Динамические системы, 2018, том 8(36), №4, 357–371

УДК 917.95

Фредгольмова разрешимость задачи линейного сопряжения для эллиптической системы первого порядка с комплексными коэффициентами[1]

О. В. Чернова

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород 308015. *E-mail: volga@mail.ru*

Аннотация. В открытом множестве комплексной плоскости, представляющем собой объединение конечной и бесконечной областей, для эллиптической системы первого порядка с постоянными комплексными старшими коэффициентами рассматривается задача линейного сопряжения. Посредством специальной обратимой линейной замены, задача сводится к задаче линейного сопряжения для эллиптической системы, записанной в каноническом виде. При этом краевое условие выражается через элементы вспомогательных матриц. Предполагая, что выполнены определенные условия на коэффициенты, правые части системы и правую часть краевого условия, используя интегральное представление решений этой системы и опираясь на результаты классической теории сингулярных операторов, установливается критерий фредгольмовой разрешимости этой задачи и формула индекса.

Ключевые слова: эллиптическая система, задача линейного сопряжения, фредгольмов оператор, индекс, весовое пространство Гельдера.

Fredholm solvability of a linear conjugation problem for a first order elliptic system with complex coefficients

O. V. Chernova

Belgorod National Research University, Belgorod 308015.

Abstract. The general first order elliptic system $L_A U(z) + a(z)U(z) + b(z)\overline{U(z)} = F(z)$ is considered in the domain D of complex plane C, where differential operator $L_A = \partial/\partial y - A \cdot \partial/\partial x$ is defined by a matrix A, the constant matrix $A \in \mathbb{C}^{l\times l}$ has no real eigenvalues, complex $l \times l$ matrix coefficients $a(z)$,$b(z)$ belong to $C(D)$, and $F(z)$ is a complex-valued l-vector-function. The solution of system is a l-vector-function $U = (U_1, \dots, U_l) \in C^1(D)$. We show the reduction of the initial system to a canonical form with respect to another l-vector-function with triangular matrix with eigenvalues from upper half-plane. Let $D = D_1 \cup D_2$ be an open set where D_1 is a finite domain, and D_2 is an infinite domain. For an elliptic system the general linear conjugation problem is considered. We assume that $l \times l$-matrix coefficients of the problem belong to the Hölder class of the order ν, $0 < \nu < 1$. The class $C^\mu_\delta(\hat{D}, \infty)$, $-1 < \delta < 0$, consists of Hölder functions from $C^\mu(\overline{D}_1)$ and weighted Hölder functions from $C^\mu_\delta(\overline{D}_2, \infty)$, $-1 < \delta < 0$. Assuming certain conditions are met fulfilled, we seek the solution U

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект №1.7311.2017/8.9.).

in the class $C^{\mu}_{A,\delta}(\hat{D},\infty)$. This class is defined by $U \in C^{\mu}_{\delta}(\hat{D},\infty)$, $L_A U \in C^{\mu}_{\delta-1}(\hat{D},\infty)$. The problem is reduced to a linear conjugation problem for an elliptic system with a triangular matrix. The boundary condition is expressed in terms of $l \times l$ matrix B and items of $2l \times 2l$ matrix G. Finally, using special representation for the function $\phi(z) \in C^{\mu}_{J,\delta}(\hat{D},\infty)$ we obtain some system of one-dimensional and two-dimensional singular integral equations. The latter system is studied by classical methods.
Keywords: elliptic system, linear conjugation problem, Fredholm operator, index, Hölder weight space.
MSC 2010: 35J56

Введение

Задача линейного сопряжения для обычных аналитических функций была предметом многочисленных исследований и детально изучена в скалярном случае для общей кусочно-гладкой линии L [6] и в матричном случае [4], [2]. В работе А. П. Солдатова [8] рассмотрена задача линейного сопряжения теории аналитических функций в матричном случае для произвольной кусочно-гладкой линии, доказана ее фредгольмовость, построено семейство канонических функций и описано поведение этих решений в узлах линии.

Данная работа имеет своей целью исследование задачи линейного сопряжения для общей эллиптической системы с комплексными коэффициентами в случае простого контура Г в открытом множестве, представляющем собой объединение конечной и бесконечной областей. Задача линейного сопряжения и теория сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши тесно связаны между собой. По существу, это две эквивалентные теории, связь между ними осуществляется с помощью представлений аналитических функций интегралами типа Коши и формулами скачка для последних. В первом параграфе работы рассматриваются эллиптические системы первого порядка с постоянными старшими коэффициентами, здесь показана редукция этой системы к матричному аналогу систем типа Бельтрами [3]. Во втором параграфе с учетом выполнимости определенных условий на коэффициенты, правые части системы и на правую часть краевого условия, установлен критерий фредгольмовой разрешимости задачи линейного сопряжения и найдена формула ее индекса.

1. Эллиптические системы

Рассмотрим в области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ переменной $z = x + iy$ систему l линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$A_1 \frac{\partial U(z)}{\partial x} + A_2 \frac{\partial U(z)}{\partial y} + a(z)U(z) + b(z)\overline{U(z)} = F(z), \quad z \in D,$$

где коэффициенты при старших членах — постоянные матрицы $A_1, A_2 \in \mathbb{C}^{l\times l}$, а $l \times l$-матричные коэффициенты $a(z), b(z) \in C(D)$. Под ее регулярным решением понимается комплексная l-вектор-функция $U = (U_1, \ldots, U_l) \in C^1(D)$, удовлетворяющая этой системе тождественно. Очевидно, эта система $\mathbb{R}$-линейна и является $\mathbb{C}$-линейной при $b = 0$.

Определение. Систему называем *эллиптической*, если $\det(\xi_1 A_1 + \xi_2 A_2) \neq 0$ для каждого ненулевого вектора $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$.

В частности, это условие означает, что матрицы A_1, A_2 не вырождены и матрица $A = -A_2^{-1}A_1$ не имеет вещественных собственных значений. Таким образом, умножая рассматриваемую систему слева на $-A_2^{-1}$ и переходя к соответствующим переобозначениям $a = -A_2^{-1}a$, $b = -A_2^{-1}b$, $F = -A_2^{-1}F$, ее всегда можно представить в виде

$$\frac{\partial U}{\partial y} - A\frac{\partial U}{\partial x} + aU + b\overline{U} = F. \tag{1}$$

В этой общей эллиптической системе старшие коэффициенты при производных постоянны, а матрица $A \in \mathbb{C}^{l\times l}$ не имеет вещественных собственных значений.

Обозначим l_1 и l_2 число собственных значений матрицы A системы (1) (с учетом кратности, $l_1+l_2 = l$), лежащих в верхней и нижней полуплоскостях, соответственно. Множество всех собственных значений можно записать в виде

$$\widetilde{\sigma} = \sigma_1 \cup \overline{\sigma}_2, \quad \sigma_j \subseteq \{\lambda,\ \operatorname{Im}\lambda > 0\}, \tag{2}$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Напомним, что жордановой формой матрицы называют блочно-диагональную матрицу

$$J = \operatorname{diag}(J_1(\lambda_1), \dots, J_l(\lambda_l)), \tag{3}$$

где, в свою очередь, каждая матрица J_i, $1 \le i \le l$ также блочно-диагональна и составлена из клеток Жордана

$$J_{i,k}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{k\times k} \tag{4}$$

различных порядков k.

С помощью подходящей обратимой линейной подстановки систему (1) всегда можно преобразовать к аналогичной системе, в которой $l_2 = 0$, т. е. когда все собственные значения матрицы A лежат в верхней полуплоскости. В основе этого преобразования лежит следующее предложение.

Теорема 1. *Существуют обратимые $l \times l$ матрицы B, J блочной структуры*

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \overline{B}_{12} \\ B_{21} & \overline{B}_{22} \end{pmatrix} = (B_1, \overline{B}_2), \quad J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где прямоугольные матрицы $B_j \in \mathbb{C}^{l\times l_j}$ и квадратные матрицы $J_i \in \mathbb{C}^{l_i\times l_i}$, $i, j = 1, 2$, удовлетворяют соотношениям

$$B^{-1}AB = \widetilde{J}, \quad \widetilde{J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & \overline{J}_2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Матрицы J_i записаны в жордановой форме (3), *при этом их диагональные элементы составляют множество σ_i.*

Доказательство. Пусть $X_1 \subseteq \mathbb{C}^l$ есть собственное подпространство матрицы A, отвечающее собственным значениям из σ_1. По определению оно состоит из всех векторов $\xi \in \mathbb{C}^l$, для которых $(A-\lambda I)^n\xi = 0$ для некоторых $\lambda \in \sigma_1$ и натурального n. Пусть $\overline{X}_2$ имеет аналогичный смысл по отношению к $\overline{\sigma}_2$. Напомним, [5] что вектор x называется *присоединенным вектором матрицы* A, *отвечающим собственному значению* λ, если для некоторого натурального числа $n \geq 1$ выполнены соотношения

$$(A-\lambda I)^{n-1}x \neq 0, \quad (A-\lambda I)^n x = 0.$$

Рассмотрим последовательность векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$, для которых выполнено

$$Ax_1 = \lambda x_1, \quad Ax_2 = \lambda x_2 + x_1,$$

$$Ax_3 = \lambda x_3 + x_2, \dots Ax_n = \lambda x_n + x_{n-1},$$

что в свою очередь эквивалентно

$$(A-\lambda I)x_1 = 0, \quad (A-\lambda I)^2 x_2 = 0, \dots, \quad (A-\lambda I)^n x_n = 0.$$

Таким образом, цепочка $x_1, x_2, \dots, x_n$ есть цепочка собственных и присоединенных векторов, отвечающих собственному значению λ.

Согласно [5] в X_1 и $\overline{X}_2$ можно выбрать базисы, составленные из этих цепочек. Если первые l_1 столбцов матрицы B составлены из элементов базиса X_1, а последующие l_2 столбцов —элементов базиса $\overline{X}_2$, то матрица B приводит матрицу A к жордановой форме, т.е. $B^{-1}AB = \widetilde{J}$. Остается эти матрицы записать в блочной форме (5), (6). □

Свяжем с $l-$вектор–функцией $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, где ϕ_1 означают первые l_1 компонент, а ϕ_2 следующие l_2 компонент, $l-$вектор-функцию $\widetilde{\phi} = (\phi_1, \overline{\phi}_2)$. Аналогично положим $\widetilde{F}_0 = B^{-1}F = (F_1, \overline{F}_2)$, $F_0 = (F_1, F_2)$ и введем блочные матрицы

$$\begin{pmatrix} \widetilde{c}_{11} & \widetilde{c}_{12} \\ \widetilde{c}_{21} & \widetilde{c}_{22} \end{pmatrix} = B^{-1}aB, \quad \begin{pmatrix} \widetilde{d}_{11} & \widetilde{d}_{12} \\ \widetilde{d}_{21} & \widetilde{d}_{22} \end{pmatrix} = B^{-1}b\overline{B}. \tag{7}$$

Сформулируем теперь теорему о приведении общей эллиптической системы (1) к каноническому виду.

Теорема 2. *В обозначениях* (5) *подстановка $B^{-1}U = (\phi_1, \overline{\phi}_2)$, или в блочной записи, подстановка*

$$U_i = B_{i1}\phi_1 + \overline{B_{i2}\phi_2}, \quad i = 1, 2, \tag{8}$$

преобразует систему (1) *к эквивалентной системе*

$$\frac{\partial\phi(z)}{\partial y} - J\frac{\partial\phi(z)}{\partial x} + c\phi(z) + d\overline{\phi(z)} = F_0(z), \tag{9}$$

где $l \times l-$матричные коэффициенты имеют вид

$$c = \begin{pmatrix} \widetilde{c}_{11} & \widetilde{d}_{12} \\ \overline{\widetilde{d}_{21}} & \overline{\widetilde{c}_{22}} \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} \widetilde{d}_{11} & \widetilde{c}_{12} \\ \overline{\widetilde{c}_{21}} & \overline{\widetilde{d}_{22}} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Доказательство. Подстановка (8) приводит систему (1) к виду

$$B\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial y} - AB\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial x} + aB\widetilde{\phi} + b\overline{B\widetilde{\phi}} = F.$$

Умножая это равенство слева на B^{-1}, в соответствии с теоремой 1, получим систему

$$\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial y} - \widetilde{J}\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial x} + (B^{-1}aB)\widetilde{\phi} + (B^{-1}b\overline{B})\overline{\widetilde{\phi}} = B^{-1}F,$$

С учетом (7), в соответствующей блочной записи она выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial y} - J_1\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + \widetilde{c}_{11}\phi_1 + \widetilde{c}_{12}\overline{\phi}_2 + \widetilde{d}_{11}\overline{\phi}_1 + \widetilde{d}_{12}\phi_2 = F_1,$$
$$\frac{\partial\overline{\phi}_2}{\partial y} - \overline{J}_2\frac{\partial\overline{\phi}_2}{\partial x} + \widetilde{c}_{21}\phi_1 + \widetilde{c}_{22}\overline{\phi}_2 + \widetilde{d}_{21}\overline{\phi}_1 + \widetilde{d}_{22}\phi_2 = \overline{F}_2.$$

Заменяя второе уравнение этой системы комплексно сопряженным, получим новую систему

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial y} - J_1\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + \widetilde{c}_{11}\phi_1 + \widetilde{c}_{12}\overline{\phi}_2 + \widetilde{d}_{11}\overline{\phi}_1 + \widetilde{d}_{12}\phi_2 = F_1,$$

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial y} - J_2\frac{\partial\phi_2}{\partial x} + \overline{\widetilde{c}_{21}}\overline{\phi}_1 + \overline{\widetilde{c}_{22}}\phi_2 + \overline{\widetilde{d}_{21}}\phi_1 + \overline{\widetilde{d}_{22}}\overline{\phi}_2 = F_2,$$

которая имеет вид (9) с коэффициентами (10). □

Отметим, что матрица J системы (9) составлена из клеток Жордана вида (4) с диагональными элементами из множеств σ_1 и σ_2, лежащих в верхней полуплоскости и фигурирующих в (2).

2. Задача линейного сопряжения

Пусть $\Gamma \in C^{1,\nu}$ простой гладкий ориентируемый контур и открытое множество $D = \mathbb{C}\setminus\Gamma$ есть объединение двух областей—конечной D_1 и бесконечной D_2. Удобно обозначить дифференциальный оператор, который действует в классе $l-$вектор-функций и определяется матрицей A следующим образом $L_A = \dfrac{\partial}{\partial y} - A\dfrac{\partial}{\partial x}$. Аналогичный смысл имеет оператор L_J, определяемый матрицей J из (3).

В этих обозначениях эллиптическая система (1) примет вид

$$L_AU(z) + a(z)U(z) + b(z)\overline{U(z)} = F(z), \quad z \in D. \tag{11}$$

Рассмотрим в D для системы (11) задачу линейного сопряжения, определяемую краевым условием

$$C_{11}U^+(t) - C_{12}U^-(t) + \overline{C_{21}U^+(t)} - \overline{C_{22}U^-(t)} = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{12}$$

где $l \times l-$матричные коэффициенты $C_{ij}(t) \in C^\nu(\Gamma)$, $f(t)$ есть комплексная $l-$вектор-функция и черта означает комплексное сопряжение.

Введем в рассмотрение класс $C^\mu_\delta(\widehat{D}, \infty)$, $-1 < \delta < 0$, заданных в D функций, который определяется условием принадлежности их пространству $C^\mu(\overline{D}_1)$ и весовому пространству Гельдера $C^\mu_\delta(\overline{D}_2, \infty)$, $-1 < \delta < 0$ введенному в [11]. Напомним кратко его определение. Класс $C^\mu_\delta(\overline{D}_2, \infty)$—класс функций $\varphi(z)$, для которых функция $\psi(z) = (1+|z|)^{-\delta+\mu}\varphi(z) \in C^\mu_\mu(\overline{D}_2, \infty)$, то есть $\psi(z)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем μ на всем множестве D_2.

Для матричных коэффициентов и правой части системы (12) предполагаем выполненными условия

$$a,\, b \in C^\mu_{\delta_0}(\widehat{D}, \infty),\ \delta_0 < -1, \tag{13}$$

$$f(t) \in C^\mu(\Gamma), \quad F \in C^\mu_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty), \quad -1 < \delta < 0. \tag{14}$$

В соответствии с этим решения $U = (U_1, \ldots, U_l)$ задачи (11)–(12) будем искать в классе $C^\mu_{A,\delta}(\widehat{D}, \infty)$, который явно определяется условиями

$$U \in C^\mu_\delta(\widehat{D}, \infty), \quad L_A U \in C^\mu_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty). \tag{15}$$

Нетрудно показать, что пространство $C^\mu_{A,\delta}(\widehat{D}, \infty)$ банахово относительно нормы

$$|U| = |U|_{C^\mu_\delta(\widehat{D},\infty)} + |L_A U|_{C^\mu_{\delta-1}(\widehat{D},\infty)}.$$

Фредгольмовость задачи (11)—(12) понимается в смысле фредгольвости оператора ее краевого условия, который действует $C^\mu_{A,\delta}(\widehat{D}, \infty)$ в прямое произведение $C^\mu_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty) \times C^\mu(\Gamma)$.

Рассмотрим блочную $2l \times 2l$ матрицу

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & \overline{G}_{22} \\ G_{21} & \overline{G}_{12} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где $l \times l-$матрицы-функции $G_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$ с учетом (5) имеют явный вид

$$G_{11} = (C_{11}B_1, \overline{C}_{21}B_2), \quad G_{12} = (C_{12}B_1, \overline{C}_{22}B_2),$$

$$G_{21} = (C_{21}B_1, \overline{C}_{11}B_2), \quad G_{22} = (C_{22}B_1, \overline{C}_{12}B_2).$$

Теорема 3. *Пусть $\Gamma \in C^{1,\nu}$, открытое множество $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ есть объединение конечной области D_1 и бесконечной области D_2 , $l \times l-$матрицы-функции $C_{ij}(t) \in$*

$C^\nu(\Gamma)$, $i, j = 1, 2$, $f(t) \in C^\mu(\Gamma)$ *и для матричных коэффициентов* a, b *и правых частей* $f(t)$, $F(z)$ *выполнены, соответственно, условия* (13), (14). *Тогда условие*

$$\det G(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \tag{17}$$

необходимо и достаточно для фредгольмовости задачи (11)–(12) *в классе* (15) *и ее индекс дается формулой*

$$æ = -\frac{1}{\pi}[\arg \det G]_\Gamma, \tag{18}$$

где приращение $[\ ]_\Gamma$ *вдоль* Γ *берется в направлении, оставляющем область* D_1 *слева.*

Доказательство. С учетом (5) линейную подстановку теоремы 2 можно записать следующим образом

$$U = B_1\phi_1 + \overline{B_2\phi_2}. \tag{19}$$

Заметим, что согласно той же теореме такая подстановка позволяет редуцировать систему (11) к эквивалентной системе

$$L_J\phi(z) + c(z)\phi(z) + d(z)\overline{\phi(z)} = F_0(z), \quad z \in D, \tag{20}$$

относительно $l-$вектор-функции ϕ, где оператор L_J определен выше, $l \times l$ матричные коэффициенты c, d удовлетворяют условиям (13), а правая часть F_0 условию (14).

Подставляя (19) в краевое условие (12) получим

$$C_{11}(B_1\phi_1^+ + \overline{B_2\phi_2^+}) - C_{12}(B_1\phi_1^- + \overline{B_2\phi_2^-}) + \overline{C_{21}(B_1\phi_1^+ + \overline{B_2\phi_2^+})} - \overline{C_{22}(B_1\phi_1^- + \overline{B_2\phi_2^-})} = f,$$

или, перегруппировав слагаемые, по отношению к $l-$вектор-функции ϕ имеем равенство

$$(C_{11}B_1, \overline{C}_{21}B_2)\phi^+ - (C_{12}B_1, \overline{C}_{22}B_2)\phi^- + \overline{(C_{21}B_1, \overline{C}_{11}B_2)\phi^+} - \overline{(C_{22}B_1, \overline{C}_{12}B_2)\phi^-} = f,$$

которое в обозначениях (16) представляет собой краевое условие, эквивалентное краевому условию (12):

$$G_{11}\phi^+(t) - G_{12}\phi^-(t) + \overline{G_{21}\phi^+(t) - G_{22}\phi^-(t)} = f_0(t), \quad t \in \Gamma. \tag{21}$$

Заметим, что подстановка (19) преобразует пространство $C^\mu_{A,\delta}(\widehat{D}, \infty)$ в пространство $C^\mu_{J,\delta}(\widehat{D}, \infty)$, которое явно характеризуется условиями

$$\phi \in C^\mu_\delta(\widehat{D}, \infty), \quad L_J\phi \in C^\mu_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty). \tag{22}$$

Таким образом, исходная задача (11)—(12) в классе $C^\mu_{A,\delta}(\widehat{D}, \infty)$ эквивалентна задаче (20)—(21) в классе $C^\mu_{J,\delta}(\widehat{D}, \infty)$, которую, как обычно, считаем фредгольмовой если фредгольмов ее оператор, действующий $C^\mu_{J,\delta}(\widehat{D}, \infty) \to C^\mu_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty) \times C^\mu(\Gamma)$.

Исходя из матричного обозначения $z_J = x \cdot 1 + y \cdot J$ для $z = x + iy \in \mathbb{C}$ введем обобщенный интеграл типа Коши

$$(I_J^1\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)_J^{-1} dt_J \varphi(t), \quad z \in D,$$

где контур Γ ориентирован положительно по отношению к конечной области D_1, $(l \times l)-$матричный дифференциал $dt_J = d_1 + Jd_2$ действует на $l-$вектор-функцию $\phi(z)$ обычным образом и потому поставлен впереди. С ним также связан обобщенный сингулярный интеграл

$$(S_J\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma (t-t_0)_J^{-1} dt_J \varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma,$$

Согласно [12], обозначим I_J^2 обобщенный оператор Векуа-Помпейю. Тогда аналогично [11] можно показать, что любую функцию $\phi \in C_J^\mu(\widehat{D}, \infty)$ единственным образом можно представить в виде обобщенного интеграла типа Коши I_J^1 и обобщенного оператора Векуа-Помпейю I_J^2:

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)_J^{-1} dt_J \varphi_1(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_{D_1} (\zeta - z)_J^{-1}\psi(\zeta) d_2\zeta + i\xi; \quad \zeta, z \in D_1, \\ \phi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)_J^{-1} dt_J \varphi_2(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_{D_2} (\zeta - z)_J^{-1}\psi(\zeta) d_2\zeta, \quad \zeta, z \in D_2, \end{aligned} \tag{23}$$

где комплексная $l-$вектор-функция $\psi(z) \in C_{\delta-1}^\mu(\widehat{D}, \infty)$, $\xi \in \mathbb{R}^l-$постоянный вектор, а $l-$вектор-функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ принадлежат классу $C_\mathbb{R}^\mu(\Gamma)$ (здесь нижний индекс $\mathbb{R}$ указывает на то, что элементы соответствующего пространства являются вещественными вектор-функциями), причем $\varphi_2(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_\Gamma \varphi_2(t) d_1 t = 0. \tag{24}$$

Обозначим операторы $(I_J^2\psi)^+$ и $(I_J^2\psi)^-$, действующие из областей D_1 и D_2, соответственно, на контур Γ, через

$$(I_j^{12}\psi)(t_0) = -\frac{1}{\pi i}\int_{D_j} (\zeta - t_0)_J^{-1}\psi(\zeta) d_2\zeta, \quad t_0 \in \Gamma, \quad j = 1, 2, \tag{25}$$

где верхний индекс указывает на то, что этот оператор переводит функцию $\psi(z)$, заданную в области D, в функцию $(I^{12}\psi)(t_0)$, заданную на Γ. Согласно [10] они ограничены соответственно $C^\mu(\overline{D}_1) \to C^{1,\mu}(\Gamma)$, $C_{\delta-1}^\mu(\overline{D}_2, \infty) \to C^{1,\mu}(\Gamma)$.

В этих обозначениях, согласно формулам Сохоцкого-Племеля [9], граничные значения функции ϕ имеют вид

$$2\phi^+ = (1 + S_J)\varphi_1 + 2I_1^{12}\psi + 2i\xi, \quad 2\phi^- = (-1 + S_J)\varphi_2 + 2I_2^{12}\psi.$$

Подставляя эти равенства в краевое условие (21), приходим к системе l сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{gathered} G_{11}(1+S_J)\varphi_1 + G_{12}(1-S_J)\varphi_2 + \overline{G_{21}(1+S_J)\varphi_1} + \overline{G_{22}(1-S_J)\varphi_2} + \\ +2[(G_{11}I_1^{12}\psi + \overline{G_{21}I_1^{12}\psi}) - (G_{12}I_2^{12}\psi + \overline{G_{22}I_2^{12}\psi})] + 2i(G_{11}-G_{21})\xi = 2f_0 \end{gathered} \tag{26}$$

на контуре Γ относительно комплексной l-вектор-функции $\psi(z)$, $z \in D$ и двух вещественных $l-$вектор-функции $\varphi_j(t),\ t \in \Gamma,\ j = 1, 2$, правая часть которой является комплексной $l-$вектор-функцией. Аналогично (25) удобно ввести оператор

$$(I_j^{21}\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)_J^{-1} dt_J \varphi(t), \quad z \in D_j,$$

действующий из контура Γ на область D_j. Здесь верхний индекс указывает на то, что он переводит функцию $\varphi(t)$, заданную на Γ в функцию $(I_j^{21}\varphi)(z)$, заданную в области D_j и оператор

$$(I_j^{22}\psi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{D_j} (\zeta - z)_J^{-1}\psi(\zeta) d_2\zeta, \quad j = 1, 2,$$

который действует из области D_j в область D_j и верхний индекс понимается аналогичным образом. Отметим, что согласно соответствующим теоремам из [12], [11], [9] эти операторы ограничены соответственно

$$I_1^{21} : C^\mu(\Gamma) \to C^\mu(\overline{D}_1), \quad I_2^{21} : C^\mu(\Gamma) \to C^\mu_\delta(\overline{D}_2, \infty),$$

$$I_1^{22} : C^\mu(\overline{D}_1) \to C^{1,\mu}(\overline{D}_1), \quad I_2^{22} : C^\mu_{\delta-1}(\overline{D}_2, \infty) \to C^{1,\mu}_\delta(\overline{D}_2\infty).$$

Пользуясь представлениями (23) и рассуждениями теоремы 1 из [11], в этих обозначениях от системы (20) приходим к системе двумерных интегральных уравнений

$$\psi_j + c_j I_j^{21}\varphi_j + d_j\overline{I_j^{21}\varphi_j} + c_j I_j^{22}\psi_j + d_j\overline{I_j^{22}\psi_j} + i(c-d)\xi_j = F_{0j}, \quad j = 1, 2, \tag{27}$$

где ψ_j, c_j, d_j, F_{0j} есть сужения соответствующих функций на область D_j и $\xi_1 = \xi,\ \xi_2 = 0$.

Отметим, что полученная система (26)—(27) эквивалентна задаче (20)—(21) в классе $C^\mu_{J,\delta}(\widehat{D}, \infty)$. Оператор этой системы действует $C^\mu_{\mathbb{R}}(\Gamma) \times C^\mu_{\mathbb{R}}(\Gamma) \times C^\mu_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty) \times \mathbb{R}^l \to C^\mu(\Gamma) \times C^\mu_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty)$, где под $C^\mu(\Gamma)$ в правой части понимается пространство комплексных $l-$вектор-функций.

Если $S-$ классический сингулярный оператор Коши

$$(S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \Gamma,$$

то согласно [1] операторы $S_J - S$ и $\overline{S_J} + S$ компактны в пространстве $C^{\mu}(\Gamma)$. С учетом этого систему (26) запишем следующим образом

$$\frac{1}{2}\big([G_{11}(1+S)+\overline{G}_{21}(1-S)]\varphi_1+[G_{12}(1-S)+\overline{G}_{22}(1+S)]\varphi_2\big)+ \\ +K_1^{11}\varphi_1+K_2^{11}\varphi_2+K^{12}\psi+i(G_{11}-G_{21})\xi=f_0, \tag{28}$$

где операторы $K_j^{11},\ j=1,2$, компактны в $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ и имеют явный вид

$$K_1^{11}\varphi_1=\frac{1}{2}(G_{11}K_1\varphi_1+\overline{G}_{21}K_2\varphi_1),\quad K_2^{11}\varphi_2=-\frac{1}{2}(G_{12}K_1\varphi_2+\overline{G}_{22}K_2\varphi_2),$$

оператор K^{12} компактен в $C^{\mu}_{\delta-1}(\widehat{D},\infty)\to C^{\mu}(\Gamma)$ и равен

$$K^{12}\psi=[(G_{11}I_1^{12}\psi+\overline{G_{21}I_1^{12}\psi})-(G_{12}I_2^{12}\psi+\overline{G_{22}I_2^{12}\psi})].$$

Если A условно означает левую часть (28) и $f_0=f_1-if_2$ с вещественными функциями f_i, то комплексное равенство $A=f_0$ можно заменить на два вещественных Re $A=f_1$ и Re $(iA)=f_2$. Таким образом, систему (28) l комплексных сингулярных интегральных уравнений запишем в виде системы $2l$ вещественных уравнений

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\ \big([G_{11}(1+S)+\overline{G}_{21}(1-S)]\varphi_1+[G_{12}(1-S)+\overline{G}_{22}(1+S)]\varphi_2\big)+$$

$$+\mathrm{Re}\ (K_1^{11}\varphi_1+K_2^{11}\varphi_2+K^{12}\psi)-\mathrm{Im}\ (G_{11}-G_{21})\xi=f_1,$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\ i\big([G_{11}(1+S)+\overline{G}_{21}(1-S)]\varphi_1+[G_{12}(1-S)+\overline{G}_{22}(1+S)]\varphi_2\big)+$$

$$+\mathrm{Re}\ i(K_1^{11}\varphi_1+K_2^{11}\varphi_2+K^{12}\psi)-\mathrm{Re}\ (G_{11}-G_{21})\xi=f_2.$$

Или, полагая $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$, $f_0=(f_1,f_2)$, запишем кратно в операторном виде

$$(R_{11}\varphi)(t)+(R_{11}^0\varphi)(t)+(R_{12}\psi)(t)+L_1(t)\xi=f_0(t),\quad t\in\Gamma, \tag{29}$$

где 2×2 операторные матрицы

$$R_{11}\varphi=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\begin{pmatrix}[G_{11}(1+S)+\overline{G}_{21}(1-S)]\varphi_1 & [\overline{G}_{22}(1+S)+G_{12}(1-S)]\varphi_2\\ i[G_{11}(1+S)+\overline{G}_{21}(1-S)]\varphi_1 & i[\overline{G}_{22}(1+S)+G_{12}(1-S))]\varphi_2\end{pmatrix},$$

$$R_{11}^0\varphi=\mathrm{Re}\begin{pmatrix}K_1^{11}\varphi_1 & K_2^{11}\varphi_2\\ iK_1^{11}\varphi_1 & iK_2^{11}\varphi_2\end{pmatrix},$$

действуют из $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ в прямое произведение $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)\times C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$, операторная матрица порядка 2×1

$$R_{12}\psi=\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\ K^{12}\psi\\ \mathrm{Re}\ iK^{12}\psi\end{pmatrix},$$

действует $C^{\mu}_{\delta-1}(\widehat{D},\infty) \to C^{1,\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ и матрица-функция $L_1(t) \in C^{\nu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ имеют вид

$$L_1(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{Im}\ (G_{11} - G_{21})(t) \\ -\mathrm{Re}\ (G_{21} - G_{11})(t) \end{pmatrix}.$$

Обратимся к уравнению (27). Заметим, что функции $\psi(z)$ из класса $C^{\mu}_{J,\delta}(\widehat{D},\infty)$ ставятся в соответствие ее сужения $\psi_1 = \psi|_{D_1}$, $\psi_2 = \psi|_{D_2}$, поэтому пространство $C^{\mu}_{J,\delta}(\widehat{D},\infty)$ можно отождествить с произведением пространств $C^{\mu}(\overline{D}_1)$ и $C^{\mu}_{\delta}(\overline{D}_2,\infty)$. Таким образом уравнение (27) относительно комплексной $l-$вектор-функции $\psi(z)$ и двух вещественных $l-$вектор–функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, $t \in \Gamma$ можно записать следующим образом

$$\psi_1 + c_1 I_1^{21}\varphi_1 + d_1\overline{I_1^{21}\varphi_1} + c_1 I_j^{22}\psi_1 + d_1\overline{I_1^{22}\psi_1} + i(c-d)\xi = F_{01},$$

$$\psi_2 + c_2 I_2^{21}\varphi_2 + d_2\overline{I_2^{21}\varphi_2} + c_2 I_2^{22}\psi_2 + d_2\overline{I_2^{22}\psi_2} = F_{02},$$

или, полагая $F_0 = (F_{01}, F_{02})$ и, как и выше, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, в краткой операторной форме

$$(R_{21}\varphi)(z) + (1 + R_{22})\psi(z) + L_2(z)\xi = F_0(z), \tag{30}$$

где 2×2 операторная матрица

$$R_{21}\varphi = \begin{pmatrix} c_1 I_1^{21}\varphi_1 + d_1\overline{I_1^{21}\varphi_1} & 0 \\ 0 & c_2 I_2^{21}\varphi_2 + d_2\overline{I_2^{21}\varphi_2} \end{pmatrix}$$

действует из $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ в прямое произведение $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma) \times C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$, операторная матрица порядка 2×1

$$R_{22}\psi = \begin{pmatrix} c_1 I_1^{22}\psi_1 + d_1\overline{I_1^{22}\psi_1} & 0 \\ 0 & c_2 I_2^{22}\psi_2 + d_2\overline{I_2^{22}\psi_2} \end{pmatrix}$$

действует $C^{\mu}_{\delta-1}(\widehat{D},\infty) \to C^{1,\mu}_{\delta}(\widehat{D},\infty)$ и соответствующая вектор-функция $L_2(z) \in C^{\mu}_{\delta_0}(\widehat{D},\infty)$, $\delta_0 < -1$ имеет вид $L_2 = (i(c-d), 0)$.

Объединяя (24), (29) и (30) окончательно получим следующую систему

$$\begin{gathered} (R_{11}\varphi)(t) + (R_{11}^0\varphi)(t) + (R_{12}\psi)(t) + L_1(t)\xi = f_0(t), \\ (R_{21}\varphi)(z) + (1 + R_{22})\psi(z) + L_2(z)\xi = F_0(z), \end{gathered} \tag{31}$$

$$\int_{\Gamma} \varphi_2(t) d_1 t = 0. \tag{32}$$

Обозначим $\widetilde{\varphi} = (\varphi, \psi)$, $\widetilde{f} = (f_0, F_0)$, где функции $\widetilde{\varphi}$ и $\widetilde{f}$ принадлежат прямому произведению $C^{\mu}(\Gamma) \times C^{\mu}_{\delta-1}(\widehat{D},\infty)$. В этих обозначениях (31) примет краткий операторный вид

$$R\widetilde{\varphi} + L\xi = \widetilde{f}, \tag{33}$$

где оператор (R, L) действует $C^\mu_{\mathbb{R}}(\Gamma) \times C^\mu_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty) \times \mathbb{R}^l \to C^\mu(\Gamma) \times C^\mu_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty)$ и операторные матрицы имеют вид

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} + R^0_{11} & R_{12} \\ R_{21} & 1 + R_{22} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Рассмотрим подробнее каждый из операторов системы (31). Очевидно операторы R^0_{11}, R_{12}, R_{22} компактны соответственно в пространствах $C^\mu_{\mathbb{R}}(\Gamma)$, $C^\mu_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty) \to C^\mu(\Gamma)$, $C^\mu_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty)$, оператор R_{21} ограничен $C^\mu_{\mathbb{R}}(\Gamma) \times C^\mu_{\mathbb{R}}(\Gamma) \to C^\mu_\delta(\widehat{D}, \infty)$. Поэтому с точностью до компактного слагаемого оператор R совпадает с оператором

$$R_0 = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как R и R_0 отличаются на компактное слагаемое, то они свойством фредгольмовости обладают одновременно и их индексы совпадают

$$\text{ind } R = \text{ind } R_0. \tag{35}$$

Таким образом, фредгольмовость оператора R_0 влечет фредгольмовость оператора R, и, следовательно, фредгольмовость исходной задачи (11)—(12).

Что касается оператора R_0, то согласно [10] он будет фредгольмов, если фредгольмов оператор R_{11} причем их индексы совпадают

$$\text{ind } R_0 = \text{ind } R_{11}. \tag{36}$$

Запишем этот оператор следующим образом

$$2(R_{11}\varphi)(t) = \text{Re }[A(1 + S) + B(1 - S)]\varphi(t),$$

где матрицы A, B имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} G_{11} & \overline{G}_{22} \\ iG_{11} & i\overline{G}_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \overline{G}_{21} & G_{12} \\ i\overline{G}_{21} & iG_{12} \end{pmatrix}$$

Так как $4R_{11} = 2\text{Re }[A(1 + S) + B(1 - S)]$ то

$$R_{11} = \frac{1}{4}((A + \overline{B})(1 + S) + (\overline{A} + B)(1 - S)) + K_0$$

где $K_0 = \dfrac{1}{4}(\overline{A}K^1_0 + BK^2_0)$ есть компактный оператор. Последнее равенство можно продолжить

$$R_{11} = \frac{1}{4}[C(1 + S) + \overline{C}(1 - S) + K_0],$$

где матрица C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} G_{11} + G_{21} & \overline{G}_{22} + \overline{G}_{12} \\ i(G_{11} - G_{21}) & i(\overline{G}_{22} - \overline{G}_{12}) \end{pmatrix}.$$

В обозначениях (16) можем записать

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \cdot G$$

Поэтому согласно [1] оператор R_{11} фредгольмов тогда и только тогда, когда выполнено условие (18) обратимости матрицы $G(t)$. Более того, согласно известным теоремам [7], [6] индекс оператора R_{11} можно выразить через индекс Коши матрицы-функции $G(t)$

$$\text{ind } R_{11} = -2\text{Ind } G, \tag{37}$$

а с учетом [11] это равенство можно продолжить

$$\text{ind } R_{11} = -\frac{1}{\pi}[\arg\ \det G(t)]|_{\Gamma}.$$

Пространство $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma) \times C^{\mu}_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty) \times \mathbb{R}^{l}$ есть расширение пространства $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma) \times C^{\mu}_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty)$ на l измерений, поэтому на основании известных свойств фредгольмовых операторов [7] операторы (R, H) и R фредгольмово эквивалентны, а их индексы

$$\text{ind } (R, L) = \text{ind } R + l. \tag{38}$$

С учетом (32) имеем

$$æ = \text{ind } (R, L) - l.$$

Используя формулы (35)—(38) окончательно получаем формулу индекса (18), которая завершает доказательство теоремы 3. □

Заключение

В работе доказан критерий фредгольмовости задачи линейного сопряжения для эллиптической системы первого порядка с комплексными коэффициентами и найдена формула индекса.

Автор выражает признательность своему научному руководителю профессору А. П. Солдатову за постановку задачи и помощь на всех этапах ее решения и профессору В. Б. Васильеву за плодотворное обсуждение вопросов, связанных с написанием и оформлением статьи.

Список цитируемых источников

1. *Абаполова, Е. А., Солдатов, А. П.* К теории сингулярных интегральных уравнений на гладком контуре // Научные ведомости БелГУ. Серия Математика. Физика. — 2010. — №5(76), вып. 18. — С. 6–20.

   Abapolova, E., Soldatov, A. On the theory of singular equations on a smooth contour. Scientific statements of BSU. Mathematics series. Physics No 5(76), 6-20 (2010). (in Russian)

2. *Векуа, Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. — Москва: Наука, 1970. — 380 с.

   Vekua, N. P. Systems of singular integral equations. Groningen, The Netherlands: P. Noordhoff, Ltd., 1967.

3. *Векуа, Н. П.* Обобщенные аналитические функции. — Москва: Наука, 1988. — 512 с.

   Vekua, N. Generalized analytic functions. Moscow: Nauka, 1988. (in Russian)

4. *Гахов, Ф. Д.* Краевая задача Римана для системы n пар функций // УМН. — 1988. — Т.7, вып. 4(50). — С. 3–54.

   Gahov, F. D. The Riemann boundary problem for a system of n pairs of functions. Usp. Mat. Nauk. 7, No. 4(50), 3-54 (1952). (in Russian)

5. *Гельфанд, И. М.* Лекции по линейной алгебре. — Москва: Наука, 1971. — 280 с.

   Gel'fand, I. M. Lectures on Linear Algebra. New-York: Interscience Publishers, Inc., 1961.

6. *Мусхелишвили, Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — Москва: Наука, 1968. — 513 с.

   Muskhelishvili, ,N. I. Singular integral equations. Translated from the second Russian edition. 3rd ed. Groningen: Wolters-Noordhoff Publishing, 1967.

7. *Пале, Р.* Семинар по теореме Атьи–Зингера об индексе. — Москва: Мир, 1970. — 360 с.

   Palais, R. S. Seminar on the Atiyah – Singer index theorem. Princeton: Princeton University Press, 1965.

8. *Солдатов, А. П.* Краевая задача линейного сопряжения теории функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1979. — Т.43, №1. — С. 184–202.

   Soldatov, A. P. The boundary problem of linear conjugation of the theory of functions. Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 43, 184-202 (1979). (in Russian)

9. *Солдатов, А. П.* Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1991. — Т.55, №5. — С. 1070–1100.

   Soldatov, A. P. A method of the theory of functions in boundary value problems on the plane. I: Smooth case. Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 55, No. 5, 1070-1100 (1991). (in Russian)

10. *Солдатов, А. П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические эллиптические краевые задачи. I // Функциональный анализ. СМФН. Российский университет дружбы народов, М. —2017. — Т.63, №1. — С. 1–189.

    Soldatov, A. Singular integral operators and elliptic elliptic boundary value problems. Funkcional'nyj analiz. SMFN Rossijskij universitet druzhby narodov 63, 1–189 (2017). (in Russian)

11. *Солдатов, А. П., Чернова, О. В.* Задача Римана–Гильберта для эллиптических систем первого порядка на плоскости с постоянными старшими коэффициентами // Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики» Кабардино-Балкария, Нальчик, 17–21 мая 2017 г., Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. ВИНИТИ РАН, М. — 2018. — Т.149. — С. 95–102.

    Soldatov, A., Chernova, O. The Riemann – Hilbert problem for first-order elliptic systems on a plane with constant higher coefficients. Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii "Aktual'nye problemy prikladnoj matematiki i fiziki"Kabardino-Balkariya, Nal'chik, 17-21 maya 2017g., Itogi nauki i tekhniki. Ser. Sovrem. mat. i ee pri. Temat. obz. VINITI RAN 149, 95-102 (2018). (in Russian)

12. *Чернова, О. В.* Обобщенный оператор Векуа-Помпейю // Научные ведомости БелГУ. —2018. — Т.50, №1. — С. 40–46.

Chernova, O. Generalized operator Vekua-Pompeiu. Scientific statements of BSU 50, 40–46 (2018). (in Russian)

Получена 06.11.2018