Динамические системы, 2019, том 9(37), №1, 26–45

УДК 517.98

Колебания идеальной стратифицированной жидкости с упругой мембраной

Д. О. Цветков
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Симферополь, 295007, e-mail: *tsvetdo@gmail.com*

Аннотация. Изучается задача о малых движениях и нормальных колебаниях идеальной стратифицированной жидкости с упругой мембраной на «свободной» поверхности. Используя метод ортогонального проектирования и введения вспомогательных задач, исходная начально-краевая задача сводится к равносильной задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в некотором гильбертовом пространстве. Получены условия, при которых существует сильное по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию данной гидросистемы. Изучена структура спектра, вопросы базисности собственных функций.
Ключевые слова: стратифицированная жидкость, упругая мембрана, начально-краевая задача, метод ортогонального проектирования, задача Коши в гильбертовом пространстве, сильное решение, спектральная задача, собственные функции.

Oscillations of an ideal stratified fluid with an elastic membrane

D. O. Tsvetkov
V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. We study the problem on small motions and normal oscillations of an ideal stratified fluid with an elastic membrane on the «free» surface. Using method of orthogonal projecting the boundary conditions on the moving surface and the introduction of auxiliary problems of the original initial-boundary value problem is reduced to the equivalent Cauchy problem for a differential equation of second order in some Hilbert space. We find sufficient existence conditions for a strong (with respect to the time variable) solution of the initial-boundary value problem describing the evolution of the specified hydrodynamics system. The spectrum of normal oscillations, basic properties of eigenfunctions and other questions are studied.
Keywords: stratification effect in ideal fluids, differential equation in Hilbert space, strong solution, normal oscillations, spectral problem, eigenvalues, Riesz basis.
MSC 2010: 76B70, 35D35, 35P05

Введение

Создание резервуаров большой емкости для хранения жидкости в сейсмоопасных районах и транспортировки жидких грузов требует тщательного анализа возможного резонансного возбуждения волновых движений жидкости. Одним из средств ограничения ее подвижности могут быть мембраны или пластинки, закрывающие свободную поверхность жидкости.

В статье [1] исследована плоская задача о малых колебаниях физического маятника, содержащего идеальную двухслойную жидкость с упругой мембраной на «свободной» поверхности. (Под «свободной» будем понимать верхнюю границу жидкости. Поскольку мембрана все же является механическим ограничителем движений жидкости, то этот термин используется в кавычках.) С использованием теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве доказано существование дискретного спектра собственных частот колебаний. В работах [2] — [6] рассмотрены задачи о колебаниях однородной и многослойной идеальной и вязкой жидкости с упругими мембранами на «свободной» поверхности и границах раздела жидкостей. Методами функционального анализа были изучены вопросы разрешимости начально-краевых задач, структуры и характера спектра нормальных колебаний.

В представленной работе рассматривается задача о малых движениях и нормальных колебаниях идеальной стратифицированной жидкости с упругой мембраной на «свободной поверхности». В частности, исходная задача сводится к дифференциально-операторному уравнению второго порядка в некотором гильбертовом пространстве, при этом структура операторных коэффициентов имеет более сложную структуру, чем в представленных выше работах (многослойные однородные жидкости), что приводит к усложнению получения итоговой теоремы о разрешимости.

1. Эволюционная задача

1.1. Математическая формулировка задачи

Пусть идеальная стратифицированная жидкость, плотность которой в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси, частично заполняет неподвижный сосуд и занимает в состоянии покоя область Ω, ограниченную твердой стенкой S и горизонтальной границей Γ, на которой находится упругая мембрана. Обозначим через ρ_m поверхностную плотность мембраны, а через σ — величину ее предварительного растяжения. Считаем, что на границе $\partial\Gamma$ мембрана закреплена, то есть ее смещение равно нулю. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с сосудом, таким образом, что ось Ox_3 направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится на Γ. Обозначим через $\vec{n}$ единичный вектор, нормальный к $\partial\Omega$ и направленный вне Ω, через $\rho_0 = \rho_0(x_3)$ — плотность жидкости в состоянии покоя. Предполагаем далее, что твердая стенка $S \subset \partial\Omega$ является липшицевой поверхностью, причем $\partial S = \partial\Gamma$ — липшицева кривая.

Отметим, что вертикальное отклонение мембраны $x_3 = \zeta(t, \hat{x}),\ \hat{x} = (x_1, x_2) \in \Gamma$, при ее малых колебаниях удовлетворяет уравнению (см., например, [7, с.34]):

$$\rho_m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \sigma \Delta_2 \zeta + P(t, \widehat{x}), \tag{1.1}$$

где Δ_2 — двухмерный Лапласиан, а $P(t, \widehat{x})$ — давление, действующее на единицу площади мембраны сверху вниз.

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкости по плотности:

$$0 < N^2_{min} \le N^2(x_3) \le N^2_{max} = N^2_0 < \infty, \quad N^2(x_3) = -\frac{g\rho_0'(x_3)}{\rho_0(x_3)}, \quad \rho_0(0) > 0, \quad (1.2)$$

Функцию $N(x_3)$ называют частотой Вяйсяля-Брента, или частотой плавучести.

В состоянии покоя давление в жидкости распределено по закону

$$p_0 = p_0(x_3) = p_0(0) - g\int_0^{x_3} \rho_0(\tau)d\tau. \quad (1.3)$$

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Обозначим через $\vec{u} = \vec{u}(t,x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ поле скорости в жидкости, $p = p(t,x)$ — отклонение поля давлений от равновесного давления (1.3), а через $\rho = \rho(t,x)$ — отклонения поля плотности от исходного поля $\rho_0(x_3)$. Кроме того, полагаем, что на исследуемую гидродинамическую систему дополнительно к гравитационному полю действует малое поле внешних сил $\vec{f} = \vec{f}(t,x)$, $x \in \Omega$.

Линеаризованные уравнения для определения функций $\vec{u}$, p, ρ имеют вид:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \rho_0^{-1}(x_3)\,(-\nabla p - g\rho\vec{e}_3 + \mu\Delta\vec{u}) + \vec{f}(x,t) \quad (\text{ в}\,\Omega\,), \quad (1.4)$$

$$\mathrm{div}\vec{u} = 0 \ (\text{ в}\,\Omega\,), \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\rho_0\cdot\vec{u} = 0 \ (\text{ в}\,\Omega\,). \quad (1.5)$$

На твердой стенке S для вязкой жидкости должно выполняться условие непротекания:

$$\vec{u}\cdot\vec{n} =: \vec{u}_n = 0 \quad (\text{ на}\,S\,). \quad (1.6)$$

Кроме того, вертикальные отклонения жидкости на мембранной перегородке равно вертикальному отклонению мембраны. Отсюда вытекает следующие кинематическое условие:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = u_n = \vec{u}\cdot\vec{n} \quad (\text{ на}\,\Gamma\,). \quad (1.7)$$

Динамическое граничное условие получается из уравнения мембраны (1.1). Раскладывая давление $P(t,\widehat{x})$ по формуле Тейлора в точке $x_3 = 0$ и оставляя при этом только линейный член, приходим к условию:

$$\rho_m\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \sigma\Delta_2\zeta - g\rho_0(0)\zeta + p \quad (\text{ на}\,\Gamma\,). \quad (1.8)$$

Таким образом, малые движения исходной системы описываются следующей начально-краевой задачей:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \rho_0^{-1}(x_3)\Big(-\nabla p - g\rho\vec{e}_3\Big) + \vec{f}(t,x) \quad (\text{ в}\,\Omega\,), \quad (1.9)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{u} = 0, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\rho_0\cdot\vec{u} = 0 \quad (\text{ в}\,\Omega\,), \quad (1.10)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{n} =: u_n = 0 \quad (\,\text{на}\, S\,), \quad u_n = \frac{\partial\zeta}{\partial t} \quad (\,\text{на}\,\Gamma\,), \quad \int_\Gamma \zeta\, d\Gamma = 0,$$

$$\rho_m \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \sigma\Delta_2\zeta - g\rho_0(0)\zeta + p \ (\,\text{на}\,\Gamma\,), \quad \zeta = 0 \ (\,\text{на}\,\partial\Gamma\,), \tag{1.11}$$

$$\vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \rho(0,x) = \rho^0(x) \quad (\,x\in\Omega\,), \quad \zeta(0,\hat{x}) = \zeta_0(\hat{x}) \quad (\,\hat{x}\in\Gamma\,). \tag{1.12}$$

Последние три условия – это начальные условия, которые добавлены к задаче для полноты ее формулировки, $\int_\Gamma \zeta\, d\Gamma = 0$ — условия сохранения объема, второе условие (1.11) — условие закрепления мембраны по контуру.

1.2. Закон баланса полной энергии

Прежде чем исследовать задачу (1.9) — (1.12), выведем закон баланса полной энергии данной гидродинамической системы. Будем считать, что задача имеет классическое решение, то есть такие функции $\vec{u}(t,x)$, $p(t,x)$, $\rho(t,x)$ и $\zeta(t,\hat{x})$, для которых все слагаемые в уравнениях и краевых условиях являются непрерывными функциями своих переменных.

Лемма 1. *Для классического решения задачи* (1.9) — (1.12) *имеет место закон баланса полной энергии:*

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\Bigg[\bigg(g^2\int_\Omega \big[\rho_0(x_3)N^2(x_3)\big]^{-1}|\rho|^2\, d\Omega + \sigma\int_\Gamma \big(|\nabla_2\zeta|^2 + \sigma^{-1}g\rho_0(0)|\zeta|^2\big)\, d\Gamma\bigg) +$$
$$+\bigg(\int_\Omega \rho_0(x_3)|\vec{u}|^2\, d\Omega + \rho_m\int_\Gamma |\partial\zeta/\partial t|^2\, d\Gamma\bigg)\Bigg] = \int_\Omega \rho_0(x_3)\vec{f}\cdot\vec{u}\, d\Omega. \tag{1.13}$$

Левая часть (1.13) представляет собой сумму производной по t полной кинетической энергии системы и ее потенциальной энергии. Полная кинетическая энергия (вторая скобка слева) равна сумме кинетической энергии жидкости в области Ω и кинетической энергии мембраны. Полная потенциальная энергия (первая скобка) равна сумме потенциальной энергии, обусловленной наличием сил плавучести и потенциальной энергии мембраны. Правая часть (1.13) есть мощность внешних сил.

1.3. Исключение поля плотности

В начально-краевой задаче (1.9) — (1.12) можно исключить одну искомую функцию — поле плотности $\rho(t,x)$, если ввести взамен поля скорости $\vec{u}(t,x)$ поле малых смещений частиц жидкости $\vec{v}(t,x)$, связанное с $\vec{u}(t,x)$ соотношениями

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{u}, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad (\,\text{в}\,\Omega\,), \tag{1.14}$$

тогда $\rho(t,x) = -\rho_0'(x_3)v_3(t,x) + f_0(x)$, где $f_0(x) := \rho(0,x) + \rho_0'(x_3)v_3(0,x)$, $v_3 := \vec{v}\cdot\vec{e}_3$.

С учетом сказанного перепишем исходную задачу (1.9) — (1.12) в виде:

$$\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} = -\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p - N^2(x_3)v_3\vec{e}_3 + \psi_0(x), \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega\,),$$

$$\vec{v}\cdot\vec{n} =: v_n = 0\ (\,\text{на}\,S\,), \quad \int_\Gamma v_3\,d\Gamma = 0, \quad p = \sigma B_\sigma v_3 + \rho_m\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \quad (\,\text{на}\,\Gamma\,), \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}(0,x) = \vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x),\ \vec{v}(0,x) = \vec{v}^0(x),\ v_3(0,\hat{x}) = \zeta(0,\hat{x}) = \zeta^0(\hat{x})\ (\,\hat{x}\in\Gamma\,).$$

Линейный дифференциальный оператор B_σ задается выражением:

$$B_\sigma := -\Delta_2 v_3 + \sigma^{-1}g\rho_0(0)v_3 \tag{1.16}$$

на области определения $\mathcal{D}(B_\sigma) = \{\,\zeta\in H^2(\Gamma)\,|\,\zeta = 0\ (\partial\Gamma)\,\}$.

1.4. Проектирование уравнений движения

Начально-краевую задачу (1.15) приведем в дальнейшем к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве. Для этого применим прием проектирования первого уравнения (1.15) на ортогональные подпространства (см. [8]). Свяжем с функцией ρ_0 гильбертово пространство $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ вектор-функций со скалярным произведением

$$(\vec{u},\vec{v}) = \int_\Omega \rho_0(x_3)\vec{u}(x)\overline{\vec{v}(x)}\,d\Omega.$$

Имеет место следующее разложение (см. подробнее, например, [9]):

$$\vec{L}_2(\Omega,\rho_0) = \vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0), \tag{1.17}$$

где

$$\vec{J}_0(\Omega,\rho_0) = \{\,\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0):\ \operatorname{div}\vec{v} = 0\ (\text{в}\,\Omega),\ v_n = 0\ (\text{на}\ \partial\Omega)\,\},$$

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) = \{\,\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0):\ \vec{v} = \rho_0^{-1}\nabla p,\ v_n = 0\,(\text{на}\,S),\ \nabla\cdot\vec{v} = 0\,(\text{в}\,\Omega),\ \int_\Gamma p\,d\Gamma = 0\,\},$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0) = \{\,\vec{w}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0):\ \vec{w} = \rho_0^{-1}\nabla\varphi,\ \varphi = 0\ (\text{на}\,\Gamma)\,\}.$$

Будем считать $\vec{v}(t,x)$ и $\rho_0^{-1}\nabla p(t,x)$ функциями переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$, тогда в силу уравнений и граничных условий (1.15), ортогонального разложения (1.17) имеем

$$\vec{v}(t,x)\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) =: \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0),$$
$$\rho_0^{-1}\nabla p(t,x)\in\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) =: \vec{G}(\Omega,\rho_0).$$

Поэтому при каждом t будем разыскивать их в виде

$$\vec{v}(t,x) = \vec{w}(t,x) + \rho_0^{-1}\nabla\Phi(t,x),\ \vec{w}(t,x)\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0),\ \rho_0^{-1}\nabla\Phi(t,x)\in\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0),$$
$$\rho_0^{-1}\nabla p(t,x) = \rho_0^{-1}\nabla p_1(t,x) + \rho_0^{-1}\nabla p_2(t,x), \tag{1.18}$$
$$\rho_0^{-1}\nabla p_1(x,t)\in\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0), \quad \rho_0^{-1}\nabla p_2(t,x)\in\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0).$$

Обозначим через P_0, $P_{h,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ ортопроекторы на подпространства $\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)$, $\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)$, $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0)$ соответственно. Тогда, подставляя (1.18) в первое уравнение (1.15) и применяя ортопроекторы, получаем

$$\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2}+P_0\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)\vec{e}_3\right]=P_0\psi_0, \tag{1.19}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\right)+\rho_0^{-1}\nabla p_1+P_{h,S}\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)\vec{e}_3\right]=P_{h,S}\psi_0, \tag{1.20}$$

$$\rho_0^{-1}\nabla p_2+P_{0,\Gamma}\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)\vec{e}_3\right]=P_{0,\Gamma}\psi_0. \tag{1.21}$$

Из соотношения (1.21) следует, что составляющая поля давлений, обусловленная слагаемым $\rho_0^{-1}\nabla p_2$, определяется лишь полем вертикального смещения v_3 и начальными условиями, следовательно, достаточно ограничиться рассмотрением первых двух соотношений, а также граничного условия с соответствующей заменой $p\to p_1$, так как $p=p_1+p_2$, $p_2=0$ (на Γ).

Для перехода от (1.19), (1.20) к системе уравнений с двумя искомыми функциями введем новые элементы:

$$P_{h,S}\left[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\right]:=\rho_0^{-1}\nabla\Psi\,,\qquad P_{h,S}\left[N^2(x_3)\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\vec{e}_3\right]:=\rho_0^{-1}\nabla\eta\,. \tag{1.22}$$

Тогда (1.20) дает интеграл Коши-Лагранжа

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+p_1+\Psi+\eta-F=c(t)\quad(\text{в}\,\Omega\,), \tag{1.23}$$

где $c(t)$ – произвольная функция времени, $P_{h,S}\psi_0=\rho_0^{-1}\nabla F$.

Рассмотрим (1.23) на Γ и воспользуемся равенством

$$p_1=\rho_m\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2}+\sigma B_\sigma v_3=\rho_m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)+\sigma B_\sigma\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)\quad(\text{на}\,\Gamma\,);$$

получим

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\sigma B_\sigma\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)+\rho_m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)+\Psi+\eta=F+c(t)\quad(\text{на}\,\Gamma\,). \tag{1.24}$$

Это соотношение вместе с (1.19) дают уравнения для определения двух искомых функций $\vec{w}(t,x)$ и $\Phi(t,x)$, при этом учитываются связи (1.22). Таким образом, начально-краевую задачу (1.15) перепишем в виде:

$$\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2}+P_0\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)\vec{e}_3\right]=P_0\psi_0\quad(\,\text{в}\,\Omega\,), \tag{1.25}$$

$$\operatorname{div}\vec{w}=0\quad(\,\text{в}\,\Omega\,),\qquad \vec{w}\cdot\vec{n}=0\quad(\,\text{на }\partial\Omega\,),$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\sigma B_\sigma\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)+\rho_m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)+\Psi+\eta=F+c(t)\quad(\text{на}\,\Gamma\,), \tag{1.26}$$

$$
\begin{gathered}
\nabla \cdot (\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \\
\int_\Gamma \Phi \, d\Gamma = 0, \quad \int_\Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} \, d\Gamma = 0, \\
\frac{\partial}{\partial t}\vec{w}(0,x) = P_0\vec{u}^0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}(0,\hat{x})\right)_\Gamma = \left[\left(P_{h,S}\vec{u}^0(x)\right)\cdot\vec{n}\right]_\Gamma, \qquad (1.27) \\
\vec{w}(0,x) = P_0\vec{v}^0, \quad \left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}(0,\hat{x})\right)_\Gamma = \zeta^0(\hat{x}) \quad (\hat{x} \in \Gamma).
\end{gathered}
$$

1.5. Переход к системе дифференциально операторных уравнений

Свяжем с поверхностью Γ гильбертово пространство (скалярных) функций $L_2(\Gamma)$ со скалярным произведением

$$
(\varphi, \psi)_\Gamma := \int_\Gamma \varphi(\hat{x})\,\psi(\hat{x})\,d\Gamma
$$

и соответствующей нормой.

Лемма 2. *Оператор $B_\sigma : \mathcal{D}(B_\sigma) \subset L_2(\Gamma) \to L_2(\Gamma)$ является симметричным положительно определенным оператором, действующим в $L_2(\Gamma)$.*

Доказательство. В силу формулы Грина и граничных условий для ζ из области определения оператора B_σ получаем:

$$
\begin{gathered}
(B_\sigma\zeta,\zeta) = -\int_\Gamma \Delta_2\zeta\cdot\zeta\,d\Gamma + \sigma^{-1}g\rho_0(0)\int_\Gamma |\zeta|^2 d\Gamma = \int_\Gamma |\nabla_2\zeta|^2 d\Gamma + \sigma^{-1}g\rho_0(0)\int_\Gamma |\zeta|^2 d\Gamma \geq \\
\geq \sigma^{-1}g\rho_0(0)\int_\Gamma |\zeta|^2 d\Gamma = \sigma^{-1}g\rho_0(0)\|\zeta\|^2_{L_2(\Gamma)}.
\end{gathered}
$$

Отсюда следует, симметрия оператора B_σ и положительная определенность в $L_2(\Gamma)$. □

Известно, что симметричный положительно определенный оператор, действующий в (вещественном) гильбертовом пространстве и заданный на плотном в этом пространстве множестве, допускает расширение по Фридрихсу до самосопряженного положительно определенного оператора с той же нижней гранью. Поэтому далее будем считать, в силу леммы 2, что оператор B_σ уже расширен по Фридрихсу на более широкое множество, обеспечивающее самосопряженность расширенного оператора, который снова будем обозначать через B_σ. Кроме того, $\mathcal{D}(B_\sigma) \subset H_{B_\sigma}$, где H_{B_σ} — энергетическое пространство оператора B_σ.

Лемма 3. *Оператор $B_\sigma : \mathcal{D}(B_\sigma) \subset L_2(\Gamma) \to L_2(\Gamma)$ (после расширения по Фридрихсу) – неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор с дискретным спектром, то есть его спектр состоит из конечнократных положительных собственных значений $\{\lambda_k(B_\sigma)\}_{k=1}^{\infty}$ с предельной точкой $\lambda = +\infty$, а собственные функции образуют ортогональный базис как в $L_2(\Gamma)$, так и в энергетическом пространстве H_{B_σ}. Обратный оператор B_σ^{-1} является компактным и положительным в $L_2(\Gamma)$. Энергетическое пространство $H_{B_\sigma} \subset L_2(\Gamma)$ оператора B_σ состоит из тех элементов из $L_2(\Gamma)$, для которых конечна квадратичная форма*

$$\|u\|_{B_\sigma}^2 = \int_\Gamma |\nabla_2\zeta|^2 d\Gamma + \sigma^{-1} g\rho_0(0) \int_\Gamma |\zeta|^2 d\Gamma, \tag{1.28}$$

причем $\mathcal{D}(B_\sigma^{1/2}) = H_{B_\sigma}$.

Доказательство. Доказательство основано на положениях общей теории положительно определенных операторов, теоремах вложения функциональных пространств и понятии эквивалентных норм. Действительно, нормы $\|\cdot\|_{B_\sigma}^2$ и $\|\cdot\|_{H^1(\Gamma)}^2$ эквивалентны. Так как согласно теореме вложения С.Л.Соболева пространство $H^1(\Gamma)$ компактно вложено в $L_2(\Gamma)$, то H_{B_σ} также компактно вложено в $L_2(\Gamma)$. Поэтому, по теореме С.Г.Михлина (см., например, [10, с.145]) оператор B_σ имеет дискретный спектр со свойствами, описанными в формулировке данной теоремы, а обратный оператор B_σ^{-1} является компактным положительным оператором: $0 < B_\sigma^{-1} = (B_\sigma^{-1})^*$. □

Для перехода к операторной формулировке исследуемой задачи рассмотрим ряд вспомогательных задач.

Напомним, что отклонение $v_3|_\Gamma = \left(\rho_0^{-1}(\partial\Phi/\partial x_3) + w_3\right)_\Gamma$ частиц подвижной поверхности должно удовлетворять условию сохранения объема жидкости при колебаниях:

$$\int_\Gamma v_3\, d\Gamma = \int_\Gamma \left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3\right) d\Gamma = 0 \implies$$

$$\implies \int_\Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\, d\Gamma = 0, \quad \text{так как } w_3|_\Gamma = 0, \quad \rho_0^{-1}|_\Gamma = \text{const}.$$

Это же условие является необходимым условием разрешимости следующей задачи.

Вспомогательная задача (задача Неймана).

$$\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на } S),$$
$$\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_\Gamma \psi\, d\Gamma = 0. \tag{1.29}$$

Введем в пространстве $H_0 = L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$ его оснащение в виде $H_+ \subset H_0 \subset H_-$, где $H_+ = H^{1/2}(\Gamma) \cap H_0 =: H_\Gamma^{1/2}$, $H_- = (H_+)^* =: \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$. Здесь через $\widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ обозначено пространство, сопряженное с $H_\Gamma^{1/2}$ с центральным пространством $L_{2,\Gamma}$. В частности, $\widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ состоит из тех элементов из $H^{-1/2}(\Gamma)$, которые продолжимы нулем в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ (см. [11], гл. 3).

Будем считать, что $\psi = \left(\rho_0^{-1}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma$ есть заданная функция из пространства $\widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$. Тогда, рассматривая задачу Неймана с заданной ψ, получим (см., например, [12]), что

$$\Phi(x) = T\psi \in H_{h,S}^1(\Omega, \rho_0),$$

где $T : \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2} \to H_{h,S}^1(\Omega, \rho_0)$ – ограниченный линейный оператор. Здесь $H_{h,S}^1(\Omega, \rho_0)$ — подпространство квазигармонических функций, удовлетворяющих условию Неймана на S, пространства $H_\Gamma^1(\Omega, \rho_0)$ с квадратом нормы

$$\|\Phi\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega,\rho_0)} := \int_\Omega \rho_0^{-1} |\nabla\Phi|^2 \ d\Omega, \qquad \int_\Gamma \Phi \ d\Gamma = 0.$$

Введем теперь оператор следа γ_Γ: для любой $\Phi(x) \in H_{h,S}^1(\Omega, \rho_0)$ по определению

$$\gamma_\Gamma\Phi := \Phi|_\Gamma .$$

Отметим, что оператор γ_Γ ограниченно действует из $H^1(\Omega, \rho_0)$ (а потому и из подпространства $H_{h,S}^1(\Omega, \rho_0)$) в $H_+ = H_\Gamma^{1/2}$. Отсюда получаем, что

$$\gamma_\Gamma\Phi = \Phi|_\Gamma = \gamma_\Gamma T\psi = \gamma_\Gamma T\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma =: C\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma, \tag{1.30}$$

где оператор $C = \gamma_\Gamma T : \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2} = H_- \to H_\Gamma^{1/2} = H_+$ является линейным ограниченным оператором.

В работе [12] доказана следующая лемма.

Лемма 4. *Сужение оператора C на $H_0 \subset H_-$ является линейным компактным самосопряженным положительным оператором, действующим в пространстве H_0.*

Следствием доказанной леммы является такое утверждение: оператор $C : H_0 \to H_0$ имеет обратный оператор C^{-1}, который является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором, действующим в H_0 и заданным на области определения $\mathcal{D}(C^{-1}) = \mathcal{R}(C)$, плотной в H_0. Кроме того, оператор $C^{-1/2}$ переводит $\mathcal{D}\left(C^{-1/2}\right) = H_+$ в H_0, а оператор $C^{1/2}$ — соответственно H_0 в $\mathcal{D}\left(C^{-1/2}\right) = H_+$ (изометрическим образом). Как следует из общей теории оснащенных гильбертовых пространств, расширение оператора $C^{-1/2}$ (которое будем обозначать так же) с $\mathcal{D}\left(C^{-1/2}\right) = H_+$ на H_0 является изометрическим оператором, переводящим все H_0 на все $H_- = \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$. Соответственно оператор $C^{1/2}$ (после расширения на H_-) переводит изометрически все H_- на все H_0.

Согласно выше приведенным построениям, перепишем систему уравнений (1.25) и (1.26) вместе, проектируя дополнительно (1.26) на H_0; затем осуществим замену:

$$\psi = \left(\rho_0^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma = C^{-1/2}y, \quad y \in H_0, \tag{1.31}$$

считая, что $P_{H_0}F \in \mathcal{D}(C^{-1/2})$, и применим к преобразованному уравнению (1.26) оператор $C^{-1/2}$, в результате получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} + P_0\Big[N^2(x_3)\left((UC^{-1/2}y)\vec{e}_3\right)\vec{e}_3\Big] + P_0\Big[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\Big] = P_0\psi_0, \\ &\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big[I + \rho_m C^{-1}\Big]y + \sigma C^{-1/2}BC^{-1/2}y + C^{-1/2}P_{H_0}(\Psi + \eta) = C^{-1/2}P_{H_0}F. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Здесь через $U : \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2} \to \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$ обозначен оператор, который посредством решения задачи (1.29) ставит в соответствие элементу $\psi \in \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ функцию $\rho_0^{-1}\nabla\Phi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$; $B = P_{H_0}B_\sigma P_{H_0}$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &M_{11}\vec{w} := P_0\Big[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\Big], \quad M_{12}y := P_0\Big[N^2(x_3)\left((UC^{-1/2}y)\vec{e}_3\right)\vec{e}_3\Big], \\ &M_{21}\vec{w} := C^{-1/2}P_{H_0}\Psi, \quad \rho_0^{-1}\nabla\Psi = P_{h,S}\Big[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\Big], \\ &M_{22}y := C^{-1/2}P_{H_0}\eta, \quad \rho_0^{-1}\nabla\eta = P_{h,S}\Big[N^2(x_3)\left((UC^{-1/2}y)\vec{e}_3\right)\vec{e}_3\Big]. \end{aligned} \tag{1.33}$$

В дальнейшем все искомые функции и заданные функции переменной t и пространственных переменных будем считать функциями одной переменной t со значениями в соответствующих гильбертовых пространствах, что уже и было учтено в проведенных выше построениях. В связи с этим далее все производные $\partial/\partial t$ будем заменять на d/dt.

Начально-краевая задача (1.25) — (1.27) свелась к задаче Коши для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H_0$:

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{C}\mathcal{X} + (\mathcal{B} + \mathcal{M})\mathcal{X} = \mathcal{F}, \qquad \mathcal{X}(0) = \mathcal{X}^0, \qquad \mathcal{X}'(0) = \mathcal{X}^1, \tag{1.34}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & I + \rho_m C^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma C^{-1/2}BC^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \tag{1.35}$$

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} P_0\psi_0 \\ C^{-1/2}P_{H_0}F \end{pmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{pmatrix} \vec{w} \\ y \end{pmatrix}. \tag{1.36}$$

Лемма 5. *Оператор* $B = P_{H_0} B_\sigma P_{H_0}$ *— положительно определенный неограниченный в* H_0 *оператор с компактным положительным обратным оператором* B^{-1}.

Доказательство. В силу самосопряженности оператора ортогонального проектирования P_{H_0}, для $\forall u, v \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B_\sigma) \ominus \{1_\Gamma\} \subset H_0$ имеем:

$$(Bu, v) = (P_{H_0} B_\sigma P_{H_0} u, v) = (B_\sigma P_{H_0} u, P_{H_0} v) = (B_\sigma u, v) = \\ = (u, B_\sigma v) = (P_{H_0} u, B_\sigma P_{H_0} v) = (u, P_{H_0} B_\sigma P_{H_0} v) = (u, Bv)$$

откуда следует, что оператор B — самосопряженный. Далее имеем:

$$(Bu, u) = (B_\sigma u, u) \geq c \left\| u \right\|^2, \tag{1.37}$$

значит, B – положительно определенный оператор, и следовательно, ограниченно обратим. Обратный B^{-1} при этом является положительным оператором.

Покажем, что обратный к B оператор является компактным. Для этого достаточно доказать, что H_B компактно вложено в H_0. Любое ограниченное множество X из H_B, в силу (1.37), будет ограниченным и в H_{B_σ}. Как было показано ранее, H_{B_σ} компактно вложено в $L_2(\Gamma)$. Но в силу вложения $X \subset H_B \subset H_0 = L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\} \subset L_2(\Gamma)$ получаем, что X компактно в H_0. Таким образом, любое ограниченное множество в H_B компактно в H_0, а следовательно, B^{-1} – компактный оператор, что и требовалось доказать. □

Лемма 6. *Оператор-матрица* $\mathcal{M}$ *из* (1.35) *обладает свойствами* $\mathcal{O} \leq \mathcal{M} \leq N_0^2 \mathcal{I}$, *где* N_0^2 *– константа из* (1.2), $\mathcal{O}$ *и* $\mathcal{I}$ *– нулевой и единичный операторы в* $\mathcal{H}$.

Доказательство приведено в лемме 5 работы [12].

1.6. Теорема существования сильного решения

Сделаем в задаче (1.34) замену $C^{-1/2} y = z$ и подействуем оператором $\operatorname{diag}\left(I; C^{1/2}\right)$ к обеим частям уравнения (1.34), в результате приходим к следующей задаче Коши

$$\mathcal{C}_1 \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{X}_1 + \mathcal{M}_\mathcal{B} \mathcal{X}_1 = \mathcal{F}_1, \qquad \mathcal{X}_1(0) = \mathcal{X}_1^0, \qquad \mathcal{X}_1'(0) = \mathcal{X}_1^1, \tag{1.38}$$

$$\mathcal{C}_1 = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & C + \rho_m I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_1 + \mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} C^{1/2} \\ C^{1/2} M_{21} & C^{1/2} M_{22} C^{1/2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma B \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{X}_1 = \begin{pmatrix} \vec{w} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{w} \\ C^{-1/2} y \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_1 = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix} \mathcal{F}.$$

Из построений, приведенных выше, следует, что

$$0 \ll \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_1^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \qquad 0 \ll B = B^*, \quad \overline{\mathcal{D}(B)} = H_0, \qquad 0 \leq \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),$$

где $\mathcal{L}$ — пространство ограниченных операторов. Таким образом, операторный коэффициент при искомой функции не является положительно определенным оператором. Данный факт не позволяет воспользоваться известной теоремой о существовании и единственности сильного решения (см., например, [13, с.44]), в связи с этим требуются дополнительные построения.

Перепишем уравнение (1.38) в следующем виде:

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ Az \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_0 + \widehat{M}_{11} & \widehat{M}_{12} \\ \widehat{M}_{21} & \widehat{B} + \widehat{M}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ z \end{pmatrix},$$
$$\widehat{M}_{11} = M_{11}, \quad \widehat{M}_{12} = M_{12}C^{1/2}, \quad \widehat{M}_{21} = C^{1/2}M_{21}, \quad \widehat{M}_{22} = C^{1/2}M_{22}C^{1/2},$$
$$A = C + \rho_m I, \quad \widehat{B} = \sigma B, \quad f_1 = P_0\psi_0, \quad f_2 = P_{H_0}F.$$

Осуществим замену $\widehat{B}^{1/2}z = w_1$ в последнем уравнении и применим оператор $\mathrm{diag}\,(I_1; \widehat{B}^{-1/2})$ к обеим частям уравнения, в результате приходим к задаче

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ \widehat{B}^{-1/2}A\widehat{B}^{-1/2}w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_0 + \widehat{M}_{11} & \widehat{M}_{12}\widehat{B}^{-1/2} \\ \widehat{B}^{-1/2}\widehat{M}_{21} & I + \widehat{B}^{-1/2}\widehat{M}_{22}\widehat{B}^{-1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ w_1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} f_1 \\ \widehat{B}^{-1/2}f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ w_1 \end{pmatrix}. \qquad (1.39)$$

Пусть теперь $\widehat{B}^{-1/2}A\widehat{B}^{-1/2}w_1 = w_2$, что равносильно

$$A_B w_1 := \widehat{B}^{-1/2}A\widehat{B}^{-1/2}w_1 = \widehat{B}^{-1/2}A\widehat{B}^{-1/2}(\widehat{B}^{1/2}z) = \widehat{B}^{-1/2}Az = w_2. \qquad (1.40)$$

С учетом сказанного приходим к следующей задаче Коши:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \mathcal{A}v = f + Rv, \quad v(0) = (\vec{w}(0); w_2(0))^t, \quad v'(0) = (\vec{w}'(0); w_2'(0))^t, \qquad (1.41)$$

$$\mathcal{A} := I_B F, \quad R = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = (f_1; \widehat{B}^{-1/2}f_2)^t, \quad v = (\vec{w}; w_2)^t,$$

$$I_B = \begin{pmatrix} I_0 + \widehat{M}_{11} & \widehat{M}_{12}\widehat{B}^{-1/2} \\ \widehat{B}^{-1/2}\widehat{M}_{21} & I + \widehat{B}^{-1/2}\widehat{M}_{22}\widehat{B}^{-1/2} \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & A_B^{-1} \end{pmatrix}, \qquad (1.42)$$

где I_B — самосопряженный, ограниченный и положительно определенный оператор, $\mathcal{D}(I_B F) = \mathcal{D}(F)$.

Введем эквивалентную норму в пространстве $\mathcal{H}$: $[v_1; v_2] := (I_B^{-1}v_1; v_2)$, тогда

$$[I_B F v_1; v_2] = (F v_1; v_2) = (v_1; F v_2) = (v_1; I_B^{-1} I_B F v_2) = [v_1; I_B F v_2],$$

следовательно, $I_B F$ — самосопряженный оператор, более того, он является неограниченным и положительно определенным оператором.

Определение 1. Сильным (по переменной t) решением задачи (1.41) на отрезке $[0, T]$ назовем такую функцию $v(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$, для которой выполнены следующие условия:

1. $v(t) \in \mathcal{D}(I_B F)$ при любом $t \in [0;T]$, $I_B F v(t) \in C([0;T];\mathcal{H})$,
2. $v(t) \in C^2([0;T];\mathcal{H})$,
3. выполнено уравнение (1.41) и начальные условия.

Лемма 7. *Если выполнены условия*

$$v(0) \in \mathcal{D}(F),\ v'(0) \in \mathcal{D}(F^{1/2}),\ f(t) \in C^1([0;T];\mathcal{H}). \tag{1.43}$$

тогда задача (1.41) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0;T]$.

Доказательство. Так как оператор $I_B F$ является самосопряженным и положительно определенным в пространстве с эквивалентной нормой, поэтому он является генератором семейства косинус-функций, действующих в этом пространстве (см. [14, c.175-177]). Далее, так как оператор R из (1.41) ограничен, то возмущенный оператор $I_B F - R$, согласно теореме 8.5 из [14, c.177], также является генератором семейства косинус-функций. Отсюда следует, что при выполнении условий (1.43) задача (1.41) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0, T]$. □

Вернемся по всем преобразованиям обратно к задаче (1.38). Пусть выполнены условия (1.43), тогда задачи Коши (1.41), согласно лемме 7, имеет единственное сильное решение на отрезке $[0;T]$. С учетом замены (1.40) имеем

$$\begin{aligned} &\left(v^0 = (\vec{w}^0; w_2^0)^t \in \mathcal{D}(F) \right) \iff \left(\vec{w}^0 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad w_2^0 \in \mathcal{D}(A_B^{-1}) \right) \iff \\ &\iff \left(\vec{w}^0 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad A_B^{-1} w_2^0 = A_B^{-1}(A_B)\widehat{B}^{1/2} z^0 \in H_0 \right) \iff \\ &\iff \left(\vec{w}^0 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad z^0 \in \mathcal{D}(B^{1/2}) \right). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} &\left(v^1 = (\vec{w}^1; w_2^1)^t \in \mathcal{D}(F^{1/2}) \right) \iff \left(\vec{w}^1 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad w_2^1 \in \mathcal{D}(A_B^{-1/2}) \right) \iff \\ &\iff \left(\vec{w}^1 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad A_B^{-1/2} w_2^1 = A_B^{-1/2} A_B \widehat{B}^{1/2} z^1 = A_B^{1/2} \widehat{B}^{1/2} z^1 \in H_0 \right) \iff \\ &\iff \left(\vec{w}^1 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad z^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &f(t) \in C^1([0;T];\mathcal{H}) \iff f_1 = P_0 \psi_0 \in C^1\left([0;T]; \vec{J}_0(\Omega, \rho_0)\right), \\ &\qquad \widehat{B}^{-1/2} f_2 = \widehat{B}^{-1/2} P_{H_0} F \in C^1([0;T]; H_0) \iff \quad P_0 \psi_0 \in C^1\left([0;T]; \vec{J}_0(\Omega, \rho_0)\right), \\ &\qquad P_{H_0} F \in C^1([0;T]; H_0) \iff \mathcal{F}_1(t) \in C^1([0,T];\mathcal{H}). \end{aligned}$$

Здесь оператор $\widehat{B}^{-1/2}$ является ограниченным оператором.

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 8. *Если выполнены условия:*

$$\mathcal{X}_1^0 = (\vec{w}^0; z^0)^t \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \mathcal{D}(B^{1/2}) \quad \mathcal{X}_1^1 = (\vec{w}^1; z^1)^t \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \mathcal{D}(B^{1/2}),$$

$$\mathcal{F}_1(t) \in C^1\left([0,T]; \mathcal{H}\right), \quad \mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H_0,$$

то существует единственное сильное решение задачи (1.38).

Определение 2. Сильным (по переменной t) решением задачи (1.9) — (1.12) на промежутке $[0, T]$ назовем набор функций $\vec{u}\,(t, x)$, $p\,(t, x)$, $\rho\,(t, x)$ и $\zeta\,(t, \hat{x})$, для которых выполнены следующие условия:

1°. $\vec{u}\,(t) \in C^1\Big([0,T]\,; \vec{J}_{0,S}\,(\Omega, \rho_0)\Big)$, $\rho_0^{-1}\nabla p \in C\Big([0,T]\,; \vec{G}\,(\Omega, \rho_0)\Big)$,

$\rho\,(t) \in C^1\left([0,T]\,; \mathfrak{L}\,(\Omega, \rho_0)\right)$, где $\mathfrak{L}_2(\Omega)$ – гильбертово пространство скалярных функций со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} := g^2 \int_\Omega \big[\rho_0(x_3) N^2(x_3)\big]^{-1} \varphi(x) \overline{\psi(x)}\, d\Omega$$

и при любом $t \in [0, T]$ справедливо первое уравнение (1.9);

2°. $u_n = \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} \in C\left([0,T]\,; H_0\right)$; выполнено граничное условие на Γ:

$$p = \rho_m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \sigma \Delta_2 \zeta + g\rho_0(0)\zeta \in C\left([0,T]\,; L_2(\Gamma)\right),$$

где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями в $L_2(\Gamma)$.

3°. выполнены начальные условия (1.12).

Возвращаясь от задачи (1.38) по всем преобразованиям назад, приходим к условиям существования сильного (по переменной t) решения исходной начально-краевой задачи (1.9) — (1.12).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

$$\vec{u}^0 \in \vec{J}_{0,S}\,(\Omega, \rho_0)\,, \quad \rho^0 \in \mathfrak{L}_2(\Omega), \quad f(t) \in C\Big([0,T]; \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)\Big)$$
$$\zeta^0 \in \mathcal{D}(B) = \{\, \zeta \in H^2(\Gamma),\ \zeta = 0 \ (\textit{на}\ \partial\Gamma\,)\,\} \cap H_0, \quad H_0 = L_2\,(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}\,,$$
$$\zeta^1 = \big[\big(P_{h,S}\vec{u}^0(x)\big)\cdot \vec{n}\big]_\Gamma \in \mathcal{D}(B^{1/2}) = \{\, \zeta \in H^1(\Gamma),\ \zeta = 0 \ (\textit{на}\ \partial\Gamma\,)\,\} \cap H_0.$$

Тогда задача (1.9) – (1.12) *имеет единственное сильное по* t *решение.*

2. Спектральная задача

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях, положим $\mathcal{F}_1 = 0$ в уравнении (1.38) и будем считать, что $\mathcal{X}_1(t) = e^{i\omega t}\mathcal{X}_1$, где ω – частота, а $\mathcal{X}_1 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H_0$ — мода колебаний. Задача (1.38) переходит в спектральную задачу

$$\lambda \mathcal{C}_1 \mathcal{X}_1 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}} \mathcal{X}_1, \quad \lambda := \omega^2. \tag{2.1}$$

Отметим несколько предварительных соображений.

1. Так как оператор $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^* \geq 0$, кроме того существует $\mathcal{C}_1^{-1}$ и при этом $0 \leq \mathcal{C}_1^{-1} = \left(\mathcal{C}_1^{-1}\right)^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, тогда из (2.1) приходим к задаче $\lambda \mathcal{I} \mathcal{X}_1 = \mathcal{C}_1^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}\mathcal{X}_1$. Спектр оператора $\mathcal{C}_1^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ вещественный и неотрицательный: $\sigma(\mathcal{C}_1^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}) \subset \mathbb{R}_+$.

2. В случае, когда идеальная стратифицированная жидкость полностью заполняет произвольный сосуд, соответствующая спектральная задача может быть приведена к задаче

$$M_{11}\vec{w} = \lambda \vec{w}, \quad \vec{w} \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0).$$

При этом спектр задачи точечный, плотный на отрезке $[0; N_0^2]$, а моды собственных колебаний дают внутренние волны, обусловленные наличием стратифицированной жидкости.

2.1. О существовании внутренних волн

Рассмотрим случай $\lambda \in [0; N_0^2]$ и установим наличия внутренних волн в стратифицированной жидкости.

Записав уравнение (2.1) в компонентах, перепишем в следующем виде

$$\begin{cases} \lambda I_0 \vec{w} = M_{11}\vec{w} + M_{12}C^{1/2}z, \\ -M^{1/2}B_{21}\vec{w} = \left(-\lambda\left(C + \rho_m I\right) + C^{1/2}M_{22}C^{1/2} + \sigma B\right) z =: T(\lambda) z. \end{cases} \tag{2.2}$$

Сделаем предположение

$$N_0^2\left(C + \rho_m I\right) < C^{1/2}M_{22}C^{1/2} + \sigma B, \tag{2.3}$$

тогда оператор-функция $T(\lambda)$ при любых $\lambda \in [0; N_0^2]$ положительно определена, поэтому при этих λ существует обратный оператор $T^{-1}(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Выразим из второго уравнения системы (2.2) величину z и подставим в первое, получим

$$R(\lambda)\vec{w} := \left(\lambda I_0 - M_{11} + M_{12}C^{1/2}T^{-1}(\lambda)C^{1/2}M_{21}\right)\vec{w} = 0, \qquad \lambda \in [0; N_0^2]. \tag{2.4}$$

Теорема 2. *Предельный спектр пучка $R(\lambda)$ совпадает с отрезком $[0; N_0^2]$.*

Доказательство. Пусть выполнено условие (2.3). Зафиксируем произвольное $\lambda_1 \in [0; N_0^2]$ и рассмотрим задачу

$$\left(\lambda I_0 - M_{11} + M_{12}C^{1/2}T^{-1}(\lambda_1)C^{1/2}M_{21}\right)\vec{w} = 0, \qquad \vec{w} \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0).$$

Эта задача на собственные значения для самосопряженного оператора M_{11}, возмущенным компактным оператором $M_{12}C^{1/2}T^{-1}(\lambda_1)C^{1/2}M_{21}$. Весь спектр оператора M_{11} является предельным и заполняет весь отрезок $[0; N_0^2]$. Согласно теореме Вейля, для каждого $\lambda_2 \in [0; N_0^2]$ существует ортонормированная последовательность Вейля $\{\vec{w}_i\}_{i=1}^{\infty}$, зависящая от λ_1 и λ_2, для которой

$$\| \left(\lambda_2 I_0 - M_{11} + M_{12}C^{1/2}T^{-1}(\lambda_1)C^{1/2}M_{21}\right) \vec{w}_i\| \to 0 \qquad (i \to \infty).$$

Выбирая $\lambda_2 = \lambda_1$ и соответствующую последовательность Вейля, приходим к выводу, что для нее

$$\| \left(\lambda_1 I_0 - M_{11} + M_{12}C^{1/2}T^{-1}(\lambda_1)C^{1/2}M_{21}\right) \vec{w}_i\| \to 0 \qquad (i \to \infty).$$

Это означает, что произвольно выбранная точка $\lambda_1 \in [0; N_0^2]$ принадлежит предельному спектру задачи (2.4). Поскольку точки, лежащие вне отрезка $[0; N_0^2]$, могут быть только конечнократными собственными значениями, указанный отрезок совпадает с предельным спектром пучка $R(\lambda)$. $\square$

Важным следствием полученной теоремы является следующее утверждение: в устойчиво стратифицированной идеальной жидкости, частично заполняющей сосуд произвольной формы с упругой мембраной на свободной поверхности, существуют внутренние волны, обусловленные наличием сил плавучести; квадрат частот внутренних волн образуют множество $[0; N_0^2]$.

2.2. О свойствах мод поверхностных волн

Рассмотрим случай $\lambda > N_0^2$, когда ожидаются поверхностные волны.

Осуществляя замену $z = \sigma^{-1/2}B^{-1/2}\widetilde{z} = \widetilde{B}^{-1/2}\widetilde{z}$ и применив оператор $\widetilde{B}^{-1/2}$ ко второму уравнению (2.2), получим

$$\begin{cases} (I_0 - \lambda^{-1}M_{11})\,\vec{w} - \lambda^{-1}M_{12}C^{1/2}\widetilde{B}^{-1/2}\widetilde{z} = 0, \\ I\widetilde{z} - \lambda\widetilde{B}^{-1/2}\,(C + \rho_1 I)\,\widetilde{B}^{-1/2}\widetilde{z} + \widetilde{B}^{-1/2}C^{1/2}M_{21}\vec{w} + \widetilde{B}^{-1/2}C^{1/2}M_{22}C^{1/2}\widetilde{B}^{-1/2}\widetilde{z} = 0. \end{cases}$$

В силу предположения $\lambda > N_0^2$ и оценки $\|B_{11}\| \leq N_0^2$, оператор $I - \lambda^{-1}B_{11}$ обратим, с учетом этого перепишем последнюю систему

$$\begin{cases} I_0\vec{w} - \lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}M_{11})^{-1}M_{12}C^{1/2}\widetilde{B}^{-1/2}\widetilde{z} = 0, \\ I\widetilde{z} - \lambda\widetilde{B}^{-1/2}\,(C + \rho_m I)\,\widetilde{B}^{-1/2}\widetilde{z} + \widetilde{B}^{-1/2}C^{1/2}M_{21}\vec{w} + \widetilde{B}^{-1/2}C^{1/2}M_{22}C^{1/2}\widetilde{B}^{-1/2}\widetilde{z} = 0. \end{cases}$$

В последней системе исключая $\vec{w}$, приходим к спектральной задаче для операторного пучка $L(\lambda)$:

$$\begin{aligned} &L(\lambda)\widetilde{z} := \left(I - \lambda B_C + B_0 + \lambda^{-1}F(\lambda)\right)\widetilde{z} = 0, \qquad \lambda > N_0^2, \\ &B_C := \widetilde{B}^{-1/2}(\rho_m I + C)\widetilde{B}^{-1/2}, \qquad B_0 := \widetilde{B}^{-1/2}C^{1/2}M_{22}C^{1/2}\widetilde{B}^{-1/2}, \\ &F(\lambda) := \widetilde{B}^{-1/2}C^{1/2}M_{21}R(\lambda)M_{12}C^{1/2}\widetilde{B}^{-1/2}, \qquad R(\lambda) := (I - \lambda^{-1}M_{11})^{-1}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Дальнейшее исследование основано на идее факторизации пучка $L(\lambda)$, т.е. на разложении его на операторные множители определенного вида. Для этого понадобиться следующий результат (см., [15, с.81]).

Теорема 3. *Пусть для самосопряженного операторного пучка*

$$M(\mu) := \mu I - A - B(\mu) \tag{2.6}$$

выполнены условия: 1. $\exists\, t \in (0, r)\ : \|A\|t^{-1} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|B_k\| t^{k-1} < 1$,

2. $B(\mu) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu^k B_k,\ |\mu| < r, \quad 0 < r < \infty;\ A = A^*,\ B_k = B_k^*,\ k = 1, 2, \ldots$

Тогда

1. Пучок $M(\mu)$ допускает факторизацию $M(\mu) = M_+(\mu)(\mu I - Z)$, т.е. такое разложение на множители, при котором $M_+(\mu)$ голоморфна и голоморфна обратима в круге $|\mu| \le t,\ t \in (0, r)$, а спектр $\sigma(Z) \subset (-t; t)$ и оператор Z подобен самосопряженному оператору.

2. Если выполнены условия $A \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}),\ kerA = \{0\},\ B_1 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, то задача $M(\mu)z = 0$ имеет на промежутке $(-t, t)$ дискретный спектр

$$\sigma(Z) = \{0\} \cup \{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}, \quad \mu_j \to 0 \quad (j \to \infty),$$

где $\mu_j = \mu_j(Z)$ – изолированные конечнократные собственные значения оператора Z. Этим значениям отвечает совокупность $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ собственных элементов (присоединенных нет), образующих базис Рисса в $\mathcal{H}$: $\varphi_j = F^{1/2} z_j,\ j = 1, 2, \ldots,$ где $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис, составленный из элементов самосопряженного компактного оператора $F^{-1/2}(ZF)F^{-1/2}$.

Чтобы воспользоваться этой теоремой, осуществим в (2.5) замену $\lambda = \mu^{-1}$ и умножим обе части уравнения на μ:

$$G(\mu)\widetilde{z} := \mu L(\mu^{-1})\widetilde{z} = (\mu I - B_C - B(\mu))\,\widetilde{z} = 0, \tag{2.7}$$
$$B(\mu) := -\mu B_0 - \mu^2 F(\mu^{-1}), \quad \mu < N_0^{-2}.$$

Задача (2.7) есть задача для пучка вида (2.6), так как $F(\mu^{-1})$ является голоморфной функцией относительно μ:

$$F(\mu^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k F_k, \quad F_k = \widetilde{B}^{-1/2} C^{1/2} M_{21} M_{11}^k M_{12} C^{1/2} \widetilde{B}^{-1/2}.$$

При этом справедливо

$$B(\mu) := -\mu B_0 - \mu^2 F(\mu^{-1}) = -\mu B_0 - \mu^2 \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k F_k = -\mu \widetilde{B}^{-1/2} C^{1/2} M_{22} C^{1/2} \widetilde{B}^{-1/2} -$$
$$- \mu^2 \widetilde{B}^{-1/2} C^{1/2} M_{21} M_{12} C^{1/2} \widetilde{B}^{-1/2} - \mu^3 \widetilde{B}^{-1/2} C^{1/2} M_{21} M_{11}^2 M_{12} C^{1/2} \widetilde{B}^{-1/2} - \ldots =$$
$$=: -\sum_{k=1}^{\infty} \mu^k B_k, \qquad \text{где} \quad \|B_k\| \le (N_0^2)^k \cdot \|\widetilde{B}^{-1}\| \cdot \|C\|.$$

Лемма 9. *При* $|\mu| = t < N_0^{-2}$ *для* $G(\mu)$ *имеет место оценка*

$$\|B_C\| \cdot t^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \|B_k\| \cdot t^{k-1} < \frac{\rho_m \|\widetilde{B}^{-1}\|}{t} + \frac{\|\widetilde{B}^{-1}\| \cdot \|C\|}{t \cdot (1 - tN_0^2)}.$$

Доказательство.

$$\|B_C\|t^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \|B_k\|t^{k-1} = \frac{\|\widetilde{B}^{-1/2}(\rho_1 I + C)\widetilde{B}^{-1/2}\|}{t} + \|B_1\| + \|B_2\|t + \|B_3\|t^2 + \ldots \leq$$

$$\leq \frac{\rho_m \|\widetilde{B}^{-1}\| + \|\widetilde{B}^{-1}\| \cdot \|C\|}{t} + N_0^2 \cdot \|\widetilde{B}^{-1}\| \cdot \|C\| + (N_0^2)^2 \cdot \|\widetilde{B}^{-1}\| \cdot \|C\|t + \ldots =$$

$$= \frac{\rho_m \|\widetilde{B}^{-1}\|}{t} + \frac{\|\widetilde{B}^{-1}\| \cdot \|C\|}{t} \cdot \left(1 + N_0^2 t + (N_0^2)^2 t^2 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{\rho_m \|\widetilde{B}^{-1}\|}{t} + \frac{\|\widetilde{B}^{-1}\| \cdot \|C\|}{t \cdot (1 - tN_0^2)}.$$

□

Следствием леммы 9 и теоремы 3 является

Лемма 10. *Пусть*

$$D := \Big(\rho_m \cdot \|\widetilde{B}^{-1}\| \cdot N_0^2 - 1\Big)^2 - 4 \cdot N_0^2 \cdot \|\widetilde{B}^{-1}\| \cdot \|C\| > 0. \tag{2.8}$$

Тогда пучок $G(\mu)$ *из* (2.7) *допускает спектральную факторизацию*

$$\begin{gathered} G(\mu) = G_+(\mu)(\mu I - Z), \quad |\mu| < t \in (t_-, t_+), \\ t_\pm := \frac{\Big(\rho_m \cdot \|\widetilde{B}^{-1}\| \cdot N_0^2 + 1\Big) \pm \sqrt{D}}{2N_0^2}, \quad t_+ < N_0^{-2}. \end{gathered} \tag{2.9}$$

При этом $G_+(\mu)$ *голоморфна и голоморфна обратима для* $|\mu| \leq t \in (t_-, t_+)$, *а спектр* $\sigma(Z) \subset (-t; t)$.

Полученные факты позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Если выполнено условие* (2.8)*, тогда операторный пучок* $L(\lambda)$ *из* (2.5) *допускает спектральную факторизацию*

$$L(\lambda) = L_+(\lambda)(I - \lambda Z); \tag{2.10}$$

при этом $L_+(\lambda)$ *голоморфна и голоморфна обратима для*

$$\lambda \geq (t_-)^{-1} > N_0^2, \quad t_- = \frac{\Big(\rho_m \cdot \|\widetilde{K}^{-1}\| \cdot N_0^2 + 1\Big) - \sqrt{D}}{2N_0^2},$$

а также задача (2.5) *имеет дискретный спектр* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$, $\lambda_k = [\lambda_k(Z)]^{-1}$, *состоящий из изолированных конечнократных собственных значений с предельной точкой* $+\infty$. *Собственные элементы* $\{\widetilde{z}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\widetilde{z}_k = \widetilde{z}_k(Z)$, *отвечающие собственным значениям* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [(t_-)^{-1}, +\infty)$, *образуют базис Рисса в* H_0.

2.3. Об асимптотике спектра поверхностных волн

Лемма 11. *На промежутке* $((t_-)^{-1}; +\infty)$ *собственные значения* λ_k *задачи* (2.5) *при* $k \to \infty$ *имеют асимптотическое поведение:*

$$\lambda_k = \frac{\rho_0 g}{\rho_m}\left(1 + \frac{\sigma}{\rho_0 g}\left(\frac{4\pi}{mes\,\Gamma}\right) k[1 + o(1)]\right) \qquad (k \to +\infty). \tag{2.11}$$

Доказательство. Рассмотрим спектральную задачу (2.5) для операторного пучка $L(\lambda)$:

$$L(\lambda)\widetilde{z} := \left(I - \lambda B_C + B_0 + \lambda^{-1}F(\lambda)\right) z = 0,$$

где $\lambda^{-1}F(\lambda)$ – аналитическая оператор-функция при $\lambda \to +\infty$, и при этом $\lambda^{-1}F(\lambda) \to 0$; оператор B_0 – компактный оператор. Тогда для операторного пучка (2.5) справедлива теорема Маркуса-Мацаева (см., например, [8, с.71-72]) и асимптотика задачи определяется асимптотикой укороченного пучка $(I - \lambda B_C)\widetilde{z} = 0$. Известно, что при $k \to \infty$ асимптотическое поведение собственных чисел $\lambda_k(B_C)$ имеет вид (см., [5]) $\lambda_k(B_C) = \dfrac{\rho_0 g}{\rho_m}\left(1 + \dfrac{\sigma}{\rho_0 g}\left(\dfrac{4\pi}{\mathrm{mes}\,\Gamma}\right) k[1 + o(1)]\right) \qquad (k \to +\infty)$. $\square$

Список цитируемых источников

1. *Capodanno, P.* Small planar oscillations of a container with elastic cover containing two immiscible liquids // Eur. J. Mech. B. — 1990. — Vol. 9, No. 3. — P. 289–306.
2. *Capodanno, P.* Vibrations d'un Liquide dans un Container Cylindrique Summetrique a Fond Elastique en Apesanteur // Mecanique Appliquee. — 1993. — Vol. 38, No.1. — P. 59–72.
3. *Capodanno, P.* Vibrations d'un Fluide Compressible une Cavite Fermee par Une Membran Supportee par un Ecru // Mech. Resch Communicat. — 1995. — Vol. 22, No.1. — P. 1–7.
4. *Копачевский, Н. Д., Орлова, Л. Д., Пашкова, Ю. С.* Дифференциально-операторные и интегро-дифференциальные уравнения в проблеме малых колебаний гидродинамических систем // Ученые записки Симф. ун-та. — 1995 — Т. 41, № 2. — С. 98–108.

   Kopachevsky, N. D., Orlova, L. D., Pashkova, Yu. S. Differential-operator and integro-differential equations in the problem of small oscillations of hydrodynamic systems. TJCM, 41:2, 98-108 (1995).
5. *Пашкова, Ю. С.* Колебания жидкости в сосуде, закрытом упругой мембраной, и общие вопросы эволюции гидродинамических систем. — Донецк: Автореф. дис., 1996. — 15 с.

   Pashkova, Yu. S. Fluid oscillations in a vessel closed by an elastic membrane, and general questions of evolution hydrodynamic systems. PhD thesis, Donetsk, 1996. (in Russian)

6. *Кононов, Ю. Н., Шевченко, В. П.* Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими инерционными мембранами на свободной и внутренней поверхностях // Теор. прикл. мех. — 2001. — №32. — С. 158–163.

Kononov, Yu. N., Shevchenko, V. P. Free vibrations of two-layer fluid with an inertial elastic membrane on free and inner surfaces, Theoretical and applied mechanics, 32, 158–163 (2001).

7. *Тихонов, А. Н ., Самарский, А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. — 592 с.

Tikhonov, A. N., Samarskii, A. A. Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1972. (in Russian)

8. *Kopachevsky, N. D., Krein, S. G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid. — Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2001.

9. *Цветков, Д. О.* Колебания стратифицированной жидкости, частично покрытой крошеным льдом // Известия вузов. Математика. — 2018. — Т. 12 — С. 70-85.

Tsvetkov, D. O. Oscillations of Stratified Liquid Partially Covered by Crumpling Ice. Russian Mathematics, 62:12, 58-72 (2018).

10. Михлин, С. Г. Курс математической физики. — М.: Наука, 1968. — 576 с.

Mikhlin, S. G. A course of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1968. (in Russian)

11. Копачевский, Н. Д. Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения. — Симферополь: ООО "Форма" . 2016. — 280 с.

Kopachevsky, N. D. Abstract Green formula and some of its applications. Simferopol, 2016. (in Russian)

12. Копачевский, Н. Д., Цветков, Д. О. Малые движения идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, полностью покрытой крошеным льдом // Уфимский математический журнал. — 2018. — Том 10, №3. — С. 44–59.

Kopachevsky, N. D., Tsvetkov, D. O. Small motions of ideal stratified liquid with a free surface totally covered by a crumbled ice, Ufa Math. J., 10:3, pp. 43-58 (2018).

13. Копачевский, Н. Д. Интегродифференциальные уравнения Вольтера в гильбертовом пространстве: Специальный курс лекций. — Симферополь, 2012. — 152 с.

Kopachevsky, N. D. Volterra integro-differential equations in Hilbert space: Special lecture course. Simferopol, 2012. (in Russian)

14. Голдстейн, Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Вища школа, 1989. — 347 с.

Goldstein, J. A. Semigroups of linear operators and applications. Oxford: Oxford University Press, 1985.

15. *Копачевский, Н. Д.* Спектральная теория операторных пучков: Специальный курс лекций. — Симферополь, 2009. — 128 с.

Kopachevsky, N. D. Spectral theory of operator pencil. Simferopol, 2009. (in Russian)

Получена 01.03.2019