

УДК 517.9

Синхронизация двух простейших автогенераторов с релейными запаздывающими обратными связями

Д. С. Кащенко

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Ярославль 150003. E-mail: *kasch@uniyar.ac.ru*

Аннотация. Численными и аналитическими методами исследована динамика системы из двух связанных автогенераторов первого порядка с релейной запаздывающей обратной связью. В пространстве параметров выделены области “быстрой” и “долгой” синхронизации, исследован вопрос о синхронизации на неустойчивом цикле, при малых коэффициентах связи аналитическими методами показано, что динамика исходной системы определяется динамикой специального одномерного отображения.

Ключевые слова: устойчивость, динамика, релаксационные циклы, нерегулярные колебания.

Synchronization of two simplest autogenerators with delay reling feedbacks

D. S. Kaschenko

P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl 150003.

Abstract. The dynamics of a system of two coupled first-order autogenerators with a relay delay feedback is studied by numerical and analytical methods. In the parameter space, areas of “fast” and “long” synchronization are highlighted, the issue of synchronization on an unstable cycle is investigated, with small coupling coefficients using analytical methods, it is shown that the dynamics of the original system is determined by the dynamics of a special one-dimensional map.

Keywords: stability, dynamics, relaxation cycles, irregular oscillations.

MSC 2010: 47D99

Введение

Исследованию явлений синхронизации взаимодействующих динамических систем в настоящее время уделяется особое внимание. Из сферы чисто теоретических интересов эти явления перешли в область практического применения. Проведенные в последние годы исследования привели к формированию новых представлений о роли синхронизации (в том числе, синхронизации сложных — хаотических режимов) в природе, наметились перспективы их использования для создания новых информационных технологий. Имеется значительное число аналитических и экспериментальных исследований хаотической синхронизации в динамических системах различной природы [1-11]. Несмотря на то, что в ряде работ получены

достаточно общие результаты, характеризующие закономерности возникновения хаотической синхронизации, дальнейшее изучение этого явления представляет как теоретический, так и практический интерес.

В данной работе исследуется явление синхронизации в системе двух связанных простых автогенераторов первого порядка с нелинейной запаздывающей обратной связью релейного типа. Такие системы широко используются в ряде конкретных приложений, например, в электротехнике [12,13].

Статья состоит из трех разделов. В первом из них исследуется динамика базовой математической модели автогенератора указанного класса. Показано, что уравнение имеет единственный устойчивый цикл и счетное множество неустойчивых. Приведены результаты численного анализа, из которых следует, что все решения (с начальными условиями, удовлетворяющими условию типа невырожденности) при $t \rightarrow \infty$ стремятся к устойчивому циклу. Важное значение имеет оценка времени сходимости решений к циклу в зависимости от величины запаздывания и от степени сложности начальных условий. Часть результатов этого раздела изложена в [14].

Второй раздел является основным. Сначала в нем сформулирован критерий синхронизации для “системы первого приближения”, которой служит дискретная система уравнений. Как оказывается для исходной задачи о синхронизации в системе двух связанных генераторов этот критерий имеет важное значение. При его выполнении происходит “быстрая” синхронизация колебаний, а при его нарушении — “долгая”. В последнем случае построен график зависимости времени синхронизации от параметра запаздывания.

При уменьшении коэффициентов связи между генераторами структура решений может усложняться. В связи с этим в третьем разделе рассмотрена задача о динамике двух слабо связанных уравнений. Построено конечномерное отображение, динамика которого описывает поведение решений исходной системы.

1. Динамика уравнения первого порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} + x = f(x(t - T)), \quad (1)$$

где $T > 0$ — время запаздывания, а $f(s)$ — функция релейного типа:

$$f(s) = \begin{cases} 1, & s < g \\ 0, & s \geq g \end{cases}, \quad 0 < g < 1. \quad (2)$$

Отметим сразу, что данное уравнение не имеет состояний равновесия.

1.1. Простейший цикл

Назовем цикл $x_0(t, T)$ уравнения (1) *медленно осциллирующим*, если расстояние между соседними корнями уравнения $x_0(t, T) = g$ больше, чем T .

Пусть $x_0(0, T) = g$ и $\dot{x}_0(0, T) < 0$. Тогда из условия медленной осцилляции $x_0(t, T)$ следует неравенство $x_0(t, T) > g$ при $t \in [-T, 0]$, и при $t \in (0, T)$ имеем $x_0(t, T) = g \exp(-t)$. На некотором отрезке, примыкающем справа к точке $t = T$ справедливо соотношение

$$x_0(t, T) = x_0(T, T) \exp -(t - T) + 1 - \exp(-(t - T)). \quad (3)$$

Пусть t_1 и t_2 , соответственно, первый и второй положительные корни уравнения $x_0(t, T) = g$. Тогда из (3) получаем, что

$$t_1 = T + \ln \frac{1 - g \exp(-T)}{1 - g}. \quad (4)$$

Формула (3) остается в силе при $t \in (T, t_1 + T]$. На отрезке $[t_1 + T, t_2]$ имеем равенство

$$x_0(t, T) = x_0(t_1 + T, T) \exp(-(t - (t_1 + T))),$$

а для t_2 верна формула

$$t_2 = t_1 + T + \ln \frac{x_0(t_1 + T, T)}{g}. \quad (5)$$

В итоге получаем следующий результат:

Теорема 1. Уравнение (1) имеет экспоненциально орбитально устойчивое t_2 -периодическое решение $x_0(t, T)$. Его период определяется формулами (4), (5).

На рис. 1а изображен график решения $x_0(t, T)$ при $T = 1$ и $g = 0.3$.

Приведем асимптотические формулы для периодического решения. Сначала рассмотрим случай

$$0 < g \ll 1. \quad (6)$$

Тогда формулы (4) и (5) принимают вид:

$$t_1 = T + o(1), \quad t_2 = O(|\ln(g)|).$$

Примерный вид решения $x(t)$ при $T = 1$ и $g = 0.01$ приведен на рис. 1б.

Отметим, что случай, когда параметр g близок к 1, сводится к случаю (6), если в уравнении (1) произвести замену $x \rightarrow 1 - x$.

В дальнейшем нам понадобятся асимптотики периодического решения при $T \rightarrow \infty$. Произведем в уравнении (1) замену

$$t \rightarrow Tt. \quad (7)$$

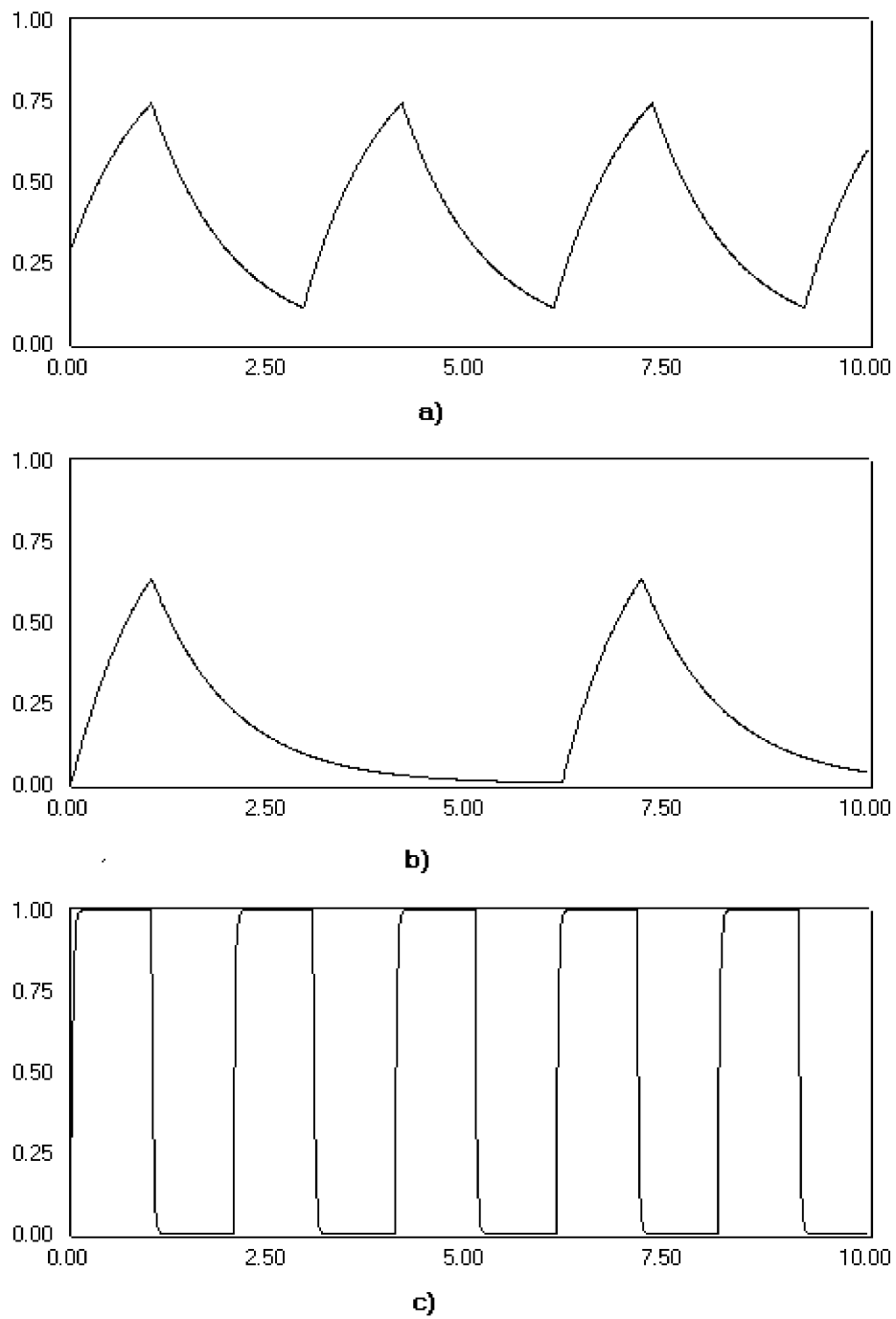


Рис. 1.

Полагая $\varepsilon = T^{-1}$, приходим к уравнению

$$\varepsilon \dot{x} + x = f(x(t-1)). \quad (8)$$

Используя формулы (3)-(5), получаем, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ простейший цикл уравнения (8) близок к ступенчатой функции, принимающей два значения 0 и 1 поочередно на интервалах времени длины $1 + o(1)$, и имеет период $2 + o(1)$. Примерный вид решения при $\varepsilon = 0.02$ и $g = 0.3$ приведен на рис. 1с.

1.2. Быстро осциллирующие периодические решения

Выше было установлено существование устойчивого периодического решения $x_0(t, T)$, медленно осциллирующего около прямой $x = g$. В этом разделе будет показано, что имеется счетное число быстро осциллирующих около этой же прямой неустойчивых периодических решений.

Рассмотрим множество начальных функций

$$C(\tau_1, \tau_2) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi(s, \tau) \in C_{[-T, 0]}, \quad 0 < \tau_1, \tau_2 < 1, \quad \tau_1 + \tau_2 < 1, \\ \varphi(-T + T\tau_1) = \varphi(-T + T(\tau_1 + \tau_2)) = \varphi(0) = g, \\ \varphi(s) > g \text{ при } s \in [-T, -T + T\tau_1) \cup (-T + T(\tau_1 + \tau_2), 0), \\ \varphi(s) < g \text{ при } s \in (-T + T\tau_1, -T + T(\tau_1 + \tau_2)) \end{array} \right\}.$$

Отметим, что решение $x(t, \tau)$ уравнения (1) с начальными условиями $x(s, \tau) \in C(\tau_1, \tau_2)$ зависит только от $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ и не зависит от выбора конкретного элемента множества $C(\tau_1, \tau_2)$. Примерный вид функции $\varphi(s, \tau)$ изображен на рис. 2.

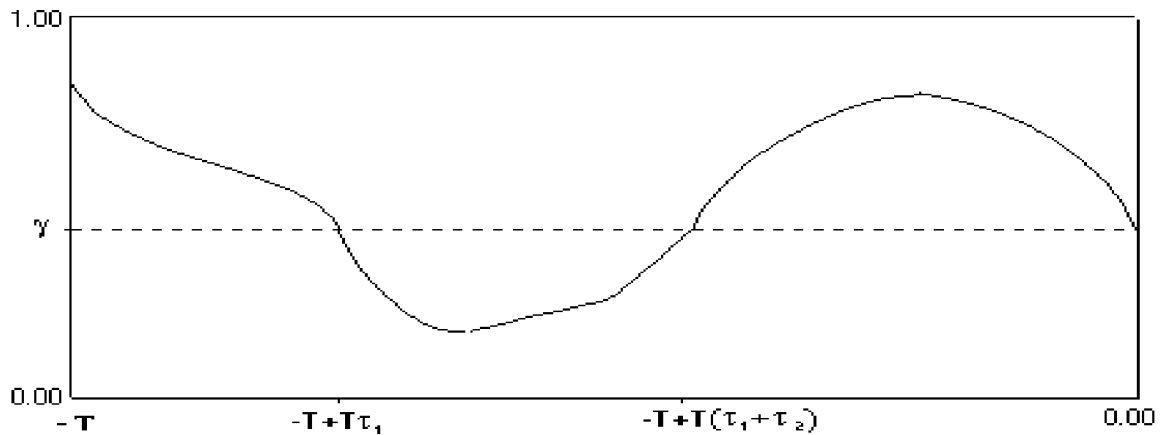


Рис. 2.

Для $x(t, \tau)$ имеем

$$\begin{aligned} x(t, \tau) &= g \exp(-t), \text{ при } t \in [0, T\tau_1], \\ x(t, \tau) &= (x(T\tau_1, \tau) - 1) \exp(-(t - T\tau_1)) + 1, \text{ при } t \in (T\tau_1, T(\tau_1 + \tau_2)], \\ x(t, \tau) &= (x(T(\tau_1 + \tau_2), \tau) - 1) \exp(-(t - T(\tau_1 + \tau_2))) + 1, \text{ при } t \in (T(\tau_1 + \tau_2), T]. \end{aligned}$$

При условии $x(T(\tau_1 + \tau_2), \tau) < g$ решение $x(t, \tau)$ через некоторое время совпадает с медленно осциллирующим периодическим решением $x_0(t + \text{const}, T)$. Пусть

$$x(T(\tau_1 + \tau_2), \tau) > g. \quad (9)$$

Обозначим, как и раньше, через t_1, t_2 — первый и второй положительные корни уравнения $x(t, \tau) = g$. Тогда получаем равенства

$$\begin{aligned} t_1 &= T\tau_1 + \ln(1 - g \exp(-T\tau_1)) - \ln(1 - g), \\ t_2 &= T(\tau_1 + \tau_2) + \ln x(T(\tau_1 + \tau_2), \tau) - \ln g. \end{aligned}$$

Если $t_2 \geq T$, то $x(t, \tau)$ через некоторое время совпадает с решением $x_0(t + \text{const}, T)$. Пусть

$$t_2 < T, \quad (10)$$

Рассмотрим оператор Пуанкаре

$$\Pi(\varphi(s, \tau)) = x(t_2 + s, \tau).$$

При условиях (9), (10) этот оператор преобразует множество $C(\tau_1, \tau_2)$ в $C(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$, где

$$\bar{\tau}_1 = 1 - t_2 T^{-1}, \quad \bar{\tau}_2 = t_1 T^{-1}. \quad (11)$$

Аналогичным способом строятся $2m$ -мерные ($m = 2, 3, \dots$) отображения, описывающие поведение решений с $2m$ пересечениями прямой $x = g$ на некоторых отрезках времени длины T . Динамика таких отображений определяет поведение решений уравнения (1) при $t \rightarrow \infty$ с начальными условиями из выбранных специальных множеств.

Покажем, что каждое из таких отображений имеет неподвижную точку. Отметим, что неподвижной точке отвечает периодическое решение уравнения (1).

Зафиксируем произвольное $z > 0$ и рассмотрим функцию $x_0(t, z)$. Через $P(z)$ обозначим период этой функции. Для каждого целого $m = 0, 1, \dots$ функция $x_0(t, z)$ является периодическим решением уравнения

$$\dot{x} + x = f(x(t - z - mP(z))).$$

Рассмотрим уравнение относительно z :

$$T = z + mP(z).$$

Поскольку функция $P(z)$ монотонно возрастает и $P(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow +0$, то это уравнение для каждого m имеет единственное решение z_m . Отсюда следует, что каждая из функций $x_0(t, z_m)$ ($m = 0, 1, \dots$) является периодическим решением уравнения (1). На интервале $(-T, 0)$ количество корней уравнения $x_0(t, z_m) = g$ равно $2m$.

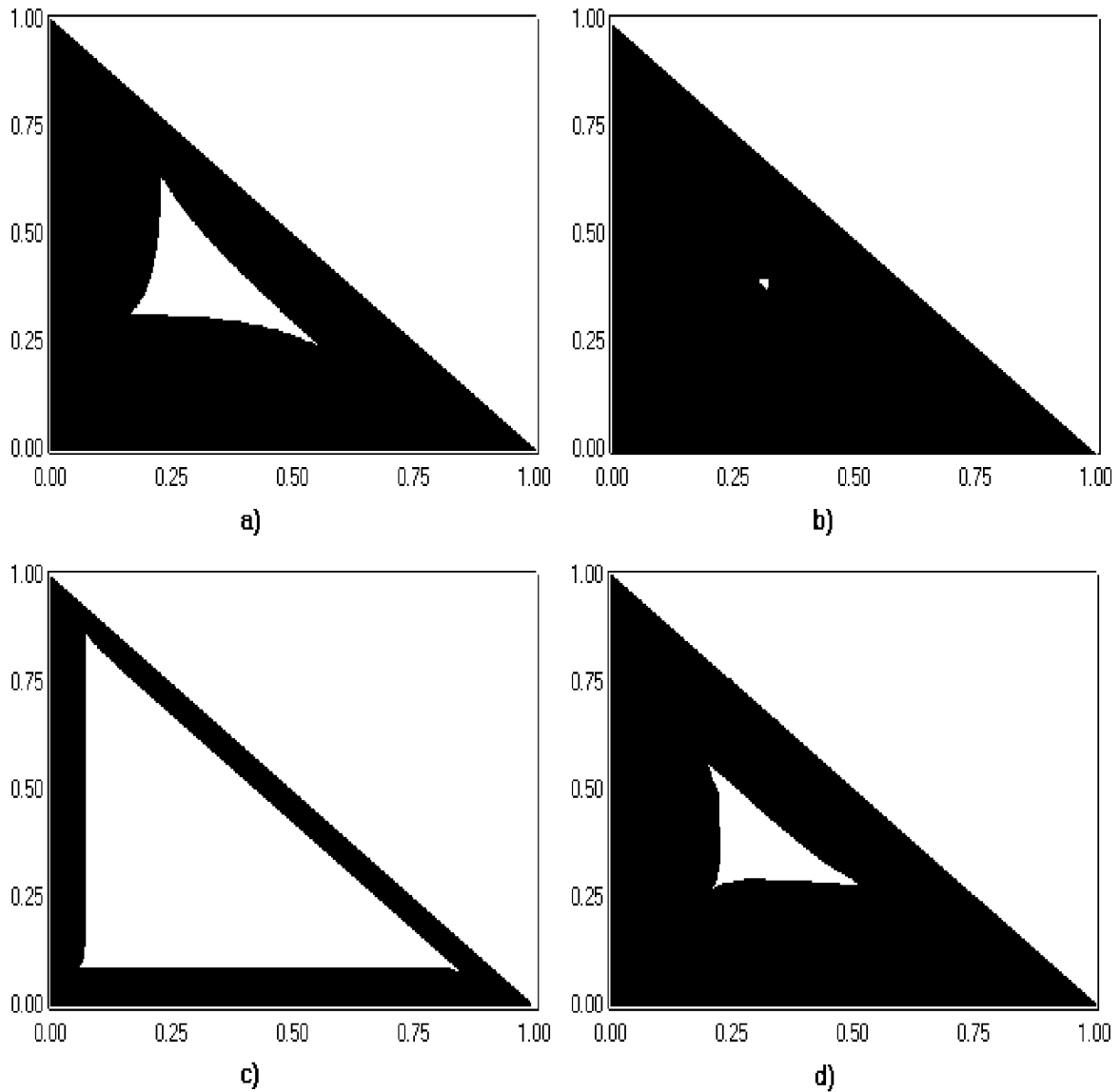


Рис. 3.

Неподвижная точка отображения (11), которой отвечает решение $x_0(t, z_1)$, легко находится из приведенных выше формул для $x_0(t, z)$. Отметим, что периодические решения $x_0(t, z_m)$ при $m \geq 1$ неустойчивы. Численный анализ показывает, что все решения (1) (кроме $x_0(t, z_0)$) через некоторое время совпадают с $x_0(t + \text{const}, T)$.

Чтобы проиллюстрировать это, на “фазовой плоскости” τ_1, τ_2 отображения (11), зафиксируем произвольно точку (τ_1, τ_2) ($0 < \tau_1, \tau_2 < 1, \tau_1 + \tau_2 < 1$), и производим, согласно (11), при $\varepsilon = 0.1$ сначала 20 (рис. 3а), а затем 100 итераций (рис. 3б), а при

$\varepsilon = 0.02$, соответственно 100 (рис. 3с), и 100000 (рис. 3d) итераций. Темным цветом на этой плоскости отмечены те точки, для которых перестают быть верными неравенства (9) и (10), т. е. соответствующее решение теряет начальную структуру и совпадает с $x_0(t + \text{const}, T)$. Отметим, что при незначительном увеличении T количество итераций, необходимых для того, чтобы все точки закрасились в темный цвет, резко возрастает (этот момент подробнее обсуждается в пункте 1.3).

1.3. Оценка времени сходимости к простейшему циклу

Уравнение (1), по-видимому, не имеет устойчивых решений, кроме простейшего цикла $x_0(t, T)$. Результаты численных экспериментов показывают, что все решения, начиная с некоторого момента времени L , совпадают с простейшим циклом. В связи с этим возникают два вопроса:

1. как зависит величина L от параметра T ?
2. как зависит величина L от начальных условий?

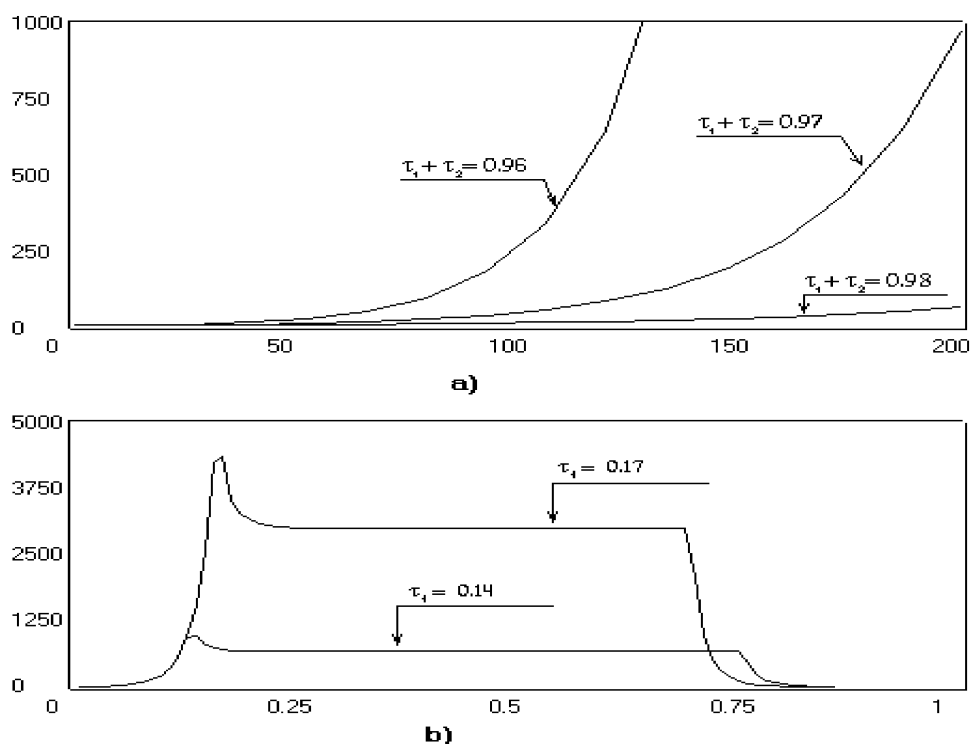


Рис. 4. Графики зависимости величины L

- a) от параметра $T = \varepsilon^{-1}$ при различных начальных условиях;
- b) от параметра τ_2 при $T = 50$, $\tau_1 = 0.14$ и $\tau_1 = 0.17$.

На рис. 4а представлены зависимости времени L от $T = \varepsilon^{-1}$ для решений с начальными функциями из $C(\tau_1, \tau_2)$. Стандартные численные методы показывают, что зависимость является экспоненциальной.

Чтобы проследить зависимость величины L от начальных условий, рассмотрим решения с начальными функциями из $C(\tau_1, \tau_2)$ (см. рис 2). Зафиксируем произвольно значение τ_1 и будем менять τ_2 от 0 до $1 - \tau_1$. На рис.4б представлены графики зависимости L от τ_2 при $\tau_1 = 0.14$ и $\tau_1 = 0.17$.

Таким образом, единственным устойчивым режимом уравнения (1) является простейший цикл, но время попадания решений в его “малую” окрестность существенно зависит от малости параметра ε и от степени “сложности” начальных условий.

2. Динамика системы двух связанных уравнений

В этом разделе мы обратимся к исследованию динамики двух одинаковых уравнений вида (1) с различными типами связи между ними. Наибольший интерес представляют два типа связи: диффузионная связь и связь через нелинейность $f(x)$. Рассмотрим отдельно каждую из них.

2.1. Динамика системы уравнений с диффузионной связью

Пусть имеется система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} + x &= f(x(t - T)) + d_1(y - x), \\ \dot{y} + y &= f(y(t - T)) + d_2(x - y), \end{aligned} \tag{12}$$

где коэффициенты диффузионной связи d_1, d_2 неотрицательны, функция $f(s)$ имеет вид (2), а время запаздывания предполагается большим:

$$T \gg 1. \tag{13}$$

Условие (13) представляет собой основное ограничение, при котором здесь исследуется вопрос о синхронизации решений системы (12).

Выполним замену времени (7) и обозначим $\varepsilon = T^{-1}$, тогда систему уравнений (12) принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} + x &= f(x(t - 1)) + d_1(y - x), \\ \varepsilon \dot{y} + y &= f(y(t - 1)) + d_2(x - y). \end{aligned} \tag{14}$$

При $\varepsilon = 0$ имеем систему двух связанных отображений:

$$\begin{aligned} x(t) &= f(x(t - 1)) + d_1(y(t) - x(t)), \\ y(t) &= f(y(t - 1)) + d_2(x(t) - y(t)). \end{aligned} \tag{15}$$

Рассмотрим сначала вопрос о синхронизации для системы (15).

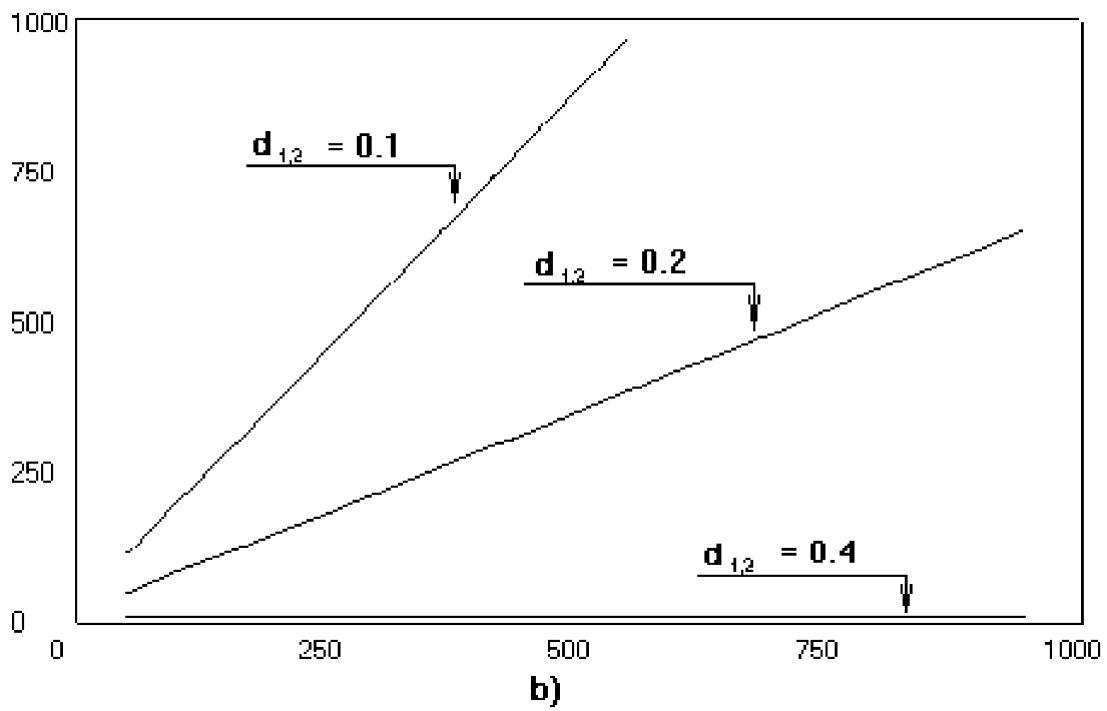
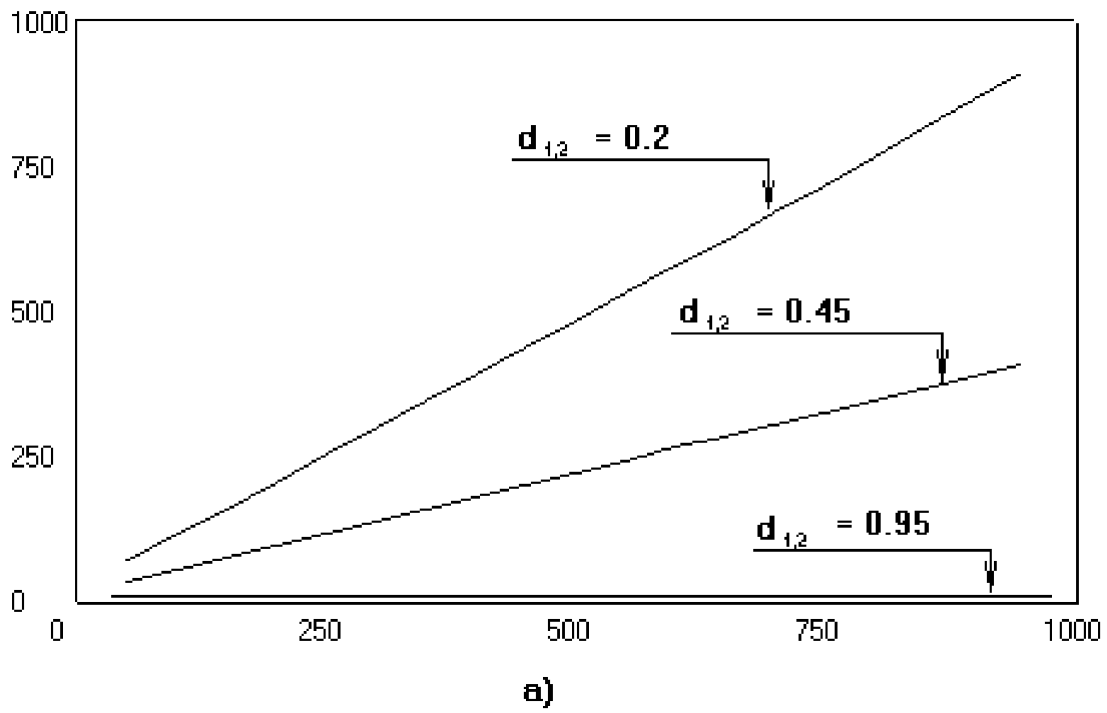


Рис. 5.

Поскольку функция f принимает только два значения: 0 и 1, то решая при некотором t систему (15) относительно x и y получаем 4 различных случая:

1. $\begin{pmatrix} f(x(t-1)) \\ f(y(t-1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \implies \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$
2. $\begin{pmatrix} f(x(t-1)) \\ f(y(t-1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \implies \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} 1 + d_2 \\ d_2 \end{pmatrix},$
3. $\begin{pmatrix} f(x(t-1)) \\ f(y(t-1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \implies \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} d_1 \\ 1 + d_1 \end{pmatrix},$
4. $\begin{pmatrix} f(x(t-1)) \\ f(y(t-1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \implies \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

где

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 + d_1 & -d_1 \\ -d_2 & 1 + d_2 \end{pmatrix} = 1 + d_1 + d_2.$$

Из приведенных формул следует, что синхронизация имеет место, если

$$\min\{g, 1 - g\} < \Delta^{-1} \max\{d_1, d_2\}, \tag{16}$$

что можно рассматривать как условие на коэффициенты связи d_1 и d_2 .

Возвращаясь к системе дифференциальных уравнений, отметим, что в общем случае динамика системы при $\varepsilon = 0$ и при $\varepsilon > 0$ существенно различна, но, как показывают численные эксперименты, при выполнении неравенства (16) (условия синхронизации при $\varepsilon = 0$) в системе (14) происходит “быстрая” синхронизация за относительно короткое время, которое не увеличивается при уменьшении ε . В численных расчетах это время не превышает 10.

Если условие (16) не выполнено, то синхронизация также имеет место, но время, через которое она происходит, существенно больше; при $\varepsilon \rightarrow 0$ оно неограниченно растет. На рис. 5а представлены графики зависимости времени синхронизации от ε^{-1} при различных значениях параметров d_1, d_2 и $g = 0.3$. Отметим, что эта зависимость оказывается линейной (если условие (16) выполнено, то график параллелен оси абсцисс).

Важно отметить, что синхронизация в системе (14) происходит существенно быстрее, чем установление простейшего цикла (см., например, рис. 4а и рис. 5а).

2.2. Динамика системы уравнений, связанных через нелинейную функцию

В случае нелинейной связи математической моделью служит система уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} + x &= f[x(t-T) + d_1(y(t-T) - x(t-T))], \\ \dot{y} + y &= f[y(t-T) + d_2(x(t-T) - y(t-T))], \end{aligned} \tag{17}$$

где коэффициенты связи d_1, d_2 удовлетворяют ограничению: $0 \leq d_1, d_2 \leq 1$, а функция $f(s)$ имеет вид (2).

Исследуется вопрос о синхронизации решений системы (17) при условии (13). После стандартной замены времени, приходим к системе

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} + x &= f[x(t-1) + d_1(y(t-1) - x(t-1))], \\ \varepsilon \dot{y} + y &= f[y(t-1) + d_2(x(t-1) - y(t-1))].\end{aligned}\quad (18)$$

Условие синхронизации вырожденной (при $\varepsilon = 0$) системы (18) состоит в выполнении неравенства

$$\min\{g, 1 - g\} < \max\{d_1, d_2\}.\quad (19)$$

При $0 < \varepsilon \ll 1$ здесь, как и в предыдущем случае, при выполнении условия (19) происходит “быстрая” синхронизация (за время, которое не увеличивается при уменьшении ε). Если условие (19) не выполнено, то синхронизация происходит за существенно большее время, которое неограниченно растет при $\varepsilon \rightarrow 0$. На рис. 5b представлены графики зависимости времени синхронизации от $T = \varepsilon^{-1}$ при различных значениях параметров d_1, d_2 и $g = 0.3$. Отметим, что эта зависимость тоже оказывается линейной (если условие (19) выполнено, то график параллелен оси абсцисс).

2.3. Оценка параметра синхронизации неустойчивого цикла

Проблема синхронизации неустойчивых циклов возникает при изучении методов обработки и передачи информации (см., например, [1]).

Выше было показано, что уравнение (1) имеет счетное число неустойчивых циклов $x_m(t) = x_0(t, z_m)$ ($m = 1, 2, \dots$). Зафиксируем произвольно $m \geq 1$. Система уравнений (12) имеет неустойчивое периодическое решение $x(t) = y(t) = x_m(t)$. Рассмотрим отдельно второе уравнение системы при $x(t) = x_m(t)$:

$$\dot{y} + y = f(y(t-T)) + d(x_m(t) - y).\quad (20)$$

Это уравнение имеет периодическое решение

$$y_m(t) = x_m(t).\quad (21)$$

Очевидно, что при малых d оно неустойчиво. Аналитическими методами довольно просто можно установить существование такого значения d_0 , что при $d > d_0$ периодическое решение (21) асимптотически устойчиво. Однако, с помощью этих методов получается лишь грубая оценка d_0 . Поэтому возникает необходимость численного нахождения величины d_0 в зависимости от параметров m и T . Кроме того, возникает проблема описания области притяжения периодического решения (21) при $d > d_0$. Такие задачи называют задачами о синхронизации на неустойчивом цикле.

Сформулируем основные результаты проведенных численных исследований.

При фиксированных T, g, ε, m значение d_0 оказывается тем больше, чем сложнее начальные условия (т.е. чем большее число пересечений прямой $y = g$ имеется на интервале $(-T, 0)$).

Обозначим через d_{max} пороговое значение величины d_0 , такое что при $d \geq d_{max}$ решение (21) оказывается глобально устойчивым при любых начальных условиях. Установлено, что $d_{max} = d_0$ в том случае, если $y(t)$ не имеет пересечений с прямой $y = g$ на интервале $(-T, 0)$ (т.е. начальное условие соответствует простейшему циклу). В таблице 1 приведены результаты расчета d_{max} для уравнения (20) в зависимости от T и m при $g = 0.3$. В таблице 2 представлены аналогичные данные для уравнения

$$\dot{y} + y = f[y(t - T) + d(x_m(t - T) - y(t - T))]$$

Таблица 1

	$m = 1$	$m = 2$
$T = 10$	0.5301	0.8171
$T = 20$	0.4335	0.4902

Таблица 2

	$m=1$	$m=2$
$T = 10$	0.3290	0.4143
$T = 20$	0.3011	0.3166

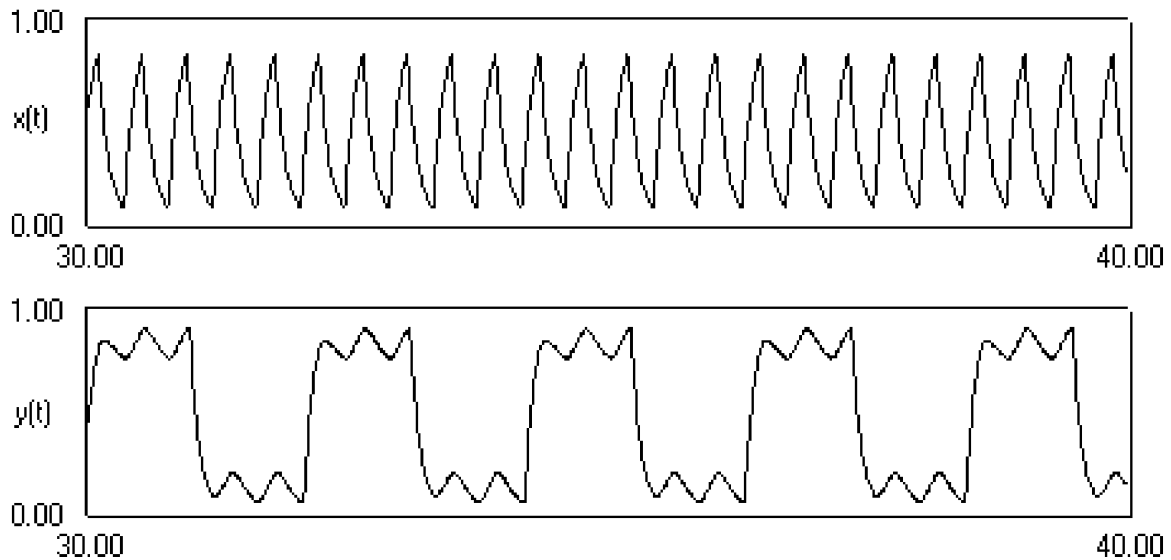


Рис. 6.

Общий вывод заключается в том, что d_{max} уменьшается при увеличении времени запаздывания T и увеличивается при увеличении m .

Заметим, что если решение (21) неустойчиво, то $y(t)$ стремится к более сложному, “близкому к периодическому” решению, вид которого при $m = 2$ представлен на рис. 6.

3. Динамика системы уравнений, при малых значениях коэффициентов связи

Численные результаты показывают, что при уменьшении коэффициентов связи d_1, d_2 структура решений систем (12) и ((17) усложняется. Поэтому представляет интерес исследовать в деталях вопрос о динамике двух слабо связанных генераторов вида (1). В настоящем разделе приведены аналитические результаты, касающиеся динамики таких систем при дополнительном условии (6), когда параметр g мал.

Эти результаты объясняют ряд сложных эффектов, обнаруженных при численном анализе систем со слабой связью.

Сразу отметим, что полученные результаты переносятся и на случай, когда g близко к 1, поскольку он сводится к предыдущему заменой $\bar{x} = 1 - x$, $\bar{y} = 1 - y$.

3.1. Динамика системы (12)

В системе (12) сделаем замену $x \rightarrow gx$, $y \rightarrow gy$, в результате чего получим

$$\begin{cases} \dot{x} + x = \lambda\Phi(x(t-T)) + d_1(y-x), \\ \dot{y} + y = \lambda\Phi(y(t-T)) + d_2(x-y), \end{cases} \quad (22)$$

где $\lambda = g^{-1}$,

$$\Phi(s) = \begin{cases} 1, & \text{при } s < 1, \\ 0, & \text{при } s \geq 1. \end{cases}$$

Отметим, что система (22) имеет однородный цикл

$$y(t) = x(t) = \lambda x_0(t, T). \quad (23)$$

Для исследования динамики системы (22) сначала положим $z = y(0) - x(0)$ и рассмотрим множество $C(z)$ (зависящее от z как от параметра) таких пар начальных функций $\varphi(s), \psi(s) \in C_{[-T, 0]}$, для которых $\varphi(s), \psi(s) \geq 1$ при $s \in [-T, 0]$ и

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1 - z, \\ \psi(0) = 1, \end{cases} \quad \text{при } z < 0, \quad \begin{cases} \varphi(0) = 1, \\ \psi(0) = 1 + z, \end{cases} \quad \text{при } z \geq 0.$$

Пусть $x(t), y(t)$ — решения системы (22) с начальными функциями $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ соответственно, причем $(\varphi(s), \psi(s)) \in C(z)$. Отметим, что x и y не зависят от выбора конкретного элемента из $C(z)$.

Последовательно рассматривая систему (12) на отрезках $[0, T]$, $[T, 2T]$, $[2T, 3T]$, ..., можно получить явный вид функций $x(t)$ и $y(t)$. Отметим, что начиная с некоторого момента времени $t = t^*$, эти функции принимают асимптотически большие (порядка l) значения. Тем самым, на асимптотически большом промежутке времени, примыкающем к точке $t_m = t^* + T$, эти функции являются решениями системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} + x = d_1(y-x), \\ \dot{y} + y = d_2(x-y). \end{cases} \quad (24)$$

Пусть t_{0x}, t_{0y} — первые, при $t > t_m$, корни уравнений $x(t) = 1$ и $y(t) = 1$. Из сказанного выше следует, что $t_{0x} = O(\ln \lambda)$, $t_{0y} = O(\ln \lambda)$. Положим $t_0 = \min\{t_{0x}, t_{0y}\}$. Тогда оператор последования Пуанкаре $\Pi(\varphi(s), \psi(s)) = (x(t_0 + s), y(t_0 + s))$ преобразует множество начальных условий $C(z)$ в $C(\bar{z})$, где \bar{z} зависит только от z . Обозначим через $g(z)$ зависимость величины \bar{z} от z . Траектория отображения $\bar{z} = g(z)$ задает итерации множества начальных условий $C(z)$, и вопрос о динамике решенной системы (22) сводится к исследованию одномерного отображения $g(z)$. Далее для него будут получены аналитические выражения.

Поскольку $t_{0x} - t_{0y} = o(1)$, то $\bar{z} = g(z) = o(1)$. Отсюда получаем следующий результат.

Теорема 2. *При любых фиксированных (т.е. независимых от λ) значениях d_1, d_2 и при достаточно больших λ , функции $x(t)$ и $y(t)$ стремятся к циклу (23) при $t \rightarrow \infty$.*

Наиболее интересные результаты относятся к случаю, когда коэффициенты d_1, d_2 малы. В зависимости от степени их малости можно выделить два случая, когда динамика рассматриваемой системы принципиально различна. В первом случае коэффициенты d_j имеют порядок $O(|\ln \lambda|^{-1})$, а во втором $d_j = O(\lambda^{-1})$. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

Пусть сначала $d_j = O(|\ln \lambda|^{-1})$, $j = 1, 2$. т. е.

$$d_1 = \frac{\tilde{d}_1}{\ln \lambda}, \quad d_2 = \frac{\tilde{d}_2}{\ln \lambda}. \tag{25}$$

Введем вспомогательную функцию $q(d, z)$:

$$q(d, z) = (1 + d)(X - Y)\sigma[(1 + d)X - (X - Y)(1 + d\sigma)]^{-1},$$

где $\sigma = \exp(d)$,

$$\begin{aligned} X &= 1 - \exp(-T), \\ Y &= \begin{cases} 0, & 1 + |z| \geq \exp(T), \\ 1 - (1 + |z|)\exp(-T), & 0 \leq 1 + |z| < \exp(T). \end{cases} \end{aligned} \tag{26}$$

Основное утверждение состоит в том, что функция $g(z)$, фигурирующая в отображении $\bar{z} = g(z)$ (динамика которого определяет поведение решений $x(t)$ и $y(t)$ при $t \rightarrow \infty$) с точностью $o(1)$ при $\lambda \rightarrow \infty$, имеет вид

$$g(z) = \begin{cases} -q(d, z) & \text{при } z \geq 0, \\ q(d^{-1}, z) & \text{при } z < 0, \end{cases} \quad \text{где } d = \frac{d_2}{d_1}. \tag{27}$$

Для обоснования формул (26), (27) рассмотрим случай $z > 0$ (рассуждения для случая $z < 0$ аналогичны). Пусть числа X и Y составляют главную часть асимптотики при $\lambda \rightarrow \infty$ величин $x(t_m)$ и $y(t_m)$, т.е.

$$x(t_m) = \lambda[X + o(1)], \quad y(t_m) = \lambda[Y + o(1)].$$

Найдем выражения для X и Y . Заметим, что при $t \in [0, T]$ функции $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют системе (24), а значит при $\lambda \rightarrow \infty$ имеем

$$x(t) = \exp(-t) + o(1), \quad y(t) = (1 + z) \exp(-t) + o(1).$$

Важным фактом, лежащим в основе дальнейших построений, является то, что при любом $z > 0$ существует $r > 0$ такое, что на отрезке $[T, T + r]$ функции $x(t)$, $y(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} + x = \lambda + d_1(y - x), \\ \dot{y} + y = d_2(x - y). \end{cases}$$

Отсюда приходим к выводу, что при достаточно больших λ для каждого r_1 , такого, что $0 < r_1 \leq r$, выполнены условия

$$\begin{aligned} x(r_1 + T) &= O(\lambda), \\ y(r_1 + T) &= O(\lambda(\ln \lambda)^{-1}). \end{aligned}$$

Следовательно, можно положить $t_m = 2T + o(1)$.

При $t \in [T, 2T]$ имеем $x(t) = \lambda[1 - \exp(-t+T) + o(1)]$, откуда получаем равенство

$$X = 1 - \exp(-T).$$

Для величины Y определяющим является поведение $y(t)$ на отрезке $[0, T]$. Пусть выполнено условие $(1+z) \geq \exp(T)$, тогда при $t \in [T, 2T]$ $y(t) = O(\lambda(\ln \lambda)^{-1})$, и следовательно, $Y = 0$. Если же $0 \leq 1 + z < \exp(T)$, то $y(t) = 1$ при $t = \ln(1 + z) + o(1)$, поэтому

$$y(t) = \begin{cases} O(\lambda(\ln \lambda)^{-1}) & \text{при } t \in [T, \ln(1 + z) + T], \\ \lambda(1 - \exp(-(t - T - \ln(1 + z)))) + o(1) & \text{при } t \in [\ln(1 + z) + T, 2T] \end{cases}$$

и

$$Y = 1 - (z + 1) \exp(-T).$$

Поскольку $X \geq Y$, то $t_{x0} > t_{y0}$. Следовательно для t_0 верна формула

$$t_0 = t_m + \ln \lambda + \ln \left[X - \frac{X - Y}{1 + d} (1 + d) \right] + o(1).$$

Тогда

$$x(t_0) = 1 + \frac{(1 + d)(X - Y)d}{(1 + d)X - (X - Y)(1 + d)} + o(1).$$

Отсюда вытекает, что с точностью до $o(1)$ (при $\lambda \rightarrow \infty$) функция $g(z)$ имеет вид (27).

Анализируя отображение $g(z)$, получаем результат:

Теорема 3. Пусть

$$\frac{d}{\exp(T) - 1} < 1 \quad (> 1).$$

Тогда нулевое состояние равновесия отображения $g(z)$ асимптотически устойчиво (неустойчиво). Этому состоянию равновесия отвечает устойчивый (неустойчивый) однородный цикл системы (12).

Теорема 4. Пусть

$$|g(\exp(T))| \frac{d^{-1} + 1}{1 - d} \geq \exp(T)$$

и

$$|g(\exp(T))| \frac{d + 1}{1 - d} \geq \exp(T)$$

Тогда отображение $g(z)$ имеет суперустойчивый цикл периода 2: $(g(\exp(T)), g(-\exp(T)))$, и нет циклов других периодов. Этому циклу отображения $g(z)$ отвечает устойчивый неоднородный цикл системы (12).

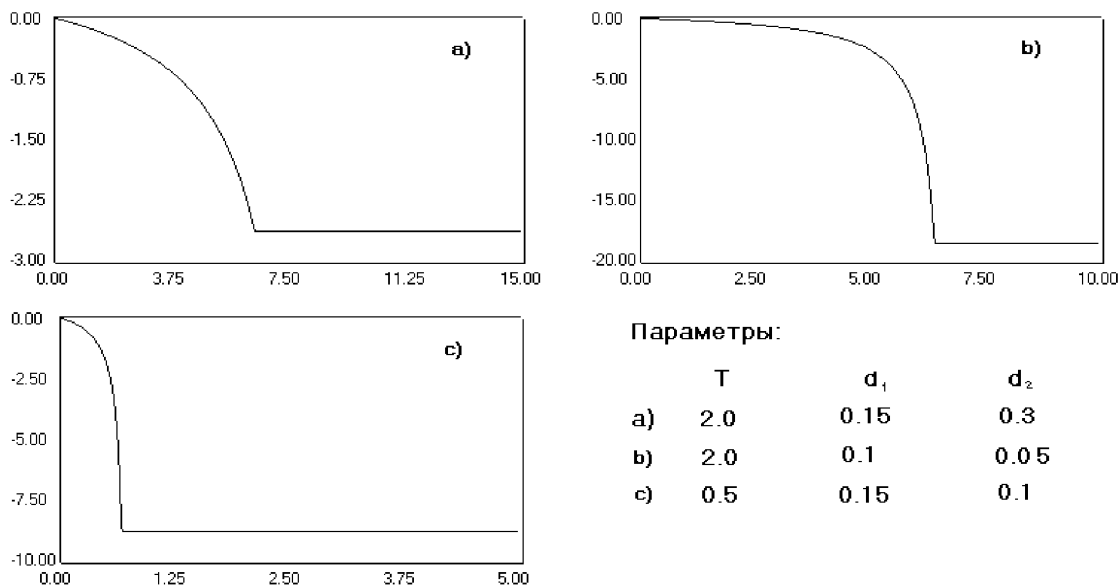


Рис. 7.

На рис. 7 приведены графики отображения $g(z)$ при некоторых значениях параметров $T, \tilde{d}_1, \tilde{d}_2$.

В предыдущих построениях использовался тот факт, что оба коэффициента связи d_1, d_2 отличны от нуля. Поэтому случай, когда один из коэффициентов равен нулю, нуждается в отдельном рассмотрении. Пусть

$$d_1 = 0 \quad d_2 = \frac{\tilde{d}_2}{\ln \lambda}.$$

Тогда при $z \geq 0$ отображение (27) имеет вид

$$g(z) = -\frac{(X - Y) \exp(-\tilde{d}_2)}{X - (X - Y) \exp(-\tilde{d}_2)}, \quad (28)$$

где X и Y определяются по формулам (26).

Если же $z < 0$, то

$$g(z) = -\frac{|z| \exp(-\tilde{d}_2)}{1 + |z|}. \quad (29)$$

Исходя из формул (28) и (29), можно заключить, что нулевое состояние равновесия отображения $g(z)$, которому отвечает однородный цикл (23), является глобально устойчивым при любых d .

В случае, когда коэффициенты связи равны ($\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = d$), нулевое состояние равновесия отображения $g(z)$ асимптотически устойчиво при $d > -\frac{1}{2} \ln(\exp(T) - 1)$ и неустойчиво при $d < -\frac{1}{2} \ln(\exp(T) - 1)$. При $d \leq \frac{1}{2} \ln(2 \exp(-T) + 1)$ отображение $g(z)$ имеет суперустойчивый цикл периода 2.

Как оказывается, существенная перестройка фазового портрета исходной системы может произойти, когда коэффициенты связи d_1, d_2 становятся порядка $O(\lambda^{-1})$. Исследуем этот случай.

Будем считать, что

$$d_1 = \frac{\tilde{d}_1}{\lambda}, \quad d_2 = \frac{\tilde{d}_2}{\lambda}. \quad (30)$$

Тогда при $t \in [t_m, t_0]$ имеем

$$\begin{aligned} x(t) &= \lambda[X + o(1)] \exp(-(t - t_m)), \\ y(t) &= \lambda[Y + o(1)] \exp(-(t - t_m)), \end{aligned}$$

где t_0 — первый корень уравнения $y(t) = 1$, если $X \geq Y$, или уравнения $x(t) = 1$, если $X < Y$. Отсюда с точностью до $o(1)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ получаем формулу для отображения g :

$$g(z) = \begin{cases} (-XY^{-1} + 1) \operatorname{sign} z, & X \geq Y, \\ (YX^{-1} - 1) \operatorname{sign} z, & X < Y. \end{cases} \quad (31)$$

Найдем выражения для X и Y . В случае $z \geq 0$ (для $z < 0$ рассуждения аналогичны).

При $t \in [0, t_1 + T]$ решения $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} + x = \lambda \Phi(x(t - T)) + d_1(y - x), \\ \dot{y} + y = \tilde{d}_2(x - y), \end{cases} \quad (32)$$

где t_1 — такой первый корень уравнения $y(t) = 1$, для которого $\dot{y}(t_1) < 0$. Заметим, что поведение $x(t)$ на отрезке $[0, t_1 + T]$ аналогично случаю, когда выполнены

условия (25). Используя (32), приходим к выводу, что

$$y(t) = \begin{cases} (1+z)\exp(-t) + o(1), & 0 \leq t \leq T, \\ (y(T) - \tilde{d}_2)\exp(-(t-T)) + \\ + \tilde{d}_2(1 - (t-T)\exp(-(t-T))) + o(1), & T < t \leq M, \\ \exp(-(t-2T))[\tilde{d}_2(1 - \exp(-T))(t-2T) + \\ + y(2T)] + o(1), & M < t \leq t_1 + T, \end{cases} \quad (3.12)$$

где $M = \min\{2T, t_1 + T\}$.

Обозначим через t_1, t_2, \dots занумерованные в порядке возрастания корни уравнения

$$y(t) = 1,$$

принадлежащие отрезку $[t_1, t_1 + T]$. Поскольку на этом отрезке функция $y(t)$ имеет не более одного максимума и не более одного минимума, то таких корней не может быть больше трех.

Пусть найдено n корней. Удобно положить $t_{n+1} = t_1 + T$. Если при некотором i ($i = \overline{1, n}$) на отрезке $t \in [t_i, t_{i+1}]$ выполнено условие $0 < y(t) \leq 1$, то при $t \in [t_i + T, t_{i+1} + T]$ функция $y(t)$ является решением уравнения

$$\dot{y} + y = \lambda[1 + o(1)].$$

Тем самым,

$$y(t) = \lambda + (y(t_i + T) - \lambda)\exp(-(t - t_i - T)) + o(\lambda). \quad (33)$$

Если же при некотором i ($i = \overline{1, n}$) на отрезке $t \in [t_i, t_{i+1}]$ выполняется неравенство $y(t) \geq 1$, то при $t \in [t_i + T, t_{i+1} + T]$, получаем равенство:

$$y(t) = y(t_i + T)\exp(-(t - t_i - T)) + o(\lambda). \quad (34)$$

Таким образом, на отрезке $t \in [t_1 + 2T, t_0]$ функции $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют уравнению (24). Поэтому полагаем $t_m = t_1 + 2T$. Используя (33) и (34), получаем для величин X и Y в формуле (31) итоговые соотношения

$$\begin{aligned} y(t_1 + 2T) &= \lambda(Y + o(1)), \\ X &= (1 - \exp(-T))\exp(-t_1). \end{aligned}$$

3.2. Динамика системы (17)

Произведем в ((17) замены $u = (1 - d_1)x + yd_1$, $v = d_2x + (1 - d_2)y$ и $x = gu$, $y = gv$:

$$\begin{aligned} \dot{x} + x &= \lambda[(1 - d_1)\Phi(x(t - T)) + d_1\Phi(y(t - T))], \\ \dot{y} + y &= \lambda[d_2\Phi(x(t - T)) + (1 - d_2)\Phi(y(t - T))]. \end{aligned} \quad (35)$$

Построим отображение $g(z)$, задающее итерации множества начальных условий $C(z)$. Во всех случаях с точностью до $o(1)$ функция $g(z)$ имеет вид

$$g(z) = \begin{cases} (-XY^{-1} + 1)\text{sign } z, & X \geq Y, \\ (YX^{-1} - 1)\text{sign } z, & X < Y. \end{cases} \quad (36)$$

Найдем теперь выражения для X и Y .

Пусть $0 < d_1, d_2 \leq 1$ — произвольные фиксированные числа. Значения X и Y зависят от поведения на отрезке $[0, T]$ функций $x(t)$ и $y(t)$. Для решений $x(t)$ и $y(t)$ при $t \in [0, T]$ получаем равенства

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp(-t), & y(t) &= (1 + |z|)\exp(-t), & \text{при } z \geq 0; \\ y(t) &= (1 + z)\exp(-t), & x(t) &= \exp(-t), & \text{при } z < 0. \end{aligned}$$

На отрезке $[T, 2T]$ соответствующие формулы при $z \leq 0$ имеют вид

$$\begin{cases} X = (1 - d_1)(1 - \exp(-T)), \\ Y = d_2(1 - \exp(-T)), & 1 + |z| \geq \exp(T), \\ \begin{cases} X = 1 + ((1 - d_1)(1 - (1 + |z|)^{-1}) - \\ - 1)\exp(-T)(1 + |z|), \\ Y = 1 + (d_2(1 - (1 + |z|)^{-1}) - \\ - 1)\exp(-T)(1 + |z|), \end{cases} & 1 \leq 1 + |z| < \exp(T), \end{cases}$$

а при $z < 0$

$$\begin{cases} X = (1 - d_2)(1 - \exp(-T)), \\ Y = d_1(1 - \exp(-T)), & 1 + |z| \geq \exp(T), \\ \begin{cases} X = 1 + ((1 - d_2)(1 - (1 + |z|)^{-1}) - \\ - 1)\exp(-T)(1 + |z|), \\ Y = 1 + (d_1(1 - (1 + |z|)^{-1}) - \\ - 1)\exp(-T)(1 + |z|), \end{cases} & 1 \leq 1 + |z| < \exp(T). \end{cases}$$

На рис. 8 приведены графики отображения $g(z)$ при различных значениях параметров T, d_1, d_2 .

Теорема 5. Пусть

$$\exp(-T)(1 - \exp(-T))^{-1}|1 - d_1 - d_2| < 1, \quad (> 1),$$

тогда нулевое состояние равновесия отображения $g(z)$, которому соответствует однородный цикл (23) системы ((17), является устойчивым (неустойчивым).

Пусть выполнены условия (25). Тогда при $1 \leq 1 + |z| < \exp(T)$ получаем

$$\begin{aligned} X &= 1 - \exp(-T), \\ Y &= 1 - (1 + |z|)\exp(-T). \end{aligned}$$

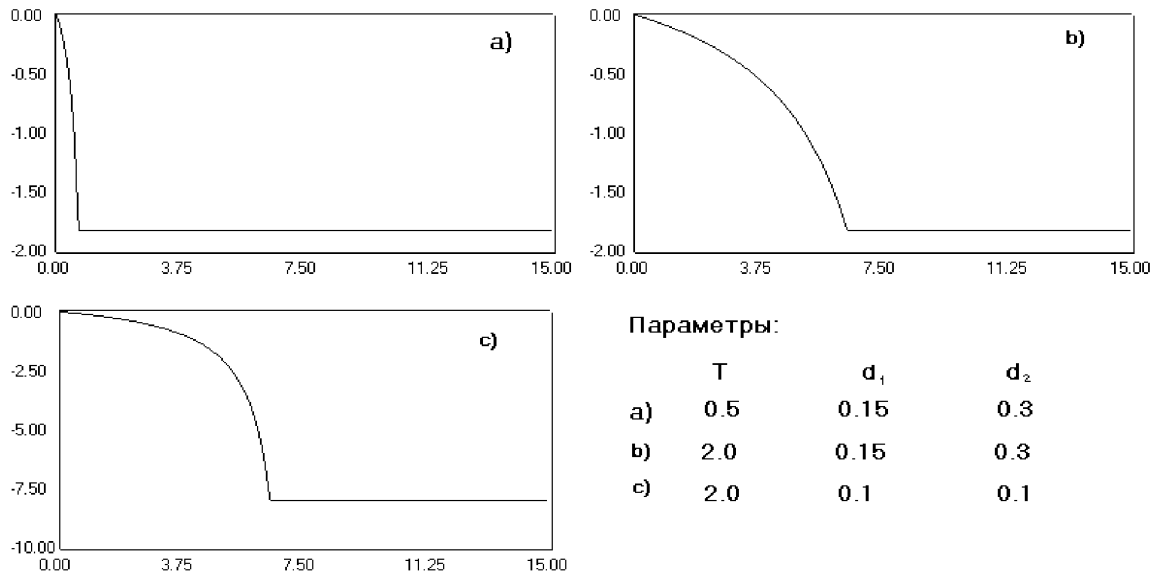


Рис. 8.

Если, однако, $1 + |z| > \exp(T)$, то первая же итерация множества начальных условий $C(z)$ есть множество $\tilde{C}(z)$, отличающееся от $C(z)$ тем, что

$$\begin{cases} \varphi(0) = -z \ln \lambda, \\ \psi(0) = 1, \end{cases} \quad \text{при } z < 0, \\ \begin{cases} \varphi(0) = 1, \\ \psi(0) = z \ln \lambda, \end{cases} \quad \text{при } z \geq 0.$$

Основное утверждение состоит в том, что оператор последования Пуанкаре $\Pi(\varphi(s), \psi(s)) = (x(t_0 + s), y(t_0 + s))$, преобразует множество начальных условий $\tilde{C}(z)$ в $\tilde{C}(\tilde{z})$, где с точностью до $o(1)$ (при $\lambda \rightarrow \infty$)

$$\tilde{z} = \tilde{g}(z) = \begin{cases} -\tilde{d}_2^{-1}, & \text{при } 1 + z \geq \exp(T), \\ -\tilde{d}_1^{-1}, & \text{при } -1 + z \leq -\exp(T). \end{cases}$$

На рис. 9 приведены графики отображения $g(z)$ при различных значениях параметров $T, \tilde{d}_1, \tilde{d}_2$.

Теорема 6. Пусть

$$\exp(-T)(1 - \exp(-T))^{-1} < 1 \quad (> 1),$$

тогда нулевое состояние равновесия отображения $g(z)$, которому соответствует однородный цикл (23) системы ((17), является устойчивым (неустойчивым).

При достаточно больших λ система (35) имеет устойчивый неоднородный цикл, удовлетворяющий начальным условиям $x(s) = \exp(-s), y(s) = d_2^{-1} \exp(-s)$.

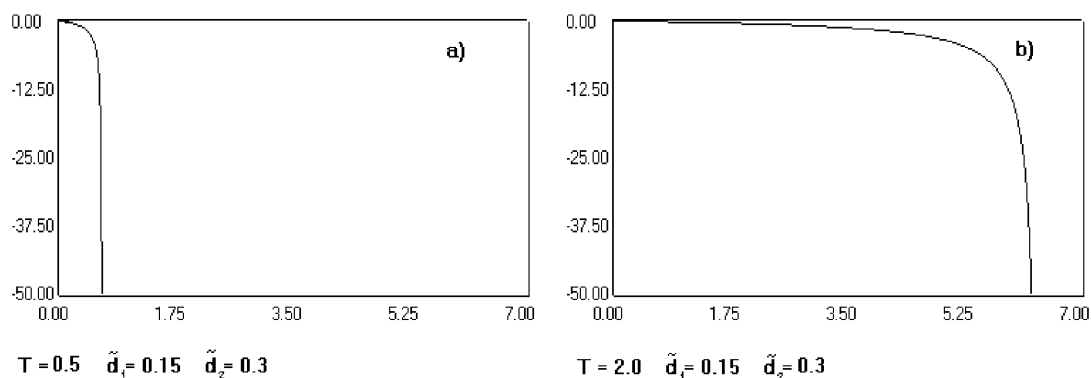


Рис. 9.

При выполнении условий (30) все рассуждения аналогичны приведенным выше.

Заключение

В статье рассмотрена динамика одного из простейших генераторов с запаздыванием. Показано, что его единственным устойчивым режимом является цикл, тогда как неустойчивых периодических режимов имеется бесконечно много. При некоторых условиях (типа невырожденности) каждое решение стремится к циклу при $t \rightarrow \infty$. Однако, в зависимости от степени сложности начального условия, соответствующее решение демонстрирует сложное поведение в течение отрезка времени, которое экспоненциально возрастает с увеличением запаздывания.

Исследована динамика двух простейших генераторов с двумя типами связи. Получен критерий “быстрой” и “долгой” — в течение промежутка времени, линейно зависящего от запаздывания — синхронизации. Приведена оценка параметра синхронизации на неустойчивом цикле. Аналитическими методами рассмотрена динамика в случае слабой связи между генераторами. Построены одномерные отображения, динамика которых определяет поведение решений исходной системы. Показано, что наряду с однородным устойчивым циклом может существовать неоднородный устойчивый цикл.

Список цитируемых источников

1. *Дмитриев А. С.* Хаос и обработка информации в нелинейных динамических системах // Радиотехника и электроника. — 1993. — Т.38, №1. — С. 1.
Dmitriev A. S. Chaos and information processing in nonlinear dynamic systems // Radiotekhnika i elektronika 38, No.1, 1 (1993). (in Russian)
2. *Parlitz U., Chua L. O., Kocarev L., Halle K., Shang A.* Transmission of Digital Signals by Chaotic Synchronization // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 1992. — Vol.2, No.4. — P. 973.

3. *Бельский Ю. Л., Дмитриев А. С.* Передача информации с помощью детерминированного хаоса // Радиотехника и электроника. — 1993. — Т.38. №7. — С. 1310.
Belskiy Yu. L., Dmitriev A. S. Information transfer by means of deterministic chaos // Radiotekhnika i elektronika 38, No.7, 1310 (1993). (in Russian)
4. *Fujisaka H, Yamada T.* Stability theory of synchronized motion on coupled-oscillator systems. IV // Progr. Theor. Phys. — 1986. — Vol.6., No.5. — P. 1087–1104.
5. *Арансон И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М.* Динамическая модель пространственного развития турбулентности // Письма в ЖЭТФ. — 1984. — Т.39. №12. — С. 561.
Aranson I. S., Gaponov-Grekhov A. V., Rabinovich M. I., Starobinets I. M. Dynamical model of spatial development of turbulence. Pis'ma v ZHETPH 39, No.12, 561 (1984). (in Russian)
6. *Анищенко В. С., Арансон И. С., Постнов Д. Э., Рабинович М. И.* Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // ДАН СССР. — 1986. — Т. 286, No.5. — С. 1120–1124.
Anishchenko V. S., Aranson I. S., Postnov D. E., Rabinovich M. I. Spatial synchronization and bifurcations of the development of chaos in a chain of connected generators. Doklady akademii nauk SSSR 286, No.5, 1120–1124 (1986). (in Russian)
7. *Афраимович В. С., Веричев Н. Н., Рабинович М. И.* Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов. Радиофизика. — 1986. — Т. 29, №9. — С. 1050-1060.
Afraimovich V. S. Verichev N. N. Rabinovich M. I. Stochastic oscillation synchronization in dissipative systems. Izv. Vuzov. Radiophysika 29, No.9, 1050-1060 (1986). (in Russian)
8. *Кузнецов Ю. И., Мигулин В. В., Минакова И. И., Сильнов Б. А.* Синхронизация хаотических колебаний // ДАН СССР. — 1984. — Т.275, No.6. — С. 1388-1391.
Kuznetsov Yu. I., Migulin V. V., Minakova I. I., Silnov B. A. Synchronization of chaotic oscillations. Doklady akademii nauk SSSR 275. No.6, 1388-1391 (1984). (in Russian)
9. *Ланда П. С.* Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука, 1983.
Landa P. S. Self-oscillations in distributed systems. Moscow: Nauka, 1983. (in Russian)
10. *Дмитриев А. С., Кислов В. Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. — М.: Наука, 1989.
Dmitriev A. S. Kislov V. I. Stochastic oscillations in radio physics and electronics. Moscow: Nauka, 1989. (in Russian)
11. *Кащенко С. А.* Асимптотический анализ динамики системы из двух связанных автогенераторов с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов, Радиофизика. — 1990. — Т.33, №3. — С. 307-314.
Kashchenko S. A. Asymptotic analysis of the dynamics of a system of two coupled auto-generators with delayed feedback. Izv. Vuzov. Radiophysika 33, No.3, 307-314 (1990). (in Russian)
12. *Kilian T., Kutzer K., Moegel A., Schwarz W.* Electronic chaos generators – design and applications // International Journal of Electronics. — 1995. — Vol. 79, No. 6. — P. 737-753.

13. *Moegel A., Schwarz W., Kaschenko S.* Analysis and simulation principles for chaotic systems containing delay elements. (NDES '96) Seville, Spain, 1996.
14. *Kashchenko D. S., Kashchenko S. A., Schwarz W.* Dynamics of First Order Equations with Nonlinear Delayed Feedback // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. — 2012. — Vol. 22, no. 8. — P. 1250184.

Получена 02.10.2018