Динамические системы, 2019, том 9(37), №1, 46–56

УДК 514.7

Канонические системы базисных инвариантов конечных примитивных групп отражений четырехмерного унитарного пространства

О. И. Рудницкий

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: oirud58@gmail.com*

Аннотация. Для неприводимой конечной унитарной группы отражений G, действующей в n-мерном унитарном пространстве, любой G-инвариантный многочлен от n переменных над полем комплексных чисел может быть записан в виде многочлена от n алгебраически независимых однородных многочленов, называемых базисными инвариантами. Выбор базисных инвариантов неоднозначен. Задание дополнительных условий позволяет определить их однозначно. Так, доказано существование базисных инвариантов, удовлетворяющих некоторой системе дифференциальных уравнений (L. Flatto, N. Nakashima, H. Terao, S. Tsujie). Такие системы базисных инвариантов называются каноническими. В работе находятся в явном виде канонические системы для всех конечных примитивных групп отражений четырехмерного унитарного пространства.

Ключевые слова: унитарное пространство, группа отражений, алгебра инвариантов, базисный инвариант, каноническая система.

Canonical system of basic invariants for primitive reflection groups of four-dimensional unitary space

O. I. Rudnitskii

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. The irreducible finite group G, generated by reflections in the n-dimensional unitary space, acts on the polynomial ring in n variables over the field of complex numbers in a natural manner. It is well known that there exist n algebraically independent G-invariant homogeneous polynomials, called basic invariants, such that all G-invariant polynomials can be uniquely written as polynomials of the basic invariants. Given the group G, there are infinitely many possible choices of a basic invariants, but their degrees are well known and typical of the given group G. It is possible to select, among the infinitely many basic invariants, some basic invariants, by requiring some supplementary conditions to be satisfied. So, it has been proved (L. Flatto, N. Nakashima, H. Terao, S. Tsujie) that it is possible to choose basic invariants in such a way that they satisfy a certain system of differential equations. Basic invariants of this kind are called canonical system of basic invariants. In this article we consider a finite primitive groups G, generated by reflections in four-dimensional unitary space. For all groups G were constructed in explicit form canonical systems of basic invariants.

Keywords: Unitary space, reflection groups, algebra of invariants, basic invariant, canonical system of basic invariants.

MSC 2010: 51F15, 14L24

1. Введение

Пусть в n-мерном унитарном пространстве U^n задана координатная система началом O и ортонормированным базисом $\vec{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$; вектор $\vec{x} = (x_i)$. Конечная неприводимая группа G, порожденная отражениями относительно гиперплоскостей пространства U^n, естественным образом действует в кольце многочленов $R = \mathbf{C}[x_1,\ldots,x_n]$. Множество всех многочленов $f(\vec{x}) = f(x_i) \in R$, инвариантных относительно G, образует алгебру I^G, порожденную n алгебраически независимыми однородными многочленами f_i степеней m_i (показатели группы G) [11]; не нарушая общности, можно считать, что $m_1 \leq \ldots \leq m_n$. Система образующих $\{f_1, \ldots, f_n\}$ называется также *системой базисных инвариантов* группы G.

Система $\{f_1, \ldots, f_n\}$ базисных инвариантов группы G называется ***канонической системой базисных инвариантов*** группы G, если она удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных [10]:

$$\bar{f}_i(\partial) f_j = 0,\ i, j = 1, \ldots, n\ (i < j), \tag{1.1}$$

где дифференциальный оператор $\bar{f}_i(\partial)$ получается из многочлена f_i, если коэффициенты многочлена заменить на комплексно сопряженные, а переменные ${x_i}^p$ – на $\frac{\partial^p}{\partial {x_i}^p}$.

Впервые понятие канонической системы базисных инвариантов для конечных вещественных групп, порожденных отражениями в евклидовом пространстве, ввел Л. Флатто при изучении свойства «среднего значения» для непрерывных вещественнозначных функций (см., например, [9]). Он же доказал существование канонических систем для указанных групп. В [10] понятие канонической системы было обобщено для групп G, порожденных отражениями в унитарном пространстве U^n, доказано существование канонических систем для конечных групп G, а также предложен метод построения канонических систем (в [12] этот метод был реализован для построения канонической системы базисных инвариантов бесконечного семейства импримитивных групп $G(m, p, n)$).

В работах [3, 4, 5, 6] автором предложен другой подход к построению в явном виде канонических систем базисных инвариантов для групп G.

Алгоритм предлагаемого метода состоит в следующем (см. также [6]):

1. Возьмем известную систему $\{P_{m_1}, \ldots, P_{m_n}\}$ базисных инвариантов группы G (см., например, [2]).

2. Строим новую систему базисных G-инвариантных многочленов J_{m_t} $(t = 1, \ldots, n)$ в виде многочленов подходящей степени с неопределенными коэффициентами a_α от базисных инвариантов P_{m_k}. Так как многочлен J_{m_t} должен быть базисным, то форма P_{m_t} должна обязательно присутствовать в записи этого многочлена.

3. Подставляя в формы J_{m_t} явные выражения базисных инвариантов P_{m_k}, получим однородные многочлены степени m_t относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$. При этом коэффициент у каждого одночлена этого однородного многочлена есть линейная комбинация неопределенных коэффициентов a_α.

4. Обозначим $f_1 = J_{m_1} = P_{m_1}$ и последовательно применим условие (1.1) к формам $J_{m_t},\ t > 1$.

5. На каждом шаге уравнения (1.1) приводят к системе линейных однородных уравнений относительно неопределенных коэффициентов a_α. Находим общее решение полученной системы линейных уравнений и вводим обозначение $f_t = J_{m_t}$ найденных значений a_α.

Построенная таким образом система базисных инвариантов $\{f_1, \ldots, f_n\}$ является канонической системой.

Используя данный метод, автор в работах [3, 4, 5, 6] построил в явном виде канонические системы базисных инвариантов для всех конечных примитивных групп G унитарных пространств $U^n,\ n = 2, 3$ и 5.

Цель настоящей статьи – используя результаты работы [1], реализовать указанный метод для построения в явном виде канонических систем базисных инвариантов для всех конечных невещественных примитивных групп G четырехмерного унитарного пространства U^4.

2. Канонические системы базисных инвариантов

В пространстве U^4 существуют только такие группы G: $W(N_4)$, $EW(N_4)$, $W(L_4)$ [7]. Рассмотрим каждую из них.

2.1. Группа $W(N_4)$ порядка 7680 порождена отражениями второго порядка относительно 3-мерных плоскостей с уравнениями $x_1 = 0, x_2 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0$, $x_1 + \mathrm{i}x_2 + x_3 + \mathrm{i}x_4 = 0$, $\mathrm{i}^2 = -1$, и содержит отражения второго порядка относительно 40 3-мерных плоскостей. Множество их нормальных векторов (система корней группы) состоит из 160 векторов

$$\mathrm{i}^h \vec{e}_i, \frac{\mathrm{i}^h}{\sqrt{2}} \eta(\vec{e}_i \pm \vec{e}_j)\ (i < j), \frac{\mathrm{i}^h}{2}(\vec{e}_1 \pm \vec{e}_k \pm \mathrm{i}\vec{e}_l \pm \mathrm{i}\vec{e}_m), \tag{2.1}$$

где η – первообразный корень восьмой степени из единицы, $i, j, h = 1, \dot{,} 4$, а индексы $k, l, m = 2, 3, 4$ (циклически) [7, 1]. Показатели группы $m_i = 4, 8, 12, 20$ [11].

Группа $EW(N_4) \supset W(N_4)$ и является ее «хорошим расширением» [7]. Она имеет порядок $64 \cdot 6!$ и порождается отражениями второго порядка относительно 40 3-мерных плоскостей с нормальными векторами (2.1) и 20 3-мерных плоскостей с уравнениями

$$x_i \pm \mathrm{i}x_j = 0,\ (i < j),\ x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 = 0,\ i, j = 1, \ldots, 4.$$

Система корней группы состоит из 240 векторов вида

$$\mathrm{i}^h \vec{e}_i, \frac{\mathrm{i}^h}{\sqrt{2}} \eta(\vec{e}_i + \mathrm{i}^p \vec{e}_j)\ (i < j), \frac{\mathrm{i}^h}{2}(\vec{e}_1 \pm \vec{e}_k \pm \mathrm{i}^q \vec{e}_l \pm \mathrm{i}^q \vec{e}_m),$$

где $i, j, h, p = 1, \ldots, 4,\ q = 1, 2;$ как и ранее, индексы $k, l, m = 2, 3, 4$ (циклически) [1]. Степени $m_i = 8, 12, 20, 24$ [11].

Используя многочлены Погорелова, автор (см. [1]) построил следующую систему базисных инвариантов группы $EW(N_4)$:

$$P_8 = \sum {x_i}^8 + 14 \sum_{i<j} {x_i}^4 {x_j}^4 + 168 \prod x_i^2, \tag{2.2}$$

$$P_{12} = \sum {x_i}^{12} - 33 \sum {x_i}^8 {x_j}^4 + 330 \sum_{i<j<k} x_i^4 x_j^4 x_k^4 + 792 \sum_{j<k<l} x_i^6 x_j^2 x_k^2 x_l^2, \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} P_{20} = 127 \sum {x_i}^{20} - 2413 \sum {x_i}^{16} {x_j}^4 - 62738 \sum x_i^{12} x_j^8 + 34580 \sum_{j<k} x_i^{12} x_j^4 x_k^4 + \\ +244530 \sum_{i<j} x_i^8 x_j^8 x_k^4 + 13680 \sum_{j<k<l} x_i^{14} x_j^2 x_k^2 x_l^2 + 912912 \sum_{k<l} x_i^{10} x_j^6 x_k^2 x_l^2 + \\ +12780768 \sum_{i<j<k} x_i^6 x_j^6 x_k^6 x_l^2 + 17117100 \sum_{j<k<l} x_i^8 x_j^4 x_k^4 x_l^4, \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered} P_{24} = 3075 \sum {x_i}^{24} + 31878 \sum {x_i}^{20} {x_j}^4 + 2206413 \sum x_i^{16} x_j^8 + \\ +8112468 \sum_{i<j} x_i^{12} x_j^{12} + 301070 \sum_{j<k} x_i^{16} x_j^4 x_k^4 + 7827820 \sum x_i^{12} x_j^8 x_k^4 + \\ +55353870 \sum_{i<j<k} x_i^8 x_j^8 x_k^8 + 70840 \sum_{j<k<l} x_i^{18} x_j^2 x_k^2 x_l^2 + 14451360 \sum_{k<l} x_i^{14} x_j^6 x_k^2 x_l^2 + \\ +68884816 \sum_{\substack{i<j \\ k<l}} x_i^{10} x_j^{10} x_k^2 x_l^2 + 964387424 \sum_{j<k} x_i^{10} x_j^6 x_k^6 x_l^2 + \\ +547947400 \sum_{j<k<l} x_i^{12} x_j^4 x_k^4 x_l^4 + 3874770900 \sum_{\substack{i<j \\ k<l}} x_i^8 x_j^8 x_k^4 x_l^4 + \\ +13501423936 \prod x_i^6; \end{gathered} \tag{2.5}$$

здесь и далее в записи многочленов, индексы $i, j, k, l = 1, \ldots, 4$ и удовлетворяют неравенствам, указанным под знаком суммы.

При этом в работе [2] доказано, что формы (2.2), (2.3), (2.4) и форма

$$P_4 = \sum {x_i}^4 - 6 \sum_{i<j} {x_i}^2 {x_j}^2 \tag{2.6}$$

задают систему базисных инвариантов группы $W(N_4)$.

Используем приведенные выше системы базисных инвариантов для построения канонических систем $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ базисных инвариантов для групп $W(N_4)$ и $EW(N_4)$.

2.1.1. Группа $W(N_4)$. Пусть $f_1 = P_4$. Форму f_2 канонической системы будем искать среди всех инвариантов восьмой степени группы $W(N_4)$. Их можно задать следующим образом

$$J_8 = a_1 P_4^2 + a_2 P_8,$$

где a_1, a_2 – неопределенные коэффициенты.

Тогда соотношение (1.1) имеет вид

$$\bar{f}_1(\partial)J_8 \equiv \frac{\partial^4 J_8}{\partial {x_1}^4} + \frac{\partial^4 J_8}{\partial {x_2}^4} + \frac{\partial^4 J_8}{\partial {x_3}^4} + \frac{\partial^4 J_8}{\partial {x_4}^4} - 6(\frac{\partial^4 J_8}{\partial {x_1}^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 J_8}{\partial {x_1}^2 \partial x_3^2} +$$

$$+ \frac{\partial^4 J_8}{\partial {x_1}^2 \partial x_4^2} + \frac{\partial^4 J_8}{\partial {x_2}^2 \partial x_3^2} + \frac{\partial^4 J_8}{\partial {x_2}^2 \partial x_4^2} + \frac{\partial^4 J_8}{\partial {x_3}^2 \partial x_4^2}) = 0,$$

и приводит к линейной однородной системе двух уравнений относительно неизвестных a_1, a_2. Ее общее решение: $a_1 = -7c, a_2 = 34c$. Следовательно, с точностью до постоянного множителя, форма f_2 (многочлен J_8 при найденных значениях a_1, a_2) имеет следующий развернутый вид

$$f_2 = 9\sum {x_i}^8 + 28\sum {x_i}^6 {x_j}^2 + 70\sum_{i<j} {x_i}^4 {x_j}^4 - 140\sum_{j<k} x_i^4 x_j^2 x_k^2 + 1400\prod x_i^2. \qquad (2.7)$$

Далее, любой инвариант двенадцатой степени группы $W(N_4)$ представим в виде $J_{12} = a_1 P_{12} + a_2 P_4 P_8 + a_3 P_4^3$. Поэтому форму f_3 находим из условий

$$\bar{f}_1(\partial)J_{12} = 0, \bar{f}_2(\partial)J_{12} = 0.$$

Они приводят к линейной однородной системе шести уравнений относительно трех неизвестных a_1, a_2, a_3. Ее общее решение: $a_1 = -3182c$, $a_2 = 2442c$, $a_3 = -781c$. Поэтому, с точностью до постоянного множителя,

$$\begin{gathered} f_3 = 169\sum {x_i}^{12} + 66\sum {x_i}^{10} {x_j}^2 - 6105\sum x_i^8 x_j^4 + 924\sum_{i<j} x_i^6 x_j^6 + \\ +18810\sum_{j<k} x_i^8 x_j^2 x_k^2 - 17820\sum x_i^6 x_j^4 x_k^2 + 21450\sum_{i<j<k} x_i^4 x_j^4 x_k^4 + \\ +178200\sum_{j<k<l} x_i^6 x_j^2 x_k^2 x_l^2 + 49500\sum_{\substack{i<j \\ k<l}} x_i^4 x_j^4 x_k^2 x_l^2. \end{gathered} \qquad (2.8)$$

Инварианты двадцатой степени группы $W(N_4)$ можно задать следующим образом:

$$J_{20} = a_1 P_4^5 + a_2 P_4^3 P_8 + a_3 P_4^2 P_{12} + a_4 P_4 P_8^2 + a_5 P_8 P_{12} + a_6 P_{20}.$$

Следовательно, форма f_4 совпадает с J_{20} для тех значениях $a_t, t = 1, \ldots, 6$, при которых форма J_{20} является решением системы (1.1), то есть системы вида

$$\bar{f}_1(\partial)J_{20} = 0, \bar{f}_2(\partial)J_{20} = 0, \bar{f}_3(\partial)J_{20} = 0.$$

Это приводит к линейной однородной системе 29 уравнений относительно переменных $a_t, t = \overline{1,6}$. Общее решение системы:

$$a_1 = -5118284805447c,\ a_2 = 29206693567700c,\ a_3 = -14697884190660c,$$

$$a_4 = -42971969015250c,\ a_5 = -131671242738776c,\ a_6 = 1356920320698c.$$

Таким образом, с точностью до постоянного множителя,

$$\begin{gathered} f_4 = 807473\sum {x_i}^{20} + 7078830\sum {x_i}^{18}{x_j}^2 - 35318435\sum {x_i}^{16}{x_j}^4 - \\ -168334680\sum {x_i}^{14}{x_j}^6 - 112071310\sum x_i^{12}x_j^8 - 211176108\sum_{i<j} {x_i}^{10}{x_j}^{10} + \\ +185689470\sum_{j<k} x_i^{16}x_j^2x_k^2 + 1093613400\sum x_i^{14}x_j^4x_k^2 - 701904840\sum x_i^{12}x_j^6x_k^2 + \\ +1227703620\sum x_i^{10}x_j^8x_k^2 + 5887417900\sum_{j<k} x_i^{12}x_j^4x_k^4 - 1513151640\sum x_i^{10}x_j^6x_k^4 - \\ -18228488850\sum_{i<j} x_i^8x_j^8x_k^4 + 17187850680\sum_{j<k} x_i^8x_j^6x_k^6 - \\ -10936134000\sum_{j<k<l} x_i^{14}x_j^2x_k^2x_l^2 - 8553363000\sum_{k<l} x_i^{12}x_j^4x_k^2x_l^2 + \\ +15131516400\sum_{k<l} x_i^{10}x_j^6x_k^2x_l^2 + 59237392500\sum_{\substack{i<j\\k<l}} x_i^8x_j^8x_k^2x_l^2 - \\ -969969000\sum_{j<k} x_i^{10}x_j^4x_k^4x_l^2 - 49468419000\sum x_i^8x_j^6x_k^4x_l^2 + \\ +211841229600\sum_{i<j<k} x_i^6x_j^6x_k^6x_l^2 - 65472907500\sum_{j<k<l} x_i^8x_j^4x_k^4x_l^4 - \\ -13579566000\sum_{\substack{i<j\\k<l}} x_i^6x_j^6x_k^4x_l^4 \end{gathered} \tag{2.9}$$

и ***каноническая система базисных инвариантов*** группы $W(N_4)$ состоит из форм (2.6), (2.7), (2.8) и (2.9).

2.1.2. Для построения канонической системы базисных инвариантов группы $EW(N_4)$ в качестве f_1 возьмем форму (2.2). Тогда f_2 совпадает с формой (2.3), так как уравнение (1.1) обращается в тождество для $f_1 = P_8$ и $f_2 = P_{12}$.

Так как все инварианты двадцатой степени группы $EW(N_4)$ можно записать в виде $J_{20} = a_1P_{20} + a_2P_8P_{12}$, то систему (1.1) запишем следующим образом

$$\bar{f}_1(\partial)J_{20} = 0, \bar{f}_2(\partial)J_{20} = 0.$$

Получим систему семи линейных однородных уравнений относительно двух неизвестных, с общим решением $a_1 = -3413c, a_2 = 414960c$. Следовательно, форма f_3, с точностью до постоянного множителя, имеет вид

$$f_3 = 41\sum {x_i}^{20} - 779\sum {x_i}^{16}{x_j}^4 - 20254\sum x_i^{12}x_j^8 + 795340\sum_{j<k} x_i^{12}x_j^4x_k^4 -$$

$$-1489410\sum_{i<j} x_i^8x_j^8x_k^4 - 779760\sum_{j<k<l} x_i^{14}x_j^2x_k^2x_l^2 + 1078896\sum_{k<l} x_i^{10}x_j^6x_k^2x_l^2 + \tag{2.10}$$
$$+15104544\sum_{i<j<k} x_i^6x_j^6x_k^6x_l^2 - 4668300\sum_{j<k<l} x_i^8x_j^4x_k^4x_l^4.$$

Далее, семейство всех инвариантов 24-й степени группы $EW(N_4)$ запишем в виде $J_{24} = a_1P_{24} + a_2P_8^3 + a_3P_{12}^2$.

Форма J_{24} принадлежит канонической системе, если является решением следующей системы дифференциальных уравнений

$$\bar{f}_1(\partial)J_{24} = 0, \bar{f}_2(\partial)J_{24} = 0, \bar{f}_3(\partial)J_{24} = 0.$$

Третье уравнение выполняется тождественно, а первые два приводят к линейной однородной системе 11 уравнений относительно трех неизвестных. Ее решение: $a_1 = 4448817c, a_2 = -10032581416c, a_3 = -3235878464c$.

Следовательно, форма f_4, с точностью до постоянного множителя, имеет следующий развернутый вид

$$\begin{gathered} f_4 = 995\sum {x_i}^{24} - 159482\sum {x_i}^{20}{x_j}^4 + 1393133\sum x_i^{16}x_j^8 + \\ +1606228\sum_{i<j} x_i^{12}x_j^{12} - 48495730\sum_{j<k} x_i^{16}x_j^4x_k^4 + 7827820\sum x_i^{12}x_j^8x_k^4 - \\ -749793330\sum_{i<j<k} x_i^8x_j^8x_k^8 - 23849160\sum_{j<k<l} x_i^{18}x_j^2x_k^2x_l^2 + \\ +209638560\sum_{k<l} x_i^{14}x_j^6x_k^2x_l^2 - 861507504\sum_{\substack{i<j\\k<l}} x_i^{10}x_j^{10}x_k^2x_l^2 + \\ +1966348384\sum_{j<k} x_i^{10}x_j^6x_k^6x_l^2 - 1046081400\sum_{j<k<l} x_i^{12}x_j^4x_k^4x_l^4 + \\ +654182100\sum_{\substack{i<j\\k<l}} x_i^8x_j^8x_k^4x_l^4 - 526029504\prod x_i^6, \end{gathered} \tag{2.11}$$

а ***каноническая система базисных инвариантов*** группы $EW(N_4)$ состоит из форм (2.2), (2.3), (2.10) и (2.11) .

2.2. Группа $W(L_4)$ симметрий правильного комплексного многоугольника Виттинга 3(3)3(3)3(3)3 имеет порядок $216 \cdot 6!$; степени $m_i = 12, 18, 24, 30$ [8, 11]. Она порождается отражениями третьего порядка относительно 40 его 3-мерных плоскостей симметрии с уравнениями

$$x_i = 0, x_1 + \omega^p x_2 + \omega^q x_3 = 0, x_1 - \omega^p x_2 - \omega^q x_4 = 0,$$
$$x_1 - \omega^p x_3 + \omega^q x_4 = 0, x_2 - \omega^p x_3 - \omega^q x_4 = 0,$$

$(i = 1, \ldots, 4,\ p, q = 1, \ldots, 3;\ \omega$ – первообразный корень третьей степени из единицы). При этом система корней группы $W(L_4)$ состоит из 120 векторов

$$\mathrm{i}\omega^h\vec{e}_i, \frac{\omega^h}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \omega^p\vec{e}_2 + \omega^q\vec{e}_3), \frac{\omega^h}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 - \omega^p\vec{e}_2 - \omega^q\vec{e}_4),$$

$$\frac{\omega^h}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 - \omega^p \vec{e}_3 + \omega^q \vec{e}_4), \frac{\omega^h}{\sqrt{3}}(\vec{e}_2 - \omega^p \vec{e}_3 - \omega^q \vec{e}_4), (h = \overline{1, 3}).$$

В работе [1] на основе многочленов Погорелова построена следующая система базисных инвариантов группы $W(L_4)$:

$$I_{12} = \sum {x_i}^{12} + 22 \sum_{i<j} {x_i}^6 {x_j}^6 + 220 \sum_{i<k} (-1)^\alpha x_i^3 x_j^6 x_k^3, \tag{2.12}$$

$$\begin{gathered} I_{18} = \sum {x_i}^{18} - 17 \sum {x_i}^{12} {x_j}^6 - 170 \sum_{i<k} (-1)^\alpha x_i^3 x_j^{12} x_k^3 - \\ -1870 \sum (-1)^\alpha x_i^9 x_j^6 x_k^3 - 7854 \sum_{i<j<k} x_i^6 x_j^6 x_k^6, \end{gathered} \tag{2.13}$$

$$\begin{gathered} I_{24} = 111 \sum x_i^{24} + 506 \sum x_i^{18} x_j^6 + 10166 \sum_{i<j} x_i^{12} x_j^{12} + \\ +5060 \sum_{i<k} (-1)^\alpha x_i^3 x_j^{18} x_k^3 + 206448 \sum (-1)^\alpha x_i^{15} x_j^6 x_k^3 + \\ +1118260 \sum (-1)^\alpha x_i^9 x_j^{12} x_k^3 + 4696692 \sum_{j<k} x_i^{12} x_j^6 x_k^6 + \\ +12300860 \sum_{i<k} (-1)^\alpha x_i^9 x_j^6 x_k^9, \end{gathered} \tag{2.14}$$

$$\begin{gathered} I_{30} = 584 \sum x_i^{30} - 435 \sum x_i^{24} x_j^6 - 63365 \sum x_i^{18} x_j^{12} - 4350 \sum_{i<k} (-1)^\alpha x_i^3 x_j^{24} x_k^3 - \\ -440220 \sum (-1)^\alpha x_i^{21} x_j^6 x_k^3 - 6970150 \sum (-1)^\alpha x_i^9 x_j^{18} x_k^3 - \\ -25852920 \sum (-1)^\alpha x_i^{15} x_j^{12} x_k^3 - 29274630 \sum_{j<k} x_i^{18} x_j^6 x_k^6 - \\ -284382120 \sum (-1)^\alpha x_i^{15} x_j^6 x_k^9 - 588153930 \sum_{i<j} x_i^{12} x_j^{12} x_k^6 - \\ -1540403150 \sum_{i<k} (-1)^\alpha x_i^9 x_j^{12} x_k^9 \end{gathered} \tag{2.15}$$

Здесь и далее $i, j, k = 1, \ldots, 4$ и удовлетворяют неравенствам, указанным под знаком суммы; при этом $\alpha = 2$, если i, j, k принимают соответствующие значения троек чисел $(2, 1, 4), (4, 1, 2), (1, 3, 4), (4, 3, 1), (3, 2, 4), (4, 2, 3)$ или любые перестановки чисел $(1, 2, 3)$; $\alpha = 1$, если i, j, k принимают значения оставшихся перестановок троек чисел $(1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4)$.

Как в п.2.1, для построения канонической возьмем $f_1 = I_{12}$. Тогда $f_2 = I_{18}$, так как в этом случае соотношение (1.1) выполняется тождественно. Далее, совокупность всех инвариантов 24-й степени группы $W(L_4)$ запишем в виде

$$J_{24} = a_1 I_{12}^2 + a_2 I_{24},$$

и форму f_3 будем искать из условий $\bar{f}_1(\partial)J_{24} = 0, \bar{f}_2(\partial)J_{24} = 0$. Второе условие выполняется тождественно, а первое приводит к совместной системе линейных однородных уравнений относительно двух неизвестных с общим решением:

$$a_1 = 13449618c, a_2 = -132941c.$$

Таким образом,

$$\begin{gathered} f_3 = 597\sum x_i^{24} - 239614\sum x_i^{18}x_j^6 - 2368678\sum_{i<j} x_i^{12}x_j^{12} + \\ -2396140\sum_{i<k}(-1)^\alpha x_i^3 x_j^{18} x_k^3 + 9834432\sum(-1)^\alpha x_i^{15}x_j^6x_k^3 + \\ +8437780\sum(-1)^\alpha x_i^9 x_j^{12} x_k^3 - 18359796\sum_{j<k} x_i^{12}x_j^6x_k^6 + \\ +92815580\sum_{i<k}(-1)^\alpha x_i^9x_j^6x_k^9 - 537984720\prod x_l^3\sum(-1)^\beta x_i^9x_j^3 + \\ +3550699152\prod x_l^6, \end{gathered} \tag{2.16}$$

где i, j, k, α принимают те же значения, что и ранее, $\beta = 2$, если $(i, j) = (1, 2)$, $(2, 3), (3, 1), (4, 1), (4, 3), (4, 2)$ и $\beta = 1$ – в остальных случаях; $l = 1, \ldots, 4$.

Для нахождения формы f_4, все инварианты 30-й степени группы $W(L_4)$ представим в виде $J_{30} = a_1 I_{12} I_{18} + a_2 I_{30}$. Как и ранее, форма J_{30} принадлежит канонической системе, если является решением следующей системы:

$$\bar{f}_1(\partial)J_{30} = 0, \bar{f}_2(\partial)J_{30} = 0, \bar{f}_3(\partial)J_{30} = 0.$$

Третье уравнение выполняется тождественно, а первые два приводят к линейной однородной системе восьми уравнений относительно двух неизвестных. Ее решение: $a_1 = 145308618c, a_2 = -249517c$. Следовательно, с точностью до постоянного множителя,

$$\begin{gathered} f_4 = 122\sum x_i^{30} - 248907\sum x_i^{24}x_j^6 + 12178753\sum x_i^{18}x_j^{12} - \\ -2489070\sum_{i<k}(-1)^\alpha x_i^3x_j^{24}x_k^3 + 38723352\sum(-1)^\alpha x_i^{21}x_j^6x_k^3 - \\ -113423350\sum(-1)^\alpha x_i^9x_j^{18}x_k^3 + 28438212\sum(-1)^\alpha x_i^{15}x_j^{12}x_k^3 - \\ -185760834\sum_{j<k} x_i^{18}x_j^6x_k^6 + 312820332\sum(-1)^\alpha x_i^{15}x_j^6x_k^9 - \\ -588153930\sum_{i<j} x_i^{12}x_j^{12}x_k^6 - 364095290\sum_{i<k}(-1)^\alpha x_i^9x_j^{12}x_k^9 + \\ +1453086180\prod x_l^3(2\sum(-1)^\beta x_i^{15}x_j^3 + 17\sum(-1)^\gamma x_i^9x_j^6x_k^3) - \\ -88928874216\prod x_l^6\sum x_i^6; \end{gathered} \tag{2.17}$$

здесь $\gamma = 2$, если индексы (i, j, k) принимают соответствующие значения троек чисел $(1,2,4),(2,3,4),(1,3,4),(1,4,3),(2,1,4),(2,4,1),(3,1,4),(3,2,4),(3,4,2)$ или циклические перестановки тройки чисел $(1,2,3)$, и $\gamma = 1$ – в остальных случаях.

Таким образом, ***каноническая система базисных инвариантов*** группы $W(L_4)$ состоит из форм (2.12), (2.13), (2.16) и (2.17)

3. Заключение

В статье продолжена, начатая в [3, 4, 5, 6], работа по построению канонических систем базисных инвариантов для конечных примитивных групп G, порожденных отражениями, в унитарном пространстве U^n. Построены в явном виде канонические системы базисных инвариантов для конечных примитивных групп G, порожденных отражениями, в пространстве U^4, а именно: ***каноническая система базисных инвариантов*** для группы $W(N_4)$ состоит из форм (2.6), (2.7), (2.8), (2.9), группы $EW(N_4)$ – из форм (2.2), (2.3), (2.10), (2.11) и группы $W(L_4)$ – из форм (2.12), (2.13), (2.16) и (2.17).

Список цитируемых источников

1. *Rudnitskii, O. I.* Basis invariants of finite primitive groups generated by reflections in four-dimensional unitary space. Journal of Mathematical Sciences, V. 48, N 1, 95–99 (1990).
2. *Рудницкий, О. И.* Алгебраические поверхности с конечными группами симметрий в унитарном пространстве. Дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук: 01.01.04. Минск, 1990.

   Rudnitskii, O. I. Algebraic surfaces with finite symmetry groups in unitary space. The thesis for the degree of Candidate of Physico-Mathematical Sciences: 01.01.04. Minsk, 1990.
3. *Рудницкий, О. И.* Канонические системы базисных инвариантов для групп симметрий многогранников Гессе. Таврический вестник информатики и математики. № 3(36), 73–78 (2017).

   Rudnitskii, O. I. Canonical system of basic invariants for symmetry groups of Hessian polyhedrons. № 3(36), 73–78 (2017).
4. *Рудницкий, О. И.* Канонические системы базисных инвариантов для унитарных групп $W(J_3(m))$, $m = 4, 5$. Таврический вестник информатики и математики. № 1(38), 89–96 (2018).

   Rudnitskii, O. I. Canonical systems of basic invariants for unitary groups $W(J_3(m))$, $m = 4, 5$. № 1(38), 89–96 (2018).
5. *Рудницкий, О. И., Бочко, А. Ю. Рольская, Е. Н.* Канонические системы базисных инвариантов для примитивных групп, порожденных отражениями, на унитарной плоскости. В кн. В. А. Лукьяненко (Ред.). Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование: сборник научных трудов Всероссийской научно-практической конференции МИКМО-2018 и Таврической научной школы-конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике (стр. 59–71). Симферополь: ИП А. А. Корниенко, 2018. Вып. 1.

Rudnitskii, O. I., Bochko, A. Yu., Rolskaya, E. N. Canonical systems of basic invariants for primitive groups generated by reflections on the unitary plane. Mathematics, informatics, computer science, modeling, education (pp. 59–71). Simferopol, (2018), № 1.

6. *Рудницкий, О. И.* Каноническая система базисных инвариантов унитарной группы $W(K_5)$. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. № 58, 32–40 (2019). DOI 10.17223/19988621/58/3

   Rudnitskii, O. I. Canonical system of basic invariants for unitary group $W(K_5)$. № 58, 32–40 (2019).

7. *Cohen, A. M.* Finite complex reflection groups. Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4, 379–436 (1976).
8. *Coxeter, H. S. M.* Regular complex polytopes. London Cambridge Univ. Press, 1974.
9. *Flatto, L.* Invariants of finite reflection group. Enseign. Math. Vol.24, № 3-4, 237–292 (1978).
10. *Nakashima, N., Terao, H., Tsujie, S.* Canonical systems of basic invariants for unitary reflection groups. Canad. Math. Bull. Vol.59, № 3, 617–623 (2016) (arXiv:1310.0570 (2017)).
11. *Shephard, G. C., Todd, J. A.* Finite reflection groups. Can. J. Math. Vol.6, № 2, 274–304 (1954).
12. *Tsujie, S.* Construction of canonical systems of basic invariants for finite reflection groups. The thesis (doctoral). Hokkaido, 2014.

Получена 21.03.19