

УДК 517.925/926

# Сингулярно-гиперболический аттрактор отображения многомерного цилиндра

В. Н. Белых, Д. А. Гречко

Волжский государственный университет водного транспорта,  
Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н. И. Лобачевского  
Нижний Новгород, 603950 E-mail: belykh@vgavt-nn.ru, d.grechko.18@gmail.com

**Аннотация.** В работе рассматривается многомерное отображение с одной кусочно-гладкой периодической нелинейностью. Получены условия, при которых отображение имеет аттракторы, лежащие в полнотории. Даны критерии, определяющие колебательный и вращательный тип аттракторов. Доказана теорема, указывающая область параметров, при которых аттракторы как колебательные, так и вращательные, являются сингулярно-гиперболическими. При этих условиях динамическое поведение траекторий отображения представляет собой пример динамического хаоса.

**Ключевые слова:** динамика систем, нелинейное отображение, аттракторы, гиперболичность, бифуркации

## Singular hyperbolic attractor of a multidimensional cylinder map

V. N. Belykh, D. A. Grechko

Volga state university of water transport, Lobachevsky university, Nizhny Novgorod.

**Abstract.** We consider a multidimensional map with a piecewise-smooth periodic nonlinear function of form  $F: (x, y_i) \rightarrow (x + \delta - ag(x) + \sum_{i=1}^n y_i, \lambda_i(-b_i g(x) + y_i))$ ,  $i = 1, \dots, n$ , where  $x \in S^1, y \in R^n, g(x) = g(x + 2\pi)$ ,  $a, \delta, \lambda_i, b_i$  are parameters,  $|g'(x)| > h$ . We divide nonwandering trajectories into oscillating and rotating type via the rotation number  $r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^*(k)}{2\pi k}$ . We prove the existence of absorbing domain  $D$  containing the attractors of  $F$ . Namely, the next statement is true.

**Theorem 1.** Let  $0 < \lambda_i < \lambda^* < 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Then the solid torus  $D = \{\|y\| < A, x \in S^1\}$  is the absorbing domain  $D$ ,  $FD \subset D$ .

In order to specify the attractors of the map  $F$  we introduce two auxiliary 1D maps of the circle  $F^\pm: x \rightarrow x + \delta - ag(x) \pm \gamma$ , and prove the next

**Theorem 2.** 1. If both maps  $F^+$  and  $F^-$  have only oscillating attractors then the map  $F$  has only oscillating attractor as well. 2. If both maps  $F^+$  and  $F^-$  have only rotating attractor then the map  $F$  also has only rotating attractor.

We studied the hyperbolic properties of the map  $F$  attractors which imply that in each point of an attractor there exist unstable (stable) cone invariant under  $F$  ( $F^{-1}$  respectively) with local extension (contraction) property in it. For this purpose we consider the variation equation along attractor trajectories  $(\xi, \eta_i) \rightarrow ((1 - ag')\xi + \sum_{i=1}^n \eta_i, \lambda_i(-bg'\xi + \eta_i))$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Introducing the unstable cone  $K^u = \{\xi, \eta_i \mid \eta_i = \alpha_i \xi, |\alpha_i| < \chi, i = \overline{1, n}\}$  we obtain a condition when the map  $\xi \rightarrow \xi$  inside the cone is extension. Then finding the condition for value  $\chi = \chi^*$  defining the cone  $K^u$  we prove the main theorem.

**Theorem 3.** Each attractor (oscillating or rotating) of the map  $F$  is singularly hyperbolic in a parameter region  $ah > 2 + \chi^* + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Finally we note that for this explicitly given region of parameters indipending on whether the attractor is oscillatory or rotatory the attractor is hyperbolic. The dynamical behavior of the attractor trajectories exhibits the example of rear dynamical chaos.

**Keywords:** dynamical systems, nonlinear maps, attractors, hyperbolicity, bifurcations.

**MSC 2010:** 34D45

## Введение

Задача об условиях существования аттракторов и бифуркаций, формулируемых в терминах правых частей динамических систем, возникла при анализе состояний равновесия предельных циклов Пуанкаре и гомоклинических петель сепаратрис в конкретных системах. В период последних почти 50 лет эта задача приобрела широкий интерес в связи с возникновением концепции странного аттрактора как образа динамического хаоса.

Странные аттракторы как притягивающие инвариантные множества целых неустойчивых траекторий можно разделить на 3 типа: гиперболические, структура которых не меняется во всех точках интервала параметра, характеризующего деформации динамической системы; сингулярно-гиперболические, структура которых меняется только в точках бифуркаций; квазистранные — странные не на интервале, а на точечном, как правило, канторовом множестве параметров.

В классе динамических систем с дискретным временем (отображений) примерами гиперболических аттракторов служат диффеоморфизмы Аносова [1], примеры сингулярно-гиперболических — аттрактор Лоренца для модельных отображений [2, 3], аттракторы Лози [4] и Белых [5], примерами квазиаттракторов — аттрактор Эно [6] и другие. Условия существования приведенных аттракторов выписываются аналитически в силу конкретно заданного вида отображений.

В настоящей работе рассматривается многомерное отображение с одной непрерывной, кусочно-гладкой, периодической нелинейностью  $F : S^1 \times R^n \rightarrow S^1 \times R^n$ , записанное в нормальной форме вида:

$$\begin{cases} \bar{x} = x + \delta - ag(x) + \sum y_i; & i = \overline{1, n}, \\ \bar{y}_i = \lambda_i(-b_i g(x) + y_i), \end{cases} \quad (0.1)$$

где  $a, \delta, b_i, \lambda_i, i = \overline{1, n}$  — положительные параметры,  $x \in S^1, y = \text{column}(y_1, \dots, y_n) \in R^n$  переменные,  $g(x)$  —  $2\pi$ -периодическая, непрерывная, кусочно-гладкая функция с разрывами производной в точках экстремума, удовлетворяющая условию

$$\begin{aligned} \max_{x \in S^1} |g(x)| &= 1; \\ \int_0^{2\pi} g(x) dx &= 0; \\ |g'(x)| &> h, \quad x \in S^1. \end{aligned} \quad (0.2)$$

Используются общепринятые обозначения: точка  $(\bar{x}, \bar{y}) = (x(k+1), y(k+1))$  есть образ точки  $(x, y) = (x(k), y(k))$ . Случай отрицательных значений параметра  $\delta$  приводится к исследуемому заменой  $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ . Отображение (0.1) задано в цилиндрическом фазовом пространстве  $S^1 \times R^n$ . Следовательно, неблуждающие траектории  $F$  делятся на колебательные и вращательные. А именно, пусть  $O^* = \{x^*(k), y^*(k), k \in Z\}$  неблуждающая траектория отображения  $F$  в накрывающем фазовом пространстве  $R^{n+1}$ . Введем аналог числа вращения Пуанкаре вдоль этой орбиты

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^*(k)}{2\pi k}. \tag{0.3}$$

Траекторию  $O^*$  будем называть колебательной, если  $r = 0$  и вращательной, если  $r \neq 0$ .

И вообще, аттрактор отображения  $F$  будем называть колебательным ( $o$ -аттрактором), если он не содержит вращательных траекторий, и вращательным ( $\varphi$ -аттрактором), если не содержит колебательных. Смешанным аттрактор ( $m$ -аттрактор) будет при наличии в нем и вращательных, и колебательных траекторий.

Такие отображения возникают в задачах хаотической динамики [7] и служат математической моделью дискретной системы фазовой автоподстройки частоты с цифровым фильтром высокого порядка [8].

Заметим, что отображение (0.1), записанное в общем виде

$$\begin{cases} \bar{x} = f(x) + L^T y; \\ \bar{y}_i = -bg(x) + By, \end{cases} \tag{0.4}$$

где  $L = \text{colomn}(L_1, \dots, L_n), b = \text{colomn}(b_1, \dots, b_n), B - n \times n$  — матрица с действительными собственными значениями  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, f(x) = x + \delta - ag(x)$ , линейным невырожденным преобразованием  $y \rightarrow Hy$  приводится к нормальной форме вида (0.1).

При использовании свойств ограниченности и отделённости от нуля разрывной производной периодической нелинейности находятся достаточные условия существования сингулярно-гиперболического странного аттрактора.

### 1. Динамика отображения в вырожденном случае

Рассмотрим простейший случай отображения (0.1) при  $\lambda_i = 0, i = \overline{1, n}$ . При этом по переменным  $y_i$  происходит абсолютное сжатие, так что за одну итерацию  $\bar{y}_i \equiv 0, i = \overline{1, n}$  и отображение сводится к отображению окружности на себя

$$\bar{x} = x + \delta - ag(x) \triangleq f(x). \tag{1.1}$$

Мы опускаем “простой” случай, когда это отображение взаимнооднозначно ( $1 - ag' > 0$ ) и число вращения является инвариантом.

Очевидно, что все траектории этого отображения неустойчивы при условии

$$1 - ag' < -1 \text{ или } 1 - g' > 1 \quad (1.2)$$

для разных участков монотонности функции  $g(x)$ .

Эти условия, в этом случае принимаемые за “гиперболичность”, в силу (0.2) имеют вид

$$ah > 2 \quad (1.3)$$

В результате, мы получаем простое утверждение

**Лемма 1.** При  $\lambda_i = 0, i = \overline{1, n}$  при условии (1.3) отображение (0.1) имеет сингулярно-гиперболический аттрактор.

В качестве примера рассмотрим тестовую функцию

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{\nu}, & |x| \leq \nu, x + \nu(\text{mod}2\pi); \\ -\frac{x-\pi}{\pi-\nu}, & \nu < x < 2\pi - \nu. \end{cases} \quad (1.4)$$

В этом случае условие (1.2), очевидно, принимает вид

$$a > 2\nu, \quad (1.5)$$

и следовательно отображение (1.1), (1.4) при условии (1.5) имеет сингулярно-гиперболический аттрактор.

*Замечание 1.* Сингулярность аттрактора, порождаемая разрывами производной в критических точках, приводит к тому, что при увеличении параметра  $\delta$  от нуля происходят бифуркации исчезновения колебательных и рождение вращательных траекторий, однако аттрактор при этом остается сингулярно-гиперболическим.

В случае тестовой функции (1.4), при условии

$$\delta = 0; a + \nu < \pi; a > 2\nu \quad (1.6)$$

траектории сингулярно-гиперболического аттрактора имеют только колебательный тип, а при

$$\delta > a; a > 2\nu \quad (1.7)$$

— только вращательный.

## 2. Диссипативность отображения $F$

Для простоты будем рассматривать случай, когда  $b_i = b, i = \overline{1, n}$ .

При  $0 < \lambda_i < 1$  многомерное отображение  $F$  имеет поглощающую область. Введем норму

$$\|y\| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i|. \quad (2.1)$$

Справедлива следующая

**Теорема 1.** Пусть

$$0 < \lambda_i < \lambda^* < 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.2)$$

Тогда отображение  $F$  диссипативно по переменной  $y = \text{col}(y_1, \dots, y_n)$ , так что все его траектории из внешности полнотория

$$D = \left\{ \|y\| < \frac{\lambda^* b}{1 - \lambda^*}, \quad x \in S^1 \right\}, \quad (2.3)$$

попадают внутрь него и остаются в нём навсегда.

*Доказательство.* Найдем область фазового пространства, для которой при любых  $x \in S^1$  норма  $\|y\|$  убывает при каждой итерации  $F$ , т. е. выполняется условие

$$\|\bar{y}\| < \|y\|, \quad x \in S^1. \quad (2.4)$$

В силу (0.1) (при  $b_i = b$ ) получаем

$$\|\bar{y}\| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\lambda_i| - bg(x) + |y_i| < \frac{\lambda^*}{n} \sum_{i=1}^n (b + |y_i|). \quad (2.5)$$

Неравенства (2.4), (2.5) выполняются при

$$\|y\| \geq \frac{\lambda^* b}{1 - \lambda^*}, \quad (2.6)$$

откуда следует, что во внешности полнотория  $D$  траектории действительно приближаются к  $D$ , попадая в  $D$  за конечное число итераций. Неравенство (2.6), кроме того, означает  $FD \subset D$ .  $\square$

**Следствие 1.** Аттракторы отображения  $F$  расположены в полнотории  $D$ , и их исследование достаточно проводить в области (2.3).

### 3. Существование аттракторов отображения $F$

В отображении (0.1), рассматриваемом в области  $D$ , оценим сумму, входящую в первое уравнение

$$\left| \sum y_i \right| < n \|y\| < \frac{\lambda^* b n}{1 - \lambda^*} \triangleq \gamma. \quad (3.1)$$

Введем одномерные отображения сравнения  $F^{+(-)}$  вида

$$\bar{x} = x + \delta - ag(x) \pm \gamma \triangleq f(x) \pm \gamma, \quad (3.2)$$

мажорирующие координаты  $x$  траекторий отображения  $O = \{x(k), y(k), k \in Z^+\}$ . При этом любой образ  $\bar{x}$ , определенный отображением (0.1), ограничен в силу неравенств

$$f(x(k)) - \gamma < x(k+1) < f(x(k)) + \gamma. \quad (3.3)$$

Неравенства (3.3) позволяют эффективно использовать отображения сравнения (3.2) при оценке качественного поведения траекторий отображения  $F$ .

**Теорема 2.** 1. Если оба одномерных отображения (3.2) имеют только  $o$ -аттракторы, то отображение  $F$  имеет только  $o$ -аттрактор.

2. Если оба отображения (3.2) имеют только  $\varphi$ -аттракторы, т. е. при  $\delta > a + \gamma$ , то отображение  $F$  также имеет только  $\varphi$ -аттрактор.

*Доказательство.* 1. Очевидно, что траектории  $o$ -аттракторов отображений окружности  $F^{+(-)}$   $O^\pm = \{x^\pm(k), k \in Z\}$  ограничены.

$$\begin{aligned} x_1 < x^\pm < x_2, k \in Z; \\ x_2 - x_1 < 2\pi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Тогда в силу неравенств (3.3)  $x$  — координаты траекторий аттрактора отображения  $O^* = \{x^*(k), y^*(k), k \in Z\}$  удовлетворяют неравенству (3.4), а  $y^*(k) \in D$ , т. е. это  $o$ -аттрактор отображения  $F$ .

2. Оба отображения сравнения (3.2) имеют только вращательный аттракторы при условии

$$\bar{x} = f(x) \pm \gamma > x, \quad \forall x \in S^1, \quad (3.5)$$

которое справедливо при  $\delta > a + \gamma$ . □

**Следствие 2.** Пусть  $\delta = 0$  и  $a = a_1$  соответствует взаимной однозначности отображений (3.2),  $1 - a_1 g'(x) > 0, \forall x \in S^1$ . Тогда при  $a > a_1$ , с увеличением параметра  $a$   $o$ -аттракторы отображений  $F^{+(-)}$ , а следовательно, и отображения  $F$ , становятся  $m$ -аттракторами при бифуркации рождения вращательных траекторий.

Такие изменения легко проследить на примере  $F$  с тестовой функцией (1.4).

*Пример 1.* Пусть  $g(x)$  есть тестовая функция (1.4). Анализ отображений  $F^{+(-)}$  в этом случае приводит к следующему утверждению.

**Теорема 3.** При условии

$$\begin{aligned} \nu - a + \delta - \gamma &\geq -\pi - \frac{(\delta - \gamma)(\pi - \nu)}{a} \\ -\nu + a + \delta + \gamma &\leq \pi - \frac{(\delta + \gamma)(\pi - \nu)}{a} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Отображение  $F$  имеет  $o$ -аттрактор в области  $D|I$ , где

$$I = \left\{ x \mid f(\nu) - \gamma < x < f(-\nu) + \gamma \right\},$$

*Доказательство.* Второе условие есть неравенство  $f(-\nu) < f(\tilde{x}_2)$ , где  $\tilde{x}_2$  — координата неподвижной точки отображения  $F^+$ ,  $\tilde{x}_2 > \nu$ .

Первое условие — неравенство  $f(\nu) > f(\tilde{x}_1)$ , где  $\tilde{x}_1$  — координата неподвижной точки отображения  $F^-$ ,  $\tilde{x}_1 < -\nu$ . Эти условия есть условия того, что интервал  $I$  лежит внутри интервала  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ , обеспечивая отсутствие  $\varphi$ -траекторий.

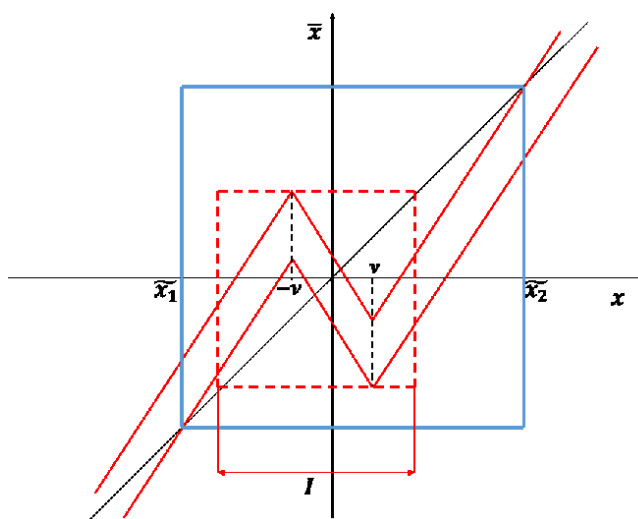


Рис. 1. Аттрактор колебательного типа.

Рис. 1 иллюстрирует интервал, на котором расположены  $x$ -координаты  $o$ -аттрактора отображения  $F$ .

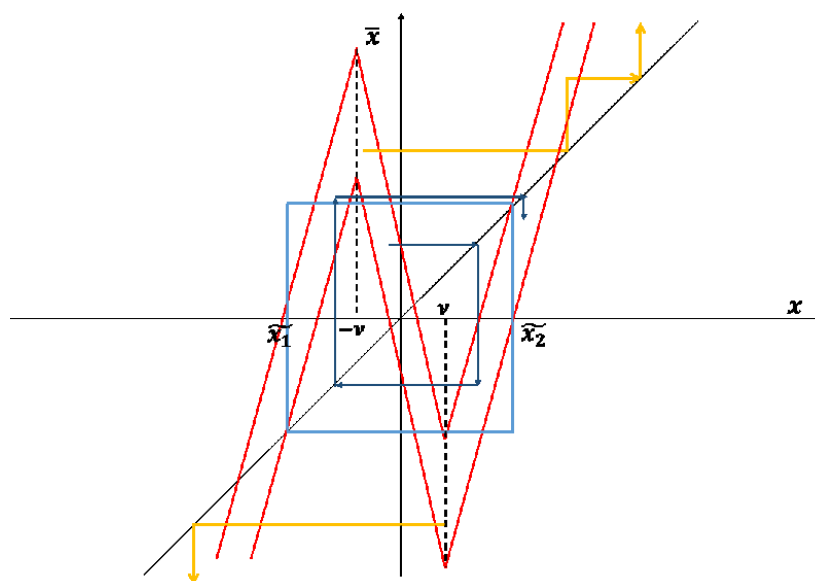


Рис. 2. Аттрактор смешанного типа.

При  $\delta > 0$  с увеличением параметра  $a$  первым нарушается второе неравенство в (3.6). При этом у отображения могут появиться  $\varphi$ -траектории.

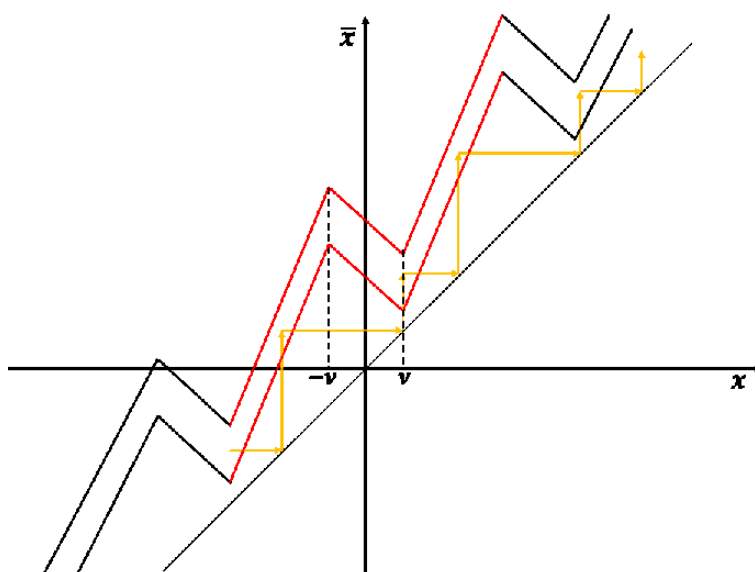


Рис. 3. Аттрактор вращательного типа.

При условии  $f(-\nu) - \gamma > \tilde{x}_2$  (рис. 2) отображение  $F$  имеет  $m$ -аттрактор, содержащий одновременно и  $o$ -траектории, и  $\varphi$ -траектории. Рис. 3 иллюстрирует случай  $\delta > a + \gamma$ , когда аттрактор  $F$  не имеет  $o$ -траекторий.  $\square$

#### 4. Гиперболичность аттракторов

Пусть  $O = \{x(k), y(k), k \in Z\}$  есть неблуждающая траектория отображения  $F$ . Свойства устойчивости (гиперболичности) траектории  $O$  определяются уравнением в вариациях вида

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= [1 - aS(k)]\xi(k) + \sum_{i=1}^n \eta_i(k), & i = \overline{1, n}, \\ \eta(k+1) &= \lambda_i[-bS(k)\xi(k) + \eta_i], \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $S \triangleq g'(x(k))$ .

Для удобства обозначим  $p = 1 - aS(k)$ ,  $q = -bS(k)$ ,  $\bar{\xi} = \xi(k+1)$ ,  $\bar{\eta} = \eta(k+1)$ , и перепишем (4.1) в виде отображения  $T$

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= p\xi + \sum_{i=1}^n \eta_i, & i = \overline{1, n}, \\ \bar{\eta} &= \lambda_i[q\xi(k) + \eta_i], \end{aligned} \quad (4.2)$$

Введем в каждой точке  $(x(k), y(k)) \in D$  одинаковые конусы

$$K^u = \{\xi, \eta_i \mid \eta_i = \alpha_i \xi, |\alpha_i| < \chi, i = \overline{1, n}\}, \quad (4.3)$$



Найдем образ образующей линии

$$l = \{\eta_i = \alpha_i \xi, \xi \in R^1, i = \overline{1, n}\}, \tag{4.4}$$

Подставляя (4.4) в (4.3) получаем  $Fl$  в параметрическом виде

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= (p + \sum_{i=1}^n \alpha_i) \xi, \quad i = \overline{1, n}. \\ \bar{\eta}_i &= \lambda_i (q + \alpha_i) \xi, \end{aligned} \tag{4.5}$$

Из (4.5) получаем образ  $Fl$

$$\bar{\eta}_i = \bar{\alpha}_i \bar{\xi}, \tag{4.6}$$

где

$$\bar{\alpha}_i = \frac{\lambda_i (q + \alpha_i)}{p + \sum_{i=1}^n \alpha_i}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{4.7}$$

Первое уравнение в (4.5) есть одномерное отображение переменной  $\xi$ .

**Лемма 2.** *Отображение  $\xi \rightarrow \bar{\xi}$  в точках конуса  $K^u$  является растягивающим, т.е.*

$$|p + \sum_{i=1}^n \alpha_i| > 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \tag{4.8}$$

при условии

$$ah > \chi n + \varepsilon + 2 \tag{4.9}$$

*Доказательство.* Неравенство (4.8), очевидно, переписывается в виде двух неравенств

$$\begin{aligned} 1 - ag'(x(k)) + \sum_{i=1}^n \alpha_i &< -1 - \varepsilon; \\ 1 - ag'(x(k)) + \sum_{i=1}^n \alpha_i &> 1 + \varepsilon \end{aligned} \tag{4.10}$$

Используя условие  $|g'| > h$  в (0.2) и границы конуса  $K^u$   $|\alpha_i| < \chi$ , взамен (4.10) получаем неравенство (4.9) и неравенство  $ah > \varepsilon + \chi n$ , справедливое при условии (4.9). □

**Теорема 4.** *При условии*

$$\begin{aligned} ah &> 2 + \varepsilon + \frac{\lambda^* bn}{1 - \lambda^*}, \quad |g'| > h, \quad \varepsilon > 0, \\ \lambda^* &= \min_{i \in [1, n]} \lambda_i \end{aligned} \tag{4.11}$$

*аттракторы отображения  $F$  сингулярно-гиперболические.*

*Доказательство.* Формула (4.7) задает отображение  $\alpha_i \rightarrow \bar{\alpha}_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  координат направляющих векторов прямых (4.4) и (4.6).

Перепишем (4.6) в виде

$$\bar{\alpha}_i = \frac{\lambda_i q}{p + \sum_{i=1}^n \alpha_i} + \left( \frac{\lambda_i}{p + \sum_{i=1}^n \alpha_i} \right) \alpha_i \quad (4.12)$$

В силу неравенства (4.10) и условия  $|g(x)| < 1$  в (0.2) имеем

$$\left| \frac{\lambda_i q}{p + \sum_{i=1}^n \alpha_i} \right| < \lambda^* b, \quad \left| \frac{\lambda_i}{p + \sum_{i=1}^n \alpha_i} \right| < \lambda^*, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.13)$$

Тогда область, где  $|\bar{\alpha}_i| < |\alpha_i|$ ,  $i = \overline{1, n}$  определяется неравенствами

$$\lambda^* b + \lambda^* |\alpha_i| < |\alpha_i|, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.14)$$

Следовательно, область

$$|\alpha_i| < \frac{\lambda^* b}{1 - \lambda^*} \quad (4.15)$$

есть притягивающая область отображения (4.12). В результате, полагая  $\chi = \frac{\lambda^* b}{1 - \lambda^*}$  в неравенствах (4.15), определяющих конус  $K^u$ , получаем его инвариантность,  $TK^u \in K^u$ . Тогда по лемме 2, где условие (4.9) заменено на условие (4.11), отображение  $T$  в инвариантном конусе  $K^u$  является растягивающим. В силу свойств отображения (4.12) в качестве устойчивого конуса  $K^s$  может быть выбрана внешность конуса  $K^u$ . □

## Заключение

В работе проведено исследование многомерного отображения  $F$  вида

$$(x, y_i) \rightarrow (x + \delta - ag(x) + \sum_{i=1}^n y_i, \lambda_i(-b_i g(x) + y_i)), \quad i = \overline{1, n}$$

с одной кусочно-гладкой периодической нелинейностью  $g(x)$ .

Получены условия, при которых отображение  $F$  имеет аттракторы, лежащие в полнотории

$$D = \left\{ \|y\| < \frac{\lambda^* b}{1 - \lambda^*}, x \in S^1 \right\}.$$

Даны критерии, определяющие колебательный и вращательный тип аттракторов. Доказана теорема, указывающая область параметров, при которых аттракторы как колебательные, так и вращательные, являются сингулярно-гиперболическими. При этих условиях динамическое поведение траекторий отображения представляет собой пример динамического хаоса.

## Список цитируемых источников

1. *Аносов, Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. Тр. МИАН СССР 90, 3–210 (1967).
2. *Afraimovich, V. S., Bykov, V. V. & Shilnikov, L. P.* On attracting structurally unstable limit sets of Lorenz attractor type. Trans. Mosc. Math. Soc. 44, 153–216 (1982).
3. *Robinson, C.* Homoclinic bifurcation to a transitive attractor of Lorenz type. Nonlinearity Anal. 23, 1255–1268 (1989).
4. *Lozi, R.* Un attracteur de Henon. J. Physique 39, 9–10 (1978).
5. *Belykh, V.* Chaotic and strange attractors of a two-dimensional map. Matematicheski Sbornik 186:3, 3–18 (1995).
6. *Henon, M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor. Communications in Mathematical Physics 50:1, 69–77 (1976).
7. *Заславский, Г. М., Чуриков, Б. В.* Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний. Успехи физических наук №105, 3–39 (1971).
8. *Белых, В. Н.* Модели дискретных СФС и их исследование. В кн. Системы фазовой синхронизации. Под ред. В.В.Шахгильдяна, Л.Н.Белостиной. М.: Радио и связь, 1982, 161–162.
9. *Anosov, B., Sinai, J.* Some smooth dynamical systems. Russian Math. Surveys 22:5, 107–172 (1967).
10. *Arnold, V., Afraimovich, V., Il'yashenko, Yu. & Shilnikov, L.* Theory of bifurcations. VINITI Modern Problems of Mathematics 5, 5–218 (1986).
11. *Белых, В. Н.* Странный аттрактор. В кн. Большая российская энциклопедия, Т. 31, 285–286 (2016).
12. *Sataev, E.* Invariant measures for hyperbolic maps with singularities. Russian Math. Surveys 47:1, 147–204 (1992).
13. *Belykh, V., Ukrainsky, B.* Hyperbolic attractor of a continuous piecewise smooth 2-dimensional map. Sbornik Nauchnyh Trudov “Modelirovanie i optimizacia slozhnyh sistem” N. Novgorod: VГАVT, 1997.
14. *Belykh, V., Mordvinkina, I. and Ukrainsky B.* Multidimensional Lurie systems and Henon maps: Smale’s horseshoes and bifurcations. Тезисы докладов Международной конференции «Динамика, бифуркации и странные аттракторы» посвященной памяти Л. П. Шильникова (1934–2011) N. Novgorod, 2013.
15. *Belykh, V., Komrakov, N. and Ukrainsky B.* Hyperbolic attractors in a family of multidimensional maps with cusp-points. Proc. of int. conf. “Progress in nonlinear science” dedicated to the 100-th anniversary of A. Andronov. N. Novgorod, 2013.
16. *Белых, В. Н.* Элементарное введение в качественную теорию и теорию бифуркаций динамических систем. Соросовский образовательный журнал №1, 115–121 (1997).

Получена 05.11.2018