Динамические системы, 2018, том 8(36), №3, 275–280

УДК 517.957

Теорема о существовании и устойчивости решения одного параболического уравнения

Ю. А. Хазова, О. В. Шиян

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь, 295007 *E-mail: hazova.yuliya@hotmail.com*

Аннотация. Рассматривается смешанная краевая задача для нелинейного параболического уравнения с преобразованием отражения пространственной переменной в круге. Доказывается теорема о существовании, форме и устойчивости пространственно неоднородного стационарного решения поставленной задачи.

Ключевые слова: параболическая задача, теорема существования, бифуркация, устойчивость.

The theorem on the existence and stability of a parabolic equation solutions

Yu. A. Khazova, O. V. Shiyan

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, 295007.

Abstract. The paper considers a mixed boundary value problem for a nonlinear parabolic equation with a transformation of the spatial variable on a sphere. It seems the proof of the existence, shape and stability of spatially inhomogeneous stationary solution of the problem.

Keywords: parabolic problem, existence theorem, bifurcation, stability.

MSC 2010: 35K10, 35K55

Введение

В данной работе продолжается исследование функционально-дифференциального параболического уравнения с преобразованием пространственной переменной. Ранее были изучены случаи возникновения и дальнейшая динамика решений параболической задачи с преобразованием отражения пространственной переменной на окружности [1, 3, 4, 8] и на прямой [2, 7], а также с преобразованием поворота пространственной переменной на окружности [5, 6].

Исследование выполнено при поддержке Программы развития федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского» на 2015-2024 годы по проекту “Сеть академической мобильности «Академическая мобильность молодых ученых России»” в 2017 году на базе ФГБУН Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН, лаборатория дифференциальных и разностных уравнений.

1. Постановка задачи

Рассматривается параболическое уравнение в круге

$$\begin{gathered} v_t + Lv = -K\gamma\frac{\cos w}{2!}Qv^2 + K\gamma\frac{\sin w}{3!}Qv^3, \\ Lv = v - D\triangle v + K\gamma \sin w\, Qv. \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $v = v(r,\varphi,t)$ — искомая функция, $0 < r < r_1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $t > 0$, $\triangle v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}$ — оператор Лапласа в полярной системе координат.

На уравнение (1.1) накладываются следующие условия: условие Неймана на границе при $r = r_1$

$$\frac{\partial v(r_1,\varphi,t)}{\partial r} = 0; \tag{1.2}$$

условие периодичности

$$v(r,\varphi,t) = v(r,\varphi+2\pi,t); \tag{1.3}$$

условие ограниченности в начале координат

$$|v(0,\varphi,t)| \le c < \infty \tag{1.4}$$

и начальное условие

$$v(r,\varphi,0) = q_0(r,\varphi) - w = v_0. \tag{1.5}$$

Лемма. *Линейные оператор L уравнения (1.1) имеет собственные функции вида*

$$\{J_k(\lambda^c_{km}r)\cos k\varphi, J_k(\lambda^s_{km}r)\sin k\varphi\},$$

которым соответствуют собственные значения

$$\begin{gathered} \lambda^c_{km} = D\left(\frac{\mu_{km}}{r_1}\right)^2 + (-1)^k K\gamma\sin\omega + 1, \\ \lambda^s_{km} = D\left(\frac{\mu_{km}}{r_1}\right)^2 + (-1)^{k+1} K\gamma\sin\omega + 1, \\ k = 0,1,2,\ldots,\ m = 1,2,\ldots, \end{gathered} \tag{1.6}$$

где $J_k(x)$ — функция Бесселя, μ_{km} — корни уравнения

$$J_k'(\mu_{km}) = 0,\ k = 0,1,2,\ldots,\ m = 1,2,\ldots. \tag{1.7}$$

Доказательство проводится методом разделения переменных.

2. Формулировка и доказательство теоремы

Теорема. *Существует* $\delta_0 > 0$ *такое, что если* $0 < D - D_1 < \delta_0$, *где* $D_1 = \dfrac{K\gamma \sin w - 1}{(\mu_{1m}^c / r_1)^2}$ *— первое бифуркационное значение параметра* D, *то уравнение* (1.1) *имеет два асимптотически устойчивых решения вида*

$$v^{\pm}(r,\varphi,D) \approx \pm\left(\frac{D-D_1}{c_1(D_1)}\right)^{1/2} J_1(\lambda_{11}^c r)\cos\varphi + \\ + \frac{1}{2!}\left(\frac{D-D_1}{c_1(D_1)}\right)\frac{\Lambda}{2}\operatorname{ctg}\,\omega((\lambda_{10}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1} + (\lambda_{12}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1}\cos 2\varphi)J_1^2(\lambda_{11}^c r) \pm \\ \pm \frac{1}{3!}\left(\frac{D-D_1}{c_1(D_1)}\right)^{3/2}(\lambda_{13}^c - 3\lambda_{11}^c)^{-1}\left(\frac{\Lambda}{4} - \frac{3}{4}\Lambda^2\operatorname{ctg}^2\,\omega(\lambda_{12}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1}\right)\times \\ \times J_1^2(\lambda_{11}^c r)J_3(\lambda_{11}^c r)\cos 3\varphi,$$

здесь $\Lambda = -K\gamma\sin w$,

$$c_1(D) = \left[\frac{\Lambda}{8} - \frac{1}{4}(\Lambda\operatorname{ctg}\,\omega)^2\left((\lambda_{10}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1} + \frac{1}{2}(\lambda_{12}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1}\right)\right] J_1^2(\lambda_{11}^c r) < 0.$$

Доказательство. Будем искать решения уравнения (1.1) при помощи метода центральных многообразий. В рассматриваемом случае центральное многообразие представимо в виде

$$v = zJ_1(\lambda_{11}^c r)\cos\varphi + \frac{1}{2!}\Omega_2(z,r,\varphi,D) + \frac{1}{3!}\Omega_3(z,r,\varphi,D), \tag{2.1}$$

где $\Omega_2(z,r,\varphi,D)$, $\Omega_3(z,r,\varphi,D),\ldots$ формы второй, третьей степени относительно $z = z(t)$.

На центральном многообразии исходное уравнение принимает вид

$$\dot{z} = -\lambda_{11}^c(D)z + c_1(D)z^3 + \ldots \tag{2.2}$$

Найдем коэффициенты разложений (2.1), (2.2). С этой целью подставим (2.1), (2.2) в уравнение (1.1) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях z. Положим $\Omega_2 = q_2(r,\varphi)z^2$. Тогда уравнение для определения $q_2(r,\varphi)$ примет вид

$$(L - 2!\lambda_{11}^c)q_2 = \Lambda\operatorname{ctg}\omega J_1^2(\lambda_{11}^c r)\cos^2\varphi.$$

Опираясь на лемму однозначно находим выражение для $q_2(r,\varphi)$

$$q_2(r,\varphi) = \frac{\Lambda}{2}\operatorname{ctg}\omega J_1^2(\lambda_{11}^c r)[(\lambda_{10}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1} + (\lambda_{12}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1}\cos 2\varphi]. \tag{2.3}$$

Полагая $\Omega_3 = q_3(r,\varphi)z^3$, приходим к заключению, что q_3 удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{3!}(L - 3\lambda_{11}^c)q_3 + c_1(D)J_1(\lambda_{11}^c r)\cos\varphi = -\frac{\Lambda}{2}\operatorname{ctg}\omega J_1(\lambda_{11}^c r)\cos\varphi Q q_2 +$$
$$+ J_1^3(\lambda_{11}^c r)\left[\frac{\Lambda}{8}\cos\varphi + \frac{\Lambda}{24}\cos 3\varphi\right], \tag{2.4}$$

где $q_2(r,\varphi)$ определен выше.

Для разрешимости уравнения (2.4) необходима и достаточна ортогональность правой части уравнения (2.4) решениям соответствующей однородной задачи. Условие разрешимости этого уравнения приводит к однозначному определению коэффициента $c_1(D)$

$$c_1(D) = \left[\frac{\Lambda}{8} - \frac{1}{4}(\Lambda\operatorname{ctg}\,\omega)^2\left((\lambda_{10}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1} + \frac{1}{2}(\lambda_{12}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1}\right)\right] J_1^2(\lambda_{11}^c r) < 0. \tag{2.5}$$

Уравнение (2.4), при указанном выборе $c_1(D)$, имеет решение того же вида, что и его неоднородность

$$q_3(r,\varphi) = (\lambda_{13}^c - 3\lambda_{11}^c)^{-1}\left(\frac{\Lambda}{4} - \frac{3}{4}\Lambda^2\operatorname{ctg}^2\,\omega(\lambda_{12}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1}\right) J_1^2(\lambda_{11}^c r)J_3(\lambda_{11}^c r)\cos\,3\varphi. \tag{2.6}$$

Решая уравнение (2.2) с точностью до кубического слагаемого, получаем

$$z \approx \pm\sqrt{\frac{\lambda_{11}^c(D)}{c_1(D) + \exp(2\lambda_{11}^c(D)(t-c))}}.$$

Разложим λ_{11}^c в окрестности точки D_1: $\lambda_{11}^c(D) \approx (D - D_1)$.

Из условий $c_1(D_1) < 0$, $\lambda_{11}^c(D_1) = 0$ следует, что имеет место суперкритическая бифуркация типа «вилка» и из нулевого решения уравнения ответвляются два асимптотически устойчивых решения

$$z^\pm = \pm\left(\frac{D - D_1}{c_1(D_1)}\right)^{1/2} + O((D - D_1)^{1/2}). \tag{2.7}$$

Следовательно, имеет место суперкритическая бифуркация рождения асимптотически устойчивых неоднородных стационарных решений. В силу (2.3), (2.6), (2.7) получаем

$$v^\pm(r,\varphi,D) \approx \pm\left(\frac{D - D_1}{c_1(D_1)}\right)^{1/2} J_1(\lambda_{11}^c r)\cos\varphi +$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{D - D_1}{c_1(D_1)}\right)\frac{\Lambda}{2}\operatorname{ctg}\omega((\lambda_{10}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1} + (\lambda_{12}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1}\cos 2\varphi)J_1^2(\lambda_{11}^c r)\pm$$
$$\pm\frac{1}{3!}\left(\frac{D - D_1}{c_1(D_1)}\right)^{3/2}(\lambda_{13}^c - 3\lambda_{11}^c)^{-1}\left(\frac{\Lambda}{4} - \right.$$

$$-\frac{3}{4}\Lambda^2 \operatorname{ctg}^2 \omega(\lambda_{12}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1}\Big) J_1^2(\lambda_{11}^c r) J_3(\lambda_{11}^c r) \cos 3\varphi, \qquad (2.8)$$

где $\Lambda = -K\gamma \sin w$,

$$c_1(D) = \left[\frac{\Lambda}{8} - \frac{1}{4}(\Lambda \operatorname{ctg} \omega)^2 \left((\lambda_{10}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1} + \frac{1}{2}(\lambda_{12}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1}\right)\right] J_1^2(\lambda_{11}^c r) < 0.$$

□

Заключение

Авторами была доказана теорема о существовании, форме и устойчивости пространственно неоднородного стационарного решения смешанной краевой параболической задачи с преобразованием отражения пространственной переменной с условиями на круге. Доказательство опирается на метод центральных многообразий. Показан принцип построения асимптотической формы рождающихся пространственно неоднородных стационарных решений и определена устойчивость рожденных решений. Теорема носит локальный характер, поэтому для дальнейшего исследования динамики неоднородных решений необходимо использовать другие методы, например метод Галеркина.

Список цитируемых источников

1. *Белан Е. П., Хазова Ю. А.* Динамика стационарных структур в параболической задаче на окружности с преобразованием отражения пространственной переменной // Динамические системы. — 2014. — Т.4(32), No.1-2. — С. 43–57.

   Belan, E. P.; Khazova, Yu. A. Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of a circle. Dinamicheskie sistemy 4(32), No.1-2, 43-57 (2014). (in Russian)

2. *Хазова Ю. А.* Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке с отражением пространственной переменной // Динамические системы. — 2014. — Т.4(32), No.3-4. — С. 245–257.

   Khazova, Yu. A. Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of segment. Dinamicheskie Sistemy 4(32), No.3-4, 245–257 (2014). (in Russian)

3. *Хазова Ю. А.* Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Таврический вестник информатики и математики. — 2015.— No.3(28). — С. 82–95.

   Khazova, Yu. A. Stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable. Tavricheskiy vestnik informatiki i matematiki No 3(28), 82–95 (2015). (in Russian)

4. *Хазова Ю. А.* Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. — 2015. — Т.3, No.8-4 (19-4). — С. 314–317.

Khazova, Yu. A. Stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable. Aktualniye napravleniya nauchnih issledovaniy XXI veka: teoriya i praktika 3, 3–16 (2015). (in Russian)

5. *Хазова Ю. А.* Бегущие волны в параболической задаче с преобразованием поворота на окружности // Компьютерные исследования и моделирование. — 2017. — Т.9, No.5. — С. 705–716.

Khazova, Yu. A. Traveling waves in a parabolic problem with a rotation on the circle. Computer research and modeling 9(5), 705–716 (2017). (in Russian)

6. *Хазова Ю. А.* Решение типа «бегущие волны» в параболической задаче с преобразованием поворота // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2017. — Т.25, No.6. — С. 57–69.

Khazova, Yu. A. Traveling waves solution in parabolic problem with a rotation. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Prikladnaya Nelineynaya Dinamika 25(6), 57–69 (2017). (in Russian)

7. *Хазова Ю. А.* Метаустойчивые структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной на отрезке // Динамические системы. — 2017. — Т.7(35), No.2. — С. 121–131.

Khazova, Yu. A. Metastable structures in a parabolic problem with reflection of a spatial variable on a segment. Dinamicheskie Sistemy 7(35), No.2, 121–131 (2017). (in Russian)

8. *Шиян, О. В.* О динамике бегущих волн в системе Ван-дер-Поля с малой диффузией // Труды ИПММ НАН Украины. — 2008. — Т.16. — С. 208–222.

Shiyan, O. V. Dynamics of traveling waves in a Van der Pol system with low diffusion. Trudy IPMM NAN Ukrainy 16, 208–222 (2008). (in Russian)

Получена 25.09.2018