Динамические системы, 2018, том 8(36), №3, 245–262

УДК 517.9

Устойчивость решений уравнений параболического типа с медленно меняющимися коэффициентами[1]

С. А. Кащенко*,, Д. О. Логинов***

*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Ярославль 150003,
**Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ",
Москва 115409.
E-mail: kasch@uniyar.ac.ru, dimonl@inbox.ru

Аннотация. Рассматривается вопрос об устойчивости решений линейных систем уравнений параболического типа. Основное внимание уделено изучению устойчивости решений с медленно меняющимися почти периодическими коэффициентами и с переменной областью определения. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости и разработан эффективный алгоритм исследования задач устойчивости решений. Кроме этого рассмотрены подобные задачи для систем параболических уравнений с большими коэффициентами диффузии и для систем с быстро осциллирующими по пространственной переменной коэффициентами.

Ключевые слова: параболические системы, устойчивость, критические случаи, асимптотика.

Stability of solutions of parabolic equations with slowly varying coefficients

S. A. Kaschenko, D. O. Loginov

P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl 150003

National Research Nuclear University MEPhI, Moscow 115409.

Abstract. The question of the stability of solutions of linear systems of parabolic equations is considered. The main attention is paid to the study of the stability of solutions with slowly varying almost periodic coefficients and with a variable domain of definition. Critical cases in the problem of stability are identified and an effective algorithm for studying problems of solution stability is developed. In addition, similar problems for systems of parabolic equations with large diffusion coefficients and for systems with coefficients rapidly oscillating in spatial variable are considered.

Keywords: parabolic systems, stability, critical cases, asymptotics.

MSC 2010: 47D99

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №18-29-10043

1. Критерий равномерной регулярности

На отрезке $0 \le x \le 1$ рассмотрим краевую задачу

$$H(\varepsilon)u \equiv \dot{u} - D(\varepsilon t, x)u'' - A_1(\varepsilon t, x)u' - A_2(\varepsilon t, x)u = 0, \qquad (1)$$

$$(u' + B_1(\varepsilon t)u)|_{x=0} = (u' + B_2(\varepsilon t)u)|_{x=1} = 0. \qquad (2)$$

Здесь $u \in \mathbb{R}^m$, $0 < \varepsilon \ll 1$, элементами матриц $D(\tau, x)$, $A_j(\tau, x)$, $B_j(\tau, x)$ $(j = 1, 2)$ являются тригонометрические по τ многочлены с частотами, не зависящими от x, матрица $D(\tau, x)$ имеет собственные значения с положительными (равномерно по $\tau \in (-\infty, \infty)$, $\in [0, 1]$) вещественными частями, зависимость от x достаточно гладкая. При достаточно малых ε изучим вопрос об устойчивости в $C_{(0,1)}$ решений краевой задачи (1), (2). Для обыкновенных дифференциальных уравнений поставленная задача изучалась в [1]–[5], а для уравнений с запаздыванием — в [3]. В периодическом по $\tau = \varepsilon t$ случае развернутые исследования изложены в монографиях [6, 7, 8] и в статье [9]. Для параболических уравнений некоторые результаты приведены в [10].

Для формулировки основного результата понадобится определение равномерной регулярности и некоторые обозначения. Напомним, что оператор $H(\varepsilon)$ называется *регулярным*, если при каждой $f(t, x) \in C$ (C — банахово пространство непрерывных и ограниченных при $t \in (-\infty, \infty), x \in [0, 1]$ функций со стандартной нормой) неоднородная краевая задача

$$H(\varepsilon)u = f(t, x) \qquad (3)$$

имеет решение $u_f(t, x) \in C$. При этом (см. [11]) выполнена оценка

$$|u_f(t, x)|_C \le N|f(t, x)|_C \qquad \left(|f(t, x)|_C = \sup_{t,x} |f(t, x)|_{\mathbb{R}^m}\right), \qquad (4)$$

где $N > 0$ не зависит от $f(t, x) \in C$. Оператор $H(\varepsilon)$ называют *равномерно регулярным*, если найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ он регулярен и выполнена оценка (4), в которой постоянная $N > 0$ не зависит от ε.

Введем в рассмотрение семейство эллиптических операторов $L(\tau)$, зависящих от параметра $\tau \in (-\infty, \infty)$:

$$L(\tau)v \equiv D(\tau)v'' + A_1(\tau, x)v' + A_2(\tau, x)v,$$

$$(v' + B_1(\tau)v)|_{x=0} = (v' + B_2(\tau)v)|_{x=1} = 0.$$

Будем говорить, что спектр операторов $L(\tau)$ *отделен от мнимой оси*, если при всех $\tau \in (-\infty, \infty)$ собственные значения этого оператора лежат в части комплексной плоскости, выделяемой неравенством

$$|\mathrm{Re}\lambda| \ge \lambda_0 > 0. \qquad (5)$$

Как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Для того, чтобы оператор $H(\varepsilon)$ был равномерно регулярным необходимо и достаточно, чтобы спектр операторов $L(\tau)$ был отделен от мнимой оси.*

Для параболических краевых задач вида (1), (2) справедливы общие утверждения работы [11] (с помощью простых замен, не меняющих вида уравнения (1), удается сделать автономными краевые условия). Поэтому при условии отделенности от мнимой оси спектров операторов $L(\tau)$ и при достаточно малых ε для краевой задачи (1), (2) имеет место экспоненциальная дихотомия решений. Пространство $C_{(0,1)}$ начальных условий в произвольный момент времени τ расщепляется в прямую сумму таких подпространств $E_+(\tau,\varepsilon)$ и $E_-(\tau,\varepsilon)$, что решения $u_+(t,\tau,x,\varepsilon)$ с начальными условиями при $t=\tau$ из $E_+(t,\varepsilon)$ определены при $t \geq \tau$, принадлежат подпространству $E_+(t,\varepsilon)$ и экспоненциально затухают (по норме $C_{(0,1)}$) при $t \to \infty$, а решения $u_-(t,\tau,x,\varepsilon)$ с начальными условиями (при $t=\tau$) из $E_-(\tau,\varepsilon)$ определены при $t \in (-\infty,\infty)$, принадлежат $E_-(t,\varepsilon)$ и экспоненциально растут при $t \to \infty$. Показатели экспоненциального роста и убывания норм решений $u_\pm(t,\tau,x,\varepsilon)$ отделены от нуля при $\varepsilon \to 0$. Подпространство $E_-(t,\varepsilon)$ конечномерно и размерность его совпадает с количеством собственных значений операторов $L(\tau)$, имеющих положительные вещественные части. Проекторы $P_\pm(\tau,\varepsilon)$, осуществляющие расщепление $C_{(0,1)}$ на $E_\pm(\tau,\varepsilon)$, почти периодичны по τ. Как и для случая обыкновенных дифференциальных уравнений можно показать, что на каждом элементе $\varphi(x) \in C_{(0,1)}$ выполнено равенство

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\sup_{\tau}\|(P_\pm(\tau,\varepsilon)-P_\pm(\tau))\varphi(x)\|_{C_{(0,1)}}=0, \tag{6}$$

где $P_+(\tau)$ $(P_-(\tau))$ — проектор на корневое подпространство оператора $L(\tau)$, отвечающее собственным значениям с отрицательными (положительными) вещественными частями. Отсюда, в частности, вытекает, что при условии отделенности от мнимой оси спектров операторов $L(\tau)$ необходимым и достаточным условием устойчивости решений (1), (2) является требование, чтобы все собственные значения $L(\tau)$ имели отрицательные вещественные части.

Доказательство теоремы 1 и равенства (6) проходит по использованной в [3] схеме, основанной на теории экспоненциальной дихотомии [11] и на результате работы [12]. Подробнее на обосновании не останавливаемся.

2. Устойчивость решений в критический случаях “простых чисто мнимых собственных значений”

Предполагаем здесь, что операторы $L(\tau)$ имеют m_0 $(0<m_0<\infty)$ простых (равномерно относительно τ) собственных значений, лежащих на мнимой оси, а все остальные собственные значения удовлетворяют неравенству

$$\mathrm{Re}\lambda(\tau) \leq -\lambda_0 < 0. \tag{7}$$

При сделанных предложениях исследуем вопрос об устойчивости решений краевой задачи (1), (2). Отметим, что для случая обыкновенных дифференциальных уравнений поставленная задача решена в работе [13]. Как оказывается, результаты из [13] допускают обобщение на рассматриваемый здесь класс задач.

Сначала изложим алгоритмическую часть. Пусть $i\omega_j(\tau)$ ($j = 1, \dots, m^0$, $m^0 = \dfrac{m_0}{2}$, если нет нулевого собственного значения, и $m^0 = \dfrac{m_0 - 1}{2}$ — в противном случае) — все те чисто мнимые собственные значения оператора $L(\tau)$, для которых $\omega_j(\tau) > 0$. Ясно, что все функции $\omega_j(\tau)$ почти периодичны вместе со своими производными и каждой из них отвечают собственные функции $a_j(\tau, x)$ и $b_j(\tau, x)$ операторов $L(\tau)$ и $-L^*(\tau)$, соответственно. Здесь

$$L^*(\tau)v \equiv D^*(\tau,x)v'' + [2D^*(\tau,x)' - A_1^*(\tau,x)]v' + (A_2^*(\tau,x) - A_1^*(\tau,x)' + D^*(\tau,x)'')v,$$

$$(D^*(\tau,x)v' + (B_1^*(\tau)D^*(\tau,x) - A_1^*(\tau,x)) - D^*(\tau,x)')v|_{x=0} = 0,$$
$$(D^*(\tau,x)v' + (B_2^*(\tau)D^*(\tau,x) - A_1^*(\tau,x)) - D^*(\tau,x)')v|_{x=1} = 0.$$

Без потери общности можно считать, что $\max\limits_x \|a_j(\tau,x)\|_{R^m} \geq v_0 > 0$ и $\langle a_j(\tau,x), b_j(\tau,x)\rangle \equiv 1$, $\langle a_j(\tau,x), \overline{b}_j(\tau,x)\rangle \equiv 0$ ($j = 1, \dots, m^0$), где

$$\langle a(\tau,x), b(\tau,x)\rangle = \int\limits_0^1 (a(\tau,x), b(\tau,x))dx.$$

Кроме этого, будем считать, что функции $\int\limits_0^t [\omega_j(s) - M(\omega_j(t))]ds$ почти периодичны. Здесь принято стандартное обозначение

$$M(\varphi(t)) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T \varphi(s)ds.$$

Приступим непосредственно к описанию алгоритма. Введем в рассмотрение формальные ряды

$$\alpha_j(\varepsilon) = \varepsilon\alpha_{j1} + \varepsilon^2\alpha_{j2} + \cdots, \tag{8}$$

$$v_j(\tau,x,\varepsilon) = \gamma_j(\tau)a_j(\tau,x) + \varepsilon a_{j1}(\tau,x) + \varepsilon^2 a_{j2}(\tau,x) + \cdots, \tau = \varepsilon t, \tag{9}$$

где α_{jk} — некоторые постоянные, $\gamma_j(t)$ — скалярные, а $a_{jk}(t)$ – векторные почти периодические функции, производные которых почти периодичны по τ. Коэффициенты рядов (8), (9) будем последовательно определять из формальных тождеств

$$\frac{\partial v_j(\tau,x,\varepsilon)}{\partial t} = L(\tau)v_j(\tau,x,\varepsilon) - [\alpha_j(\varepsilon) + i\omega_j(\tau)]v_j(\tau,x,\varepsilon), \tag{10}$$

$$v_j'(\tau,0,\varepsilon) + B_1(\tau)v_j(\tau,0,\varepsilon) = 0, \quad v_j'(\tau,1,\varepsilon) + B_2(\tau)v_j(\tau,1,\varepsilon) = 0. \tag{11}$$

Учитывая в (10) выражения (8) и (9), будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε. При $\varepsilon = 0$ краевая задача (10), (11) обращается в тождество, собирая коэффициенты при первой степени ε, приходим к выражениям

$$(L(\tau) - i\omega_j(\tau)I)a_{j1}(\tau, x) = \dot{\gamma}_j(\tau)a_j(\tau) + \gamma_j(\tau)[\dot{a}_j(\tau, x) + \alpha_{j1}a_j(\tau, x)], \qquad (12)$$

$$a'_{j1}(\tau, 0) + B_1(\tau)a_{j1}(\tau, 0) = a'_{j1}(\tau, 1) + B_2(\tau)a_{j1}(\tau, 1) = 0. \qquad (13)$$

Условием разрешимости краевой задачи (12), (13) относительно $a_{j1}(\tau, x)$ является ортогональность правой части (13) функции $b_j(\tau, x)$. Отсюда получаем, что

$$\dot{\gamma}_j(\tau) + [\langle \dot{a}_j(\tau, x), b_j(\tau, x)\rangle + \alpha_{j1}]\gamma_j(\tau) = 0. \qquad (14)$$

Для существования почти периодического решения (14) необходимо, чтобы

$$\alpha_{j1} = -M(\mathrm{Re}\langle \dot{a}_j(t, x), b_j(t, x)\rangle).$$

Это условие будет и достаточным, если функция

$$\int_0^\tau [\langle \dot{a}_j(\tau, x), b_j(\tau, x)\rangle - M(\langle \dot{a}_j(t, x), b_j(t, x)\rangle)]dx$$

тоже будет почти периодической. Ниже считаем, что это и другие подобного рода условия выполнены.

После того, как функция $\gamma_j(\tau)$ определена, находим из краевой задачи (12), (13) функцию $a_{j1}(\tau, x)$. Ее можно представить в виде

$$a_{j1}(\tau, x) = a^0_{j1}(\tau, x) + \gamma_{j1}(\tau)a_j(\tau, x),$$

где $a^0_{j1}(\tau, x)$ — какое-либо фиксированное почти периодическое решение задачи (12), (13), а $\gamma_{j1}(\tau)$ – произвольная почти периодическая (вместе со своей производной) скалярная функция.

Собирая на втором шаге коэффициенты в (10), (11) при ε^2, получим краевую задачу для определения $a_{j2}(\tau, x)$. Условие ее разрешимости приводит к уравнению относительно $\gamma_{j1}(\tau)$:

$$\dot{\gamma}_{j1}(\tau) + [\langle \dot{a}_j(\tau, x), b_j(\tau, x)\rangle + \alpha_{j1}]\gamma_{j1}(\tau) + \langle \dot{a}^0_{j1}(\tau, x), b_j(\tau, x)\rangle + \alpha_{j2}\gamma_j(\tau) = 0.$$

Из условия существования почти периодического решения этого уравнения находим

$$\alpha_{j2} = M(\langle \dot{a}^0_{j1}(\tau, x), b_j(\tau, x)\rangle \exp \int\limits_0^\tau [\langle \dot{a}_j(s, x), b_j(s, x)\rangle + \alpha_{j1}]ds).$$

Зная α_{j2}, находим сначала $\gamma_{j1}(\tau)$, потом $a_{j2}(\tau, x) = a^0_{j2}(\tau, x) + \gamma_{j2}(\tau)a_j(\tau)$ и т. д. Таким образом, все элементы рядов (8), (9) последовательно определяются. Те же построения проходят и для случая тождественно нулевого по τ собственного значения $L(\tau)$, поэтому отдельно этот случай не выделяем. Будем считать, что при наличии нулевого собственного значения $L(\tau)$ соответствующим рядам (8), (9) отвечает индекс $j = 0$.

Теорема 2. *Предположим, что первые отличные от нуля коэффициенты всех рядов*

$$\varepsilon\alpha_{j1} + \varepsilon^2 Re\alpha_{j2} + \varepsilon^3 Re\alpha_{j3} + \cdots \tag{15}$$

отрицательные.

Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решения краевой задачи (1), (2) экспоненциально устойчивы. Если же первый ненулевой коэффициент хотя бы одного из рядов положителен, то найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решения (1), (2) неустойчивы.

3. Обоснование теоремы 2

Сформулируем сначала в виде лемм два результата, из которых и будет следовать утверждение теоремы. Положим

$$\alpha_{jk}(\varepsilon) = \varepsilon\alpha_{j1} + \cdots + \varepsilon^k \alpha_{jk},$$

$$v_{jk}(\tau, x, \varepsilon) = \gamma_j(\tau) a_j(\tau, x) + \cdots + \varepsilon^k a_{jk}(\tau, x).$$

Лемма 1. *Для каждого номера k найдется такой линейный относительно $u(\tau, x)$ почти периодический по τ и ограниченный равномерно относительно τ, x, ε оператор $B_k(\tau, x, \varepsilon)\colon C_{(0,1)} \to C_{(0,1)}$, что функции*

$$u_{jk}(\tau, x, \varepsilon) = v_{jk}(\tau, x, \varepsilon) \exp[\frac{i}{\varepsilon} \int\limits_0^\tau \omega_j(s) ds + \alpha_{jk}(\varepsilon) t]$$

($\overline{u}_{jk}(\tau, x, \varepsilon)$) являются решениями краевой задачи

$$K(\varepsilon)u \equiv \dot{u} - (L(\tau)u + \varepsilon^k B_k(\tau, x, \varepsilon, u)) = 0, \tag{16}$$

$$(u' + B_1(\tau)u)|_{x=0} = (u' + B_2(\tau)u)|_{x=1} = 0. \tag{17}$$

Предположим затем, что ни один из рядов (15) не состоит из одних нулей. Пусть $\mathrm{Re}\,\alpha_j k_j$ — первый отличный от нуля коэффициент этого ряда. Положим $k_0 = \max k_j$. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ оператор $K(\varepsilon)$ регулярен и для решения $u_f(t, x) \in C$ краевой задачи $K(\varepsilon)u = f(t, x)$ и (17) ($f(t, x) \in C$) имеет место оценка*

$$|u_f(t, x)|_C \leq N\varepsilon^{-k_0} |f(t, x)|_C, \tag{18}$$

где $N > 0$ не зависит от $f(t, x) \in C$ и от ε.

Покажем теперь, как с помощью лемм 1 и 2 завершить обоснование теоремы, а затем докажем эти леммы.

Предположим сначала, что не все коэффициенты каждого из рядов (15) нулевые. Положим $k = k_0 + 1$ и с краевыми условиями (17) рассмотрим выражение

$$H_k(\varepsilon, \mu)u \equiv \dot{u} - [L(\tau)u + \varepsilon^k B_k(\tau, x, \varepsilon, u) - \mu\varepsilon^k B_k(\tau, x, \varepsilon, u)],$$

где $\mu \in [0, 1]$. Из оценки (18) сразу получаем, что при всех $\mu \in [0, 1]$ оператор $H_k(\varepsilon, \mu)$ регулярен при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где $\varepsilon_0 > 0$ и не зависит от μ. Так как свойства устойчивости при всех $\mu \in [0, 1]$ одинаковы, то отсюда получаем обоснование первой части теоремы 2.

Осталось разобрать тот случай, когда среди рядов (9) есть такие, которые могут состоять из одних нулей, а первый отличный от нуля коэффициент хотя бы одного из рассматриваемых рядов положителен. Обозначим его порядковый номер в соответствующем ряду через k^0. Выполним в (1), (2) замену

$$u = v \exp[\alpha\varepsilon^{k^0+1}t],$$

где $\alpha > 0$. Очевидно, что выражения, аналогичные (15) для получающейся краевой задачи отличаются от рядов (15) на слагаемое $-\alpha\varepsilon^{k^0+1}$. За счет подходящего выбора α можно сделать так, чтобы $(k^0 + 1)$-ые члены всех этих рядов будут ненулевые. Остается лишь положить $k_0 = k^0 + 2$ и воспользоваться предыдущими рассуждениями. Отметим, наконец, что из неустойчивости решений краевой задачи

$$\dot{u} = (L(\tau) - \alpha\varepsilon^{k^0+1})u, (u' + B_1(\tau)u)|_{x=0} = (u' + B_2(\tau)u)|_{x=1} = 0$$

тем более следует неустойчивость решений (1), (2). Теорема 2 доказана.

Осталось обосновать леммы 1 и 2. Для доказательства леммы 1 рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=-m_0}^{m_0\prime} \xi_j \langle v_{jk}(\tau, x, \varepsilon), b_r(\tau, x)\rangle = \langle u(t, x), b_r(\tau, x)\rangle. \tag{19}$$

Здесь штрих у знака суммы озачает, что при четком m_0 отсутствует слагаемое, отвечающее $j = 0$ (т. е. — нулевому собственному значению). Индекс r принимает те же значения, что и j. Кроме того, $v_{jk}(\tau, x, \varepsilon) = \overline{v}_{jk}(\tau, x, \varepsilon)$, $b_j(\tau, x) = \overline{b}_j(\tau, x)$. Из определения $v_{jk}(\tau, x, \varepsilon)$ и $b_j(\tau, x)$ сразу заключаем, что решения $\xi_{jk}(\tau, x, \varepsilon)$ системы (19) — линейные почти периодические (по τ) функционалы, ограниченные и непрерывные по ε равномерно относительно τ, причем

$$\xi_{jk}(\tau, v_{rk}(\tau, x, \varepsilon), \varepsilon) = \delta_{jr}. \tag{20}$$

Положим, наконец,

$$B_{k+1}(\tau, x, \varepsilon, u) = \sum_{j=-m_0}^{m_0\prime} \xi_{jk}(\tau, u, \varepsilon)\dot{a}_{jk}(\tau, x) \quad (\dot{a}_{-jk}(\tau, x) = \overline{\dot{a}}_{jk}(\tau, x)).$$

Учитывая в этой формуле равенства (19), заключаем, что $B_{k+1}(\tau, x, \varepsilon, u)$ удовлетворяет всем сформулированным в лемме 1 требованиям.

Перейдем к доказательству леммы 2. Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{u} = L(\tau)u + \varepsilon^k B_k(\tau, x, \varepsilon, u), \tag{21}$$

$$(u' + B_1(\tau)u)|_{x=0} = (u' + B_2(\tau)u)|_{x=1} = 0. \tag{22}$$

Из результатов, приведенных в предыдущем пункте, вытекает, что пространство начальных условий этой краевой задачи расщепляется при каждом t и достаточно малых ε в прямую сумму двух инвариантных относительно решений (21), (22) подпространств $E_+(t,\varepsilon)$ и $E_-(t,\varepsilon)$, причем $E_-(t,\varepsilon)$ — m_0-мерно, а для решений $u(t,x)$ с начальными условиями из $E_+(s,\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\|u(t,x,\varepsilon)\|_{C_{(0,1)}} \le M_+ \exp[-\gamma_+(t-s)]\|u(s,x)\|_{C_{(0,1)}} \quad -\infty < s \le t < \infty. \tag{23}$$

Проекторы $P_+(t,\varepsilon)$ и $P_-(t,\varepsilon)$, осуществляющие расщепление, почти периодичны по t. Ясно, что решения $\mathrm{Re}\, u_{jk}(\tau,x,\varepsilon)$ и $\mathrm{Im}\, u_{jk}(\tau,x,\varepsilon)$ при каждом τ принадлежат подпространству $E_-(\varepsilon t,\varepsilon)$. Используя затем явный вид таких решений, приходим к выводу, что $E_-(t,\varepsilon)$ расщепляется в прямую сумму двух подпространств $E_1(t,\varepsilon)$ и $E_2(t,\varepsilon)$, обладающих следующими свойствами: во-первых, проекторы $P_1(t,\varepsilon)$ и $P_2(t,\varepsilon)$, осуществляющие это расщепление, почти периодичны по t и равномерно ограничены при $\varepsilon \to 0$; во-вторых $E_j(t,\varepsilon)(j=1,2)$ инвариантны относительно решений краевой задачи (21), (22); в-третьих, найдутся такие универсальные постоянные $M_1, M_2, \gamma_1, \gamma_2 > 0$, что

$$\begin{gathered}\|P_1(t,\varepsilon)u(t,x)\|_{C_{(0,1)}} \le \|P_1(s,\varepsilon)u(s,\varepsilon)\|_{C_{(0,1)}} M_1 \exp[-\gamma_1\varepsilon^{k_0}(t-s)], \\ -\infty < s \le t < \infty,\end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{gathered}\|P_2(t,\varepsilon)u(t,x)\|_{C_{(0,1)}} \le \|P_2(s,\varepsilon)u(s,\varepsilon)\|_{C_{(0,1)}} M_2 \exp[-\gamma_2\varepsilon^{k_0}(t-s)], \\ -\infty < s \le t < \infty.\end{gathered} \tag{25}$$

Определим затем функцию Грина $G(t,s,\varepsilon)$, положив

$$G(t,s,\varepsilon) = \begin{cases} (P_+(t,\varepsilon) + P_1(t,\varepsilon))U(t,x,\varepsilon), & \text{при} \quad t > s \\ -U(t,s,\varepsilon)P_2(s,\varepsilon), & \text{при} \quad t < s \end{cases}$$

где $U(t,s,\varepsilon)$ разрешающий оператор краевой задачи (21), (22), обращающийся в тождественный при $t = s$. Регулярность оператора $K(\varepsilon)$ (при малых ε) и оценка (18) вытекают из оценок (23)-(25) и из формулы

$$u_f(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t,s,\varepsilon) f(s,x)ds \quad (f(s,x) \in C).$$

4. Об устойчивости в более сложных критических случаях

Предположим сначала, что операторы $L(\tau)$ имеют равномерно (по τ) двукратное нулевое собственное значение, которому отвечает однопараметрическая группа решений. В этом случае найдутся такие гладкие почти периодические по τ вектор-функции $a_0(\tau,x)$, $b_0(\tau,x)$, $c_0(\tau,x)$, $d_0(\tau,x)$, что

$$L(\tau)a_0(\tau,x)\equiv 0,\quad L(\tau)b_0(\tau,x)\equiv a_0(\tau,x),$$

$$L^*(\tau)c_0(\tau,x)\equiv 0,\quad L^*(\tau)d_0(\tau,x)\equiv c_0(\tau,x),$$

$$1\equiv\langle a_0(\tau,x),d_0(\tau,x)\rangle\equiv\langle b_0(\tau,x),c_0(\tau,x)\rangle,$$

$$0\equiv\langle d_0(\tau,x),c_0(\tau,x)\rangle\equiv\langle b_0(\tau,x),d_0(\tau,x)\rangle\equiv\langle a_0(\tau,x),c_0(\tau,x)\rangle.$$

Считаем, что все остальные собственные значения $L(\tau)$ удовлетворяют неравенству (7). Вместо краевой задачи (1), (2) рассмотрим более общую

$$\dot u = L(\tau)u+\varepsilon D_1(\tau,x)u''+\varepsilon A_{11}(\tau,x)u'+\varepsilon A_{21}(\tau,x)u, \tag{26}$$

$$(u'+[B_1(\tau)+\varepsilon B_{11}(\tau)]u)|_{x=0}=(u'+[B_2(\tau)+\varepsilon B_{21}(\tau)]u)|_{x=1}=0, \tag{27}$$

где элементы всех матриц являются тригонометрическими по τ многочленами, частоты которых не зависят от x, а зависимость коэффициентов от x — гладкая.

При исследовании устойчивости решений краевой задачи (26), (27) воспользуемся сначала выводами, сформулированными в первом пункте этого параграфа. Из них вытекает, что фазовое пространство рассматриваемой краевой задачи расщепляется в прямую сумму двух подпространств $E_+(t,\varepsilon)$ и $E_-(t,\varepsilon)$, второе из которых двумерно, а решения из $E_+(t,\varepsilon)$ экспоненциально убывают по норме при $t\to\infty$. Таким образом задача сводится к изучению устойчивости решений из двумерного подпространства $E_-(t,\varepsilon)$. Далее, проекторы $P_\pm(t,\varepsilon)$, осуществляющие указанное расщепление, имеют (сильный) предел при $\varepsilon\to 0$. В двумерной области значений проектора $P_-(t,0)$ имеется почти периодический базис $a_0(\tau,x)$, $b_0(\tau,x)$. Тем самым получаем, что в $E_-(t,\varepsilon)$ существует гладкий по ε почти периодический вместе с производной по t базис (“близкий” при $\varepsilon\to 0$ к $a_0(\tau,x)$, $b_0(\tau,x)$). Теперь уже легко выписать систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений для решений в $E_-(t,\varepsilon)$:

$$\frac{d\alpha_1}{dt}=\varepsilon[a_{11}(\tau)+\varepsilon Q_1(t,\varepsilon)]\alpha_1+\alpha_2[1+\varepsilon Q_2(t,\varepsilon)],$$

$$\frac{d\alpha_2}{dt}=\varepsilon[a_{21}(\tau)+\varepsilon Q_3(t,\varepsilon)]\alpha_1+\varepsilon[a_{22}(\tau)+\varepsilon Q_4(t,\varepsilon)]\alpha_2. \tag{28}$$

Здесь через $Q_j(t,\varepsilon)$ обозначены почти периодические по t и ограниченные вместе с производными по t функции, а для функций $a_{jk}(\tau)$ имеют место формулы

$$a_{11}(\tau)=-\langle\dot a_0(\tau,x),d_0(\tau,x)\rangle+\langle a_0(\tau,x),L_1(\tau)d_0(\tau,x)\rangle+((D_1(\tau,0)B_1(\tau)+$$

$$+D(\tau,0)B_{11}(\tau)+D_1'(\tau,0)-C_1D_1(\tau,0)-A_1(\tau,0))a_0(\tau,0),d_0(\tau,0))-((D_1(\tau,1)B_2(\tau)+$$
$$+D(\tau,1)B_{21}(\tau)+D_1'(\tau,1)-C_2D_1(\tau,1)+A_1(\tau,1))a_0(\tau,1),d_0(\tau,1)),$$
$$a_{21}(\tau)=-\langle\dot a_0(\tau,x),c_0(\tau,x)\rangle+\langle a_0(\tau,x),L_1(\tau)c_0(\tau,x)\rangle+((D_1(\tau,0)B_1(\tau)+$$
$$+D(\tau,0)B_{11}(\tau)+D_1'(\tau,0)-C_1D_1(\tau,0)-A_1(\tau,0))a_0(\tau,0),c_0(\tau,0))-$$
$$-((D_1(\tau,1)B_2(\tau)+D(\tau,1)B_{21}(\tau)+D_1'(\tau,1)-C_2D_1(\tau,1)+A_1(\tau,1))a_0(\tau,1),c_0(\tau,1)),$$
$$a_{22}(\tau)=-\langle\dot b_0(\tau,x),c_0(\tau,x)\rangle+\langle b_0(\tau,x),L_1(\tau)c_0(\tau,x)\rangle+((D_1(\tau,0)B_1(\tau)+$$
$$+D(\tau,0)B_{11}(\tau)+D_1'(\tau,0)-C_1D_1(\tau,0)-A_1(\tau,0))b_0(\tau,0),c_0(\tau,0))-$$
$$-((D_1(\tau,1)B_2(\tau)+D(\tau,1)B_{21}(\tau)+D_1'(\tau,1)-C_2D_1(\tau,1)+A_1(\tau,1))b_0(\tau,1),c_0(\tau,1)),$$

где

$$L_1(\tau)u=D_1^*(\tau,x)u''+(2\varepsilon D_1^{*\prime}(\tau,x)-A_{11}^*(\tau,x))u'+(A_{21}^*(\tau,x)-A_{11}^{*\prime}(\tau,x)+D_1^{*\prime\prime}(\tau,x))u,$$
$$C_1=(D(\tau,0)B_1(\tau)-A_1(\tau,0))D^{-1}(\tau,0),$$
$$C_2=(D(\tau,1)B_2(\tau)-A_1(\tau,1))D^{-1}(\tau,1).$$

Сформулируем результаты.

Теорема 3. *Пусть для произвольного* $\delta>0$ *выполнены условия* $\alpha=M(a_{11}(\tau)+a_{22}(\tau))<0$ *и* $a_{21}(\tau)\le-\delta(\tau\in(-\infty,\infty))$. *Тогда найдется такое* $\varepsilon_0>0$, *что при* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ *решения краевой задачи* (26), (27) *устойчивы. Если же* $\alpha>0$ *или* $a_{21}(\tau)\ge\delta$, *то найдется такое* $\varepsilon_0>0$, *что при* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ *решения* (26), (27) *неустойчивы.*

В следующем утверждении предполагается, что коэффициенты краевой задачи (26), (27) периодические.

Теорема 4. *Пусть* $\alpha<0$, *а функция* $a_{21}(\tau)$ *— знакопеременная. Тогда при* $\varepsilon\to0$ *устойчивость и неустойчивость решений краевой задачи* (26), (27) *бесконечно чередуются.*

Эти две теоремы следуют из анализа устойчивости решений системы уравнений (28). Доказательство последней теоремы основано на результатах из [14].

Пусть теперь нулевое собственное значение $L(\tau)$ имеет кратность $k\ge3$ и ему отвечает однопараметрическая группа собственных векторов. В этом случае (в предположении типа общности положения) при малых ε решения (1), (2) неустойчивы. Этот же вывод справедлив и тогда, когда $L(\tau)$ имеет чисто мнимое собственное значение кратности больше 1 с однопараметрической группой решений.

5. Устойчивость решений краевых задач с “большим” коэффициентом диффузии

Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{u} = \lambda D(t)u'' + A_1(t,x)u' + A_2(t,x)u, \tag{29}$$

$$u'|_{x=0} = u'|_{x=1} = 0, \tag{30}$$

где $u \in R^m$, $D(t)$ — положительно определенная равномерно относительно $t \in (-\infty,\infty)$ матрица, элементы матриц $D(t)$ и $A_j(t,x)$, $j=1,2$, являются тригонометрическими по t многочленами с частотами, не зависящими от x. Элементы матриц $A_j(t,x)$ достаточно гладкие относительно x. Исследуем вопрос об устойчивости решений краевой задачи (29), (30) при больших $\lambda \gg 1$.

Введем в рассмотрение обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{v} = A_{20}(t)v, \quad \text{где} \;\; A_{20}(t) = \int\limits_0^1 A_2(t,x)dx. \tag{31}$$

Теорема 5. *Пусть для уравнения* (31) *имеет место экспоненциальная дихотомия решений. Тогда найдется такое λ_0, что при $\lambda \geq \lambda_0$ для краевой задачи* (29), (30) *имеет место экспоненциальная дихотомия решений, причем размерности подпространств экспоненциально растущих (по соответствующим нормам R^m и $C_{(0,1)}(R^m)$) при $t\to\infty$ решений уравнения* (31) *и краевой задачи* (29), (30) *совпадают.*

Для обоснования этой теоремы достаточно воспользоваться приведенной в разделе 6 схемой, считая при этом фигурирующий там номер равным 1. Отметим, что теорема 5 остается верной и в том случае, когда вместо матрицы $D(t)$ стоит более сложная матрица $\gamma(t,x)D(t)$ с теми же, что и выше свойствами, а почти периодическая по t и гладкая по t и x скалярная функция $\gamma(t,x)$ положительна и отделена от нуля. Для случая еще более общей матрицы $D(t,x)$ теорема 5 перестает, вообще говоря, быть верной.

5.1. Изучение критического случая

При исследовании устойчивости в ситуации, когда для уравнения (31) не имеет место экспоненциальная дихотомия, применимы построения из §§1 − 5. В качестве модельного рассмотрим здесь случай, когда матрица $A_{20}(t)$ автономна, т.е. $A_{20}(t) \equiv A_{20}$, и A_{20} имеет пару чисто мнимых собственных значений $\pm i\delta_0(\delta_0 > 0)$, а все остальные ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части. Обозначим через a_0 и b_0 собственные векторы A_{20} и $-A_{20}^*$ соответственно, отвечающие собственному значению $i\delta_0$, причем

$$(a_0, b_0) = 1, \quad (a_0, \overline{b}_0) = 0.$$

Введем в рассмотрение формальный ряд

$$u_0(t,x,\varepsilon) = a(t,x,\varepsilon)\exp(i\delta_0 + \alpha(\varepsilon))t, \tag{32}$$

где

$$\alpha(\varepsilon) = \lambda^{-1}\alpha_1 + \lambda^{-2}\alpha_2 + \cdots, \tag{33}$$

$$a(t,x,\varepsilon) = a_0 + \lambda^{-1}a_1(t,x) + \lambda^{-2}a_2(t,x) + \cdots. \tag{34}$$

Здесь α_j – скалярные величины, а $a_j(t,x)$ – векторные тригонометрические по t многочлены. Покажем, что все элементы из (33), (34) определяются из формального тождества

$$\dot u_0(t,x,\varepsilon) = \lambda D(t)u_0''(t,x,\varepsilon) + A_1(t,x)u_0'(t,x,\varepsilon) + A_2(t,x)u_0(t,x,\varepsilon), \tag{35}$$

$$u_0'(t,0,\varepsilon) = u_0'(t,1,\varepsilon) = 0. \tag{36}$$

Коэффициент при первой степени λ в (35) нулевой. Собирая слагаемые, стоящие множителем при λ^0, приходим к равенствам

$$D(t)a_1'' = -A_2(t,x)a_0 + i\delta_0 a, a_1'(t,0) = a_1'(t,1) = 0. \tag{37}$$

Отсюда вытекает, что $a_1(t,x) = \tilde a_1(t,x) + a_{10}(t)$, где

$$\tilde a_1(t,x) = D^{-1}(t)\int\limits_0^x (x-s)(i\delta_0 I - A_2(t,s))a_0 ds,$$

а $a_{10}(t)$ – произвольный почти периодический тригонометрический многочлен. На следующем шаге, собирая коэффициенты при λ^{-1}, получим равенства

$$D(t)a_2'' = \dot{\tilde a}_1(t,x) + \dot a_{10}(t) + i\delta_0(\tilde a_1(t,x) + a_{10}(t)) + \alpha_1 a_0 -$$

$$-A_1(t,x)\tilde a\,'_1(t,x) - A_2(t,x)\tilde a_1(t,x) - A_2(t,x)a_{10}(t), \tag{38}$$

$$a_2'(t,0) = a_2'(t,1) = 0. \tag{39}$$

Из условия разрешимости краевой задачи (38), (39) получаем соотношение

$$\dot a_{10}(t) + (i\delta_0 I - A_{20})a_{10}(t) = -\alpha_1 a_0 + f(t), \tag{40}$$

в котором

$$f(t) = \int\limits_0^1 [A_1(t,x)\tilde a_1'(t,x)\tilde a_1(t,x) - \dot a_1(t,x) - i\delta_0\tilde a_1(t,x)]dx.$$

Значение α_1 определяется из условия разрешимости (40) в классе тригонометрических многочленов:

$$\alpha_1 = M((f(t), b_0)).$$

После того, как α_1 найдено, из (40) определяем $a_{10}(t)$, а из (8.10), (8.11) – $a_2(t,x)(\equiv \tilde a_2(t,x) + a_{20}(t))$ и т.д.

Теорема 6. *Предположим, что формальный ряд*

$$\lambda^{-1}Re\alpha_1 + \lambda^{-2}Re\alpha_2 + \cdots$$

не состоит из одних нулей. Обозначим через $Re\alpha_k$ *первый ненулевой коэффициент этого ряда. Найдется такое* λ_0*, что при* $\lambda \geq \lambda_0$ *решения краевой задачи* (29), (30) *экспоненциально устойчивы (неустойчивы), если* $Re\alpha_k < 0$ *(*$Re\alpha_k > 0$*).*

Схема обоснования этого результата полностью повторяет схему доказательства теоремы 2 (и 1).

6. Исследование устойчивости параболических краевых задач с быстро осциллирующими по пространственной переменной коэффициентами

Результаты этого раздела тесно примыкают к утверждениям, сформулированным в предыдущем параграфе.

Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{u} = D(t)u'' + A_1(t, \omega x)u' + A_2(t, \omega x)u, \tag{41}$$

$$u'|_{x=0} = u'|_{x=1} = 0, \tag{42}$$

где $u \in R^m$, матрица $D(t)$ та же, что и в разделе 4,

$$A_j(t, \xi) = \sum_{k=-m}^{m} A_{jk}(t) \exp i\sigma_k \xi$$

$$(j = 1, 2, \sigma_0 = 0, \sigma_{-k} = -\sigma_k, A_{-jk}(t) = \overline{A}_{jk}(t)),$$

элементами матриц $A_{jk}(t)(j = 1, 2, k = -n, \cdots, n)$ являются тригонометрические по t многочлены. Поставим вопрос об устойчивости решений краевой задачи (41), (42) при условии, когда коэффициенты быстро осциллируют по пространственной переменной, т.е. $\omega \gg 1$.

Введем в рассмотрение усредненную краевую задачу

$$\dot{v} = D(t)v'' + A_{10}(t)v' + A_{20}(t)v, \tag{43}$$

$$v'|_{x=0} = v'|_{x=1} = 0. \tag{44}$$

Сформулируем основной результат, простое обоснование которого получается на том же пути, что и обоснование теоремы 5.

Теорема 7. *Пусть для решения краевой задачи* (43), (44) *имеет место экспоненциальная дихотомия решений. Тогда найдется такое* ω_0*, что при всех* $\omega \geq \omega_0$ *имеет место экспоненциальная дихотомия решений краевой задачи* (41), (42), *и размерности подпространств экспоненциально растущих при* $t \to \infty$ *решений обеих краевых задач совпадают.*

6.1. Устойчивость в критическом случае

Пусть коэффициенты (43) от t не зависят, т.е. $D(t) \equiv D$, $A_{10}(t) \equiv A_{10}$, $A_{20}(t) \equiv A_{20}$ и пусть оператор

$$Hv \equiv Dv'' + A_{10}v' + A_{20}, v'(0) = v'(1) = 0$$

имеет пару чисто мнимых значений $\pm i\delta_0$, $\delta_0 > 0$, а все остальные его собственные значения имеют отрицательные вещественные части. Через $a_0(x)$ и $b_0(x)$ обозначим собственные функции оператора H и сопряженного к нему оператора H^*, отвечающие собственным значениям $i\delta_0$ и $-i\delta_0$, соответственно. Удобно считать, что

$$\langle a_0(x), b_0(x)\rangle = 1, \quad \langle a_0(x), \bar{b}_0(x)\rangle = 0 \qquad \left(\langle a(x,t), b(x,t)\rangle = \int\limits_0^1 (a(x,t), b(x,t))dt\right).$$

Подобно формулам (32)-(34) составим формальный ряд

$$u(t,x,\omega) = a(t,x,\omega)\exp(i\delta_0 + \alpha(\omega))t, \tag{45}$$

где

$$a(t,x,\omega) = a_0(x) + \omega^{-1}a_1(t,x) + \omega^{-2}a_2(t,x,\xi) + \cdots, \xi = \omega x, \tag{46}$$

$$\alpha(\omega) = \omega^{-1}\alpha_1(\omega) + \omega^{-2}\alpha_2(\omega) + \cdots. \tag{47}$$

Вектор-функция $a_j(t,x,\xi)$ является тригонометрическим многочленом по t и ξ, а скалярная функция $\alpha_j(\omega)$ почти периодически зависит от параметра ω. Для определения всех фигурирующих в (46), (47) величин подставим выражение (45) в (41), (42) и в получившемся формальное тождестве будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ω^{-1}. На первом шаге, собирая коэффициенты при ω^0, получим выражения

$$D(\frac{\partial^2 a_2}{\partial \xi^2} + a_0''(x)) + A_1(t,\xi)a_0'(x) + A_2(t,\xi)a_0(x) = i\delta_0 a_0(x), \tag{48}$$

$$a_0'(0) = a_0'(1) = 0, \quad \left.\frac{\partial a_2}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = \left.\frac{\partial a_2}{\partial \xi}\right|_{\xi=\omega} = 0. \tag{49}$$

Усредняя в (48) по ξ, для определения $a_0(x)$ получим равенства $Ha_0(x) = i\delta_0 a_0(x)$, $a_0'(0) = a_0'(1)$, которые выполняются в силу выбора $a_0(x)$. После этого для нахождения $a_2 = a_2(t,x,\xi)$ из (48), (49) получим краевую задачу

$$D\frac{\partial^2 a_2}{\partial \xi^2} = f_1(t,x,\xi), \quad \left.\frac{\partial a_2}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = \left.\frac{\partial a_2}{\partial \xi}\right|_{\xi=\omega} = 0, \tag{50}$$

в которой

$$f_1(t,x,\xi) = (A_{10} - A_1(t,\xi))a_0'(x) + (A_{20} - A_2(t,\xi))a_0(x).$$

Эта краевая задача, вообще говоря, не имеет решения, поэтому рассмотрим другую краевую задачу

$$D\frac{\partial^2 a_2}{\partial \xi^2} = f_1(t,x,\xi) - \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega f_1(t,x,\eta)d\eta, \quad \frac{\partial a_2}{\partial \xi}\Big|_{\substack{\xi=0\\ \xi=\omega}} = 0, \tag{51}$$

которая отличается от (50) слагаемым порядка ω^{-1}. Из (51) сразу получаем, что $a_2(t,x,\xi) = \tilde{a}_2(t,x,\xi) + a_{20}(t,x)$, где

$$\tilde{a}_2(t,x,\xi) = \int\limits_0^\xi (f_1(t,x,\eta) - \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega f_1(t,x,s)ds)(\xi-\eta)d\eta,$$

а тригонометрический по t многочлен $a_{20}(t,x)$ — произволен. Собирая на втором шаге коэффициенты при ω^{-1} в введенном выше формальном тождестве, получим соотношения

$$\dot{a}_1(t,x) + i\delta_0 a_1(t,x) + \alpha_1(\omega)a_0(x) = D(\frac{\partial^2 a_3}{\partial \xi^2} + a_1''(t,x)) +$$

$$+ A_1(t,\xi)(a_1'(t,x) + \frac{\partial \tilde{a}_2(t,x,\xi)}{\partial \xi}) + A_2(t,\xi)a_1(t,x) + \int\limits_0^\omega f_1(t,x,\eta)d\eta, \tag{52}$$

$$a_1'(t,0) = a_1'(t,1) = 0, \quad \frac{\partial a_3}{\partial \xi}\Big|_{\substack{\xi=0\\ \xi=\omega}} = 0. \tag{53}$$

Усредняя в (52) по ξ, приходим к краевой задаче относительно

$$\dot{a}_1 + i\delta_0 a_1 - Ha_1 = -\alpha_1(\omega)a_0(x) + \int\limits_0^\omega f_1(t,x,\eta)d\eta +$$

$$+ \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T A_1(t,\eta)\frac{\partial \tilde{a}_2(t,x,\eta)}{\partial \eta}d\eta, \quad a_1'|_{x=0} = a_1'|_{x=1} = 0. \tag{54}$$

Осталось воспользоваться условием разрешимости (54) в классе тригонометрических многочленов. Отсюда сразу получаем выражение для почти периодической функции $\alpha_1(\omega)$:

$$\alpha_1(\omega) = \langle \int\limits_0^\omega f_1(t,x,\eta)d\eta + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T A_1(t,\eta)\frac{\partial \tilde{a}_2(t,x,\eta)}{\partial \eta}d\eta, a_0(x)\rangle.$$

После этого из (54) определяем $a_1(t,x)$, потом из (52), (53) находим $a_3(t,x,\xi) = \tilde{a}_3(t,x,\xi) + a_{30}(t,x)$ и т. д.

Обозначим через $\gamma(\omega)$ наибольший характеристический показатель (экспоненциального роста) решений краевой задачи (41), (42).

Теорема 8. *Для каждого номера k имеет место асимптотическое равенство*

$$\gamma(\omega) - (\omega^{-1} Re\alpha_1(\omega) + \cdots + \omega^{-k} Re\alpha_k(\omega)) = o(\omega^{-k}).$$

Отличие рассмотренного здесь случая от соответствующих результатов предыдущего параграфа (теорема 7) состоит в том, что при $\omega \to \infty$ здесь возможен (даже в предположениях типа общности положения) неограниченный процесс смены устойчивости решений краевой задачи (41), (42). Путь обоснования теоремы 8 тот же, что и теоремы 7.

Выводы

Рассмотрены вопросы устойчивости важных для приложений решений линейных сингулярно возмущенных систем параболического типа. В первой части изучается система с медленно меняющимися почти периодическими коэффициентами. Сформулирован ответ на вопрос об устойчивости решений в так называемом регулярном случае. При рассмотрении критических случаев разработан эффективный алгоритм исследования устойчивости. Особо отметим, что рассмотрены критические случаи для изолированных и для кратных корней характеристического уравнения.

Во втором разделе рассматриваются параболические системы с большим коэффициентом диффузии. Показано, что ответ на вопрос об устойчивости решений сводится к исследованию специальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В третьем разделе исследованы системы с быстро осциллирующими по пространственной переменной коэффициентами. Выделены критические случаи и разработан алгоритм последовательного вычисления показателей, отвечающих за устойчивость решений.

Список цитируемых источников

1. *Климушев А. И., Красовский И. Н.* Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // Прикл. матем. и мех. — 1961. — Т.25, №4. — С. 680-690.

   Klimushev A. I., Krasovsky I. N. Uniform asymptotic stability of systems of differential equations with a small parameter for derivatives. Appl. math, and mech. 25:4, 680–690 (1961). (in Russian)

2. *Разумихин Б. С.* Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с малым множителем при производных // Сиб. матем. журн. — 1963. — Т.4, №1. — С. 206–211.

   Razumihin B. S. On the stability of solutions of systems of differential equations with a small multiplier for derivatives. Sib. Matemat. Zhurnal 4:1, 206–211 (1963). (in Russian)

3. *Чаплыгин В. Ф.* Общие свойства равномерно регулярных пп-операторов с малым множителем при производных // Вестник Яросл. ун-та. — 1973. — Вып.5. — С. 152–163.

Chapligin V. F. General properties of uniformly regular pp-operators with a small multiplier for derivatives. Vestnik YSU, issue 5, 152–163 (1973). (in Russian)

4. *Chang K. W.* Almost periodic solutions of singulary perturbed systems of differential equations // J. Differential Eqs. — 1968. — Vol.4. — P. 300–307.
5. *Coppel W. A.* Dichotomies and reducibility. In: Dichotomies in Stability Theory. Lecture Notes in Mathematics, vol 629, (1978) Springer, Berlin, Heidelberg, 38–46
6. *Далецкий Д. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Москва: Наука, 1970. — 534 с.

   Daleckiy D. L., Kreyn M. G. Stability of solutions of differential equations in Banach spaces. Moscow: Nauka, 1970. (in Russian)
7. *Крейн М. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Москва: Наука, 1967. — 464 с.

   Kreyn M. G. Linear differential equations in Banach space. Moscow: Nauka, 1967. (in Russian)
8. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. Киев: Наукова думка, 1966. — 249 с.

   Feshchenko, S. F.; Shkil', N. I.; Nikolenko, L. D. Asymptotic methods in the theory of linear differential equations. Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics. 10. New York: American Elsevier Publishing Company, Inc., 1967.
9. *L. Flatto, N. Levinson,* Periodic solutions of singularly perturbed systems, Matematika, 2:2 (1958), 61–68; J. Rat. Mech. and Analysis, 4 (1955), 943–950.
10. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. Москва: МГУ, 1978. — 204 с.

    Levitan, B. M.; Zhikov, V. V. Almost periodic functions and differential equations. Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1982.
11. *Колесов Ю. С.* Об устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений параболического типа с почти-периодическими коэффициентами // Труды ММО. — 1978. — Т.36. — С. 3–27.

    Kolesov, Yu. S. On the stability of solutions of linear differential equations of parabolic type with almost periodic coefficients. Trans. Mosc. Math. Soc. 36, 1-25 (1979).
12. *Мухамадиев Э. М.* Об обратимости дифференциальных операторов в пространстве непрерывных и ограниченных на всей оси функций // ДАН СССР. — 1971. — Т.196, №1. — С. 47–49.

    Mukhamadiev, Eh. On invertibility of differential operators in the space of continuous functions bounded on the real axis. Sov. Math. Dokl. 12, 49-52 (1971).
13. *Кащенко С. А.* Об устойчивости решений линейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с почтипериодическими коэффициентами в случае резонансов // Исследования по устойчивости и теории колебаний / Под ред. Колесова Ю. С. — Ярославль: 1980. — С. 25-34.

    Kaschenko S. A. On the stability of solutions of linear singularly perturbed differential equations with almost periodic coefficients in the case of resonances. In Kolesov Yu.S. (Eds.) Issledovaniya po ustoichivosti i teorii kolebanii (pp. 25-34). Yaroslavl: Izdat. Yaroslavl Univ., 1980. (in Russian)

14. *Кащенко С. А.* Асимптотические законы распределения собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка с точками поворота // Исследования по устойчивости и теории колебаний / Под ред. Колесова Ю. С. — Ярославль: 1976. — С. 95-113.

Kaschenko S. A. Asymptotic laws of distribution of eigenvalues periodic and antiperiodic boundary value problems for second-order differential equations with turning points. In Kolesov Yu.S. (Eds.) Issledovaniya po ustoichivosti i teorii kolebanii (pp. 95-113). Yaroslavl: Izdat. Yaroslavl Univ., 1976. (in Russian)

Получена 20.09.2018