Динамические системы, 2018, том 8(36), №4, 385–407

УДК 517.984.50

Оператор градиент дивергенции и пространства Соболева

Р. С. Сакс

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
Уфа 450077. *E-mail: romen-saks@yandex.ru*

Аннотация. Краевая задача для оператора градиент дивергенции с младшим слагаемым $\lambda\mathbf{u}$ изучается в пространствах Соболева в ограниченной области G с гладкой границей. Особенность этого матричного оператора состоит в том, что при $\lambda \neq 0$ он приводим к эллиптическому оператору методом Б. Вайнберга и В. Грушина, а краевая задача удовлетворяет условиям эллиптичности В. Солонникова. Откуда вытекают свойства решений спектральной задачи оператора градиент дивергенции: а) его ненулевые собственные значения имеют конечную кратность, б) их (обобщенные) собственные функции бесконечно дифференцируемы вплоть до границы области.

Оператор градиент дивергенции имеет самосопряженное расширение $\mathcal{N}_d$ в подпространство $\mathcal{A}_\gamma$ в $\mathbf{L}_2(G)$, где он обратим. Его обратный оператор вполне непрерывен, а собственные векторы образуют полный ортогональный базис в $\mathcal{A}_\gamma$. Изучены свойства рядов Фурье градиента дивергенции и его расширения $\mathcal{N}_d$, действующего в $\mathcal{A}_\gamma$ и в его подпространствах $\mathbf{A}^{2k}_\gamma$, — пространствах Соболева в $\mathcal{A}_\gamma$. Определены пространства $\mathbf{A}^1_0$ и $\mathbf{A}^{-1}$.

Выделены шкалы пространств Соболева и доказано, что оператор $\nabla\mathrm{div} + \lambda I$ при почти всех λ отображает их взаимно однозначно и непрерывно. Приведены формулы базисных полей градиента дивергенции в шаре. Изложены аналогичные результаты для оператора ротор и его симметричного расширения S в $\mathcal{B}$.

Ключевые слова: пространства Лебега, пространства Соболева, дифференциальные операторы градиент, дивергенция и вихрь (ротор), эллиптические матрицы, краевые задачи, спектральные задачи, ряды Фурье.

Operator $\nabla\mathrm{div}$ and Sobolev spaces

R. S. Saks

Mathematical Institute with CC UFIC RAS, Upha, 450077.

Abstract. Boundary value problem for a gradient of divergence operator with lower term $\lambda\mathbf{u}$ is studied in Sobolev spaces for a bounded domain G with smooth boundary. The peculiarity of this matrix operator is that for $\lambda \neq 0$ it is reducible to the elliptic operator (by B. Weinberg and V. Grushin method) and the boundary problem satisfy the V. Solonnikov ellipticity condition. The important properties solutions of spectral problems the operator gradient of divergence follow from this: a) each non-zero eigenvalue has a finite multiplicity, b) any (generalized) eigenfunction is infinitely differentiable up to the boundary of the domain.

The gradient of divergence has a self-adjoint expansion $\mathcal{N}_d$ in the subspace $\mathcal{A}_\gamma$ of $\mathbf{L}_2(G)$, where it is convertible. The inverse operator is compact and a system of its eigenvectors is a complete orthogonal basis of the space $\mathcal{A}_\gamma$. Properties of Fourier series for this operator have been investigated. Operator $\mathcal{N}_d$ acts in the space $\mathcal{A}_\gamma$ and in subspaces $\mathbf{A}^{2k}$ that are Sobolev spaces of order $2k$ in $\mathcal{A}_\gamma$.

The scales of Sobolev spaces are selected. It is proved that operator $\nabla\mathrm{div} + \lambda I$ maps them one to one and continuously at almost all λ. The formulas of basic fields of a gradient of divergence in a ball are presented.
Keywords: Lebesgue spaces, Sobolev spaces, gradient, divergence, rotor, elliptic matrix, boundary value problem, spectral problem, Fourier series.
MSC 2010: 35F45, 35G45, 46E35, 46E40

Посвящается Сергею Львовичу Соболеву к его 110-летию.

1. Введение и основные результаты

1.1. Основные пространства и операторы

В статье мы рассматриваем линейные пространства над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Через $\mathbf{L}_2(G)$ обозначаем пространство Лебега вектор-функций, квадратично интегрируемых в G с внутренним произведением $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_G \mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{v}} d\,\mathbf{x}$ и нормой $\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}$.

Пространство Соболева порядка $s \geq 0$, состоящее из вектор-функций, принадлежащих $\mathbf{L}_2(G)$ вместе с обобщенными производными до порядка $s \geq 0$, обозначается через $\mathbf{H}^s(G)$, $\|\mathbf{f}\|_s$ — норма его элемента $\mathbf{f}$; замыкание в $\mathbf{H}^s(G)$ пространства $\mathcal{C}_0^\infty(G)$ обозначается через $\mathbf{H}_0^s(G)$. Пространство Соболева отрицательного порядка $\mathbf{H}^{-s}(G)$ двойственно к $\mathbf{H}_0^s(G)$ (см. $W_p^{(l)}(\Omega)$ при $p = 2$ в §3 гл.4 [22], $H^k(Q)$ в §4 гл.3 [10] и гл.1 в [1]). В области G с гладкой границей Γ в каждой точке $y \in \Gamma$ определена нормаль $\mathbf{n}(y)$ к Γ. Вектор-функция $\mathbf{u}$ из $\mathbf{H}^{s+1}(G)$ имеет след $\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})$ на Γ ее нормальной компоненты, который принадлежит пространству Соболева-Слободецкого $\mathbf{H}^{s+1/2}(G)$, $|\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})|_{s+1/2}$ — его норма.

Операторы ротор, градиент, дивергенция и их свойства. Операторы градиент, ротор и дивергенция определяются в трехмерном векторном анализе [6]. Им соответствует оператор d внешнего дифференцирования на формах ω^k степени $k = 0, 1, 2$. Соотношения $dd\,\omega^k = 0$ при $k = 0, 1$ имеют вид $\mathrm{rot}\nabla h = 0$ и $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = 0$.

Формулы $\mathbf{u} \cdot \nabla h + h\mathrm{div}\mathbf{u} = \mathrm{div}(h\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{v} - \mathrm{rot}\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathrm{div}[\mathbf{v}, \mathbf{u}]$, где $[\mathbf{v}, \mathbf{u}]$ — векторное произведение, и интегрирование по области G используются при определении операторов $\mathrm{div}\,\mathbf{u}$ и $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ в $\mathbf{L}_2(G)$ и в $\mathcal{D}'(G)$.

Пусть функция $h \in H^1(G)$, а $\mathbf{u} = \nabla h$ — ее градиент. Через $\mathcal{A}(G)$ обозначим пространство $\mathcal{A}(G) = \{\nabla h, h \in H^1(G)\}$, оно содержится в $\mathbf{L}_2(G)$ и содержит подпространство

$$\mathcal{A}_\gamma = \{\nabla h, h \in H^2(G), \gamma(\mathbf{n} \cdot \nabla)\,h = 0\}, \tag{1.1}$$

$\mathcal{A}_\gamma$ плотно в $\mathcal{A}(G)$ и содержит подпространство

$$\mathbf{A}_\gamma^2 = \{\mathbf{u} \in \mathcal{A}_\gamma(G) : \nabla\mathrm{div}\mathbf{u} \in \mathcal{A}_\gamma(G)\}. \tag{1.2}$$

Мы доказываем, что оператор $\mathcal{N}_d \colon \mathcal{A}_\gamma(G) \to \mathcal{A}_\gamma(G)$ с областью определения $\mathbf{A}_\gamma^2$, совпадающий с $\nabla\mathrm{div}$ на $\mathbf{A}_\gamma^2 \subset \mathbf{H}^2(G)$, самосопряжен. Обратный оператор $\mathcal{N}_d^{-1} \colon \mathcal{A}_\gamma \to$

$\mathbf{A}_\gamma^2$ вполне непрерывен. Следовательно, этот оператор имеет полную систему собственных функций, отвечающих ненулевым собственным значениям:

$$-\nabla \mathrm{div}\mathbf{q}_j = \mu_j \mathbf{q}_j, \quad \mu_j \in M \subset \mathbb{R},$$

$$\mathbf{a}(x) = \sum_{\mu_j \in M} (\mathbf{a}, \mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j(x), \quad \text{если} \quad \mathbf{a}(x) \in \mathcal{A}_\gamma(G), \quad \|\mathbf{q}_j\| = 1.$$

Ортогональное дополнение $\mathcal{A}(G)$ в $\mathbf{L}_2(G)$ обозначим через $\mathcal{B}(G)$. Z. Yoshida и Y. Giga в [34] обозначают пространство $\mathcal{B}(G)$ через $L^2_\sigma(G)$, А. Фурсиков в [30] — как $\mathbf{V}(G)$. В обобщенном смысле оно формулируется так:

$$\mathcal{B}(G) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G): \ \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \, \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = 0\}.$$

Если граница области G имеет положительный род ρ, то $\mathcal{B}(G)$ содержит конечномерное подпространство

$$\mathcal{B}_H = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G) : \mathrm{rot}\,\mathbf{u} = 0, \ \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \ \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = 0\}. \tag{1.3}$$

Его размерность равна ρ [26], а базисные поля $h_j \in \mathcal{C}^\infty(G)$ [33].

Ортогональное дополнение $\mathcal{B}_H$ в $\mathcal{B}(G)$ обозначим через $\mathbf{V}^0(G)$. Итак,

$$\mathbf{L}_2(G) = \mathcal{A}(G) \oplus \mathcal{B}(G), \quad \mathcal{B}(G) = \mathbf{V}^0(G) \oplus \mathcal{B}_H(G). \tag{1.4}$$

Отметим, что разложение $\mathbf{L}_2(\Omega)$ на ортогональные подпространства изучали Г. Вейль [33], С. Л. Соболев [23], О. А. Ладыженская [9], К. Фридрихс [29], Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе [8], Э. Быховский и Н. Смирнов [2], Z. Yoshida и Y. Giga [34]. Мы воспользовались разложением, предложенном в [34].

Пространство $\mathbf{V}^0(G)$ содержит подпространство

$$\mathbf{W}^1 = \{\mathbf{u} \in \mathbf{V}^0(G) : \mathrm{rot}\mathbf{u} \in \mathbf{V}^0(G)\}.$$

Z.Yoshida и Y.Giga показали в [34], что оператор $S\colon \mathbf{V}^0 \to \mathbf{V}^0$ с областью определения $\mathbf{W}^1$, совпадающий с $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ на $\mathbf{W}^1 \subset \mathbf{H}^1(G)$ — самосопряжен, а его обратный оператор — вполне непрерывен. Его собственные поля, отвечающие ненулевым собственным значениям, образуют в $\mathbf{V}^0(G)$ полный ортогональный базис.

В гидродинамической интерпретации [8] им соответствуют потоки, имеющие ненулевую завихренность, а собственным функциям градиента дивергенции соответствуют потенциальные (безвихревые) потоки.

Приложения смотрите в работах [7, 32, 31, 28], а также [14]-[18].

В шаре B радиуса R собственные поля $\mathbf{u}_\kappa^\pm$ ротора, отвечающие ненулевым собственным значениям $\pm\lambda_\kappa = \pm\rho_{n,m}/R$ и собственные поля $\mathbf{q}_\kappa$ градиента дивергенции с собственными значениями $-\nu_\kappa^2$, $\nu_\kappa = \alpha_{n,m}/R$, выражаются явными формулами [18], причем

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{u}_\kappa^\pm = \pm\lambda_\kappa\,\mathbf{u}_\kappa^\pm, \quad \nabla\,div\,\mathbf{u}_\kappa^\pm = 0, \quad \gamma\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_\kappa^\pm = 0; \quad \kappa = (n, m, k),$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{q}_\kappa = 0, \quad -\nabla\, div\,\mathbf{q}_\kappa = \nu_\kappa^2 \mathbf{q}_\kappa, \quad \gamma\mathbf{n}\cdot\mathbf{q}_\kappa = 0, \qquad |k| \le n,$$

где числа $\pm\rho_{n,m}$ и $\alpha_{n,m}$ — нули функций ψ_n и их производных ψ_n', а

$$\psi_n(z) = (-z)^n \left(\frac{d}{zdz}\right)^n \frac{\sin z}{z}, \quad n \ge 0,\ m \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Они составляют полные базисы в $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B} \subset \mathbf{L}_2(B)$ [18].

Доказано, что условие $\mathbf{v} \in \mathbf{A}_\gamma^{2s}(G)$ необходимо и достаточно для сходимости ряда Фурье поля $\mathbf{v}$ из $\mathcal{A}_\gamma(G)$ по собственным функциям оператора $\nabla\,\mathrm{div}$ в норме пространства Соболева $\mathbf{H}^{2s}(G)$ порядка $s > 0$ (Теорема 3).

1.2. Структура работы

В §2 мы изучаем в ограниченной области G с гладкой границей Γ разрешимость краевой задачи $\gamma\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = g$ для системы $\nabla\mathbf{div}\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f}$ в G в пространствах $\mathbf{H}^s(G)$ при $s \ge 2$.

Эта система не является эллиптической [11]. При $\lambda \ne 0$ ее расширение по Б. Вайбергу и В. Грушину [3] является эллиптической переопределенной системой, а краевая задача удовлетворяет условиям эллиптичности Солонникова ([24] Теоремы 1.1).

Следовательно, оператор $\mathbb{B}$ задачи в пространствах (2.8) имеет левый регуляризатор, конечномерное ядро и выполняются априорная оценка:

$$C_s\|\mathbf{u}\|_{s+2} \le |\lambda|\,\|\mathrm{rot}^2\,\mathbf{u}\|_s + \|\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|_s + |\gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})|_{s+3/2} + \|\mathbf{u}\|_s \tag{1.6}$$

Разрешимость этой задачи зависит от пространств, к которым принадлежат $\mathbf{f}$ и g. Пространство $\mathcal{B}(G)$ принадлежит ядру оператора градиента дивергенции в $\mathbf{L}_2(G)$, а $\mathcal{A}(G)$ — ядру ротора, поэтому уравнение $\nabla\mathbf{div}\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f}$ на $\mathcal{B}(G)$ сводится к уравнению $\lambda\mathbf{u} = \mathbf{f}$, а на $\mathcal{A}(G)$ — к уравнению $\Delta\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f}$. На подпространство $\mathcal{A}_\gamma$ оператор $\nabla\mathbf{div} + \lambda I$ продолжается как самосопряженный оператор $\mathcal{N}_d + \lambda I : \mathcal{A}_\gamma \to \mathcal{A}_\gamma$. Необходимые и достаточные условия обратимости этого оператора Фредгольма см. в Теореме 2.

В §3 спектральная задача для оператора градиент дивергенции в области с гладкой границей сводится к решению спектральной задачи Неймана для скалярного оператора Лапласа.

В шаре ее решения вычислены явно [4]. В результате мы получаем формулы (3.4) собственных функций $\mathbf{q}_\mu(\mathbf{x})$ градиента дивергенции.

В § 4 методом Фурье в шаре B решается краевая задача $\gamma\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = 0$, $\nabla\mathbf{div}\mathbf{v} + \lambda\mathbf{v} = \mathbf{f}$ при любых λ (Теорема 4). Вводим пространства $\mathbf{H}^2_{\gamma\delta\gamma}(B)$ и $\mathbf{F}^0_\gamma(B)$ и доказываем, что если $\lambda \,\overline{\in}\, Sp\,(-\nabla\mathrm{div})$, $(\lambda \ne 0, \nu^2_{n,m})$, то оператор $\nabla\mathrm{div} + \lambda I$ осуществляет взаимно однозначное и непрерывное отображение пространств $\mathbf{H}^2_{\gamma\delta\gamma}(B)$ и $\mathbf{F}^0_\gamma(B)$ (Лемма 3).

Выписаны ряды для операторов $\mathcal{N}_d$ и $\mathcal{N}_d^{-1}$ и пространства $\mathbf{A}_\gamma^{2p}$ — пространства Соболева $\mathbf{H}^{2p}$ в $\mathcal{A}_\gamma$, $p = 1, 2, \ldots$, которые они отображают.

Попутно изложены аналогичные результаты для оператора ротор и его симметричного расширения S в $\mathbf{V}^0$.

2. Градиент дивергенции в ограниченной области

2.1. Краевая задача

Пусть G — ограниченная область в R^3 с гладкой границей Γ, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к Γ. В частности, G может быть шаром B, $|x| < R$, с границей S.

Задача 1. В области G и на ее границе Γ заданы векторная и скалярная функции $\mathbf{f}$ и g, найти вектор-функцию $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{s+2}(G)$, такую что

$$\nabla\,\mathrm{div}\mathbf{u} + \lambda\,\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad G, \quad \mathbf{f} \in \mathbf{H}^s(G), \tag{2.1}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = g, \quad g \in H^{s+3/2}(\Gamma), \tag{2.2}$$

где $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{n}$.

Эта задача *не эллиптична.* Оператор $\nabla\,\mathrm{div} + \lambda \mathrm{I}$ второго порядка не является эллиптическим, так как ранг его символической матрицы $\nabla\,\mathrm{div}(i\xi)$ равен единице при всех $\xi \in \mathcal{R}^3 \backslash 0$ и меньше трех [11].

2.2. Классы обобщенно эллиптических систем [REESp]

Б. Вайнберг и В. Грушин [3] в 1967 году определили на гладком многообразии X без края класс *равномерно неэллиптических систем* (РНС) сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и класс матричных с.и.д.операторов, *глобально приводимых к эллиптическим матрицам* [REEM]=[REduced to Elliptic Matrix], и доказали их эквивалентность. Эти определения требуют введения дополнительных понятий.

Мы приведем их для систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, который обозначим как [REESp].

Система дифференциальных уравнений, $S(D)u = f$ порядка m, из этого класса обладает свойствами:

а) *ее символическая матрица $S_0(i\xi)$ имеет постоянный ранг при всех $\xi \in \mathcal{R}^3 \backslash 0$.* Это позволяет построить аннулятор $C(D)$ оператора $S_0(D)$ такой, что $(CS_0)(D)\mathbf{u} \equiv 0$ на X и определить

б) *расширенную систему* $\quad Su = f, //CSu = Cf$ *порядка* $m//l$.

Ее символическая матрица $S_0(i\xi), //(CS)_0(i\xi)$ определяется младшей частью оператора $S(D)$ и дополняет матрицу $S_0(i\xi)$.

в) *Если ранг расширенной матрицы максимален, то исходная система $Su = f$ принадлежит классу [REES1] и степень ее приводимости равна единице.*

г) *Если система $Su = f$ такова, что ранг расширенной матрицы не максимален, но постоянный, то процесс повторяется* и при определенных условиях система принадлежит классу [REES2]. И так далее.

Б. Вайнберг и В. Грушин [3] доказали, что на замкнутом многообразии X система $Su = f$ класса [REESp] являются разрешимой по Фредгольму или Нетеру в пространствах Соболева $\mathbf{H}^s(X)$, если $f \in \mathbf{H}^{s-m+p}(X)$, где $s \geq m$ целое. В качестве примера оператора из класса [REESp] приводится оператор $d+*$ на дифференциальных формах степени k на $2k+1$-мерном многообразии X.

Покажем, что система (2.1) принадлежит классу [REES1] при $\lambda \neq 0$. Действительно, оператор $\nabla\operatorname{div} + \lambda\mathrm{I}$ таков, что

а) *ранг его символической матрицы ∇ div$(i\xi)$ равен единице при любых $\xi \neq 0$,*

б) оператор $\nabla\operatorname{div}$ имеет левый аннулятор rot, так как $\operatorname{rot}\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ для любой $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^3(G)$,

в) (6×3)-*оператор ∇ div// λrot порядка 2//1 эллиптичен.*

Его символическая матрица имеет максимальный ранг (=3) при выборе определенных порядков s_k и t_j для его строк и столбцов, а именно при $s_k = 0$ для $k = 1,2,3$ и $s_k = -1$ для $k = 4,5,6$; и при $t_j = 2$ для $j = 1,2,3$ [11]. Ранг матрицы $\nabla\operatorname{div}(i\xi)//\ \lambda\operatorname{rot}(i\xi$ равен трем при всех $\xi \neq 0$, поэтому расширенная система:

$$\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \lambda\operatorname{rot}\mathbf{u} = \operatorname{rot}\mathbf{f} \tag{2.3}$$

является эллиптической по Даглису-Ниренбергу. В общем случае (при $\mathbf{F}$ вместо $\operatorname{rot}\mathbf{f}$)эта система переопределена.

Оказывается, что формально переопределенная краевая задача (2.2), (2.3), эллиптична по определению В. А. Солонникова [24]. Это означает что

1) система (2.3) эллиптична,

2) граничный оператор $\gamma\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}$ “накрывает” оператор системы (2.3).

Первое утверждение выполняется, если

1^0) однородная система линейных алгебраических уравнений:

$$\lambda\operatorname{rot}(i\xi)\mathbf{w} = 0, \quad (\nabla\operatorname{div})(i\xi)\mathbf{w} = 0, \quad \forall\xi \neq 0 \tag{2.4}$$

с параметром $\xi \neq 0$ имеет только тривиальное решение $\mathbf{w}(\xi) = 0$;

Пусть τ и $\mathbf{n}$- касательный и нормальный векторы к Γ в точке $y \in \Gamma$ и $|\mathbf{n}| = 1$. Второе утверждение выполняется, если

2^0) однородная система линейных дифференциальных уравнений (на полуоси $z \geq 0$ с параметром $|\tau| > 0$):

$$\lambda\operatorname{rot}(i\tau + \mathbf{n}d/dz)\mathbf{v} = 0, \quad (\nabla\operatorname{div})(i\tau + \mathbf{n}d/dz)\mathbf{v} = 0 \tag{2.5}$$

с условиями: $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|_{z=0} = 0$ и $\mathbf{v} \to 0$ при $z \to +\infty$ имеет только тривиальное решение $\mathbf{v}(y,\tau;z)$.

Для доказательства 1^0), 2^0) воспользуемся соотношением

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v} = -\Delta\mathbf{v} + \nabla\operatorname{div}\mathbf{v}. \tag{2.6}$$

1^0). Из уравнений (2.4) вытекает уравнение $-\Delta(i\xi)\mathbf{w} = 0$, которое распадается на три скалярных уравнения $|\xi|^2 w_j(\xi) = 0$. Значит, $\mathbf{w} = 0$ ибо $|\xi| \neq 0$, и система (2.3) — эллиптична.

2^0). Из уравнений (2.5) вытекает уравнение $(-|\tau|^2+(d/dz)^2)\mathbf{v}=0$ с параметром $|\tau|>0$. Следовательно, $\mathbf{v}=\mathbf{w}e^{-|\tau|z}$. Эта вектор-функция удовлетворяет уравнениям (2.5), если вектор $\mathbf{w}$ таков, что $\omega\times\mathbf{w}=0$ $\omega(\omega'\cdot\mathbf{w})=0$, где $\omega=i\tau-|\tau|\mathbf{n}$ — вектор-столбец. Так как $\overline{\omega'}\cdot\omega=|\tau|^2\neq 0$, то $\omega'\cdot\mathbf{w}=0$.

Уравнения $\omega\times\omega=0$, $\omega'\cdot\omega=0$, имеют решение $\mathbf{w}=c\omega$, где c — постоянная. Граничное условие приводит нас к равенству $|\tau|c=0$. Следовательно, $c=0$ ибо $|\tau|>0$ и $\mathbf{v}=0$.

Итак, задача (2.2), (2.3) эллиптична по Солонникову. Мы скажем в этом случае, что краевая задача (2.1), (2.2) при $\lambda\neq 0$ является обобщенно эллиптической класса [REES1].

2.3. Оператор задачи 1 в пространствах Соболева

Пусть $\mathbf{u}$ принадлежит пространству $\mathbf{H}^{s+2}(G)$, то есть каждая компонента $u_j\in H^{s+2}(G)$. Тогда $\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}$ принадлежит $\mathbf{H}^s(G)$ и $\mathrm{rot}^2\mathbf{u}$ принадлежит $\mathbf{H}^s(G)$. Поэтому вектор-функция $\mathbf{f}:=\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}+\lambda\mathbf{u}$ принадлежит пространству

$$\mathbf{F^s}(G)=\{\mathbf{f}\in\mathbf{H}^s(G):\mathrm{rot}^2\,\mathbf{f}\in\mathbf{H}^s(G)\},\tag{2.7}$$

которое снабдим нормой $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{F}^s}=(\|\mathbf{v}\|_s^2+\|\mathrm{rot}^2\mathbf{v}\|_s^2)^{1/2}$. Функция $g:=\gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})\equiv\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_\Gamma$ принадлежит пространству $H^{s+3/2}(\Gamma)$. Следовательно, при $\lambda\neq 0$ задаче соответствует ограниченный оператор

$$\mathbb{B}\mathbf{u}\equiv\begin{pmatrix}\nabla\mathrm{div}\,+\lambda\, I\\ \gamma\mathbf{n}\cdot\end{pmatrix}\mathbf{u}:\mathbf{H^{s+2}(G)}\to\begin{pmatrix}\mathbf{F^s(G)}\\ H^{s+3/2}(\Gamma)\end{pmatrix}.\tag{2.8}$$

Согласно Теореме 1.1 из работы Солонникова [24], о переопределенных эллиптических краевых задачах, в ограниченной области G с гладкой границей $\Gamma\in\mathcal{C}^{s+2}$, обобщенно эллиптический оператор (2.8) имеет левый регуляризатор, то есть ограниченный оператор $\mathbb{B}^L$ такой, что $\mathbb{B}^L\mathbb{B}=\mathbb{I}+\mathbb{T}$, где $\mathbb{I}$ - единичный, а $\mathbb{T}$ — вполне непрерывный операторы, область значений замкнута, и существует постоянная $C_s>0$ такая, что выполняется оценка:

$$C_s\|\mathbf{u}\|_{s+2}\leq|\lambda|\,\|\mathrm{rot}^2\,\mathbf{u}\|_s+\|\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|_s+|\gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})|_{s+3/2}+\|\mathbf{u}\|_s\tag{2.9}$$

где $\|\mathbf{u}\|_{s+2}$ норма $\mathbf{u}$ в $\mathbf{H}^{s+2}(G)$, $|\gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})|_{s+3/2}$ — норма следа нормальной компоненты $\mathbf{u}$ на Γ в $H^{s+3/2}(\Gamma)$, $s\geq 0$ [24, 11]. Итак, имеет место

Теорема 1. *Оператор $\mathbb{B}$ в пространствах (2.8) имеет левый регуляризатор. Его ядро $\mathcal{M}$ конечномерно, область значений замкнута и выполняется априорная оценка* (2.9).

Из этой теоремы и оценки следует, что при $\lambda\neq 0$

a) *число линейно независимых решений однородной задачи 1 конечно*,

b) *любое ее обобщенное решение бесконечно дифференцируемо вплоть до границы, если граница области бесконечно дифференцируема.*

Из этой теоремы и оценки вытекают полезные свойства решений *спектральной задачи* оператора градиента дивергенции:

а) каждое *ненулевое собстенное значение* μ имеет конечную кратность,

б) любая соответствующая ему *обобщенная собственная функция* бесконечно дифференцируема вплоть до границы области, то-есть, поле $\mathbf{v}_\mu(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{G})$.

Замечание. Оценку (2.9) я не видел у других авторов. Известна [34] другая оценка: существует постоянная $C_s > 0$ такая, что

$$C_s\|\mathbf{u}\|_{s+1} \leq \|\mathrm{rot}\,\mathbf{u}\|_s + \|\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|_s + |\gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})|_{s+1/2} + \|\mathbf{u}\|_s \tag{2.10}$$

2.4. Оператор $\nabla\mathrm{div} + \lambda I$ в подпространствах

На подпространстве $\mathcal{B}$ в $\mathbf{L}_2(G)$, ортогональном $\mathcal{A} = \{\mathbf{u} = \nabla h : \ h \in H^1(G)\}$ оператор $\nabla\,\mathrm{div}\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u}$ является алгебраическим оператором вида: $\lambda\mathbf{u}$.

Пространство $\mathcal{A}_\gamma = \{\mathbf{u} = \nabla h : \ h \in H^2(G), \quad (\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})|_\Gamma = 0\}$ плотно в $\mathcal{A}$, так как функции из $\mathcal{C}_0^\infty \cap \mathcal{A}_\gamma$ плотны в $\mathbf{L}_2(G)$. Пространство

$$\mathbf{A}^2_\gamma(G) = \{\mathbf{v} \in \mathcal{A}_\gamma : \nabla\mathrm{div}\mathbf{v} \in \mathcal{A}_\gamma\}.$$

плотно в $\mathcal{A}_\gamma$ и содержится в $\mathbf{H}^2(G)$ согласно оценке (2.9).

Рассмотрим оператор $\mathcal{N}_d : \mathcal{A}_\gamma \to \mathcal{A}_\gamma$ с областью определения $\mathbf{A}^2_\gamma(G)$, который при $\mathbf{u} \in \mathbf{A}^2_\gamma(G)$ совпадает с $\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}$.

Оператор $\mathcal{N}_d + \lambda I$, где I — единичный оператор, является эрмитовым [4]. Действительно, по формуле Гаусса-Остроградского

$$\int_G (\nabla\mathrm{div}\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u})\cdot\ \mathbf{v}dx = \int_G \mathbf{u}\cdot\ (\nabla\mathrm{div}\mathbf{v} + \lambda\mathbf{v})dx + \tag{2.11}$$

$$\int_\Gamma [(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathrm{div}\mathbf{u} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})\mathrm{div}\mathbf{v}]\,dS.$$

Если вектор-функции $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ принадлежат $\mathbf{A}^2_\gamma(G)$, то граничные интегралы пропадают, остальные интегралы сходятся. Следовательно,

$$((\nabla\mathrm{div}\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u}), \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, (\nabla\mathrm{div}\mathbf{v} + \lambda\mathbf{v})) \quad \text{в} \quad \mathbf{A}^2_\gamma(G). \tag{2.12}$$

Покажем, что

2.5. Оператор $\mathcal{N}_d$ — самосопряжен.

Сопряженный оператор $\mathcal{N}_d^*$ определяется равенством

$$(\mathcal{N}_d\,\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathcal{N}_d^*\,\mathbf{v}) \quad \text{для любого} \quad \mathbf{u} \in \mathbf{A}^2_\gamma \equiv \mathcal{D}(\mathcal{N}_d).$$

Его левая часть существует, если $\mathbf{v} \in \mathcal{A}_\gamma$. Значит, $\mathcal{N}_d^*\mathbf{v} \in \mathcal{A}_\gamma$.

При $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\mathcal{N}_d^*)$ линейная форма $\mathbf{u} \to (\mathcal{N}_d\,\mathbf{u}, \mathbf{v})$ непрерывна на $\mathcal{D}(\mathcal{N}_d)$ в топологии $\mathcal{A}_\gamma$ и $(\mathcal{N}_d\,\mathbf{u}, \mathbf{v}_j) \to 0$ при $\mathbf{v}_j \to 0$ в $\mathcal{A}_\gamma$.

В частности, если $\mathbf{u} \in \mathcal{C}_0^\infty(G) \cap \mathcal{D}(\mathcal{N}_d)$, то

$$(\mathcal{N}_d \, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \nabla \mathrm{div}\, \mathbf{v}).$$

Итак, мы видим, что $\nabla \mathrm{div}\, \mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(G)$, если $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\mathcal{N}_d^*)$.

Учитывая оценку (2.9), получаем, что $\mathcal{D}(\mathcal{N}_d^*) \subset \mathbf{H}^2(G)$.

Следовательно, $\mathcal{D}(\mathcal{N}_d^*) = \mathcal{D}(\mathcal{N}_d)$ и $\mathcal{N}_d^* = \mathcal{N}_d$.

2.6. Оператор $\mathcal{N}_d^{-1}$.

Так как $\mathcal{A}_\gamma$ ортогонально $Ker\mathcal{N}_d$, оператор $\mathcal{N}_d$ имеет единственный обратный $\mathcal{N}_d^{-1}$ определенный на $\mathcal{A}_\gamma$. Оператор $\mathcal{N}_d^{-1} \colon \mathcal{A}_\gamma \to \mathbf{A}_\gamma^2(G)$ имеет точечный спектр, который не содержит точек накопления кроме нуля.

Их множество счетно и каждое из собственных значений μ имеет конечную кратность. Перенумеруем их в порядке возрастания: $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots$, повторяя μ_k столько раз, какова его кратность. Соответствующие собственные функции обозначим через $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots$, так чтобы каждому собственному значению μ_k соответствовала только одна собственная функция $\mathbf{q}_k$: $-\mathcal{N}_d \, \mathbf{q}_k = \mu_k \, \mathbf{q}_k, \quad k = 1, 2, \ldots$

Собственные функции, соответствующие одному и тому же собственному значению, выберем ортонормальными, используя процесс ортогонализации Шмидта [4]. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. Их нормируем.

Таким образом, в подпространстве $\mathcal{A}_\gamma \subset \mathbf{L}_2(G)$ строится ортонормальный базис, состоящий из собственных функций $\{\mathbf{q}_j(\mathbf{x})\}$ оператора $-\mathcal{N}_d$.

2.7. Ряды Фурье по собстенным векторам оператора $-\mathcal{N}_d$ и пространство $\mathcal{A}_\gamma$

Проекция вектор-функции $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(G)$ на $\mathcal{A}_\gamma$ имеет вид:

$$\mathbf{f}_\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_j(\mathbf{x}). \tag{2.13}$$

Действительно, частичные суммы $\mathbf{f}_\mathbf{A}^n$ этого ряда состоят из элементов, для которых $0 < \mu_j \leq n$:

$$\mathbf{f}_\mathbf{A}^n = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_j(\mathbf{x}) \quad \text{и} \quad \|\mathbf{f}_\mathbf{A}^n\|^2 = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)^2 \leq \|\mathbf{f}\|^2,$$

проекции $(\mathbf{f} - \mathbf{f}_\mathbf{A}^n, \mathbf{q}_j) = 0,$ если $-\nabla \mathrm{div}\, \mathbf{q}_j = \mu_j \mathbf{q}_j, \qquad 0 < \mu_j \leq n, \quad$ и

$$\|\mathbf{f}_\mathbf{A} - \mathbf{f}_\mathbf{A}^n\|^2 = \|\mathbf{f}_\mathbf{A}\|^2 - \|\mathbf{f}_\mathbf{A}^n\|^2 \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отметим, что $\mathbf{f}_\mathbf{A}^n \in \mathcal{C}^\infty(\overline{G}), \quad \mathrm{rot}\, \mathbf{f}_\mathbf{A}^n = 0$, $\gamma_\mathbf{n} \mathbf{f}_\mathbf{A}^n = 0$ и при любом n вектор $\mathbf{f}_\mathbf{A}^n \perp \mathcal{B}$ в $\mathbf{L}_2(G)$. Значит, вектор $\mathbf{f}_\mathbf{A} \in \mathcal{A}_\gamma(G)$.

Согласно определению, $\mathcal{N}_d\mathbf{w} = \nabla \mathrm{div}\mathbf{w}$, *если* $\mathbf{w} \in \mathcal{D}(\mathcal{N}_d) = \mathbf{A}^2_\gamma$. Следовательно,

$$\mathcal{N}_d\mathbf{f_A} = \lim_{n\to\infty} \nabla \mathrm{div}\,(\mathbf{f}^n_\mathbf{A}) = -\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j, \tag{2.14}$$

если ряд сходится и принадлежит $\mathcal{A}_\gamma$. Это так, если $f \in \mathbf{H}^2(G)$. Действительно, $\nabla \mathrm{div}\,\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(G)$, $(\nabla \mathbf{div}\,\mathbf{f}, \mathbf{q}_j) = -\mu_j(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)$,

$$(\nabla \mathbf{div}\,\mathbf{f})^n_\mathbf{A} = -\sum_{j=1}^{n} \mu_j(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j,$$

$$\|(\nabla \mathbf{div}\,\mathbf{f})^n_\mathbf{A}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \mu^2_j(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)^2 \leq \|\nabla \mathbf{div}\,\mathbf{f}\|^2 \quad \text{и} \quad \nabla \mathbf{div}(\mathbf{f_A}) \perp \mathcal{B}$$

Оператор $\mathcal{N}_d$ *замкнут.* Действительно, если $\mathbf{w}_i$ - последовательность из $\mathcal{D}(\mathcal{N}_d)$ $(i = 1, 2, \dots)$ такая, что $\mathbf{w}_i \to \mathbf{w}$ и $\mathcal{N}_d\mathbf{w}_i \to \mathbf{v}$ в $\mathcal{A}_\gamma$, то $\mathbf{w} \in \mathcal{D}(\mathcal{N}_d)$, так как по условию $\mathbf{w} = \lim_{i\to\infty} \mathbf{w}_i \in \mathcal{A}_\gamma$ и $\mathcal{N}_d\mathbf{v} = \lim_{i\to\infty} \mathcal{N}_d\,\mathbf{w}_i = \lim_{i\to\infty} \nabla \mathrm{div}\,\mathbf{w}_i \in \mathcal{A}_\gamma$. Значит, $\mathbf{v} = \mathcal{N}_d\mathbf{w}$.

Следствие. *Оператор* $\mathcal{N}_d$ *не зависит не зависит от порядка выбора частичных сумм* $\mathbf{w}_n \in \mathbf{A}^2_\gamma(G)$ *ряда* $\mathbf{f_A}$.

Введем пространства

$$\mathbf{A}^{2k}_\gamma(G) = \{\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma(G), \dots, (\nabla \mathrm{div})^k\,\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma(G)\} \quad \text{при} \quad k \geq 1. \tag{2.15}$$

Согласно оценкам (2.9) $\mathbf{A}^2_\gamma \subset \mathbf{H}^2(G)$ и по индукции $\mathbf{A}^{2k}_\gamma \subset \mathbf{H}^{2k}(G)$.

С другой стороны, $\mathcal{A}_\gamma \cap \mathbf{H}^{2k} \subset \mathbf{A}^{2k}_\gamma(G)$

Поля $\mathbf{f}^n_\mathbf{A}$ при фиксированном n принадлежат любому из этих пространств. Оператор $\mathcal{N}_d$ отображает пространство $\mathbf{A}^{2k}_\gamma$ на $\mathbf{A}^{2(k-1)}_\gamma$ при $k > 1$, а $\mathbf{A}^2_\gamma$ на $\mathcal{A}_\gamma$.

Пространство $\mathcal{A}_\gamma$ ортогонально ядру оператора $\mathcal{N}_d$ в $\mathbf{L}_2(G)$, поэтому $\mathcal{N}_d$ имеет единственный обратный оператор $\mathcal{N}^{-1}_d$ на $\mathcal{A}_\gamma$:

$$\mathcal{N}^{-1}_d\mathbf{f_A} = \lim_{n\to\infty} \mathcal{N}^{-1}_d\,(\mathbf{f}^n_\mathbf{A}) = -\sum_{j=1}^{\infty} \mu^{-1}_j(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j, \tag{2.16}$$

Оператор $\mathcal{N}^{-1}_d$ *- компактен.* Доказательство. Пусть $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,2,\dots}$-ограниченная последовательность в $\mathcal{A}_\gamma$. Тогда последовательность $\mathbf{w}_i = \mathcal{N}^{-1}_d\mathbf{v}_i$ -ограничена в $\mathbf{H}^2(G)$ ввиду оценки $c\|\mathbf{u}\|_2 \leq \|\nabla \mathrm{div}\mathbf{u}\|$. По теореме Кондрашева-Reellich последовательность $\{\mathbf{v}_i\}$ сильно сходится в топологии $\mathcal{A}_\gamma$, т.е., $\mathcal{N}^{-1}_d$ компактен.

Следствие. *Спектр оператора* $\mathcal{N}^{-1}_d$ *точечный с единственной точкой накопления в нуле,* $\mu^{-1}_j \to 0$ *при* $j \to \infty$.

Пространство $\mathcal{N}^{-1}_d\mathcal{A}_\gamma = \mathbf{A}^2_\gamma$, и так далее, $\mathcal{N}^{-1}_d\mathbf{A}^{2(k-1)}_\gamma = \mathbf{A}^{2k}_\gamma$.

2.8. Полнота пространства $\mathcal{A}_\gamma(G)$

В базисе из собственных функ-ций ∇div скалярное произведение векторов $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{A}_\gamma$ имеет вид:

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \lim_{n\to\infty} (\mathbf{f}^n_{\mathbf{A}}, \mathbf{g}^n_{\mathbf{A}}) = \sum_{j=1}^{\infty} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)(\mathbf{g}, \mathbf{q}_j). \tag{2.17}$$

Согласно книге [4] §1.9, ортонормальная система $\{\mathbf{q}_j\}_{j=1,2,\ldots}$ полна в $\mathcal{A}_\gamma$, если для любой $\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma$ ее ряд Фурье (2.13) сходится к $\mathbf{f}$ в $\mathbf{L}_2(G)$. По Теореме 1 из [4] эта система полна в $\mathcal{A}_\gamma$, тогда и только тогда, когда для любой функции $\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma$ выполняется равенство Парсеваля-Стеклова, то-есть уравнение замкнутости:

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)^2 = \|\mathbf{f}\|^2. \tag{2.18}$$

Пространство $\mathbf{A}^2_\gamma(G)$ плотно в $\mathcal{A}_\gamma(G)$, так как плотное в нем множество $\mathbf{C}^\infty_0 \cap \mathcal{A}_\gamma(G)$ содержится в $\mathcal{A}_\gamma(G)$. Если $\mathbf{f} \in \mathbf{C}^\infty_0 \cap \mathcal{A}_\gamma(G)$, то

$$\|\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{A}^2_\gamma} = \|\mathbf{f}\|^2 + \|\nabla \mathrm{div} \mathbf{f}\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (1 + \mu_j^2)(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)^2 < \infty \quad \text{и}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{f}^n_{\mathbf{A}}\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)^2 = \|\mathbf{f}\|^2.$$

2.9. Оператор $\mathcal{N}_d$ самосопряжен (эрмитов) в пространстве $\mathcal{A}_\gamma(G)$

Действительно, если $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ принадлежат $\mathbf{A}^2_\gamma(G)$, то имеют место равенства

$$(\nabla \mathrm{div}\, \mathbf{f}, \mathbf{g}) = (\mathbf{f}, \nabla \mathrm{div} \mathbf{g}) = -\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)(\mathbf{g}, \mathbf{q}_j). \tag{2.19}$$

Отметим, что равенство

$$\int_G (\nabla \mathrm{div}\, \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}\, d\mathbf{x} = \int_G \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathrm{div}\, \mathbf{v})\, d\mathbf{x} \tag{2.20}$$

для любых функций $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ из $\mathcal{D}(\mathcal{N}_d) = \mathbf{A}^2_\gamma(G)$ доказано в п.2.4.

2.10. Оператор $\mathcal{N}_d + \lambda I$ фредгольмов в $\mathcal{A}_\gamma(G)$

Оператор $\mathcal{N}_d + \lambda I$ совпадает с $\nabla\mathrm{div} + \lambda I$ на $\mathbf{A}^2_\gamma$ и по определению

$$(\mathcal{N}_d + \lambda I)\mathbf{f} = \lim_{n\to\infty} (\nabla\mathrm{div} + \lambda \mathrm{I})\,(\mathbf{f}^n_{\mathbf{A}}) = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda - \mu_j)(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j(\mathbf{x}), \qquad (2.21)$$

если ряд сходится в $\mathbf{L}_2(G)$. Это так для всех $\mathbf{f} \in \mathbf{A}^2_\gamma(G)$. Причем, если $\lambda = \mu_{j_0}$ при $j = j_0$, то соответствующее слагаемое исчезает.

Если элемент $(\mathcal{N}_d + \lambda I)^{-1}\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma(G)$, то $(\mathcal{N}_d + \lambda I)^{-1}\mathbf{f} =$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (\lambda - \mu_j)^{-1}(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda - \mu_j)^{-1}(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j \qquad (2.22)$$

и ни одно из слагаемых этого ряда не обращается в бесконечность. Это означает, что $(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j) = 0$ при $\lambda = \mu_j = \mu_{j_0}$, то-есть функция $\mathbf{f}$ ортогональна всем собственным функциям $\mathbf{q}_j(\mathbf{x})$ градиента дивергенции, отвечающим собственному значению μ_{j_0}. Итак, имеет место

Теорема 2. *a). Оператор $\mathcal{N}_d : \mathcal{A}_\gamma \to \mathcal{A}_\gamma$ является самосопряженным. Его спектр $\sigma(\mathcal{N}_d)$ точечный и действительный. Семейство собственных функций $\mathbf{q}_j(\mathbf{x})$ оператора $\mathcal{N}_d$ образует полный ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{A}_\gamma$; разложение $\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma(G)$ имеет вид* (2.13). *b). Если λ не совпадает ни с одним из собственных значений оператора $\mathcal{N}_d$, то оператор $\mathcal{N}_d + \lambda I : \mathcal{A}_\gamma \to \mathcal{A}_\gamma$ однозначно обратим, и его обратный задается формулой* (2.22). *Если $\lambda = \mu_{j_0}$, то он обратим тогда и только тогда,когда*

$$\int_G \mathbf{f} \cdot \mathbf{q_j}\, dx = 0 \quad \text{для } \forall \mathbf{q_j} : \mu_j = \mu_{j_0}. \qquad (2.23)$$

Ядро оператора $\mathcal{N}_d + \mu_{j_0} I$ определяется собственными функциями $\mathbf{q_j}(\mathbf{x})$, собственные значения которых равны μ_{j_0}:

$$Ker(\mathcal{N}_d + \mu_{j_0} I) = \sum_{\mu_j = \mu_{j_0}} c_j\, \mathbf{q}_j(\mathbf{x}), \quad \text{для } \forall c_j \in \mathcal{R}. \qquad (2.24)$$

3. Построение собственных функций оператора ∇div

3.1. Связь между собственными функциями операторов ∇div и Лапласа-Неймана

Задача 2. Найти все ненулевые собственные значения μ и собственные вектор-функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ в $\mathbf{L}_2(G)$ оператора минус градиент дивергенции такие, что

$$-\nabla\mathrm{div}\mathbf{u} = \mu\,\mathbf{u} \quad \text{в} \quad G, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = 0, \qquad (3.1)$$

где $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$ - проекция вектора $\mathbf{u}$ на нормальный вектор $\mathbf{n}$.

К области определения оператора задачи 2 мы отнесли все вектор-функции $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathbf{A}^2_\gamma(G)$. Согласно п.2.5, оператор имеет самосопряженное расширение $-\mathcal{N}_d$ в пространство $\mathcal{A}_\gamma$. Решения задачи 2 принадлежат классу $\mathcal{C}^\infty(\overline{G})$, так как $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty$ (см. следствие теоремы 1).

Эта задача связана со спектральной задачей Неймана для скалярного оператора Лапласа.

Задача 3. Найти все собственные значения ν и собственные функции $g(\mathbf{x})$ оператора Лапласа $-\Delta$ такие, что

$$-\Delta g = \nu g \quad \text{в } G, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla\, g|_\Gamma = 0. \tag{3.2}$$

К области определения оператора задачи 3 относят все функции $g(\mathbf{x})$ класса $\mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}^1(\overline{G})$, такие что $\mathbf{n} \cdot \nabla\, g|_\Gamma = 0$, $\Delta\, g \in L_2(G)$.

Эта задача является самосопряженной [4, 10]. Решения задачи 3 принадлежат классу $\mathcal{C}^\infty(\overline{G})$, так как $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty$. Легко видеть, что

Лемма 1. *Любому решению $(\mu, \mathbf{u})$ задачи 2 в области G соответствует решение $(\nu, g) = (\mu, div\, \mathbf{u})$ задачи 3. Обратно, любому решению (ν, g) задачи 3 соответствует решение $(\mu, \mathbf{u}) = (\nu, \nabla g)$ задачи 2.*

3.2. Явные решения спектральной задачи Лапласа-Неймана в шаре

Согласно книге [4] В. С. Владимирова

собственные значения оператора Лапласа-Неймана 3 в шаре B равны $\nu^2_{n,m}$, где $\nu_{n,m} = \alpha_{n,m} R^{-1}$, $n \geq 0$, $m \in N$, а числа $\alpha_{n,m} > 0$ суть нули функций $\psi'_n(z)$, производных $\psi_n(z)$, т.е. ${\psi_n}'(\alpha_{n,m}) = 0$. Соответствующие $\nu^2_{n,m}$ собственные функции g_κ имеют вид:

$$g_\kappa(r, \theta, \varphi) = c_\kappa \psi_n(\alpha_{n,m} r/R) Y^k_n(\theta, \varphi), \tag{3.3}$$

где $\kappa = (n, m, k)$ — мультииндекс, c_κ — произвольные действительные постоянные, $Y^k_n(\theta, \varphi)$ — действительные сферические функции, $n \geq 0$, $|k| \leq n$, $m \in N$.

Функции $g_\kappa(x)$ принадлежат классу $C^\infty(\overline{B})$ и при различных κ ортогональны в $L_2(B)$. Система функций $\{g_\kappa\}$ полна в $L_2(B)$ [10]. Нормируя их, получим ортонормированный в $L_2(B)$ базис.

3.3. Решение спектральной задачи 2 для ∇div в шаре

Согласно лемме 1 вектор-функции $\mathbf{q}_\kappa(x) = \nabla g_\kappa(x)$ являются решениями задачи 3 при $\nu_{n,m} = \alpha^2_{n,m} R^{-2}$ в $\mathbf{L}_2(B)$. Их компоненты $(q_r, q_\theta, q_\varphi)$ имеют вид

$$\begin{aligned} q_{r,\kappa}(r, \theta, \varphi) &= c_\kappa (\alpha_{n,m}/R) \psi'_n(\alpha_{n,m} r/R) Y^k_n(\theta, \varphi), \\ (q_\varphi + i q_\theta)_\kappa &= c_\kappa (1/r) \psi_n(\alpha_{n,m} r/R) \mathrm{H}Y^k_n(\theta, \varphi). \end{aligned} \tag{3.4}$$

При $\kappa = (0, m, 0)$ функция $Y^0_0(\theta, \varphi) = 1$, $\mathrm{H}Y^0_0 = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} &q_{r,(0,m,0)}(r) = c_{(0,m,0)} (\alpha_{0,m}/R) \psi'_0(\alpha_{0,m} r/R), \\ &(q_\varphi + i q_\theta)_{(0,m,0)} = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Из этих формул легко выписать величины нормирующих множителей c_κ, при которых $\|\mathbf{q}_\kappa(x)\| = 1$.

Отметим, что $\mathbf{q}_\kappa$ и $\mathbf{q}_{\kappa'}$ ортогональны при $\kappa' \neq \kappa$.

Действительно, используя формулу Гаусса-Остроградского легко убедиться, что

$$\int\limits_B \mathbf{q}_{\kappa'} \cdot \mathbf{q}_\kappa dx = \frac{\alpha_{n,m}^2}{R^2} \int\limits_B g_{\kappa'} g_\kappa dx. \qquad (3.6)$$

Но функции $g_\kappa(x)$ и $g_{\kappa'}(x)$, согласно (3.3), взаимно ортогональны в $\mathrm{L}_2(B)$ при $\kappa' \neq \kappa$. Значит, последний интеграл в (3.6) равен нулю и вектор - функции $\mathbf{q}_\kappa$ и $\mathbf{q}_{\kappa'}$ взаимно ортогональны в $\mathbf{L}_2(B)$; при этом $\|\mathbf{q}_\kappa(x)\| = (\alpha_{n,m}/R)\,\|g_\kappa(x)\|$.

3.4. Сходимость ряда Фурье по собственным функциям оператора Лапласа-Неймана в норме пространства Соболева

В § 2.5 главы 4 книги В.П.Михайлова [10] для областей G с границей $\Gamma \in \mathcal{C}^s$ определены подпространства $H^s_{\mathcal{N}}(G)$ в $H^s(G)$:

$$H^s_{\mathcal{N}}(G) = \{f \in H^s(B) : \gamma(\mathbf{n} \cdot \nabla)\, f = 0, \ldots, \gamma(\mathbf{n} \cdot \nabla)\triangle^\sigma f = 0\}, \qquad (3.7)$$

где σ равна целой части $[s/2-1]$ числа $s/2-1$, $s \geq 2$, и $H^0_{\mathcal{N}}(G) = L_2(G)$, $H^1_{\mathcal{N}}(G) = H^1(G)$ по определению. Доказано, что принадлежность f пространству $H^s_{\mathcal{N}}(G)$ необходима и достаточна для сходимости ее ряда Фурье по системе собственных функций g_κ оператора Лапласа-Неймана в $H^s(G)$(см. теоремы 8 и 9 § 2.5 гл. 4).

3.5. Полнота системы собственных вектор-функций оператора градиент дивергенции в пространстве $\mathcal{A}_\gamma$

Действительно, каждый элемент $\mathbf{q}_\kappa(x) = \nabla\, g_\kappa$ принадлежит пространству $\mathcal{A}_\gamma$, так как $g_\kappa \in H^1(B)$ и $\gamma\mathbf{n} \cdot \nabla g_\kappa = 0$. С другой стороны, функция h из $H^1(B)$ разлагается в сходящийся в среднем ряд

$$h = \sum_\kappa (h, \widehat{g}_\kappa)\widehat{g}_\kappa, \quad \widehat{g}_\kappa = (\alpha_{n,m}/R)g_\kappa, \quad (\widehat{g}_\kappa, \widehat{g}_{\kappa'}) = \delta_{\kappa,\kappa'}. \qquad (3.8)$$

Следовательно,

$$\nabla h = \sum_\kappa (h, \widehat{g}_\kappa)\nabla\widehat{g}_\kappa = \sum_\kappa (h, \widehat{g}_\kappa)\mathbf{q}_\kappa. \qquad (3.9)$$

3.6. Сходимость ряда Фурье оператора ∇DIV в норме пространства $\mathbf{H}^{2k}(G)$

Напомним, что скалярное произведение в $\mathbf{H}^k(G)$ С.Л.Соболев определяет так:

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_k = (\mathbf{f}, \mathbf{g}) + \int_G \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \partial^\alpha \mathbf{f} \cdot \partial^\alpha \mathbf{g}\, d\mathbf{x}, \quad k \geq 1. \qquad (3.10)$$

В п.2.5 мы определили пространства

$$\mathbf{A}_\gamma^{2k}(G) = \{\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma(G), \dots, (\nabla\mathrm{div})^k \mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma(G)\} \quad \text{при} \quad k \geq 1. \tag{3.11}$$

Согласно оценкам (2.9) $\mathbf{A}_\gamma^{2k} \subset \mathbf{H}^{2k}(G)$. Имеет место

Теорема 3. *Для того, чтобы $\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma$ разлагалась в ряд Фурье*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j(\mathbf{x}) \tag{3.12}$$

по системе собственных вектор-функций $\mathbf{q}_j(\mathbf{x})$ оператора градиента дивергенции в G, сходящийся в норме пространства Соболева $\mathbf{H}^{2k}(G)$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{f}$ принадлежала $\mathbf{A}_\gamma^{2k}(G)$.

Если $\mathbf{f} \in \mathbf{A}_\gamma^{2k}(G)$, то сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{2k} \, |(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)|^2 \tag{3.13}$$

и существует такая постоянная $C > 0$, не зависящая от $\mathbf{f}$, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{2k} \, |(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)|^2 \leq C \|\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{H}^{2k}(G)}. \tag{3.14}$$

Кроме того, если $k > 1$, то любая вектор-функция $\mathbf{f}$ из $\mathbf{A}_\gamma^{2k}(G)$ разлагается в ряд Фурье, сходящийся в пространстве $\mathbf{C}^{2k-2}(\overline{G})$.

Действительно, по определению область G имеет границу $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty$. Следовательно, собственные функции $\mathbf{q}_j(\mathbf{x})$ оператора градиент дивергенции $: -\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{q}_j(\mathbf{x}) = \mu_j\,\mathbf{q}_j(\mathbf{x})$ в G $\gamma\mathbf{n}\cdot\mathbf{q}_j(\mathbf{x}) = 0$, принадлежат классу $\mathcal{C}^\infty(\overline{G})$. Значит, они и их конечные линейные комбинации принадлежат любому из пространств $\mathbf{A}_\gamma^{2l}(G) \subset \mathbf{L}_2(G)$. Поэтому, если ряд Фурье (3.12) вектор-функции $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{2k}(G)$ сходится в норме $\mathbf{H}^{2k}(G)$, то $\mathbf{f}, \nabla\mathrm{div}\,\mathbf{f}, \dots, (\nabla\mathrm{div})^k\,\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma \subset \mathbf{L}_2(G)$ и, значит, $\mathbf{f} \in \mathbf{A}_\gamma^{2k}(G)$. Необходимость доказана.

Пусть $\mathbf{f} \in \mathbf{A}_\gamma^{2k}(G)$. Установим справедливость неравенства (3.14).

Согласно формуле Грина (2.12)

$$-(\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{f}, \mathbf{q}_j) = -(\mathbf{f}, \nabla\mathrm{div}\,\mathbf{q}_j) = \mu_j(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j). \tag{3.15}$$

Обозначим через $\beta_{k,j}$ коэффициенты Фурье функции $(-\nabla\mathrm{div})^k\mathbf{f}$. Следовательно,

$$\beta_{k,j} = ((-\nabla\mathrm{div})^k\,\mathbf{f}, \mathbf{q}_j) = \mu_j((-\nabla\mathrm{div})^{k-1}\,\mathbf{f}, \mathbf{q}_j) = \dots = \mu_j^k(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j). \tag{3.16}$$

Поскольку $(-\nabla\mathrm{div})^k\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(G)$, то

$$\sum_{j=1}^{\infty} \beta_{k,j}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{2k}(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)^2 = \|(-\nabla\mathrm{div})^k\mathbf{f}\|^2 \leq C\|\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{H}^{2k}(G)}; \tag{3.17}$$

Последнее неравенство вытекает из определения нормы в $\mathbf{H}^{2k}(G)$ Неравенство (3.14) доказано.

Докажем сходимость ряда (3.12) к $\mathbf{f}$ в $\mathbf{H}^{2k}(G)$. Пусть $\mathbf{S}_l(\mathbf{x})$ - частичная сумма ряда (3.12).

Как мы уже отмечали $\mathbf{S}_l(\mathbf{x}) \in \mathbf{A}^{2k}_\gamma(G)$ при всех $l > 0$. В частности, имеем $\mathrm{rot}\mathbf{S}_l(\mathbf{x}) = 0$ и $\gamma\mathbf{n}\cdot\nabla\mathrm{div}\mathbf{S}_l = 0$.

Поэтому оценка (2.9) при $s = 0$ принимает вид

$$C_1\|\mathbf{S}_l\|_{\mathbf{H}^2(G)} \le \|\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{S}_l\|_{\mathbf{L}_2(G)} + \|\mathbf{S}_l\|_{\mathbf{L}_2(G)}. \tag{3.18}$$

Легко видеть, что $\|\mathbf{S}_l\|^2_{\mathbf{L}_2(G)} \le c\|\nabla\mathrm{div}\mathbf{S}_l\|^2_{\mathbf{L}_2(G)}$, где $c = max_j\mu_j^{-2}$. Поэтому $\|\mathbf{S}_l\|^2_{\mathbf{H}^2(G)} \le a_1\|\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{S}_l\|^2$.Следовательно, по индукции при $s = 2p > 2$

$$\|\mathbf{S}_l\|^2_{\mathbf{H}^s(B)} \le a_p\|(\nabla\mathrm{div})^p\,\mathbf{S}_l\|^2. \tag{3.19}$$

Пусть $\mathbf{f} \in \mathbf{A}^{2k}_\gamma(G)$, где $k > 0$. Согласно неравенству (3.14), ряды в правой части (3.19) сходятся и если $l > m \ge 1$, то $\|\mathbf{S}_l - \mathbf{S}_m\|^2_{\mathbf{H}^s(B)} \le$

$$a_p(\|(\nabla\mathrm{div})^p(\mathbf{S}_l - \mathbf{S}_m)\|^2 = a_p\sum_{m+1}^{l}\nu_\kappa^{2p}|\mathbf{f},\mathbf{q}_\kappa)|^2 \to 0$$

при $l, m \to \infty$. Это означает, что ряд (3.12) сходится к $\mathbf{f}$ в $\mathbf{H}^{2k}(G)$.

Далее, при $s \ge 2$ в трехмерной области G имеется вложение пространств $\mathbf{H}^s(G) \subset \mathbf{C}^{s-2}(\overline{G})$ и оценка:

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{C}^{s-2}(\overline{G})} \le C_s\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^s(G)} \tag{3.20}$$

для любой функции $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^s(G)$, в которой постоянная $C_s > 0$ не зависит от $\mathbf{f}$ (см., например, Теорему 3 § 6.2 в [10])). В частности,

$$\|\mathbf{S}_l - \mathbf{S}_m\|_{\mathbf{C}^{s-2}(\overline{G})} \le C_s\|\mathbf{S}_l - \mathbf{S}_m\|_{\mathbf{H}^s(G)}. \tag{3.21}$$

Если $\|\mathbf{S}_l - \mathbf{S}_m\|_{\mathbf{H}^s(G)} \to 0$ при $l, m \to \infty$, то $\|\mathbf{S}_l - \mathbf{S}_m\|_{\mathbf{C}^{s-2}(\overline{G})} \to 0$. Это означает, что ряд (3.12) сходится к $\mathbf{f}$ в $\mathbf{C}^{s-2}(\overline{G})$. Теорема доказана.

Замечание. Итак, $\mathbf{A}^{2k}_\gamma(G)$–это пространство Соболева порядка $2k$ в подпространстве $\mathcal{A}_\gamma$. Оно определяется степенями оператора $\nabla\,div$. Соответственно, $\mathbf{W}^k(G) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0(G), \ldots, (\mathrm{rot})^k\,\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0(G)$–это пространство Соболева порядка k в подпространстве $\mathcal{B}$ в $\mathbf{L}_2(G)$ (см.п.1.1). Оно определяется степенями оператора rot.

Следствие. *Вектор-функция f из $\mathcal{A}\cap\mathbf{C}^\infty_0(G)$ разлагается в ряд Фурье* (3.12), *сходящийся в пространстве $\mathbf{C}^k(\overline{G})$ для любого $k > 0$.*

4. Решение краевой задачи в шаре

4.1.

Методом Фурье легко решается краевая задача.

Задача 4. Задана вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2(B)$. Найти вектор-функцию $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ в $\mathbf{H}^2(B)$ такую, что

$$\nabla \mathbf{div}\, \mathbf{v} + \lambda \mathbf{v} = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad B, \quad \gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{v} = 0, \tag{4.1}$$

Определение. *Вектор-функция* $\mathbf{v}$ *из* $\mathbf{L}_2(B)$ *есть обобщенное решение задачи при* $\mathbf{f} \in \mathbf{F}^0_\gamma(B)$, *если она удовлетворяет тождеству*

$$(\mathbf{v}, (\nabla \operatorname{div} + \lambda)\mathbf{w}) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}) \quad \text{для} \quad \text{любой} \quad \mathbf{w} \in \mathbf{H}^2_0(B). \tag{4.2}$$

Отметим,что $\mathbf{F}^0_\gamma(B) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(B), \operatorname{rot}^2 \mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(B), \gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{f} = 0\}$. Если $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}$ и $\lambda \neq 0$, то $\mathbf{v} = \lambda^{-1}\mathbf{f}_{\mathcal{B}}$ есть решение уравнения (4.2).

Далее, будем полагать, что $\mathbf{f} \neq \mathbf{f}_{\mathcal{B}}$.

4.2. Решение краевой задачи 4 при $\lambda \overline{\in} Sp\,(-\nabla \mathrm{div})$

Имеет место

Теорема 4. *Если* $\lambda \neq 0, \nu^2_{n,m}$ $(n \geq 0, m > 0)$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{F}^0_\gamma(B)$, *то единственное решение* $\mathbf{v}$ *задачи 4 есть сумма* $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ *рядов*

$$\mathbf{v}_1 = \sum_{\kappa, n \geq 0} \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{q}_\kappa)}{\lambda - \nu^2_{n,m}} \mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x}), \quad \kappa = (n, m, k), \tag{4.3}$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{f}_{\mathcal{B}}}{\lambda} \equiv \frac{1}{\lambda} \sum_{\kappa, n \geq 1} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}^+_\kappa)\, \mathbf{q}^+_\kappa + (\mathbf{f}, \mathbf{q}^-_\kappa)\, \mathbf{q}^-_\kappa(\mathbf{x})]. \tag{4.4}$$

Решение задачи принадлежит пространству Соболева $\mathbf{H}^2_\gamma(B)$.

Если $\mathbf{f} \in \mathcal{A} \subset \mathbf{L}_2(B)$, *то* $\mathbf{v}_2 = 0$, *а* $\mathbf{v}_1$ *принадлежит* $\mathbf{A}^2_\gamma \subset \mathbf{H}^2_\gamma$.

Если $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(B)$, *то ряды* (4.3) *и* (4.4) *Сходятся в любом из пространств* $\mathbf{H}^s(B)$, $s \geq 1$, *и их сумма есть решение задачи класса* $C^\infty(\overline{B})$.

Замечание. При суммировании рядов вначале складываются элементы, для которых $0 < \nu_{m,n} < N$ (соотв. $0 < \lambda_{m,n} < N$), а затем $N \to \infty$.

Из соотношений (4.2) имеем:

$$(\lambda - \nu^2_{n,m})\,(\mathbf{v}, \mathbf{q}_\kappa) = (\mathbf{f}, \mathbf{q}_\kappa), \quad \lambda\,(\mathbf{v}, \mathbf{q}^\pm_\kappa) = (\mathbf{f}, \mathbf{q}^\pm_\kappa). \tag{4.5}$$

Формулы (4.3) и (4.4) получают из равенств (4.5).

Ряды (4.3), (4.4) сходятся в $\mathbf{L}_2(B)$, так как $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(B)$ и числа $|\lambda - \nu^2_{n,m})|^{-1}$ стремятся к нулю, при $\nu_{n,m} \to \infty$.

Функция $\mathbf{v}_2 = \lambda^{-1}\mathbf{f}_{\mathcal{B}}$ есть решение уравнения

$$(\lambda^{-1}\mathbf{f}_{\mathcal{B}}, (\nabla \mathrm{div}\, \mathbf{w} + \lambda\, \mathbf{w})) = (\mathbf{f}_{\mathcal{B}}, \mathbf{w}) = (\mathbf{f}_{\mathcal{B}}, \mathbf{w}_{\mathcal{B}}) \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{D}(B).$$

При $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\mathcal{A}}$

$$\nabla \mathrm{div}\, \mathbf{w} + \lambda\, \mathbf{w} = \sum_{\kappa, n \geq 0} (\mathbf{w}, \mathbf{q}_\kappa)(\lambda - \nu^2_{n,m})\, \mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x}),$$

$$(\mathbf{v}_1, (\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{w} + \lambda\,\mathbf{w})) = \sum_{\kappa,n\geq 0}[(\mathbf{f},\mathbf{q}_\kappa)(\mathbf{w},\mathbf{q}_\kappa) = (\mathbf{f}_\mathcal{A},\mathbf{w}_\mathcal{A}).$$

Следовательно, $((\mathbf{v}_1{+}\mathbf{v}_2),(\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{w}{+}\lambda\,\mathbf{w})) = (\mathbf{f},\mathbf{w})$. Существование обобщенного решения доказано.

Единственность решения задачи 4 вытекает из полноты семейства собственных функций ротора и градиента дивергенции в $\mathbf{L}_2(B)$.

Далее обосновываем сходимость рядов.

4.3. Свойство операторов задачи

Введем пространство
$\mathbf{H}^2_{\gamma\delta\gamma}(B) = \{\mathbf{g}\in\mathbf{H}^2(B) : \gamma_\mathbf{n}\mathbf{g} = 0,\ \gamma_\mathbf{n}\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{g} = 0\}$. Обозначим через $Q_\lambda\,\mathbf{f}$ ряд (4.3), а через $\lambda^{-1}\mathcal{P}_\mathcal{B}\,\mathbf{f}$ –ряд (4.4).

Спектр оператора $-\nabla\mathrm{div}$ не имеет конечных предельных точек, поэтому числа $|\lambda|^{-1},\ |\lambda-\nu^2_{n,m}|^{-1}$ ограничены при $\lambda\neq 0,\nu^2_{n,m}$ и

$$\|\lambda^{-1}\mathcal{P}_\mathcal{B}\,\mathbf{f}\| \leq |\lambda|^{-1}\|\mathbf{f}\|, \quad \|Q_\lambda\,\mathbf{f}\|\leq\Lambda\|\mathbf{f}\|, \tag{4.6}$$

причем постоянные $|\lambda|^{-1}$ и $\Lambda = \max_{n,m}|\lambda-\nu^2_{n,m}|^{-1}$ зависят только от расстояния точки λ до этих точек спектра.

Пусть $\mathbf{f}\in\mathbf{F}^0_\gamma(B)$, то-есть $\{\mathbf{f}\in\mathbf{L}_2(B), \mathrm{rot}^2\mathbf{f}\in\mathbf{L}_2(B), \gamma_\mathbf{n}\mathbf{f} = 0\}$. Так как $\mathbf{f} = \mathbf{f}_\mathcal{A}+\mathbf{f}_\mathcal{B}$, $\mathbf{v}_2 = \lambda^{-1}\mathbf{f}_\mathcal{B}$ и $\mathrm{rot}\,\mathbf{f}_\mathcal{A} = 0$, то $\mathbf{v}_2$ и $\mathrm{rot}^2\,\mathbf{v}_2 = \lambda^{-1}\mathrm{rot}^2\,\mathbf{f}$ принадлежат $L_2(B)$. Далее, $\mathrm{div}\mathbf{f}_\mathcal{B} = 0$ и $\gamma_\mathbf{n}\mathbf{f} = 0$, поэтому $\mathrm{div}\,\mathbf{v}_2 = 0$ в B и $\gamma_\mathbf{n}\,\mathbf{v}_2 = 0$. Согласно оценкам (4.6) и (2.9)(при $s = 0$):

$$\|\lambda^{-1}\mathcal{P}_\mathcal{B}\,\mathbf{f}\|_2\leq (C_0|\lambda|)^{-1}(\|\mathbf{f}\|+\|\mathrm{rot}^2\,\mathbf{f}\|). \tag{4.7}$$

Значит, $\lambda^{-1}\mathcal{P}_\mathcal{B}\,\mathbf{f}\in\mathcal{B}\cap\mathbf{H}^2_\gamma(B)$, которое содержится в $\mathbf{H}^2_{\gamma\delta\gamma}(B)$

Далее, ряд $\mathbf{v}_1(\mathbf{x}) = Q_\lambda\,\mathbf{f}$ принадлежит пространству $\mathcal{A}_\gamma(B)$

$$\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{v}_1 = -\sum_{\kappa,n\geq 0}\frac{\nu^2_{n,m}}{\lambda-\nu^2_{n,m}}(\mathbf{f},\mathbf{q}_\kappa)\,\mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x}), \quad \kappa = (n,m,k), \tag{4.8}$$

$$\|\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{v}_1\|^2 =\leq \Pi^2\,\|\mathbf{f}\|^2, \quad \Pi^2 = \max_{n,m}\frac{\nu^4_{n,m}}{|\lambda-\nu^2_{n,m}|^2} \tag{4.9}$$

Значит, $\mathbf{v}_1\in\mathbf{A}^2_\gamma(B)$. Из оценок (4.6) и (4.9) вытекает, что

$$\|Q_\lambda\,\mathbf{f}\|_2\leq C_0^{-1}(\Lambda+\Pi)\|\mathbf{f}\|. \tag{4.10}$$

Значит, $Q_\lambda\,\mathbf{f}\in\mathbf{H}^2_{\gamma\delta\gamma}(B)$. Поэтому $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \lambda^{-1}\mathcal{P}_\mathcal{B}\,\mathbf{f}+Q_\lambda\,\mathbf{f}$, решение задачи 6, принадлежит пространству $\mathbf{H}^2_{\gamma\delta\gamma}(B)$ и выполняется оценка:

$$\|v\|_{\mathbf{H}^2_{\gamma\delta\gamma}(B)}\leq C_0^2\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{F}^0_\gamma(B)}. \tag{4.11}$$

Обратно. Пусть $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^2_{\gamma\delta\gamma}(B) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^2, \gamma_{\mathbf{n}}\,\mathbf{v} = 0, \gamma_{\mathbf{n}}\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0\}$, тогда $\mathbf{f} = \nabla\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} + \lambda\mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(B)$, $\mathrm{rot}^2\mathbf{f} = \lambda\mathrm{rot}^2\mathbf{v} \in L_2(B)$ и $\gamma_{\mathbf{n}}\mathbf{f} = \gamma_{\mathbf{n}}\nabla\mathrm{div}\mathbf{v} + \lambda\gamma_{\mathbf{n}}\mathbf{v} = 0$. Значит, $\mathbf{f} \in \mathbf{F}^0_\gamma(B)$ и

$$\|f\|_{\mathbf{F}^0_\gamma(B)} \le C^0_1\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^2_{\gamma\delta\gamma}(B)}. \tag{4.12}$$

Таким образом, доказана следующая

Лемма 2. *Если $\lambda \overline{\in} Sp\,(-\nabla\mathrm{div})$, то-есть если $\lambda \neq 0, \nu^2_{n,m}$, то оператор $\nabla\,div + \lambda I$ осуществляет взаимно однозначное и непрерывное отображение пространств $\mathbf{H}^2_{\gamma\delta\gamma}(B)$ и $\mathbf{F}^0_\gamma(B)$.*

Не трудно доказать более общее утверждение.

Лемма 3. *Если $\lambda \overline{\in} Sp\,(-\nabla\mathrm{div})$, то оператор $\nabla\,div + \lambda I$ осуществляет гомеоморфизм пространств $\mathbf{H}^{k+2}_{\gamma\delta\gamma}(B)$ и $\mathbf{F}^k_\gamma(B)$ при любом $k \ge 0$.*

4.4. Разрешимость краевой задачи 4 при $\lambda \in Sp\,(-\nabla\mathrm{div})$

Из соотношений (4.5) видим, что

при $\lambda = 0$ однородная задача имеет счетное линейно независимых решений $\mathbf{q}^\pm_\kappa(\mathbf{x})$, а неоднородная задача 5 разрешима тогда и только тогда, когда $(\mathbf{f}, \mathbf{q}^\pm_\kappa) = 0\ \forall\,\kappa$, то-есть $\mathbf{f}_{\mathcal{B}} = 0$ или $rot\,\mathbf{f} = 0$,

при $\lambda = \nu^2_{n,m}$ (n, m-фиксированы) однородная задача имеет $2n{+}1$ линейно независимых решений $\mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x})$, где $\kappa = (n, m, k)$, $k = -n, \ldots, n$, а неоднородная задача 5 разрешима тогда и только тогда, когда $(\mathbf{f}, \mathbf{q}_\kappa) = 0$; значит, задача разрешима по Фредгольму.

4.5. Оператор $\mathcal{N}_d + \lambda\,I$ в пространстве $\mathcal{A}_\gamma$

Согласно п.2.8 оператор $\nabla\mathbf{div} + \lambda\,I$ и его расширение $\mathcal{N}_d + \lambda\,I$ в $\mathcal{A}_\gamma$ задаются рядом

$$(\mathcal{N}_d\, + \lambda)\,\mathbf{w} = \sum_{\kappa,n\ge 0}(\mathbf{w}, \mathbf{q}_\kappa)(\lambda - \nu^2_{n,m})\,\mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x}), \quad \mathbf{w} \in \mathcal{A}_\gamma,$$

если он сходится в $\mathbf{L}_2(B)$. Обратный оператор имеет вид:

$$(\mathcal{N}_d\, + \lambda)^{-1}\,\mathbf{v} = \sum_{\kappa,n\ge 0}\frac{(\mathbf{v}, \mathbf{q}_\kappa)}{(\lambda - \nu^2_{n,m})}\,\mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x}), \quad \mathbf{v} \in \mathcal{A}_\gamma,$$

если $\lambda \neq \nu^2_{n,m}$, где $\nu_{n,m} = (\alpha_{n,m})/R$, $n \ge 0$, $m \in N$, а числа $\alpha_{n,m} > 0$ суть нули функций $\psi'_n(z)$,- производных функций $\psi_n(z)$ (см. (1.5)).

При $\lambda = 0$ оператор $\mathcal{N}_d^{-1}$ определен и отображает пространство $\mathcal{A}_\gamma$ на $\mathbf{A}^2_\gamma = \{\mathbf{v} \in \mathcal{A}_\gamma : \nabla\mathbf{div}\mathbf{v} \in \mathcal{A}_\gamma\}$, причем $\mathbf{A}^2_\gamma \subset \mathbf{H}^2_\gamma(B)$.

Если $\lambda = \nu^2_{n,m}$ при фиксированных n и m, то однородное уравнение $(\mathcal{N}_d\, + \lambda)\,\mathbf{w} = 0$ имеет $2n{+}1$ линейно независимых решений $\mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x})$, где $\kappa = (n, m, k)$, $k = -n, \ldots, n$, которые являются собственными функциями оператора $-\nabla\mathbf{div}$ и вычислены явно в п.3.3. Неоднородное уравнение $(\mathcal{N}_d+\lambda)\,\mathbf{w}=\mathbf{v}$ разрешимо тогда и только тогда, когда $(\mathbf{v},\mathbf{q}_\kappa)=0$ при $\kappa=(n,m,k)$, $k=-n,\dots,n$ (см. Теорема 2).

Значит оператор $\mathcal{N}_d+\lambda\,I:\mathcal{A}_\gamma\to\mathcal{A}_\gamma$ является фредгольмовым, а оператор $\mathcal{N}_d:\mathbf{A}^2_\gamma\to\mathcal{A}_\gamma$ – однозначно обратимым.

Определены степени оператора $-\mathcal{N}_d$, это ряды:

$$(-\mathcal{N}_d)^p\,\mathbf{v}=\sum_{\kappa,n\geq 0}\nu^{2p}_{n,m}\,(\mathbf{v},\mathbf{q}_\kappa)\,\mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x}),\quad p=2,3,\dots.$$

Согласно Теореме 3 они сходятся в $\mathbf{L}_2(B)$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{v}\in\mathbf{A}^{2p}_\gamma(B)=\{\mathbf{f}\in\mathcal{A}_\gamma,\dots,(-\nabla\mathrm{div})^p\mathbf{f}\in\mathcal{A}_\gamma\}\subset\mathbf{H}^{2p}_\gamma(B).$$

Степени обратного оператора:

$$(-\mathcal{N}_d)^{-p}\,\mathbf{w}=\sum_{\kappa,n\geq 0}\frac{(\mathbf{w},\mathbf{q}_\kappa)}{\nu^{2p}_{n,m}}\,\mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x}),\quad p=1,2,3,\dots,$$

отображают пространство $\mathcal{A}_\gamma(B)$ на пространства $\mathbf{A}^{2p}_\gamma(B)$, так как

$$(-\mathcal{N}_d)^p\,(-\mathcal{N}_d)^{-p}\,\mathbf{w}_A=\lim_{n\to\infty}\sum_{\kappa,n}(\mathbf{w}^n_A,\mathbf{q}_\kappa)\,\mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x})=\mathbf{w}_A,\quad \mathbf{w}\in\mathcal{A}_\gamma(B),$$

и ряд сходится. Значит, $\mathbf{w}_A=\mathbf{w}$.

Таким образом, $\mathbf{A}^{2p}_\gamma(B)$–это пространства Соболева четного порядка $2p$ в подпросрансстве $\mathcal{A}$ в $\mathbf{L}_2(B)$. Чтобы определить эти пространства для нечетного порядка p введем операторы $(-\mathcal{N}_d)^{\pm 1/2}$ по формулам

$$(-\mathcal{N}_d)^{\pm 1/2}\,\mathbf{v}=\sum_{\kappa,n\geq 0}(\nu_{n,m})^{\pm 1}\,(\mathbf{v},\mathbf{q}_\kappa)\,\mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x}),\quad \mathbf{v}\in\mathbf{H}^1_\gamma(B).$$

Тогда $\mathbf{A}^1_\gamma(B)=\{\mathbf{g}\in\mathcal{A}_\gamma,(-\nabla\mathrm{div})^{1/2}\mathbf{g}\in\mathcal{A}_\gamma\}$ это пространство Соболева порядка 1 в $\mathcal{A}_\gamma$, $\mathcal{A}^1_0(B)$ — замыкание множества $\mathcal{C}^\infty_0(B)$ в норме $\mathbf{A}^1_\gamma$, а $\mathbf{A}^{-1}(B)$–пространство, двойственное $\mathcal{A}^1_0(B)$.

Детальнее мы рассмотрим эти вопросы в другой работе.

Благодарности. Автор глубоко признателен профессору, доктору физ.-мат. наук М. Д. Рамазанову и доценту, кандидату физ.-мат. наук Р. Н. Гарифуллину за помощь и поддержку.

Список цитируемых источников

1. *Агранович, М. С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. М.: МЦНМО, 2013. 365 с.
2. *Быховский, Э. Б., Смирнов, Н. В.* Об ортогональном разложении пространства $\mathbf{L}_2(\Omega)$ и операторах векторного анализа. Труды МИАН им. В. А. Стеклова, LIX. Матем. вопросы гидродинамики и магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости. М.-Л.: Изд. АН СССР, 1960, с. 5-36.

   Bykhovski, E.B., Smirnov, N.V. About orthogonal decomposition of Spaces $\mathbf{L}_2(\Omega)$ and operators of the vector analysis. Trudy MIAN, LIX. Moscow- Leningrad: Izd. AN SSSR, 5-36 (1960). (in Russian)
3. *Вайнберг Б. Р., Грушин, В. В.* О равномерно неэллиптических задачах I. Матем. сборник 72(114), №4, 602-636 (1967).

   Vainberg, B. R., Grushin, V. V. Uniformly nonelliptic problems I. Math. USSR-Sb. 2(1), 111-133 (1967).
4. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.

   Vladimirov, V. S. Equations of Mathematical Physics. New York: Marcel Dekker, 1971.
5. *Дюво, Г., Лионс, Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
6. *Зорич, В. А.* Математический анализ. Часть II. М.: Наука, 1984. 640 с.
7. *Козлов, В. В.* Общая теория вихрей. Ижевск: Изд. дом «Удмурдский университет», 1998. 240 с.

   Kozlov, V. V.General Vortex Theory. Izhevsk: Udmurd.Univ., 1998. (in Russian)
8. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, ч. II. М.: Гостехиздат, 1948.
9. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.

   Ladyzhenskaya, O A. Mathematical Theory of Viscous Incompressible flow. New York: Gordon and Breach, 1969.
10. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1975. 392с.

    Mikhailov, V.P. Partial Differential Equations. Moscow: Mir, 1978.
11. *Сакс, Р. С.* Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений. Новосибирск: НГУ, 1975. 164 с.

    Saks, R. S. Boundary Value Problems for Elliptic Systems of Differential Equations. Novosibirsk: Gos. Univ., 1975. (in Russian)
12. *Сакс, Р. С.* О свойствах обобщенно эллиптических псевдодифференциальных операторов на замкнутых многообразиях. Записки научн. семинаров ПОМИ 243, 215-269 (1997).
13. *Сакс, Р. С.* Решение спектральной задачи для оператора ротор и оператора Стокса с периодическими краевыми условиям. Записки научн. семинаров ПОМИ 318, 246-276 (2004).

14. *Сакс, Р. С.* Глобальные решения уравнений Навье-Стокса в равномерно вращающемся пространстве. Теоретическая и математическая физика 162, no.2, 196-215 (2010).

Saks, R. S. Global solutions of the Navier-Stokes equations in uniformly rotating space. Theor. Math. Phys. 162, No.2, 163-178 (2010).

15. *Сакс, Р. С., Хайбуллин, А. Г.* Об одном методе численного решения задачи Коши для уравнений Навье-Стокса и рядах Фурье оператора ротор. Доклады РАН 429, №1, 22-27 (2009).

16. *Сакс, Р. С.* Задача Коши для уравнений Навье-Стокса, метод Фурье. Уфимский математический журнал 3, №1, 53-79 (2011).

Saks, R. S. Cauchy Problem for the Navier-Stokes equations, Fourier method. Ufimskiy Matem. Zh. 3, №1, 53-79 (2011).

17. *Сакс, Р. С.* Спектральные задачи для операторов ротора и Стокса. Доклады РАН 416, № 4, 446-450 (2007).

18. *Сакс, Р. С.* Решение спектральных задач для операторов ротора и Стокса. Уфимский математический журнал 5, №2, 63-81 (2013).

Saks, R. S. Solving of Spectal Problems for the curl and Stokes operators. Ufim. Matem. Zh. 5, No.2, 63-81 (2013). (in Russian)

19. *Сакс, Р. С.* Ортогональные подпространства пространства $\mathbf{L}_2(G)$ и самосопряженные расширения операторов ротора и градиента дивергенции. Доклады РАН 462, №3, 278-282 (2015).

20. *Сакс, Р. С.* Оператор градиент дивергенции в $\mathbf{L_2(G)}$. Доклады РАН 462, №5, 61-65 (2015).

21. *Сакс, Р. С.* Оператор ротор в пространстве $L_2(G)$. Таврический вестник информатики и математики №1, 87-103 (2015).

22. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 810 с.

Sobolev S.L. Cubature Formulas and Modern Analysis: An Introduction. Monteux: Gordon and Breach, 1992.

23. *Соболев С.Л.* Об одной новой задаче математической физики. Известия АН СССР, серия математическая 18, 3-50 (1954).

Sobolev, S. L. About one new problem in mathematical physics. Izvestiya AN SSSR 18, 3-50 (1954). (in Russian)

24. *Солонников, В. А.* Переопределенные эллиптические задачи. Записки научных семинаров ЛОМИ 21, №5, 112-158 (1971).

Solonnikov, V. A. Overdeterminate elliptic problems Zapiski nauchnykh seminarov LOMI 21, no.5, 112-158 (1971).

25. *Темам, Р.* Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с.

Temam, R. I. Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis. Amsterdam: North-Holland, 1979.

26. *Borchers W., Sohr H.* The equations $div\, u = f$ and $rot\, v = g$ with zero boundary conditions. Hokkaido Math. J. 19, 67-87 (1990).

27. *Bourguignon, J. P., Brezis, H.* Remarks on the Euler equation. J. Funct. Anal. 15, 341-363 (1974).
28. *Cantarella, J., DeTurck, D., Gluck, H., Teitel, M.* The spectrum of the curl operator on spherically symmetric domains. Physics of plasmas 7, no.7, 2766-2775 (2000).
29. *Fridrichs, K.* Differential form on Riemannian manifolds. Comm. Pure Appl. Math. VIII, №2, (1955).
30. *Fursikov, A.* Local existence theorems with unboundet set of input data and unboundeness of stable invariant manifolds for 3D Navier-Stokes equations. AIMS' Journal 3, no.2, 269-289 (2010).
31. *Montgomery, D., Turner, L., Vahala, G.* Three-dimentional magnetohydrodyamic turbulence in cylindrical geometry. Phys. Fluids. 21, no.5, 757-764 (1978).
32. *Taylor, J. B.* Relaxation of toroidal plasma and generation of reverse magnetic fields. Phys. Rev. Letters. 33, 1139-1141 (1974).
33. *Weyl, H.* The method of orthogonal projection in potetial theory. Duke Math. 7, 411-444 (1941).
34. *Yoshida, Z. and Giga, Y.* Remark on spectra of operator rot. Math. Z. 204, 235-245 (1990).

Получена 14.11.2018