Динамические системы, 2019, том 9(37), №1, 17–25

УДК 517.9+521.1+531.3

Обмен энергией в резонансных обратимых механических системах[1]

В. Н. Тхай

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,
Москва 117997. *E-mail: tkhai@ipu.ru*

Аннотация. В окрестности равновесия изучается обратимая механическая система. Показывается, что при отсутствие резонанса обмен энергией между подсистемами невозможен. В ситуации резонансов 1:2 и 1:3 описывается сценарий обмена энергией между подсистемами.

Ключевые слова: обратимая механическая система, энергия, резонанс, обмен.

Energy exchange in resonant reversible mechanical systems

V. N. Tkhai

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow 117997.

Abstract. In the vicinity of equilibrium, a reversible mechanical system is studied. It is shown that in the absence of resonance energy exchange between the subsystems is impossible. In the situation of 1:2 and 1:3 resonances, the scenario of energy exchange between the subsystems is described.

Keywords: reversible mechanical system, energy, resonance, exchange.

MSC 2010: 37C80, 70G65, 70K30, 70S10

1. Введение

Явление обмена энергией между подсистемами наглядно демонстрируется [1] в биениях симпатических маятников: перекачка энергии сопровождается биениями маятников. В рамках линейной теории колебаний (см., например, [1]) явление объясняется близостью с близостью частот линейной связанной системы. При описании колебаний механической системы под действием позиционных сил в окрестности равновесия линейная система распадается на несвязанные линейные осцилляторы [2]. Значит, обмен энергией возможен при нелинейной связи.

Механическая система, подверженная действию потенциальных и неконсервативных позиционные силы [2], принадлежит к классу обратимых механических систем [3]. Обратимая динамическая система с фазовым вектором x и невырожденным отображением G обладает свойством пространственно-временной симметрии в смысле инвариантности относительно преобразования: $(x, t) \to (Gx, -t)$. В случае

$$G = \left\| \begin{array}{cc} I_l & 0 \\ 0 & I_n \end{array} \right\|, \quad l \geq n$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант No. № 19-01-00146

(I_j – единичная $(j \times j)$-матрица) получим обратимую механическую систему. Фазовое пространство этой системы задается векторами u и v, так что $dimu = l, dimv = n$, а преобразование симметрии имеет вид: $(u, v, t) \to (u, -v, -t)$. Множество $M = \{u, v : v = 0\}$ называется неподвижным множеством обратимой механической системы.

Обратимыми механические системами описывается динамика большинства моделей классической и небесной механики [3]. При этом за вектор u обычно принимается вектор обобщенных координат (квазикоординат), а за вектор v — вектор обобщенных скоростей (квазискоростей).

В нерезонанной ситуации в нормализованной (до сколь угодно большого конечного порядка) системе нелинейные связи между подсистемами отсутствуют [2]. Следовательно, обмен энергией между подсистемами возможен только при резонансе. Ниже рассматриваются резонансы третьего (1:2) и четвертого (1:3) порядков.

Такие резонансы важны для объяснения явлений в квантовой механике [5, 6] (1:2), нелинейной оптике [7] (1:2), физике плазмы [8] (1:2), небесной механике [9, 10] (1:2, 1:3), механике [2, 11] (1:3, 1:2). Обмен энергией между осцилляторами в гамильтоновой системе рассматривался [12] (резонанс 1:2) для системы первого нелинейного приближения. Обмен энергией наблюдается в конкретных механических задачах (см., например, [11, 13]). Явление обмена энергией проявляется на условно-периодических движениях [14, 15, 16, 17]: изучался резонанс 1:2. Качественное исследование обратимой системы при резонансе 1:3 дано в [18].

Цель работы — описать процесс обмена энергией в обратимых механических системах при резонансах 1:2 и 1:3.

2. Обратимая механическая система в окрестности равновесия

Постоянные решения обратимой механической системы, принадлежащие неподвижному множеству M, называются равновесиями этой системы. Полагая, что для равновесия $u = 0, v = 0$, и выделяя явно линейное приближение, запишем уравнения обратимой механической системы

$$\dot{u}_* = A_* v + U_*(u_*, v_*), \quad \dot{v}_* = B_* u_* + V_*(u_*, v_*), \tag{2.1}$$

$$U_*(u_*, -v_*) = -U_*(u_*, v_*), \quad V_*(u_*, -v_*) = V_*(u_*, v_*); u_* \in R^l, v_* \in R^n, l \geq n. \tag{2.2}$$

Постоянные матрицы A_* и B_* имеют размеры $(l \times n)$ и $(n \times l)$, соответственно.

Матрица A_* имеет не более n линейно независимых строк. Элементарное преобразование приводит A_* к виду, в котором $l-n$ строк заполнены нулями. Обозначим через ξ переменные u_*, отвечающие этим строкам. Тогда система (2.1) перепишется в виде

$$\dot{\xi} = \Xi(\xi, u, v), \quad \dot{u} = Av + U(\xi, u, v), \quad \dot{v} = Bu + B_1\xi + V(\xi, u, v), \quad \xi \in R^{l-n}; u, v \in R^n, \tag{2.3}$$

где A и B — квадратные $(n \times n)$-матрицы. Видно, что характеристическое уравнение в системе (2.3) имеет $l - n$ простых нулевых корней. Остальные корни λ находятся из уравнения

$$\det \|AB - \lambda^2 I_n\| = \det \|B - \lambda^2 I_n\| = 0 \tag{2.4}$$

и распадаются на пары $\pm\lambda_s, s = 1, \dots, n$.

Далее рассмотрим случай, когда $\det B \neq 0$, что обычно выполняется в механических задачах. Тогда, заменяя в (2.3) переменную u на $u + B^{-1}B_1\xi$, получим систему (2.3) с матрицей $B_1 = 0$.

Пусть все $\lambda_s^2 < 0, s = 1, \dots, n$ и среди них нет равных между собой. В этом случае $\text{rank}A = \text{rank}B = n$. Приведем систему линейного приближения к каноническому виду. Тогда получим

$$\frac{d\xi}{dt} = \Xi(\xi, \eta, \bar{\eta}), \quad \frac{d\eta}{dt} = \Lambda\eta + H(\xi, \eta, \bar{\eta}), \quad \frac{d\bar{\eta}}{dt} = -\Lambda\bar{\eta} + \bar{H}(\xi, \eta, \bar{\eta}), \tag{2.5}$$

где $\eta, \bar{\eta}$ — комплексно-сопряженные n-векторы, а $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Соответствующее линейное преобразование выберем в виде

$$\eta = P_*u + Q_*, \quad \bar{\eta} = \bar{P}_*u + \bar{Q}_*v, \tag{2.6}$$

в котором $P_*, \bar{P}_*(Q_*, \bar{Q}_*)$ – комплексно-сопряженные $(n \times n)$-матрицы. Тогда матрицы P_* и Q_* удовлетворяют уравнениям

$$P_*AB = \Lambda^2 P_*, \quad Q_*BA = \Lambda^2 Q_*. \tag{2.7}$$

Уравнения (2.7) совместны в силу справедливости характеристического уравнения (2.4). Решения их не единственны. Найдем такое решение, чтобы система (2.5) была инвариантна относительно замены: $(\xi, \eta, \bar{\eta}, t) \to (\xi, \bar{\eta}, \eta, -t)$. Тогда обратимая механическая система (2.5) будет иметь такое неподвижное множество: $M^* = \{\xi, \eta, \bar{\eta} : \eta = \bar{\eta}\}$. Соответственно, разложения правых частей системы (2.5) содержат только чисто мнимые коэффициенты.

Решения уравнений (2.7), удовлетворяющие указанному условию, имеют вид

$$P_* = \Lambda P, \quad Q_* = PA, \quad PC = \Lambda^2 P, \quad C = AB, \tag{2.8}$$

где матрица P содержит только чисто мнимые элементы. При этом матрица P — невырожденная: строки P являются собственными векторами оператора C^T, соответствующими различным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Обратное преобразование задается формулами

$$u = P^{-1}\left(\frac{\eta_1 + \bar{\eta}_1}{2\lambda_1}, \dots, \frac{\eta_n + \bar{\eta}_n}{2\lambda_n}\right), \quad v = A^{-1}P^{-1}\left(\frac{\eta_1 - \bar{\eta}_1}{2}, \dots, \frac{\eta_n - \bar{\eta}_n}{2}\right)^T.$$

Отсюда следует, что вектор u задается действительной матрицей, а вектор v — матрицей из чисто мнимых элементов. Поэтому разложение функции $U(\xi, \eta, \bar{\eta})$ содержит только чисто мнимые коэффициенты, а разложение $V(\xi, \eta, \bar{\eta})$ — только действительные коэффициенты. Поэтому разложения функций $\Xi(\xi, \eta, \bar{\eta}), H(\xi, \eta, \bar{\eta}), \bar{H}(\xi, \eta, \bar{\eta})$ содержат только чисто мнимые коэффициенты.

Лемма 1. *Пусть корни* $\lambda_s^2, s = 1, \ldots, n$, *уравнения (2.4) отрицательны. Тогда преобразованием (2.6), (2.7), (2.8) система (2.3) приводится к виду (2.5), в котором разложения правых частей уравнений содержат только чисто мнимые коэффициенты.*

При нелинейной нормализации системы (2.5) чисто мнимость коэффициентов в разложениях правых частей сохраняется (см. [19, сохранение автоморфизма]). Выполним эту нормализацию до членов $(K-1)$-го порядка. Предположим, что в системе отсутствуют резонансы до K-го порядка

$$p_1\lambda_1 + \ldots + p_n\lambda_n = K,$$

где $p_1, \ldots, p_n$ суть натуральные числа. Тогда с точностью до членов $(K-1)$-порядка нормальная форма системы (2.5) имеет вид

$$\frac{d\xi}{dt} = 0, \quad \frac{d\eta}{dt} = \Lambda\eta + i\Phi(\eta\bar{\eta}), \quad \frac{d\bar{\eta}}{dt} = -\Lambda\bar{\eta} - i\Phi(\eta\bar{\eta})$$

(Φ — полином по $\eta\bar{\eta}$ с действительными коэффициентами). Следовательно, нормальная форма допускает первые интегралы

$$\xi = const, \quad \eta\bar{\eta} = const,$$

и обмена энергией между подсистемами не происходит.

Лемма 2. *При отсутствие в системе (2.3) резонансов до K-го порядка включительно в укороченной до членов $(K-1)$-го порядка системе обмена энергией между подсистемами не происходит.*

Ниже положим $l = n = 2$.

3. Обмен энергией при резонансе 1:2

Рассмотрим резонанс третьего порядка $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$. Нормальная форма системы (2.3) записывается в виде

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \lambda_1\eta_1 + iB_1\bar{\eta}_2^2 + \ldots, \quad \frac{d\eta_2}{dt} = \lambda_2\eta_2 + iB_2\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2 + \ldots, \tag{3.1}$$

где B_1, B_2 — действительные коэффициенты, а не выписанные явно слагаемые имеют порядок не выше второго; комплексно-сопряженная группа уравнений опущена.

Рассмотрим укороченную до квадратичных членов систему. В полярных координатах

$$\eta_s = \rho_s \exp(i\theta_s), \quad \bar{\eta}_s = \rho_s \exp(-i\theta_s), \quad s = 1, 2,$$

имеем

$$\dot{\rho}_1 = B_1\rho_2^2 \sin(\theta_1 + 2\theta_2), \quad \dot{\rho}_2 = B_2\rho_1\rho_2 \sin(\theta_1 + 2\theta_2),$$

$\dot{\theta}_1 = \omega_1 + B_1\rho_1^{-1}\rho_2^2\cos(\theta_1+2\theta_2), \quad \dot{\theta}_2 = -\omega_2 + B_2\rho_1\cos(\theta_1+2\theta_2), \quad \lambda_1 = i\omega_1, \lambda_2 = -i\omega_2.$
Учитывая равенство

$$\omega_1 + 2\omega_2 = 0,$$

группу уравнений для угловых переменных заменим одним уравнением для $\theta = \theta_1 + 2\theta_2$. Тогда получим замкнутую систему уравнений

$$\dot{\rho}_1 = B_1\rho_2^2\sin\theta, \quad \dot{\rho}_2 = B_2\rho_1\rho_2\sin\theta, \quad \dot{\theta} = (B_1\rho_1^{-1}\rho_2^2 + 2B_2\rho_1)\cos\theta. \tag{3.2}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в существовании двух первых интегралов

$$B_2\rho_1^2 - B_1\rho_2^2 = \gamma(const), \quad \rho_1\rho_2^2\cos\theta = h(const), \tag{3.3}$$

в системе (3.2). Интегралы позволяют выполнить полный анализ системы.

Система (3.2) обладает очевидным многообразием решений, на котором

$$\rho_1 = \rho_1^0 > 0, \quad \rho_2 = 0, \quad \dot{\theta} = 2B_2\rho_1^0\cos\theta. \tag{3.4}$$

Из третьего уравнения системы (3.2) следует возможность существования решения, на котором $\theta(t) \equiv \pm\pi/2$, а углы меняются таким образом: $\dot{\rho}_1 = \pm B_1\rho_2^2, \dot{\rho}_2 = \pm B_2\rho_1\rho_2$. При $B_1B_2 > 0$ это означает существование решения, асимптотического к постоянному решению многообразия (3.4). В случае $B_1B_2 < 0$ первый интеграл будет знакоопределенным: решение $\rho_1 = \rho_2 = 0$ системы (3.2) будет устойчивым, а ее траектории принадлежат эллипсам в первом квадранте плоскости (ρ_1, ρ_2). Исследуем случай устойчивости.

Невозможность существования решения, на котором $\dot{\theta} = 0, \cos\theta \neq 0$, доказывается вычислениями:

$$B_1\rho_2^2 = -2B_2\rho_1^2, \quad \rho_2 = \sqrt{-2B_2/B_1}\rho_1,$$

$$\dot{\rho}_1 = B_1(-2B_2/B_1)\rho_1^2\sin\theta, \quad \sqrt{-2B_2/B_1}\dot{\rho}_1 = 2B_2\rho_1^2\sqrt{-2B_2/B_1}\sin\theta.$$

Рассмотрим решения, на которых $\rho_2 > 0, \quad \theta(t) \neq \pm\pi/2$. Записывая второй интеграл в (3.3) в виде

$$\rho_1(B_2\rho_1^2 - \gamma)\cos\theta = h/B_1,$$

убеждаемся в колебательном характере радиуса $\rho_1(\cos\theta(t))$. Далее, из равенства

$$d\rho_1/d\rho_2 = B_1\rho_1/(B_2\rho_2) \tag{3.5}$$

с учетом первого интеграла в (3.3) получается вывод об колебательном характере радиуса ρ_2, противоположным характеру ρ_1. Отсюда следует обмен энергией между подсистемами.

При $B_1B_2 > 0$ нулевое решение системы (3.1) неустойчиво [2]. Отсутствие обмена энергии между подсистемами в этом случае следует из равенства

$$B_2\rho_1^2 = B_1\rho_2^2 + \gamma. \tag{3.6}$$

4. Обмен энергией при резонансе 1:3

Обратимся к двухчастотному резонансу четвертого порядка

$$\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0.$$

Здесь нормальная форма системы (2.3) записывается в виде

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \lambda_1\eta_1 + i(A_{11}|\eta_1|^2 + A_{12}|\eta_2|^2)\eta_1 + iB_1\bar{\eta}_2^3 + \ldots,$$

$$\frac{d\eta_2}{dt} = \lambda_2\eta_2 + i(A_{21}|\eta_1|^2 + A_{22}|\eta_2|^2)\eta_2 + iB_2\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2^2 + \ldots,$$

где $A_{ij}, B_i (i,j = 2)$ — действительные коэффициента, а не выписанные явно слагаемые имеют порядок не выше третьего; комплексно-сопряженная группа уравнений опущена.

Рассмотрим случай, когда $B_1B_2 \neq 0$. Тогда, согласно ранее полученным результатам [2], необходимым и достаточным условием укороченной до членов третьего порядка системы является выполнение одного из двух условий: а) $B_1B_2 < 0$, б) $B_1B_2 > 0, |A_1B_1 + A_2B_2| > |B_1||B_2|^{3/2}$. Как следует из рассмотрения резонанса 1:2 обмен энергией происходит в случае устойчивости.

Выпишем укороченную систему в полярных координатах

$$\dot\rho_1 = B_1\rho_2^3\sin\theta, \quad \dot\rho_2 = B_2\rho_1\rho_2^2\sin\theta,$$

$$\dot\theta_1 = \omega_1 + A_{11}\rho_1^2 + A_{12}\rho_2^2 + B_1\rho_1^{-1}\rho_2^3\cos\theta, \quad \dot\theta_2 = -\omega_2 + A_{21}\rho_1^2 + A_{22}\rho_2^2 + B_2\rho_1\rho_2\cos\theta,$$

$$\lambda_1 = i\omega_1, \lambda_2 = -i\omega_2, \theta = \theta_1 + 3\theta_2.$$

Учитывая равенство

$$\omega_1 + 3\omega_2 = 0,$$

группу уравнений для углов заменим одним уравнением для θ. Тогда получим замкнутую систему уравнений

$$\dot\rho_1 = B_1\rho_2^3\sin\theta, \quad \dot\rho_2 = B_2\rho_1\rho_2^2\sin\theta, \quad \dot\theta = A_1\rho_1^2 + A_2\rho_2^2 + (B_1\rho_1^{-1}\rho_2^3 + 3B_2\rho_1\rho_2)\cos\theta,$$
$$A_j = A_{1j} + 3A_{2j}, \quad j = 1, 2. \tag{4.1}$$

Система (4.1) обладает очевидным многообразием периодических решений, на котором

$$\rho_1 = \rho_1^0 > 0, \quad \rho_2 \equiv 0, \quad \dot\theta = A_1(\rho_1^0)^2. \tag{4.2}$$

На постоянных решениях системы (4.1) имеем: $\rho_1 = const$, $\rho_2 = const$, $\theta \equiv 0$: значения радиусов вычисляются из третьего уравнения системы. Для остальных решений справедливо равенство (3.5).

Система (4.1) допускает два первых интеграла [2]

$$V \equiv B_2\rho_1^2 - B_1\rho_2^2 = \gamma(const),$$

$$W \equiv A_1 B_2 \rho_1^4 + A_2 B_1 \rho_2^4 + 4 B_1 B_2 \rho_1 \rho_2^3 \cos\theta = h(const).$$

Из интеграла V и равенства (3.5) следует, что в случае $B_1 B_2 < 0$, радиусы ρ_1 и ρ_2 меняются разно направлено: присходит обмен энергией между подсистемами.

Исследуем случай $B_1 B_2 > 0$. Связка интегралов

$$H = V^2 + W^2$$

будет знакоопределенной, если на многообразии $V = 0$ функция $W|_{V=0} \neq 0$. Вычислим

$$W|_{V=0} = B_1^{-1} B_2 [A_1 B_1 + A_2 B_2 + 4|B_1|^{1/2} |B_2|^{3/2} \cos\theta] \rho_1^4 \neq 0,$$

если

$$|A_1 B_1 + A_2 B_2| > 4|B_1|^{1/2} |B_2|^{3/2}.$$

Отсюда следует устойчивость. Однако обмен энергией между подсистемами не наблюдается, что следует из записи

$$B_2 \rho_1^2 = B_1 \rho_2^2 + \gamma.$$

5. Заключение

Изучение обратимой механической системы в окрестности равновесия показывает, что при отсутствии резонанса обмен энергией между подсистемами невозможен. В случае резонанса 1:2 подсистемы обмениваются энергией, когда само равновесие устойчиво. В ситуации резонанса 1:3 явление наблюдается в случае знакоопределенности квадратичного интеграла, в противной случае подсистемы не обмениваются энергией как в окрестности устойчивого, так и неустойчивого равновесия.

Список цитируемых источников

1. *Зоммерфельд А.* Механика. — Москва-Ижевск: РХД, 2001. — 368 с.

   Sommerfeld, A. Vorlesungen über theoretische Physik. Bd. 1: Mechanik. Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft Becker & Erler Kom.-Ges. (1943).

2. *Тхай В.Н.* Об устойчивости механических систем под действием позиционных сил // Прикладная математика и механика. — 1980. —Т.44, вып.1. — С. 40–48.

   Thai, V. N. On stability of mechanical systems under the action of position forces. Journal of Applied Mathematics and Mechanics 44, No.1, 24-29 (1980).

3. *Тхай В.Н.* Обратимость механических систем // Прикладная математика и механика. — 1991. —Т. 55, вып.4. — С. 578–586.

   Thai, V. N. The reversibility of mechanical systems. Journal of Applied Mathematics and Mechanics 55, No.4, 461-468 (1991).

4. *Lamb J.S.W., Roberts J.A.G.* Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey // Physica D. — 1998. — V.112. No.1-2. P. 1–39.

5. *Fermi E. Ü*ber der Ramnefect des kohlendioxyds // Z. Phys.— 1931. — T.71, №2. — S. 250–259.

6. *Витт А., Горелик Г.* Колебания упругого маятника как пример колебаний двух параметрически связанных линейных систем // Журнал технической физики. — 1933. — Т. III, вып. 2-3. —С. 294–307.

   Vitt, A., Gorelik, G. Oscillations of an elastic pendulum as an example of oscillations of two parametrically coupled linear systems. Zhurnal tekhnicheskoi fiziki 3, issue 2-3, 294–307 (1933). (in Russian)

7. *Ахманов С.А., Хохлов Р.В.* Проблемы нелинейной оптики (электромагнитные волны в нелинейных диспергирующих средах). М.: АН СССР, Институт научной информации, 1964. — 298 с.

   Akhmanov, S. A., Khokhlov, R. V. Problems of nonlinear optics (electromagnetic waves in nonlinear dispersive media). Moscow: AN SSSR, 1964. (in Russian)

8. *Wersinger J.M., Finn J.M., Ott E.* Bifurcation and strange behavior in instability saturation by nonlinear three-wave mode coupling // Physics of Fluids. — 1980. — T. 23, №6. — P. 1142–1164.

9. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. — М.: Наука, 1978. — 312 с.

   Markeev, A. P. Libration points in celestial mechanics and cosodynamics. Moscow: Nauka, 1978. (in Russian)

10. *Куницын А.Л., Маркеев А.П.* Устойчивость в резонансных случаях // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1979. — Т.4. — С. 58–139.

    Kunitsyn, A. L.; Markeev, A. P. Stability in resonance cases. Itogi Nauki Tekh., Ser. Obshch. Mekh. 4, 58-139 (1979). (in Russian)

11. *Морозов Н.Ф., Товстик П.Е.* Поперечные колебания стержня, вызванные продольным ударом. — Доклады РАН. — 2013. — Т. 452, № 1. —С. 37–41.

    Morozov, N. F.; Tovstik, P. E. Transverse vibrations of the rod caused by longitudinal impact. Doklady RAN 452, No.1, 37-41 (2013). (in Russian)

12. *Цельман Ф.Х.* О перекачке энергии между связанными осцилляторами в случае резонанса третьего порядка // Прикладная математика и механика. — 1970. — Т.14, вып.5. — С. 957–962.

    Tsel'man, F. Kh. On "pumping transfer of energy" between nonlinearly coupled oscillators in third-order resonance. Journal of Applied Mathematics and Mechanics 34, No.5, 916-922 (1970).

13. *Алдошин Г.Т., Яковлев С.П.* Динамика качающейся пружины с подвижным подвесом // Вестник СПбГУ. Сер.1. — 2012. — Вып.4. — С. 45–52.

    Aldoshin, G. T.; Yakovlev, S. P. Dynamics of a swinging spring with a movable suspension. Vestnik SPBGU, ser.1, No.4, 45-52 (2012). (in Russian)

14. *Knobloch E., Proctor R.E.* The double Hopf bifurcation with 2:1 resonance // Proceedings of the Royal Society of London. A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 1988. — T. 415, №1848. — C. 61-90.

15. *LeBlanc V.G., Langford W.F.* Classification and unfoldings of 1:2 resonant Hopf bifurcations. Arhive for rational mechanics and analysis 136, No.4, 305–357 (1996).

16. *Volkov D.Yu.* The Andronov-Hopf bifucations with 2:1 resonance. Journal of Mathematical Sciences 128, No.2, 2831–2834 (2005).

17. *Холостова О.В.* О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе третьего порядка // Прикладная математика и механика. — 2010. —Т.74, вып.5. — С. 789–811.

 Kholostova, O. V. Non-linear oscillations of a Hamiltonian system with two degrees of freedom with 2:1 resonance. Journal of Applied Mathematics and Mechanics 74, No.5, 563-578 (2010).

18. *Тхай В.Н.* Качественное исследование обратимой системы на плоскости при резонансе 1:3 // Некоторые задачи динамики механических систем. — М.: МАИ, 1991. — С. 50–56.

 Thai, V. N. Qualitative investigation of a reversible system on a plane at a 1: 3 resonance. In Nekotorye zadachi dinamiki mekhanicheskikh sistem (pp. 50-56), Moscow: MAI, 1991.

19. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979. — 253 с.

 Bruno, A. D. Local methods in nonlinear differential equations. Part I: The local method of nonlinear analysis of differential equations; Part II: The sets of analyticity of a normalizing transformation. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1989.

Получена 26.10.2018