *Игнатенко, В. Ф.* Об инвариантах конечных групп, порожденных отражениями. Мат. сб. 120(162), No.4, 556–568 (1983).

   Ignatenko, V. F. On invariants of finite groups generated by reflections, Math. USSR-Sb. 48, No.2, 551–563 (1984).
10. *Игнатенко, В. Ф.* Об алгебраических поверхностях с группами симметрии A_n, B_n, D_n. Украинский геометрический сборник 24, 33–39 (1981).

   Ignatenko, V. F. On algebraic surfaces with the symmetry groups A_n, B_n, D_n. Ukr. Geom. Sb. 24, 33-39 (1981). (in Russian)

Получена 21.01.2019