Динамические системы, 2019, том 9(37), №1, 57–66

УДК 517.956.6

Внутреннекраевая задача для уравнения смешанного типа с негладкой линией параболического вырождения

В. А. Водахова, Ф. М. Нахушева, А. Г. Езаова, Л. В. Канукоева

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, Нальчик 360004. *E-mail: alena_ezaova@mail.ru*

Аннотация. В данной работе для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с двумя линиями параболического вырождения исследован вопрос однозначной разрешимости нелокальной задачи, когда на эллиптической части границы области задано условие Дирихле, а на гиперболических частях границы заданы условия, поточечно связывающие значения дробных производных от решения на характеристиках со значениями решения на линиях параболического вырождения внутри области. При определенных ограничениях неравенственного типа на заданные функции и порядки дробных производных в краевых условиях методом интегралов энергии доказана единственность решения задачи. Вопрос существования решения задачи эквивалентно редуцирован к вопросу разрешимости системы сингулярных интегральных уравнений второго порядка с ядром Коши относительно производных от следов искомого решения на линиях вырождения. Выписаны условия, гарантирующие существование регуляризаторов, приводящих сингулярные интегральные уравнения к уравнениям Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которых следует из единственности решения задачи. Исследованы дифференциальные свойства решения. Установлено влияние на корректность постановки задачи порядков дробных производных в краевых условиях и их связь с порядком вырождения уравнения.

Ключевые слова: краевая задача, оператор дробного интегрирования, оператор дробного дифференцирования, задача Коши, задача Дирихле, уравнение Фредгольма, сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши.

The inner-boundary value problem for a mixed type equation with a nonsmooth parabolic degeneration line

V. A. Vodakhova, F. M Nakhusheva, A. G Ezaova, L. V Kanukoeva

H. M. Berbekov Kabardino-Balkarian State University, Nalchik 360004.

Abstract. In this paper, equations of mixed elliptic-hyperbolic type with two degeneration lines parabolic investigated the question of unique solvability of a nonlocal problem, when on the elliptic part of the boundary region is set to a Dirichlet condition, and on the hyperbolic parts of the border, conditions are defined, point-by-point linking the values of the fractional derivative of the solution on the characteristics with the values of the solution at the parabolic lines of degeneracy within the region. Under certain restrictions preventing type on the specified functions and fractional order derivatives in boundary conditions is the method of energy integrals is proved the uniqueness of the solution of the problem. The question of existence of the solution are equivalent is reduced to the question of solvability of system of singular integral equations of the second order Cauchy kernel with respect to derivatives of the traces of the sought solution on the lines of degeneration. Discharged conditions which guarantee the existence of regularizers, leading to singu-lar integral equations to the Fredholm equation of the second kind, unconditional solvability of which follows from the uniqueness of the problem solution. Investigated differential properties of the solution. The influence on the posedness of the problem of orders of fractional deriva-tives in boundary conditions and their connection with the order of degeneracy of the equation.

Keywords: boundary value problem, operator of fractional integration operator of fractional dierentiation, Cauchy problem, Dirichlet problem, Fredholm equation, singular integral equation with Cauchy kernel.

MSC 2010: 35M12

Введение

Теория краевых задач для уравнений смешанного типа является одним из важнейших разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Это обусловлено как непосредственными связями уравнений смешанного типа с проблемами теории сингулярных интегральных уравнений, теорией интегральных преобразований и специальных функций, так и прикладными задачами околозвуковой газовой динамики, математической физики, биологии. Локальные и нелокальные задачи для уравнений смешанного типа встречаются при математическом моделировании нефтяных пластов, фильтрации грунтовых вод, переноса тепла и массы в объекте, имеющем сложное строение, электрических колебаний в проводах, движения жидкости в канале, окруженном пористой средой и других явлениях. В настоящее время исследования нелокальных задач для уравнений смешанного типа ведутся интенсивно. В опубликованных работах краевые условия содержат классические операторы или операторы дробного в смысле Римана-Лиувилля интегро-дифференцирования [15, 6]. Много работ посвящено исследованию краевых задач для линейных уравнений смешанного типа с одной линией вырождения [5]–[12], [16, 17, 6, 7] и лишь малая часть их посвящена изучению локальных и нелокальных краевых задач для уравнений смешанного типа с двумя и более линиями вырождения [14, 20]. Такими задачами занимались А. М. Нахушев, М. М. Зайнулабидов, В. Ф. Волкодавов, М. С. Салахитдинов, К. Б. Сабитов, О. А. Репин, С. К. Кумыкова и другие авторы. В связи с этим возникает необходимость дальнейшего развития теории нелокальных краевых задач для различных классов уравнений смешанного типа с негладкими линиями параболического вырождения и разрывными условиями сопряжения.

В работе с учетом влияния порядка дробной производной в краевом условии на однозначную разрешимость задачи сформулирована корректная внутреннекраевая задача для уравнения смешанного типа с негладкой линией параболического вырождения. Доказаны существование и единственность решения задачи.

Единственность решения задачи доказывается методом интегралов энергии, при этом устанавливаются определенные ограничения неравенственного типа на заданные функции и порядки дробных производных в краевых условиях. Вопрос существования решения задачи эквивалентно редуцирован к вопросу разрешимости системы сингулярных интегральных уравнений второго порядка с ядром Коши относительно производных от следов искомого решения на линиях вырождения. Выписаны условия, гарантирующие существование регуляризаторов, приводящих сингулярные интегральные уравнения к уравнениям Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которых следует из единственности решения задачи. Исследованы дифференциальные свойства решения. Установлено влияние на корректность постановки задачи порядков дробных производных в краевых условиях и их связь с порядком вырождения уравнения.

Цель исследования — доказать однозначную разрешимость внутреннекраевой задачи для уравнения смешанного типа с негладкой линией изменения параболического вырождения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$|y|^k u_{xx} + sgn\,(xy)\,|x|^k u_{yy} = 0, \tag{1}$$

где $k = const > 0$, в конечной односвязной области Ω, ограниченной кусочно-гладкой кривой Жордана σ с концами в точках $A\,(1;0)\,,\ B\,(0;1)$, расположенной в первом квадранте и характеристиками уравнения (1) $BC\,:\ (-x)^p + y^p = 1$, $AD:\ x^p + (-y)^p = 1,\ CD:\ x + y = 0$, где $2p = k+2$. Обозначим через $\Omega_1,\ \Omega_2$ — гиперболические части смешанной области Ω, где $x > 0$ и $x < 0$, соответственно; Ω_3 – эллиптическую часть области Ω; $I_1\,(I_2)$ — интервал $0 < x < 1\ \ (0 < y < 1)$ прямой $y = 0\ \ (x = 0)$.

Задача. Найти регулярное в области Ω решение $u\,(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u\,(x,y)|_{\sigma} = \varphi\,(x,y)\,, \tag{2}$$

$$a_1\,(x)\,D^{\beta}_{0x} x^{2\beta-1} u\,[\theta_0\,(x)] + b_1\,(x)\,u\,(x,0) = c_1\,(x)\,,\quad \forall x \in I_1, \tag{3}$$

$$a_2\,(y)\,D^{\beta}_{0y} y^{2\beta-1} u\,[\theta_0\,(y)] + b_2\,(y)\,u\,(0,y) = c_2\,(y)\,,\quad \forall y \in I_2, \tag{4}$$

где $\beta = \frac{k}{2k+4}$, $\theta_0\,(x)$ – точка пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки $(x,0) \in I_1$ с характеристикой OD; $\theta_0\,(y)$ – точка пересечения характеристики, выходящей из точки $(0,y) \in I_2$ с характеристикой OC; $\varphi\,(x)\,,\ a_i\,(t)\,,\ b_i\,(t)\,,\ c_i\,(t)$, – непрерывные функции, причем

$$a_i^2\,(t) + b_i^2\,(t) \neq 0,\quad t \in I_i,\ i = 1,2 \tag{5}$$

$\varphi\,(x,y) \in C^1\,(\sigma)\,;\ \ a_i\,(t)\,,\ b_i\,(t)\,,\ c_i\,(t) \in C^{(2,h)}\left(\bar{I}_i\right)\,,\ \ h > 0,\ \ D^{\alpha}_{ax}$ – операторы дробного в смысле Римана – Лиувилля интегро-дифференцирования [18].

Доказательство единственности решения задачи. Известно, что решение задачи Коши для уравнения (1) с данными на линии $y = 0$ в области Ω_1 задается формулой [14, 20, 2]

$$\begin{gathered} u\left(x,y\right) = -2^{3-4\beta}p\tfrac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}xy\int_{a^{\frac{1}{p}}}^{b^{\frac{1}{p}}} t^{2p-1}\left(t^{2p}-a^2\right)^{-1+\beta}\left(b^2-t^{2p}\right)\tau_1\left(t\right)dt- \\ -2^{4\beta-1}p\tfrac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\int_{a^{\frac{1}{p}}}^{b^{\frac{1}{p}}} t^{2p-2}\left(t^{2p}-a^2\right)^{-\beta}\left(b^2-t^{2\beta}\right)\nu_1\left(t\right)dt, \end{gathered} \tag{6}$$

где $a = x^p - (-y)^p$, $b = x^p + (-y)^p$, $\tau_1(x) = u(x,0)$, $\nu_1(x) = u_y(x,0)$, и в области Ω_2

$$\begin{gathered} u\left(x,y\right) = -2^{3-4\beta}p\tfrac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}xy\int_{c^{\frac{1}{p}}}^{d^{\frac{1}{p}}} t^{2p-1}\left(t^{2p}-c^2\right)^{-1-\beta}\left(d^2-t^{2\beta}\right)^{-1+\beta}\tau_2\left(t\right)dt- \\ -2^{4\beta-1}p\tfrac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\int_{c^{\frac{1}{p}}}^{d^{\frac{1}{p}}} t^{2p-2}\left(t^{2p}-c^2\right)^{-\beta}\left(d^2-t^{2p}\right)^{-\beta}\nu_2\left(t\right)dt, \end{gathered} \tag{7}$$

где $c = y^p - (-x)^p$, $d = y^p + (-x)^p$, $\tau_2(y) = u(0,y)$, $\nu_2(y) = u_x(0,y)$, $\Gamma(\alpha)$ – гамма функция Эйлера [10].

Удовлетворив $U[\theta_0(x)]$, $U[\theta_0(y)]$ условиям (3) задачи, получим

$$\begin{gathered} \left[\frac{\Gamma\left(2\beta\right)}{\Gamma\left(\beta\right)}a_1\left(x\right)x^{\beta-1}+b_1\left(x\right)\right]\tilde{\tau}_1\left(x\right)- \\ -2^{4\beta-2}\frac{\Gamma\left(2-2\beta\right)}{\Gamma^2\left(1-\beta\right)}a_1\left(x\right)D_{0x}^{\beta}x^{2\beta-1}D_{0x}^{\beta-1}x^{-\frac{1}{2p}-\beta}\tilde{\nu}_1\left(x\right)=c_1\left(x\right), \end{gathered} \tag{8}$$

где $\tau_1(x) = \tilde{\tau}_1(x^{2p})$, $\nu_1(x) = \tilde{\nu}_1(x^{2p})$.
Для упрощения (8) воспользуемся известным соотношением [15, 14, 18, 9]

$$D_{0x}^{1-\varepsilon}x^{1-2\varepsilon}D_{0x}^{-\varepsilon}x^{\varepsilon-1}f\left(x\right)=x^{-\varepsilon}D_{0x}^{1-2\varepsilon}f\left(x\right). \tag{9}$$

Полагая в (9) $\varepsilon = 1-\beta$, $f(x) = x^{-\frac{1}{2p}}\cdot\tilde{\nu}_1(x)$, получим [14,18]

$$D_{0x}^{\beta}x^{2\beta-1}D_{0x}^{\beta-1}x^{-\frac{1}{2p}}\tilde{\nu}_1\left(x\right)=x^{\beta-1}D_{0x}^{2\beta-1}x^{-\frac{1}{2p}}\tilde{\nu}_1\left(x\right).$$

С учетом последнего уравнение (8) после умножения на $x^{1-\beta}$ примет вид

$$\left[a_1(x)+\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)}x^{1-\beta}b_1(x)\right]\tilde{\tau}_1(x)-\gamma a_1(x)D_{0x}^{2\beta-1}x^{-\frac{1}{2p}}\tilde{\nu}_1(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)}x^{1-\beta}c_1(x). \tag{10}$$

Аналогично, функциональное соотношение, принесенное на I_2 из области Ω_2, имеет вид

$$\left[a_2\left(y\right)+\frac{\Gamma\left(\beta\right)}{\Gamma\left(2\beta\right)}y^{1-\beta}b_2\left(y\right)\right]\tilde{\tau}_2\left(y\right)-\gamma\, a_2\left(y\right)D_{0y}^{2\beta-1}y^{-\frac{1}{2p}}\tilde{\nu}_2\left(y\right)=\frac{\Gamma\left(\beta\right)}{\Gamma\left(2\beta\right)}y^{1-\beta}c_2\left(y\right) \tag{11}$$

где $\tau_2(y) = \tilde{\tau}_2(y^{2p})$, $\nu_2(y) = \tilde{\nu}_2(y^{2p})$, $\gamma = \frac{2^{4\beta-2}\Gamma(\beta)\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)}$.

Теорема единственности. *В области* Ω *не может существовать более одного регулярного решения задачи* (1)–(4), *если выполнены условия*

$$a_i(t) \neq 0, a_i(t) + \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} t^{1-\beta} b_i(t) \neq 0, \ \ \forall t \in I_i, \ \ i = 1, 2, \tag{12}$$

$$\left[t^{-k-\frac{1}{2p}} \left(1 + \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} t^{1-\beta} \frac{b_i(t)}{a_i(t)} \right) \right]' \geq 0, \ \ a_i(1) b_i(1) > 0. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ – решение однородной задачи (1)–(4). Тогда в области эллиптичности уравнения (1) имеет место соотношение [20, 19, 9]

$$\iint_{\Omega_3} \left(y^k u_x^2 + x^k u_y^2 \right) dxdy + \int_0^1 x^k \tilde{\tau}_1(x) \nu_1(x) dx + \int_0^1 y^k \tilde{\tau}_2(y) \nu_2(y) dy \equiv 0. \tag{14}$$

Полагая $c_i(t) \equiv 0$, можно установить справедливость следующих неравенств

$$\bar{I}_i = \int_0^1 t^k \tilde{\tau}_i(t) \nu_i dt \geq 0, \ \ i = 1, 2, \ \ t = x, y. \tag{15}$$

В самом деле, полагая $c_i(t) \equiv 0$ из (10) и (11) будем иметь

$$\tilde{\tau}_1(t) = A_i(t) D_{0t}^{2\beta-1} t^{-\frac{1}{2p}} \tilde{\nu}_i(t),$$

где $A_i(t) = \frac{\gamma a_i(t)}{a_i(t) + \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} t^{1-\beta} b_i(t)}$, $t = x, \ y$.

Отсюда, при $t = x$ (или $t = y$)

$$\bar{I}_i = \int_0^1 x^k \tilde{\tau}_i(x) \tilde{\nu}_i(x) dx = \int_0^1 x^k \tilde{\nu}_i(x) A_i(x) D^{2\beta-1} x^{-\frac{1}{2p}} dx.$$

Воспользуемся известной формулой для гамма функций [10]

$$\int_0^\infty t^{\mu-1} \cos kt dt = \frac{\Gamma(\mu)}{k^\mu} \cos \frac{\mu\pi}{2},$$

где $k > 0, \ \ 0 < \mu < 1$.

Полагая в ней $k = |x - \xi|, \ \mu = 2\beta$, получим

$$\Gamma(1-2\beta) \Gamma(2\beta) \cos \pi\beta \, \bar{I}_i =$$

$$= \int_0^1 x^k A_i(x) \tilde{\nu}_i(x) dx \int_0^x \xi^{-\frac{1}{2p}} \tilde{\nu}_i(\xi) d\xi \int_0^\infty t^{2\beta-1} \cos t(x-\xi) dt.$$

Поменяв порядок интегрирования и вводя обозначения $\nu_i^*(\xi) = \xi^{-\frac{1}{2p}} \tilde{\nu}_i(\xi)$, $\bar{A}_i(x) = x^{k+\frac{1}{2p}} A_i(x)$, получим

$$\frac{\pi}{2 \sin \pi\beta} \bar{I}_i = \int_0^\infty t^{2\beta-1} dt \int_0^1 \bar{A}_i(x) \tilde{\nu}_i^*(\xi) dx \int_0^x \nu_i^*(\xi) \cos t(x-\xi) d\xi.$$

С учетом того, что $\left[\left(\int_0^x \tilde{\nu}_i^*(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2\right]' = 2\nu_i^*(x)\cos tx \int_0^x \nu_i^*(\xi)\cos t\xi d\xi,$

$$\left[\left(\int_0^x \tilde{\nu}_i^*(\xi)\sin t\xi\right)^2\right]' = 2\nu_i^*(x)\sin tx \int_0^x \nu_i^*(\xi)\sin t\xi d\xi,$$

в результате преобразований, после интегрирования по частям, будем иметь

$$\frac{\pi}{2\sin\pi\beta}\bar{I}_i = \int_0^\infty t^{2\beta-1}dt\left\{\bar{A}_i(1)\left[\left(\int_0^1 \nu_i^*(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2 + \left(\int_0^1 \nu_i^*(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2\right] -\right.$$

$$\left. - \int_0^1 \bar{A}_i'(x)\,dx\left[\left(\int_0^x \nu_i^*(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2 + \left(\int_0^x \nu_i^*(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2\right]\right\}.$$

Неравенства (15) будут выполняться при выполнении $\bar{A}_i(1) \geq 0, \bar{A}_i'(x) \leq 0$, что обеспечено выполнением условий (13) теоремы. Единственность решения задачи будет следовать из (14), (15).

Доказательство существования решения задачи. Переходя к доказательству существования решения задачи, будем считать, что $\varphi(x,y) \equiv 0$ и кривая σ совпадает с нормальным контуром $\sigma_0 : x^{2p}+y^{2p} = 1$. Пусть $a_i(t) = t^{1-\beta}a_i^*(t)\,, \quad a_i^*(t) \neq 0$.

Основные функциональные соотношения между $\tilde{\tau}_i(t)$ и $\tilde{\nu}_i(t)$, принесенные на $I_i \quad (i = 1, 2)$ из эллиптической Ω_3 и гиперболических Ω_1 и Ω_2 частей смешанной области, соответственно имеют вид [20]

$$\tilde{\tau}_i(t) = -\frac{\gamma_1}{2p}\int_0^1 \xi^{\beta-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{|\xi-t|^{2\beta}} - \frac{1}{|1-\xi t|^{2\beta}}\right]\tilde{\nu}_i(\xi)\,d\xi- \tag{16}$$

$$-\frac{\gamma_1}{2p}\int_0^1 \xi^{\beta-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{|\xi+t|^{2\beta}} - \frac{1}{|1+\xi t|^{2\beta}}\right]\tilde{\nu}_j(\xi)\,d\xi,$$

где $\gamma_1 = \frac{\Gamma^2(\beta)}{\pi 2^{2-4\beta}\Gamma(2\beta)}$, $i,\ j = 1, 2,\ i \neq j$, и

$$\left[a_i(t) + \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)}t^{1-\beta}b_i(t)\right]\tilde{\tau}_i(t) - \gamma a_i(t)\,D_{0t}^{2\beta-1}t^{-\frac{1}{2p}}\tilde{\nu}_i(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)}t^{1-\beta}c_i(t) \tag{17}$$

Пусть выполняются условия (12) теоремы единственности. Тогда (17) можно переписать в виде

$$\tilde{\tau}_i(t) = A_i(t)\,D_{0t}^{2\beta-1}t^{-\frac{1}{2p}}\tilde{\nu}_i(t) + f_i(t)\,, \tag{18}$$

где

$$f_i(t) = \frac{\Gamma(\beta)\ t^{1-\beta}c_i(t)}{\Gamma(2\beta)\,a_i(t) + \Gamma(\beta)\,t^{1-\beta}b_i(t)}.$$

Исключим $\tilde{\tau}_i(t)$ из (16) и (18). Получим

$$A_i(t)\, D_{0t}^{2\beta-1} t^{-\frac{1}{2p}} \tilde{\nu}_i(t) + f_i(t) = -\frac{\gamma_1}{2p}\int_0^1 \xi^{\beta-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{|\xi-t|^{2\beta}} - \frac{1}{|1-\xi t|^{2\beta}}\right] \tilde{\nu}_i(\xi)\, d\xi -$$

$$-\frac{\gamma_1}{2p}\int_0^1 \xi^{\beta-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{|\xi+t|^{2\beta}} - \frac{1}{|1+\xi t|^{2\beta}}\right] \tilde{\nu}_j(\xi)\, d\xi.$$

Пусть $a_i(t) \neq 0$, тогда подействуем на обе части полученного уравнения оператором $D_{0t}^{1-2\beta}$. После преобразований с учетом гладкости ядер будем иметь

$$\tilde{\nu}_i^*(t) + \int_0^1 \left(\frac{\xi}{t}\right)^{1-2\beta} \frac{\bar{k}_i^*(\xi,t)}{\xi+t} \tilde{\nu}_j^*(\xi)\, d\xi + \tag{19}$$

$$+\int_0^1 \left(\frac{\xi}{t}\right)^{1-2\beta} \frac{\bar{k}_i^*(\xi,t)}{\xi-t} \tilde{\nu}_j^*(\xi)\, d\xi = -D_{0t}^{1-2\beta}\left[\frac{f_i(t)}{A_i(t)}\right],$$

где $k_i^*(\xi,t)\,,\ \bar{k}_i^*(\xi,t) \in C\left(\bar{I}\times\bar{I}\right)\bigcap C^1(I\times I)\,,\ \tilde{\nu}_i^*(t) = \tilde{\nu}_i(t)\, t^{-\frac{1}{2p}},\ i,\ j = 1,2,\ i \neq j.$

Следовательно вопрос существования решения задачи эквивалентно редуцирован к вопросу разрешимости системы сингулярных интегральных уравнений (19) относительно неизвестных функций $\tilde{\nu}_i^*(t)\,,\ \ i = 1,2.$

Условия $1+\pi^2[\bar{k}_i^*(t,t)]^2 = 1 + \frac{\pi^2}{A_i^2(t)} \neq 0,\ i = 1,2$ гарантируют существование регуляризаторов [13], приводящих сингулярные интегральные уравнения (19) к уравнениям Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которых в требуемом классе функций будет следовать из единственности решения задачи. По найденным $\tilde{\nu}_i^*(t)$ можно найти $\tilde{\tau}_i(t)$ из (18), а следовательно, и решение задачи (1) – (4) как решение задачи Дирихле в области Ω_3 и решения задач Коши в областях Ω_1 и Ω_2.

2. Заключение

В работе для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с двумя линиями парболического вырождения доказана однозначная разрешимость внутреннекраевой задачи. Единственность доказывается методом интегралов энергии, при этом на заданные функции и порядки дробных производных в краевых условиях выписываются определенные ограничения неравенственного типа. Для доказательства существования задача эквивалентно редуцирована к вопросу разрешимости системы сингулярных интегральных уравнений второго порядка с ядром Коши относительно производных от следов искомого решения на линиях вырождения. Система сингулярных интегральных уравнений сведена к уравнениям Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которых следует из единственности решения задачи. Так же, установлено влияние на корректность постановки задачи порядков дробных производных в краевых условиях и их связь с порядком вырождения уравнения.

Список цитируемых источников

1. *Repin O A, Kumykova S. K.* A problem with generalized fractional integro-differentiation operators of arbitrary order // Russian Mathematics, Vol. 56, No. 12, 50–60 (2012).
2. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.

   Bitsadze A. V. Some classes of partial differential equations. – Nauka, M., 2006. (in Russian)
3. *Водахова В. А., Гучаева З. Х.* Нелокальная задача для нагруженного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. Успехи современного естествознания. № 7. 90–92 (2014).

   Vodakhova V. A., Guchaeva Z. Kh. A non-local task for a loaded third-order equation with multiple characteristics. Advances in modern science, 7, 90-92 (2014). (in Russian)
4. *Водахова В. А., Тлупова Р. Г., Шерметова М. Х.* Внутреннекраевая задача для нагруженного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. Успехи современного естествознания. № 1-1, 71–75 (2015).

   Vodakhova V. A., Tlupova R. G., Shermetova M. Kh. Internal task for a loaded third-order equation with multiple characteristics. Successes of modern science, №1-1, 71-75 (2015). (in Russian)
5. *Водахова В. А., Яхутлова М. Р., Тлимахова Р. Г.* Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения. Современные наукоемкие технологии. № 2–3, 416–420 (2016).

   Vodakhova V. A. , Yakhutlova M. R., Tlimakhova R. G. Nonlocal problem for a mixed-type equation with two perpendicular lines of degeneracy. Modern high technologies. № 2–3, 416–420 (2016). (in Russian)
6. *Езаова А. Г.* Об одной нелокальной задаче для уравнения смешенного типа третьего порядка. Известия Кабардино–Балкарского государственного университета. 1, № 4. 26–31 (2011).

   Ezaova A. G. About a non-local task for a third-order mixed-type equation. Transactiobs of the Kabardino-Balkarian State University, 1, №4, 26-31 (2011). (in Russian)
7. *Езаова А. Г., Думаева Л. В.* Об одной внутреннекраевой задаче для уравнения третьего порядка с группой младших членов. Фундаментальные исследования, № 2 (часть 27), 6032–6036 (2015).

   Ezaova A. G., Dumaeva L. V. About one internal-boundary problem for a third-order equation with a group of lower terms. Fundamental Research, No. 2 (part 27), 6032-6036 (2015). (in Russian)
8. *Елеев В. А., Кумыкова С. К.* О некоторых краевых задачах со смещением на характеристиках для смешанного уравнения гиперболо-параболического типа. Украинский математический журнал, 52, № 5, 707–716 (2000).

   Eleev V. A., Kumykova S. K. On some boundary value problems with a shift on the characteristics for a mixed equation of a hyperbolic-parabolic type. Ukrainian Mathematical Journal, 52, №5, 707 – 716 (2000). (in Russian)
9. *Кумыкова С. К., Водахова В. А., Езаова А. Г.* Локальные и нелокальные задачи для вырождающихся гиперболических уравнений. Учебное пособие. Нальчик, 2017.

Kumykova S. K., Vodakhova V. A., Ezaova A. G. Local and non-local problems for degenerate hyperbolic equations. Tutorial, Nalchik, 2017. (in Russian)

10. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М. – Л., 1963.

    Lebedev N. N. Special functions and their applications. - M. - L., 1963. (in Russian)

11. *Маричев О. И., Килбас А. А., Репин О. А.* Краевые задачи для уравнений с частными производными с разрывными коэффициентами. Самара: Изд-во Самарский гос. экономический университет, 2008.

    Marichev O. I., Kilbas A. A., Repin O. A. Boundary value tasks for partial differential equations with discontinuous coefficients. Samara: Publishing house Samara State University of Economics, 2008. (in Russian)

12. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

    Muskhelishvili N. I. Muskhelishvili N.I. Singular integral equations. –M.: Nauka, 1968. (in Russian)

13. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.

    Nakhushev A. M. Offset tasks for partial differential equations. M.: Nauka, 2006. (in Russian)

14. *Репин О. А., Кумыкова С. К.* Внутреннекраевая задача с операторами Римана – Лиувилля для уравнения смешанного типа с третьего порядка. Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 20, № 1, 43–53 (2016).

    Repin O. A., Kumykova S. K. Internal task with Riemann-Liouville operators for a mixed-type equation from third order. Vestnik of Samara State Technical University. Ser.: Physics and mathematics. 20, №1, 43–53 (2016). (in Russian)

15. *Репин О. А., Кумыкова С. К.* О задаче с обобщенными операторами дробного дифференцирования для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки» №1(30), 150–158 (2013).

    Repin O. A., Kumykova S. K. About the task with generalized fractional differentiation operators for a mixed-type equation with two lines of degeneracy. Vestnik of Samara State Technical University. Ser.: "Physics and Mathematics №1 (30), 150 – 158 (2013). (in Russian)

16. *Репин О. А., Кумыкова С. К.* О разрешимости нелокальной задачи для одного уравнения гиперболического типа второго рода. Известия высших учебных заведений. Математика, №9. 51–58 (2016). (in Russian)

    Repin, O. A.; Kumykova, S. K. About the solvability of a non-local problem for a single equation of a hyperbolic type of the second kind. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Mathematics, №9. 51–58 (2016) (in Russian)

17. *Салахитдинов М. С., Менгзияев Б.* Об одной краевой задаче со смещением для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. Дифференциальные уравнения 13, №1, 133–139 (1977).

Salakhitdinov M. S., Mengziyaev B. About a boundary value task with a shift for an equation of mixed type with two lines of degeneracy. Differential Equations, 13, No.1. 133 – 139 (1977). (in Russian)

18. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

    Samko, St. G.; Kilbas, A. A.; Marichev, O. I. Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications, Minsk, 1987. (in Russian)

19. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966.

    Smirnov M. M. Degenerate elliptic and hyperbolic equations. - M.: Nauka, 1966. (in Russian)

20. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985.

    Smirnov M. M. Equations of mixed type. M.: Vysshaya Shkola, 1985. (in Russian)

Получена 22.11.2018 Переработана 15.03.19