

УДК 517.957

# Метаустойчивые структуры уравнения Кана-Хилларда

С. П. Плышевская

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,  
Симферополь 295007. E-mail: *splyshevskaya@mail.ru*

**Аннотация.** На отрезке рассматривается уравнение Кана-Хилларда с краевыми условиями. Для исследования задачи о метаустойчивых структурах рассматриваемого уравнения используется метод Галеркина. Стационарным точкам систем обыкновенных дифференциальных уравнений отвечают приближённые стационарные решения исходной задачи. В этих системах реализуется богатый набор седло-узловых бифуркаций. Непрерывным ветвям неподвижных точек, которые рождаются в результате этих седло-узловых бифуркаций, отвечают непрерывные ветви приближённых стационарных решений исходной задачи. В работе показано, что приближённые стационарные решения, взятые в качестве начальных функций исходной задачи, порождают медленно меняющиеся решения (метаустойчивые структуры).

**Ключевые слова:** метаустойчивые структуры, метод Галеркина, градиентная система, бифуркация, внутренний переходный слой.

## Metastable structure of the Cahn-Hilliard equation

S. P. Plyshevskaya

V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

**Abstract.** The Cahn-Hilliard equation at a segment with the boundary condition is considered. For the construction and analysis of stationary solutions of slowly varying solutions we use the Galerkin approximations of the average dimensions (30 – 40). It is found that in two-parameter families of differential equations there are realized saddle-node bifurcations, to the continuous branches of stationary solutions of which, the continuous branches of approximate stationary solutions of the transition layer type with two and three transition points correspond. These solutions generate metastable structures (slowly varying solutions). The analysis conducted suggests that the use of the Galerkin method in the problem of metastable structures leads to qualitatively and quantitatively correct results.

**Keywords:** metastable structure, stability, Galerkin's method, gradient system, bifurcation, internal shock layer.

**MSC 2010:** 35B32, 35B35, 35K35, 35K55

### 1. Постановка задачи

Данная работа посвящена исследованию медленно меняющихся решений уравнения

$$\begin{aligned} u_t &= (-\varepsilon^2 u_{xx} - u + u^3)_{xx}, & 0 < x < \pi, & \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(\pi, t) = 0, & u_{xxx}(0, t) &= 0, \quad u_{xxx}(\pi, t) = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\varepsilon > 0$  - постоянная.

Параметр  $\varepsilon^2$  является коэффициентом при градиентной энергии в функционале Гинзбурга-Ландау и пропорционален величине поверхностной энергии на межфазной границе, возникающей при расслоении концентрации при  $T \rightarrow T_c$ , где  $T_c$  – критическая температура. Поскольку единственным механизмом переноса атомов является диффузионный механизм (см., например, [6]), то  $\varepsilon^2 \propto D$ , где  $D$  – коэффициент диффузии [1].

Краевая задача (1.1) допускает существование аттрактора: т.е. при  $t \rightarrow \infty$  её решения сходятся к решениям стационарной задачи

$$(-\varepsilon^2 u_{xx} - u + u^3)_{xx} = 0, \quad u_x(0) = u_x(\pi) = 0, \quad u_{xxx}(0) = u_{xxx}(\pi) = 0. \quad (1.2)$$

Это утверждение доказано в [4].

Исследование кинетики расслоения в бинарных смесях с заданной концентрацией компонентов является одной из актуальных задач физики конденсированного состояния [1].

Уравнение Кана-Хилларда (1.1) - это одна из самых знаменитых моделей, которая описывает процесс изотермического разделения фаз концентрации [3], где неизвестная функция является концентрацией одной из компонент бинарной смеси.

Уравнение Кана-Хилларда (1.1) рассматривалось в работах многих авторов. В частности, в [1] рассматривается бинарная смесь, которая граничит с подложкой и вакуумом и образует плёнку. Распределение одной из компонент смеси описывается уравнением Кана-Хилларда с несимметричными граничными условиями, учитывающим процессы (смачивания), происходящие на границе и приповерхностных слоях плёнки и, возможно, влияние внешнего постоянного магнитного поля.

При спиnodальном распаде можно наблюдать спонтанные коррелированные поверхностные и(или) объёмные структуры, состоящие из кластеров повышенной (пониженной) концентрации. В работах [5, 6] уравнение Кана-Хилларда моделирует распределение концентрации.

В работе [3] N. Alikakos, P. W. Bates, G. Fusco (1991) доказано существование метаустойчивых структур (медленно меняющихся решений) уравнения (1.1) при малых значениях параметра  $\varepsilon^2$ .

В данной работе рассматривается следующая задача: показать с помощью численных расчётов сценарий возникновения при уменьшении параметра  $\varepsilon^2$  метаустойчивых структур (медленно меняющихся решений) уравнения (1.1). Для решения этой задачи строится и проводится анализ иерархии упрощенных моделей уравнения (1.1) – галеркинских аппроксимаций (1.1).

## 2. Аппроксимации уравнения (1.1)

Рассмотрим галеркинскую аппроксимацию уравнения (1.1) в виде

$$u = z_0 + \sum_{k=1}^N z_k \cos kx. \quad (2.1)$$

Подставим (2.1) в (1.1) и приравняем затем коэффициенты при  $\cos kx$ ,  $k = 0, \dots, N$ . В результате приходим к градиентной системе уравнений:

$$\dot{z}_0 = 0, \quad \dot{z}_k = -\frac{\partial G_N(z, \varepsilon)}{\partial z_k}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

где  $z = (z_0, \dots, z_N)$ , а  $G_N(z, \varepsilon)$  – потенциальная функция, представление которой опустим.

Из первого уравнения системы следует, что  $z_0 = \text{const} = a$  является постоянным параметром.

В системе (2.2) семейство решений  $\pm(a, 0, \dots, 0)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , устойчиво при  $\varepsilon^2 > 0$ , если  $|a| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Если  $|a| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ , то семейство решений устойчиво при  $\varepsilon^2 > 1 - 3a^2$ . Решения  $\pm(1, 0, \dots, 0)$  устойчивы для  $\varepsilon^2 > 0$ . При переходе параметра  $\varepsilon^2$  через значение  $\varepsilon^2 = 1 - 3a^2$  семейство решений  $\pm(a, 0, \dots, 0)$  становится неустойчивым с индексом неустойчивости 1. В результате этой бифуркации от семейства решений ответвляются две ветви неподвижных точек  $\pm z^1(\varepsilon, N, a)$ , определённые по  $\varepsilon$  на  $[0, 1 - 3a^2]$ . Все компоненты  $z_{2k}^1(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , находятся вблизи 0, причём  $z_1^1 > -z_3^1 > z_5^1 > \dots$ . Следовательно, справедливо следующее приближённое равенство:

$$\varphi_1(x, \varepsilon, a) \approx a + \sum_{k=1}^N z_k^1(\varepsilon, N, a) \cos kx. \quad (2.3)$$

Согласно [3] при достаточно малых  $\varepsilon^2$  и фиксированном  $a$  функции  $\varphi_1(x, \varepsilon, a)$  близки к ступенчатым функциям со значениями 1,  $-1$  и одной точкой перехода.

Анализ непрерывной ветви  $z^1(\varepsilon, N, a)$  неподвижных точек (2.2), выполненный для  $N$  от 30 до 40, равенство (2.3) даёт основание для следующих заключений. Если  $1 - 3a^2 - \varepsilon^2 > 0$  мало, то функция  $\varphi_1(x, \varepsilon, a)$  имеет квазигармоническую форму с малой амплитудой. Решение  $\varphi_1(x, \varepsilon, a)$  монотонно убывает на промежутке  $[0, \pi]$ , причём при  $a = 0$   $\varphi_1(\frac{\pi}{2}, \varepsilon, a) = 0$ ,  $\varphi_1(\pi - x, \varepsilon, a) = -\varphi_1(x, \varepsilon, a)$ . Для каждого фиксированного  $x$ , например, при  $a = 0$   $x \in [0, \pi/2]$ ,  $\varphi_1(x, \varepsilon, a)$  монотонно возрастает при уменьшении параметра  $\varepsilon$ ,  $\varphi_1(x, \varepsilon, a) \rightarrow 1$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Причём с увеличением  $a$  промежутков, на котором функция  $\varphi_1(x, \varepsilon, a) \rightarrow 1$  возрастает. Следует отметить, что правая часть равенства (2.3) при малых  $\varepsilon^2$  в силу явления Гиббса колеблется. Таким образом, указанное выше поведение функции  $\varphi_1(\cdot, \varepsilon, a)$  согласно (2.3) при малых  $\varepsilon^2$  справедливо по модулю явления Гиббса.

Следуя [2], с помощью принципа подобия можно построить, опираясь на  $\varphi_1(x, \varepsilon, a)$ , решения  $\varphi_k(x, \varepsilon, a)$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , краевой задачи (1.2). Пусть  $\varphi(x, \varepsilon, a)$  - отличное от нуля решение (1.2), определенное для всех  $0 < \varepsilon < a$ . Продолжим функцию  $\varphi(x, \varepsilon, a)$  на промежуток  $[-\pi, 0)$  чётным образом, а затем на всю ось  $x$  по периодичности с периодом  $2\pi$ . Тогда при любом натуральном  $k$  функция  $\varphi(kx, k\varepsilon, a)$  будет удовлетворять краевой задаче (1.2) для всех  $0 < \varepsilon^2 < \frac{a}{k}$ . Отсюда вытекает, что на промежутке  $0 < \varepsilon^2 < \frac{1}{k}$  справедливо равенство:

$$\varphi_k(x, \varepsilon, a) = \varphi_1(kx, k\varepsilon, a), \quad k = 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

Динамика  $\varphi_2(x, \varepsilon, a)$  при уменьшении  $\varepsilon^2$  от критического значения  $\frac{1}{4} - 3a^2$  следует из равенства (2.4). Подчеркнём, что при малых  $\varepsilon^2$   $\varphi_2(x, \varepsilon, a)$  является решением (1.1) типа внутреннего переходного слоя с двумя точками перехода.

Перейдём теперь к вопросу об устойчивости  $\pm\varphi_1$ . Эта пара решений (1.1) рождается устойчивой. Характер устойчивости  $\pm\varphi_1$  сохраняется на промежутке  $[0, 1 - 3a^2)$  изменения параметра  $\varepsilon^2$ . Точки спектра неподвижной точки  $z^1(\varepsilon, N, a)$  для всех  $0 < \varepsilon^2 < 1 - 3a^2$  лежат на отрицательной полуоси и при убывании  $\varepsilon^2$  сближаются: максимальная точка убывает, минимальная возрастает.

Перейдём теперь к вопросу об устойчивости стационарных решений  $\pm\varphi_2(x, \varepsilon, a)$ . Эта пара решений (1.1) рождается при  $\varepsilon^2 = \frac{1}{4} - 3a^2$  неустойчивой с индексом неустойчивости равным 1. Характер устойчивости решений  $\pm\varphi_2(x, \varepsilon, a)$  сохраняется, а единственное положительное собственное значение спектра экспоненциально мало,  $O(e^{-\frac{\varepsilon}{\varepsilon}})$ .

Для анализа поведения спектра решения (1.1)  $\varphi_2(x, \varepsilon, a)$  при средних значениях параметра  $\varepsilon^2$  обратимся вновь к системе (2.2). Для каждого  $N$  в системе (2.2) при уменьшении параметра  $\varepsilon^2$  и его переходе через значение  $\frac{1}{4} - 3a^2$  индекс неустойчивости семейства решений увеличивается на 1. В результате этой бифуркации от семейства решений ответвляются две непрерывные ветви неподвижных точек  $\pm z^2(\varepsilon, N, a)$ , определённые на  $[0, 2^{-2} - 3a^2)$ . Все нечётные компоненты  $z^2(\varepsilon, N, a)$  равны 0. Чётные компоненты  $z_{2k}^2(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , отличны от нуля, причём  $z_{6k+2}^2 > 0$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Следовательно, справедливо следующее приближённое равенство:

$$\varphi_2(x, \varepsilon, a) \approx a + \sum_{k=1}^m z_{2k}^2(\varepsilon, N, a) \cos 2kx, \quad (2.5)$$

$m + 1 = N$ , если  $N$  — нечётно,  $m = N$ , если  $N$  — чётно.

Рассмотрим здесь задачу о поведении максимального собственного значения решения  $\varphi_2(x, \varepsilon, a)$  при средних значениях параметра  $\varepsilon^2$ . Обратимся в этой связи к вопросу о динамике по параметру  $\varepsilon^2$  максимального собственного значения  $\lambda_1(\varepsilon, N, a)$  неподвижных точек  $z^2(\varepsilon, N, a)$  системы (2.2). Спектр устойчивости  $z^2(\varepsilon, N, a)$  лежит на вещественной оси, а его максимальная точка  $\lambda_1 = \lambda_1(\varepsilon, N, a)$

при малых  $\frac{1}{4} - 3a^2 - \varepsilon^2 > 0$  принадлежит положительной полуоси. Остальные точки спектра неподвижной точки  $z^2(\varepsilon, N, a)$  для всех  $0 < \varepsilon^2 < \frac{1}{4} - 3a^2$  лежат на отрицательной полуоси и при убывании  $\varepsilon^2$  сближаются: максимальная точка убывает, минимальная возрастает. Согласно численному анализу для  $30 < N < 40$  поведение  $\lambda_1$  зависит от  $N$ . Если  $N$  — чётно, то  $\lambda_1$  убывает при убывании  $\varepsilon^2$ . При приближении  $\lambda_1$  к нулю скорость изменения  $\lambda_1$  уменьшается. При этом выделяется интервал  $(\varepsilon_1^2(N), \varepsilon_2^2(N))$  изменения  $\varepsilon^2$ , на которых  $\lambda_1(\varepsilon, N, a)$  медленно меняется вблизи нуля. При убывании  $\varepsilon^2$  от значения  $\varepsilon_1^2(N)$   $\lambda_1$  принимает отрицательные значения и медленно, монотонно убывает. Пусть  $N$  — нечётно. Тогда  $\lambda_1(\varepsilon, N, a)$  не принимает отрицательных значений. Процесс медленной эволюции  $\lambda_1$  на интервале  $(\varepsilon_1^2(N), \varepsilon_2^2(N))$ , на котором  $\lambda_1$  принимает малые положительные значения, переходит в стадию медленного монотонного возрастания при уменьшении  $\varepsilon^2$  от  $\varepsilon_1^2(N)$ . Отметим, что возрастание  $N$  приводит к возрастанию  $\varepsilon_2^2(N) - \varepsilon_1^2(N)$  и убыванию  $\varepsilon_2^2(N)$ .

Пусть  $a = 0.3$ . Приведём иллюстрирующие примеры:  $\varepsilon_1^2(29) \approx 0.02$ ,  $\varepsilon_2^2(29) \approx 0.04$ ;  $\lambda_1(0.04, 29, 0.3) = 0.00007$ ,  $\lambda_1(0.02, 29, 0.3) = 0.00002$ ,  $\lambda_1(0.01, 29, 0.3) = 0.001$ ;  $\varepsilon_1^2(30) \approx 0.03$ ,  $\varepsilon_2^2(30) \approx 0.04$ ;  $\lambda_1(0.04, 30, 0.3) = 0.00007$ ,  $\lambda_1(0.03, 30, 0.3) = 0.000076$ ,  $\lambda_1(0.02, 30, 0.3) = -0.00004$ .

Динамика  $\varphi_3(x, \varepsilon, a)$  при уменьшении  $\varepsilon^2$  от критического значения  $\frac{1}{9} - 3a^2$  следует из равенства (2.4). Подчеркнём, что при малых  $\varepsilon$   $\varphi_3(x, \varepsilon, a)$  является решением (1.1) типа внутреннего переходного слоя с тремя точками перехода.

Перейдём теперь к вопросу об устойчивости стационарных решений  $\pm\varphi_3(x, \varepsilon, a)$ . Эта пара решений (1.1) рождается при  $\varepsilon^2 = \frac{1}{9} - 3a^2$  неустойчивой с индексом неустойчивости равным 2.

Для анализа поведения спектра решения (1.1)  $\varphi_3(x, \varepsilon, a)$  при средних значениях параметра  $\varepsilon^2$  обратимся вновь к системе (2.2). Для каждого  $N$  в системе (2.2) при уменьшении параметра  $\varepsilon^2$  и его переходе через значение  $\frac{1}{9} - 3a^2$  индекс неустойчивости семейства решений увеличивается на 1.

В результате этой бифуркации от семейства решений ответвляются две непрерывные ветви неподвижных точек  $\pm z^3(\varepsilon, N, a)$ , определённые на  $[0, \frac{1}{9} - 3a^2]$ . Компоненты  $z_{3k}^3(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , отличны от нуля. Следовательно, справедливо следующее приближённое равенство:

$$\varphi_3(x, \varepsilon, a) \approx a + \sum_{k=1}^m z_{3k}^3(\varepsilon, N, a) \cos 3kx, \tag{2.6}$$

$m = N$ , если  $N = 3l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ ;  $m = N - 2$ , если  $N = 3l + 2$ ,  $l = 1, 2, \dots$ ;  $m = N - 1$ , если  $N = 3l - 2$ ,  $l = 2, 3, \dots$ .

Переходим к анализу спектра неподвижных точек  $\pm z^3(\varepsilon, N, a)$ . Точки  $\pm z^3(\varepsilon, N, a)$  рождаются неустойчивыми с индексом неустойчивости 2: две точки

спектра  $\lambda_1(\varepsilon, N, a) > \lambda_2(\varepsilon, N, a) > 0$ , а остальные точки принадлежат отрицательной полуоси. При уменьшении параметра  $\varepsilon^2$  отрицательные точки спектра сближаются: максимальная точка убывает, а минимальная возрастает. Значительный интерес представляет вопрос о поведении  $\lambda_k(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2$ . Приведем здесь результаты анализа о поведении  $\lambda_k(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2$  для  $30 < N < 40$ . При уменьшении параметра  $\varepsilon^2$  функции  $\lambda_k(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2$ , монотонно убывают и приближаются к нулю. При подходе этих функций к нулю скорость их изменения становится малой. При этом наблюдались интервалы изменения  $\varepsilon^2$ , на которых  $\lambda_k(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2$ , медленно меняются вблизи нуля. Указанные интервалы зависят от  $N$ . При условии уменьшения  $\varepsilon^2$  и выхода из соответствующего интервала медленной эволюции имеет место монотонное убывание или возрастание  $\lambda_k(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2$ . Функции  $\lambda_k(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2$ , монотонно убывают, если  $N = 6l + 6$ ,  $N = 6l + 7$ ,  $l = 0, 1, \dots$ , и переходят с положительной на отрицательную полуоси. Подчеркнём, что значения параметра  $\varepsilon^2$ , при которых реализуется этот переход, являются достаточно близкими. Для  $N = 30$ ,  $a = 0.1$  в качестве иллюстрации указанного поведения спектра  $\pm z^3(\varepsilon, N, a)$  приводятся его четыре наибольшие точки:

$$\varepsilon^2 = 0.016, \quad \{-17.497, -14.593, 0.00011, 0.00344\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.015, \quad \{-17.541, -14.758, -0.0002, 0.00230\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.014, \quad \{-17.579, -14.923, -0.0006, 0.00135\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.013, \quad \{-17.610, -15.088, -0.0013, 0.00057\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.012, \quad \{-17.633, -15.251, -0.0025, -0.00005\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.010, \quad \{-17.648, -15.567, -0.0072, -0.00144\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.001, \quad \{-17.487, -16.568, -1.2095, -0.34948\}.$$

Пусть теперь  $N = 6l - 1$ ,  $l = 1, 2, \dots$ . Тогда имеет место медленное увеличение  $\lambda_k(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2$ , при уменьшении параметра  $\varepsilon^2$ . Переход этих функций через 0 не наблюдается. В качестве иллюстрации указанного поведения спектра приведём примеры для  $N = 35$ ,  $a = 0.1$ . При этом, как и выше, укажем четыре наибольшие точки спектра:

$$\varepsilon^2 = 0.014, \quad \{-17.576, -14.923, 0.0020, 0.00029\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.013, \quad \{-17.606, -15.088, 0.0015, 0.00028\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.012, \quad \{-17.627, -15.250, 0.0012, 0.00032\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.011, \quad \{-17.637, -15.411, 0.0012, 0.00042\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.010, \quad \{-17.634, -15.566, 0.0017, 0.00058\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.001, \quad \{-15.440, -15.149, 0.9990, 0.30013\}.$$

Пусть теперь  $N = 6l + 2$ ,  $N = 6l + 3$ ,  $N = 6l + 4$ ,  $l = 1, 2, \dots$ . Функции  $\lambda_k(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2$ , монотонно убывают и  $\lambda_2(\varepsilon, N, a)$  переходит с положительной на отрицательную полуоси. Тогда как  $\lambda_1(\varepsilon, N, a)$  не принимает отрицательных значений. Процесс медленной эволюции  $\lambda_1$  на интервале, на котором  $\lambda_1$  принимает малые положительные значения, переходит в стадию медленного монотонного возрастания при уменьшении  $\varepsilon^2$ . Для  $N = 34$ ,  $a = 0.1$  в качестве иллюстрации указанного поведения спектра  $\pm z^3(\varepsilon, N, a)$  приводятся его четыре наибольшие точки:

$$\varepsilon^2 = 0.012, \quad \{-17.627, -15.250, 0.00013, 0.0008\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.011, \quad \{-17.637, -15.411, 0.00009, 0.0005\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.010, \quad \{-17.634, -15.566, -0.00002, 0.0006\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.001, \quad \{-15.473, -15.149, -0.00983, 0.3107\}.$$

### 3. Метаустойчивые структуры с двумя точками перехода

В градиентных системах (2.2) размерности  $N$  согласно проведенному бифуркационному анализу для значений  $N$  от 30 до 40 реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций при малых значениях параметра  $\varepsilon^2$ . В результате бифуркации седло-узел в двухпараметрической системе (2.2) появляются две непрерывные по  $\varepsilon^2$  ветви стационарных точек, индексы неустойчивости которых отличаются на 1. Эти ветви стационарных точек определены для всех положительных значений параметра  $\varepsilon$ , которые меньше соответствующего бифуркационного. Рассматриваемым двум ветвям стационарных точек (2.2) отвечают в силу (2.1) две непрерывные ветви приближенных решений краевой задачи (1.2) типа внутреннего переходного слоя. Будем говорить, что приближенные решения (1.2) указанного типа порождаются седло-узловыми бифуркациями в системе (2.2). Некоторые из седло-узловых бифуркаций в (2.2) порождают непрерывные по  $\varepsilon^2$  ветви приближенных решений краевой задачи (1.2) типа внутреннего переходного слоя с двумя точками перехода. Седло-узловые бифуркации в этом случае обладают следующими свойствами. Характер устойчивости соответствующих ветвей стационарных точек (2.2) не меняется, а максимальные точки их спектров медленно отходят от нуля с уменьшением параметра  $\varepsilon^2$ . Этими свойствами бифуркации седло-узел указанного выше типа вполне определяются.

Рассмотрим один из сценариев эволюции метаустойчивых структур с двумя точками перехода. Он характеризуется переходом метаустойчивой структуры после сравнительно малого по сравнению с этапом медленного изменения переходного процесса в класс метаустойчивых структур с одной точкой перехода.

Этот вариант эволюции характерен медленным движением при увеличении  $t$  правой точки перехода рассматриваемой структуры к  $\pi$  и медленным же движением левой точки перехода к одной из точек промежутка  $(0, \pi)$ . Ввиду инвариантности (1.1) относительно преобразований  $x \mapsto \pi - x$  уравнение (1.1) имеет сопряженную структуру с очевидной эволюцией точек перехода.

Как выше отмечалось, в градиентных системах (2.2) размерности  $N$  реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций. Рассмотрим порожденные седло-узловыми бифуркациями непрерывные ветви неподвижных точек (2.2), которым в силу (2.1) отвечают две непрерывные ветви приближенных решений краевой задачи (1.2) типа внутреннего переходного слоя с двумя точками перехода. Каждая пара непрерывных ветвей неподвижных точек (2.2) указанного выше типа медленно меняется при уменьшении параметра  $\varepsilon^2$ . Следовательно, медленно меняются при этом и соответствующие им ветви приближенных решений (1.2). Отметим, что найти бифуркационные значения параметра  $\varepsilon^2$ , как правило, не удаётся. В этой связи далее приводятся их приближенные значения  $\varepsilon^2$  и для каждого из них соответствующие стационарные точки (2.2), индексы неустойчивости которых отличаются на 1. Реализуются следующие два случая:

1) одна из неподвижных точек — устойчива, две ее близкие нулю точки спектра принадлежат отрицательной полуоси, у второй же две близкие нулю точки спектра лежат по разные стороны от нуля;

2) две близкие нулю точки спектра одной из неподвижных точек лежат по разные стороны от нуля, у второй же две ее близкие нулю точки спектра принадлежат положительной полуоси. Подчеркнем, что индекс неустойчивости неподвижных точек на каждой ее непрерывной ветви сохраняется. При этом с уменьшением параметра  $\varepsilon^2$  две максимальные точки спектра неподвижных точек медленно отходят от нуля. Остальные точки спектра принадлежат отрицательной полуоси.

Перейдем к иллюстрации каскадов седло-узловых бифуркаций в (2.2), где  $N = 30$ ,  $a = 0.1$ , и приближенных решений краевой задачи (1.2), отвечающих этим каскадам. Далее приводятся 8 приближенных бифуркационных значения параметра  $\varepsilon^2$  каскада. Каждому значению  $\varepsilon^2$  отвечают две близкие неподвижные точки (2.2). Мы приводим их 3 наибольшие точки спектров:

$$\varepsilon^2 = 0.0149, \{-8.101, -7.099, -0.0000002\}, \{-8.345, -6.111, 0.0000002\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.0141, \{-8.9560, -6.377, -0.000007\}, \{-9.6120, -5.881, 0.000011\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.0137, \{-10.538, -5.149, -0.000012\}, \{-10.724, -4.977, 0.000014\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.0114, \{-11.285, -4.273, -0.000089\}, \{-11.399, -4.043, 0.000121\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.0098, \{-11.528, -3.535, -0.000219\}, \{-11.550, -3.427, 0.000273\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.0078, \{-11.521, -2.969, -0.000756\}, \{-11.518, -2.907, 0.000909\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.0057, \{-11.393, -2.519, -0.002546\}, \{-11.371, -2.489, 0.002904\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.0034, \{-11.279, -2.167, -0.031504\}, \{-11.038, -2.123, 0.042570\}.$$

Изменение первых пяти координат  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$  первой устойчивой ветви при уменьшении бифуркационного значения параметра  $\varepsilon^2$  от 0.0149, где  $N = 30$ ,  $z_0 = a = 0.1$ , показано на рис. 1. Подчеркнем, что бифуркационные значения параметра  $\varepsilon^2$  зависят от порядка  $N$  системы (2.2). С увеличением  $N$  бифуркационные значения параметра  $\varepsilon^2$  соответствующих седло-узловых бифуркаций убывают. Так

приближенному бифуркационному значению параметра  $\varepsilon^2 = 0.0149$  системы (2.2) порядка  $N = 30$  отвечает приближенное значение  $\varepsilon^2 = 0.0147$  системы (2.2) порядка  $N = 31$ . С увеличением же  $a$  увеличивается число приближённых бифуркационных значения параметра  $\varepsilon^2$ . Так при  $N = 30$ ,  $a = 0.3$  это число равно 10. Неподвижным первым 4 парам точек (2.2), где  $\varepsilon^2 = 0.01$ ,  $a = 0.1$ , порождённым указанными выше седло-узловыми бифуркациями, отвечают 4 пары приближенных решений краевой задачи (1.2) на рис. 2.

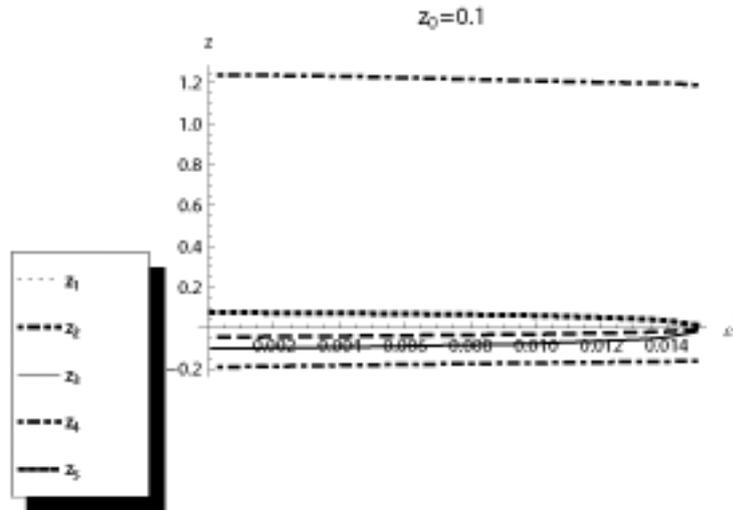


Рис. 1.

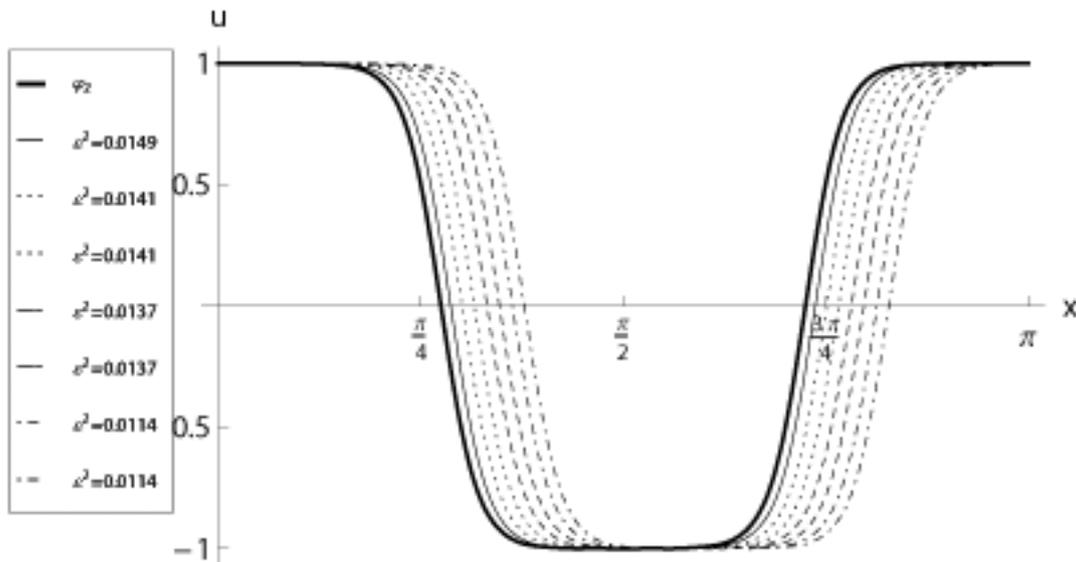


Рис. 2. Приближённые решения (1.2),  $\varepsilon^2 = 0.01$ ,  $a = 0.1$

Приближенные решения (1.2) типа внутреннего переходного слоя с двумя точ-

ками перехода, принятые в качестве начальных функций уравнения (1.1), приводят к метаустойчивым структурам. Иллюстрацией этого предложения является рис. 3, где представлено решение (1.1) с  $\varepsilon^2 = 0.01$ ,  $a = 0.1$ .

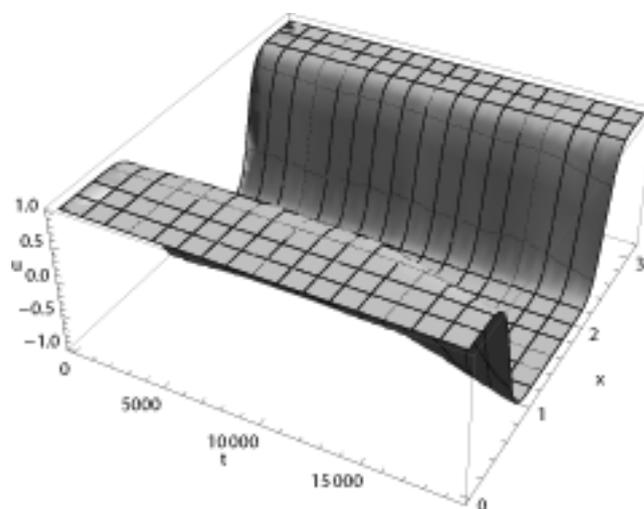


Рис. 3. Приближённые решения (1.2),  $\varepsilon^2 = 0.01$ ,  $a = 0.1$

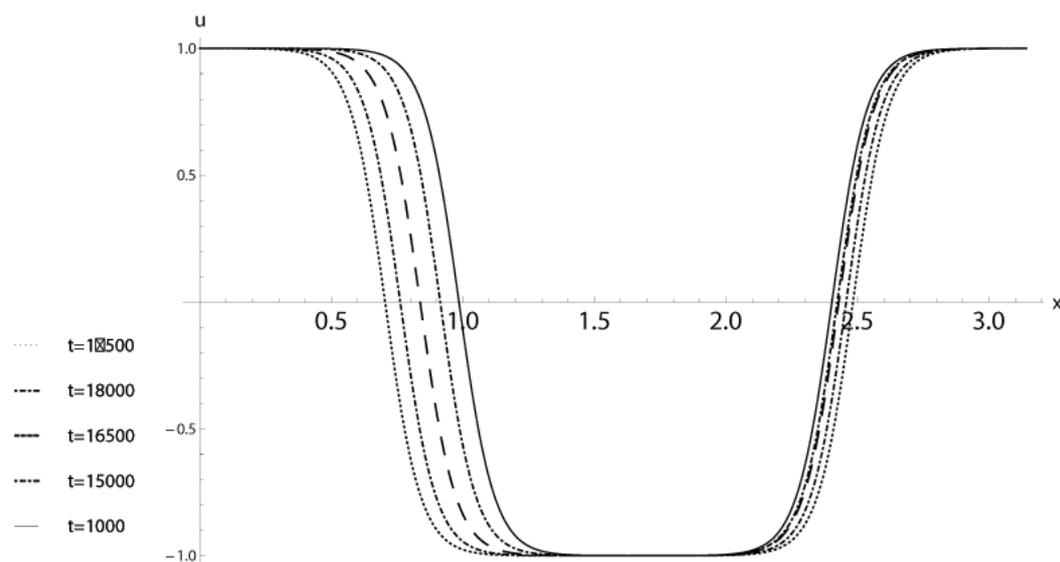


Рис. 4. Профили решения (1.1),  $\varepsilon^2 = 0.01$ ,  $a = 0.1$

Здесь в качестве начальной функции принято приближённое решение (1.2), представленное функцией, которая на рис. 2 имеет четвёртую точку перехода. График этого решения, полученный применением пакета "Mathematica", представлен на рис. 3. Как видно, решение медленно меняется в течение времени  $\approx 19500$ .

Затем за достаточно короткий по сравнению с этапом медленной эволюции промежуток времени оказывается вблизи метаустойчивых структур с одной точкой перехода. Профили решения (1.1), проиллюстрированного на рис. 3, представлены на рис. 4 при различных  $t$ .

#### 4. Метаустойчивые структуры с тремя точками перехода

Некоторые из седло-узловых бифуркаций в (2.2) порождают непрерывные по  $\varepsilon^2$  ветви приближенных решений краевой задачи (1.2) типа внутреннего переходного слоя с тремя точками перехода.

Задача исследования метаустойчивых структур (1.1) с тремя точками перехода, разумеется, сложнее, чем соответствующая задача для метаустойчивых структур с двумя точками перехода.

Рассмотрим сценарий эволюции метаустойчивых структур с тремя точками перехода. Он характеризуется переходом метаустойчивой структуры после сравнительно малого по сравнению с этапом медленного изменения переходного процесса в класс метаустойчивых структур с одной точкой перехода.

Сразу перейдем к иллюстрации каскадов седло-узловых бифуркаций в (2.2), где  $N = 30$ ,  $a = 0.1$ , и приближенных решений краевой задачи (1.2), отвечающих этим каскадам. Далее приводятся 4 приближённых бифуркационных значения параметра  $\varepsilon^2$  каскада. Каждому значению  $\varepsilon^2$  отвечают две близкие неподвижные точки (2.2). Мы приводим их 3 наибольшие точки спектров:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 = 0.00394, & \{-9.103, -0.084, -0.0011\}, \{-9.148, -0.077, 0.0011\}; \\ \varepsilon^2 = 0.00374, & \{-5.700, -0.120, -0.0019\}, \{-5.753, -0.096, 0.0022\}; \\ \varepsilon^2 = 0.00354, & \{-3.895, -0.130, -0.0029\}, \{-3.917, -0.104, 0.0040\}; \\ \varepsilon^2 = 0.00325, & \{-2.694, -0.736, -0.0040\}, \{-2.674, -0.952, 0.0046\}. \end{aligned}$$

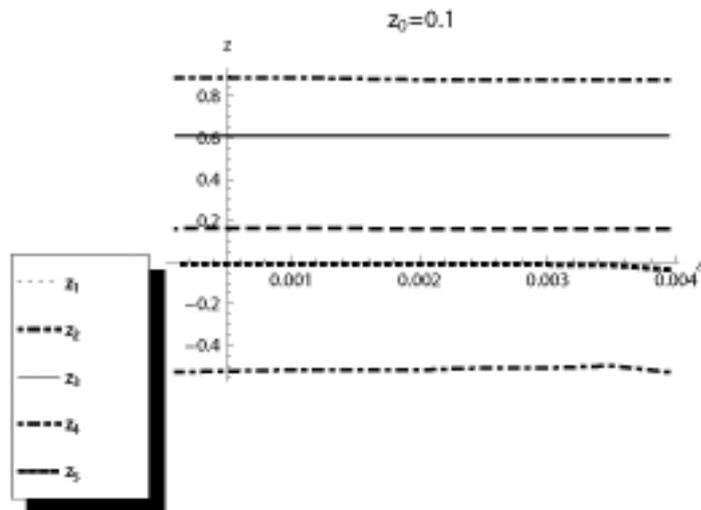


Рис. 5.

Изменение первых пяти координат  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$  первой устойчивой ветви при уменьшении бифуркационного значения параметра  $\varepsilon^2$  от 0.00394, где  $N = 30, z_0 = a = 0.1$ , показано на рис. 5.

Неподвижным 4 парам точек (2.2), где  $\varepsilon^2 = 0.001, a = 0.1$ , порождённым указанными выше седло-узловыми бифуркациями, отвечают 4 пары приближенных решений краевой задачи (1.2) на рис. 6.

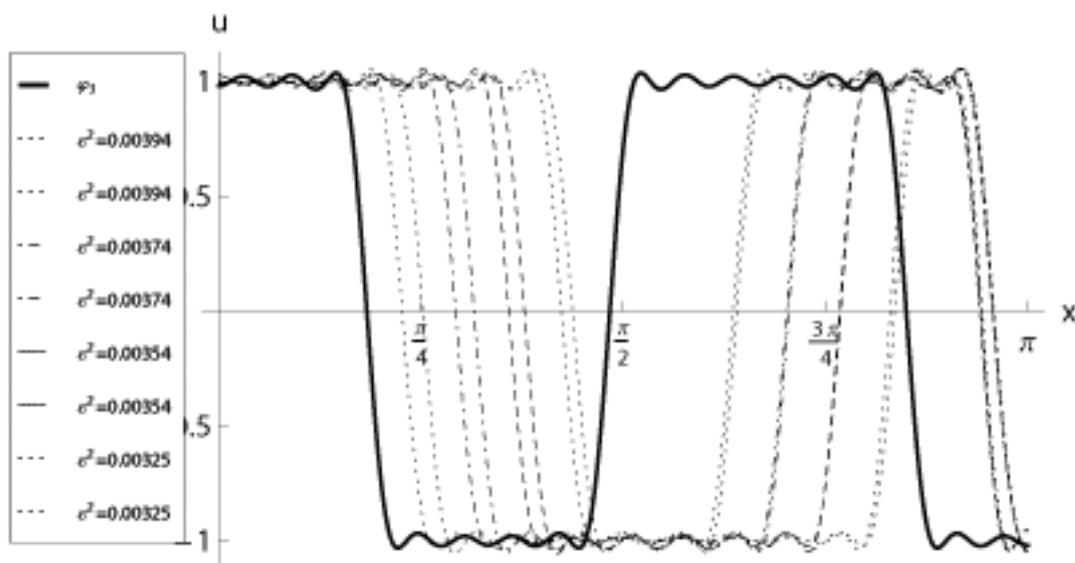


Рис. 6. Приближённые решения (1.2),  $\varepsilon^2 = 0.001, a = 0.1$

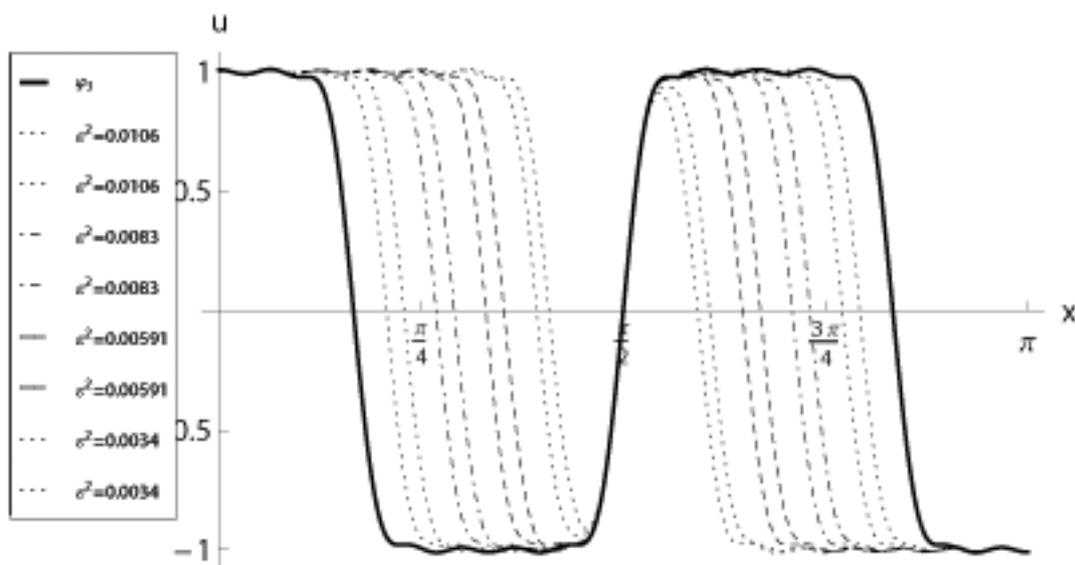


Рис. 7. Приближённые решения (1.2),  $\varepsilon^2 = 0.003, a = 0$

Перейдем к иллюстрации каскадов седло-узловых бифуркаций в (2.2), где  $N = 31$ ,  $a = 0$ , и приближенных решений краевой задачи (1.2), отвечающих этим каскадам. Далее приводятся 4 приближённых бифуркационных значения параметра  $\varepsilon^2$  каскада. Каждому значению  $\varepsilon^2$  отвечают две близкие неподвижные точки (2.2). Мы приводим их 3 наибольшие точки спектров:

$$\varepsilon^2 = 0.010600, \{-12.74, -0.005, -0.0005\}, \{-12.17, -0.004, 0.0006\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.008300, \{-7.578, -0.019, -0.0004\}, \{-7.520, -0.019, 0.0004\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.005910, \{-4.915, -0.096, -0.0062\}, \{-4.837, -0.095, 0.0068\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.003497, \{-3.386, -0.481, -0.0164\}, \{-3.357, -0.468, 0.0170\}.$$

Неподвижным 4 парам точек (2.2), где  $\varepsilon^2 = 0.003$ ,  $a = 0$ , порождённым указанными выше седло-узловыми бифуркациями, отвечают 4 пары приближенных решений краевой задачи (1.2) на рис. 7.

Приближенные решения (1.2) типа внутреннего переходного слоя с тремя точками перехода, принятые в качестве начальных функций уравнения (1.1), приводят к метастойчивым структурам. Иллюстрацией этого предложения является рис. 8, где представлено решение (1.1) с  $\varepsilon^2 = 0.01$ ,  $a = 0$ .

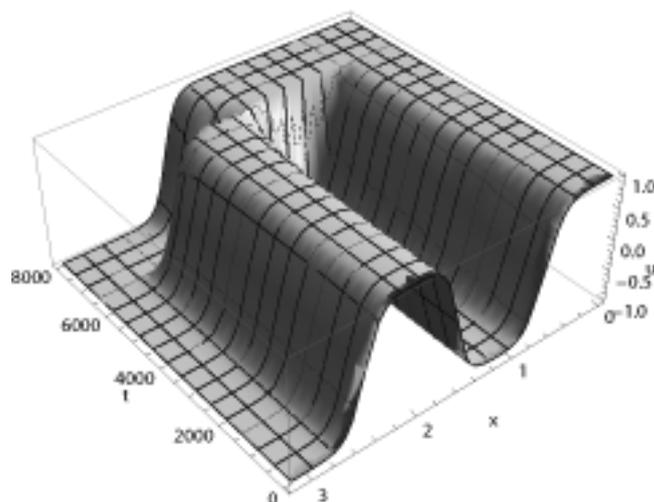


Рис. 8. Приближённые решения (1.2),  $\varepsilon^2 = 0.01$ ,  $a = 0$

Здесь начальной функцией является приближённое решение (1.2), представленное функцией, которая на рис. 7 имеет вторую точку перехода. Согласно рис. 8 решение медленно меняется в течение времени  $\approx 6550$ . Затем за достаточно короткий по сравнению с этапом медленной эволюции промежуток времени оказывается вблизи метастойчивых структур с одной точкой перехода.

Профили решения (1.1), проиллюстрированного на рис. 8, представлены на рис. 9 при различных  $t$ .

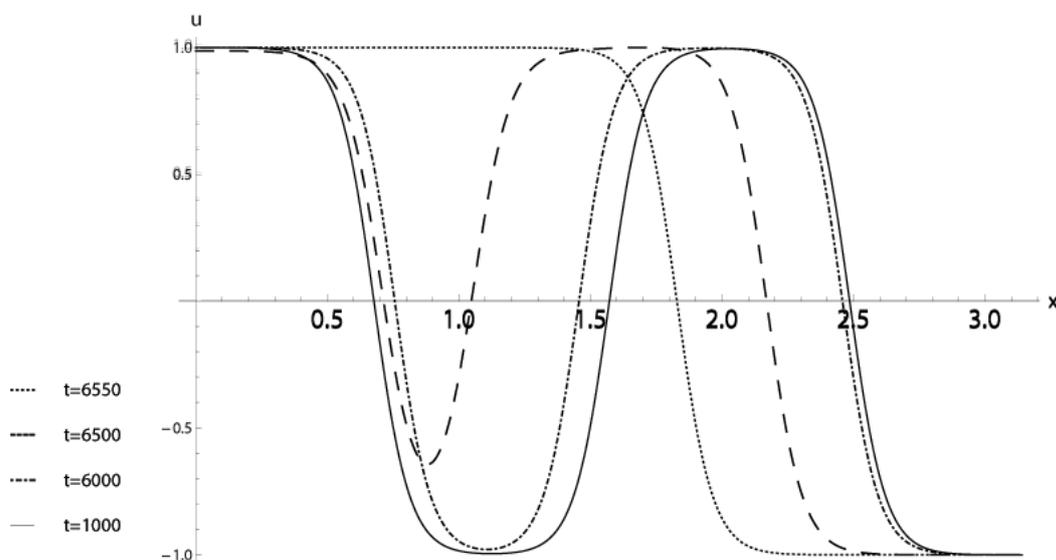


Рис. 9. Профили решения (1.1),  $\varepsilon^2 = 0.01$ ,  $a = 0$

## 5. Заключение

В градиентной системе седло-узловые бифуркации порождают приближённые решения краевой задачи типа внутреннего переходного слоя. В свою очередь, приближённые решения типа внутреннего переходного слоя с двумя и тремя точками перехода приводят к метаустойчивым структурам. Экспериментально показан один из сценариев возникновения метаустойчивых структур. Для этого строился и проводился анализ иерархии упрощенных моделей уравнения (1.1) — галеркинских аппроксимаций (1.1) средних размерностей.

### Список цитируемых источников

1. *Краснюк, И. Б., Стефанович, Л. И., Юрченко, В. М.* Колебания концентрации в ограниченных бинарных смесях с учётом поверхностных эффектов // Журнал технической физики. — 2007. — Т.77, №11. — С. 55–62.  
Krasnyuk, I. B., Stefanovic, L. I., Yurchenko, V. M. Concentration oscillations in bounded binary mixtures with allowance for surface effects. Journal of Technical Physics 77, No.11, 55–62 (2007). (in Russian)
2. *Мищенко, Е. Ф., Садовничий, В. А., Колесов, А. Ю., Розов, Н. Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. — Москва: Физматлит, 2005. — 430 с.  
Mischenko, Ye. F., Sadovnichiy, V. A., Kolesov, A. Yu., Rozov, N. Kh. Processes in nonlinear media with diffusion. Moskva: Fizmatlit, 2005. (in Russian)
3. *Alikakos, N., Bates, P. W., Fusco, G.* Slow motion for the Cahn-Hilliard equation in one space dimension. Journal of Differential Equations 90, 81–135 (1991).
4. *Chafee, N., Infante, E.* A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type. Appl. Anal. 4, 17–37 (1974).

5. *Puri, S., Binder, K.* Surface-directed spinodal decomposition in a thin-film geometry: a computer simulation. *Journal of Statistical Physics* 77, No.1,2, 145–172 (1994).
6. *Taylor, J. E., Cahn, J. W.* Linking anisotropic sharp and diffuse surface motion laws via gradient flows. *Journal of Statistical Physics* 77, No.1,2, 183–197 (1994).

*Получена 19.04.2018*