Динамические системы, 2018, том 8(36), №4, 337–356

УДК 517.98+517.955+532.5

К проблеме малых движений системы трёх сочленённых маятников с полостями, заполненными однородными несжимаемыми жидкостями

В. И. Войтицкий

Таврическая академия,
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: victor.voytitsky@gmail.com*

Аннотация. В работе представлена физическая и математическая постановка новой линейной начально-краевой задачи, моделирующей малые движения гидросистемы, состоящей из трёх сочленённых маятников с полостями, заполненными однородными несжимаемыми жидкостями. Задача состоит из трёх линеаризованных уравнений изменения кинетического момента (относительно точек подвеса маятников), линеаризованных уравнений Эйлера и Навье-Стокса для идеальных и вязких жидкостей соответственно, динамических и кинематических условий на границе раздела жидкостей, вспомогательных краевых условий и начальных условий. Доказан закон баланса полной энергии и описаны основные ожидаемые свойства решений.

Ключевые слова: физический маятник, уравнение изменения кинетического момента, однородная несжимаемая жидкость, граничное условие, формула Грина, закон баланса полной энергии.

To the Small Motion Problem of Three Joined Pendulums with Cavities Filled with Homogeneous Incompressible Fluids

V. I. Voytitsky

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, 295007.

Abstract. We provide physical and mathematical statement of new linear initial boundary value problem modeling small motion of hydromechanics system consists of three joined pendulums with cavities filled with homogeneous incompressible fluids. The problem consists of three linearized equations of angular momentum deviation (relative to the point of suspension), linearized Euler and Navier-Stokes equations for ideal and viscous fluids respectively, dynamical and kinetic boundary conditions on free boundary surfaces, auxiliary boundary conditions and initial conditions. We prove the law of full energy balance and describe general properties of solutions.

Keywords: physical pendulum, equation of angular momentum deviation, homogeneous incompressible fluid, boundary condition, Green's formula, law of full energy balance.

MSC 2010: 70E55, 35M33

1. Введение

В работе приводится вывод новой начально-краевой задачи о малых движениях системы трёх сочленённых маятников с полостями, заполненными однородными несмешивающимися несжимаемыми жидкостями. Данная задача попадает в класс наиболее интересных и распространенных частично-диссипативных гидромеханических систем, и моделирует случай общего положения, когда часть жидкостей являются идеальными, часть — вязкими.

Задачи для одного маятника с жидкостью исследовались ранее многими авторами, начиная с работы Н.Е. Жуковского [5]. Отметим вклад Н.Н. Моисеева, Г.С. Нариманова, Д.Е. Охоцимского, Б.И. Рабиновича, Л.Н. Сретенского, Ф.Л. Черноусько, С.Ф. Фещенко, И.А. Луковского, С.Г. Крейна, Н.Д. Копачевского (см. [6]) и др.

С помощью использования операторных методов математической физики подобные линейные динамические системы с жидкостями изучаются в последнее время Н. Д. Копачевским и соавторами (Э. Батыром, В. И. Войтицким, З. З. Ситшаевой), см. работы [2]–[4], [7]–[10]. Отметим, что ранее рассматривались преимущественно более простые задачи для консервативных и диссипативных систем. При этом в последних работах был предложен универсальный операторный подход, позволяющий сводить различные постановки задач к задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве с операторными коэффициентами, имеющими определённых физический смысл. Далее предполагается провести полное исследование задачи с доказательством теоремы существования и единственности, а также описанием спектральных свойств. В данной работе сделан первый шаг — проведён формальный вывод уравнений движения маятников и жидкостей и сопутствующих краевых условий, а также доказан закон баланса полной энергии, соответствующий физическому смыслу задачи.

2. Постановка задачи. Вывод уравнений изменения кинетических моментов

Пусть имеется система из трёх сочленённых маятников G_k, $k=\overline{1,3}$, имеющих массы m_k. В каждом теле имеется точка подвеса, относительно который совершаются малые свободные колебания. Пусть тело G_1 имеет неподвижную точку O_1, а тела G_k $(k=2,3)$ — соответственно точки O_k, соединяющие G_k с G_{k-1}, в которых расположены сферические шарниры.

Предположим, что внутри каждого тела имеется по одной полости, причём в теле G_1 полость целиком занята системой двух однородных идеальных несжимаемых жидкостей с плотностями $\rho_{11}>\rho_{12}$, занимающих в состоянии равновесия области Ω_{11} и Ω_{12}, разделённых движущейся поверхностью $\Gamma_{11}(t)$; в теле G_2 полость целиком занята системой трёх однородных вязких несжимаемых жидкостей с плотностями $\rho_{21}>\rho_{22}>\rho_{23}$, занимающих в состоянии равновесия области Ω_{21}, Ω_{22} и Ω_{23}, с движущимися границами раздела $\Gamma_{21}(t)$, $\Gamma_{22}(t)$, а полость Ω_{31} тела

G_3 целиком заполнена однородной идеальной несжимаемой жидкостью с плотностью $\rho_{31} > 0$. Пусть кроме движущихся поверхностей жидкости Ω_{ij} $(i = 1, 2)$ контактируют с твердыми стенками S_{ij}.

Будем считать, что на данную систему тел в состоянии покоя действует однородное гравитационное поле $\vec{g}$, а в процессе малых движений — силовое поле $\vec{F} := \vec{g} + \vec{f}(t, x)$, где $\vec{f}(t, x)$ — малая динамическая добавка к гравитационному полю. Предполагаем также, что в шарнире O_k сила трения пропорциональна разности угловых скоростей примыкающих тел G_k и G_{k-1}, причем коэффициент пропорциональности $\alpha_k > 0$, $k = \overline{1, 3}$.

Для описания малых движений системы введем неподвижную систему координат $O_1x^1x^2x^3$ с ортами $\vec{e}^{\,j}$, $j = 1, 2, 3$, так, чтобы $\vec{g} = -g\vec{e}^{\,3}$. Кроме того, введем подвижные системы координат $O_kx_k^1x_k^2x_k^3$, жестко связанные с телами G_k, $k = \overline{1, 3}$. Единичные векторы вдоль осей $O_kx_k^j$ обозначим через $\vec{e}_k^{\,j}$, $j = \overline{1, 3}$. Кроме того, будем считать, что в состоянии покоя центры масс C_k тел G_k, а также точки O_k находятся на одной оси $O_1x_1^3 = O_2x_2^3 = O_3x_3^3$.

Положение подвижной системы координат $O_kx_k^1x_k^2x_k^3$ относительно неподвижной системы $O_1x^1x^2x^3$ в процессе малых движений гидромеханической системы будем задавать малым вектором углового перемещения

$$\vec{\delta}_k(t) = \sum_{j=1}^{3} \delta_k^j(t)\vec{e}_k^{\,j}, \quad k = \overline{1, 3}.$$

Тогда угловая скорость $\vec{\omega}_k(t)$ тела G_k будет равна $d\vec{\delta}_k/dt$, а угловое ускорение этого тела – величине $d^2\vec{\delta}_k/dt^2 = d\vec{\omega}_k/dt$.

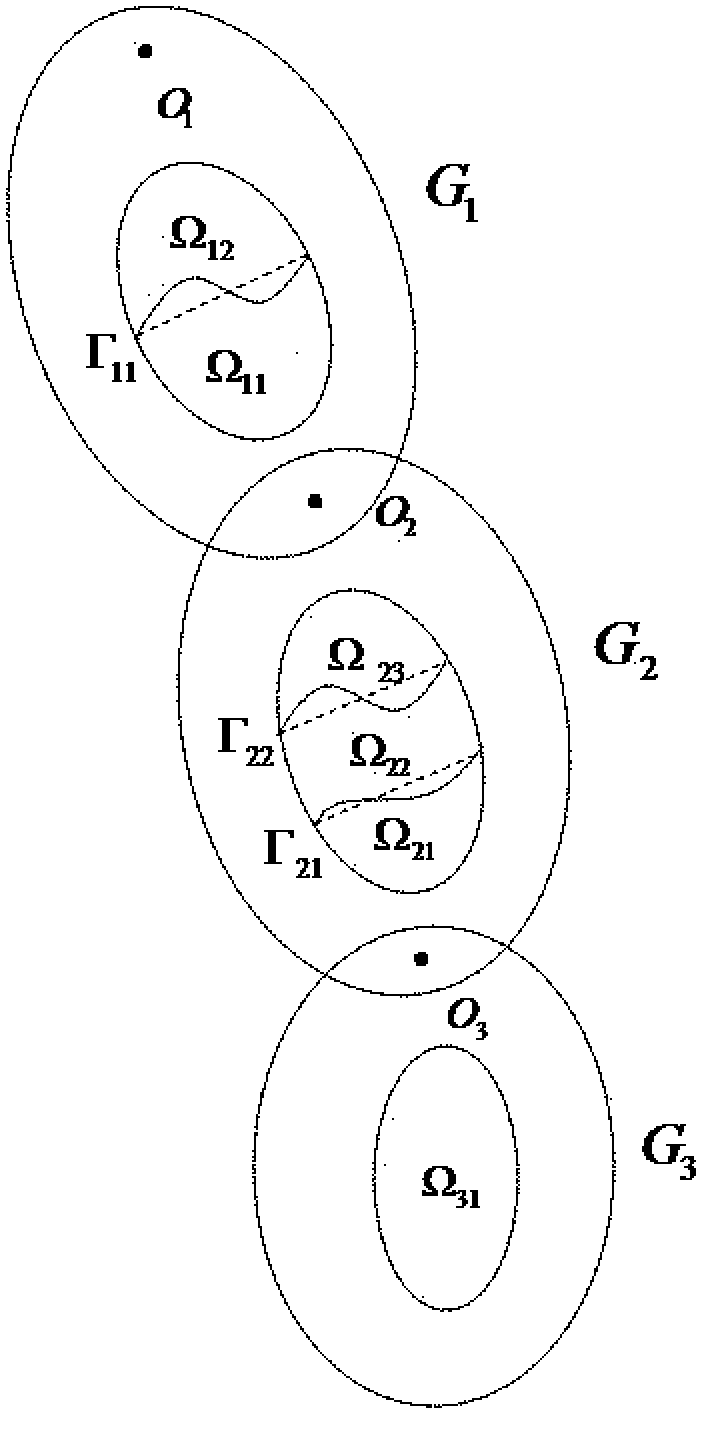
Обозначим через $\vec{R}_k$ — радиус-вектор, идущий из полюса O_1 в любую точку тела G_k, $\vec{r}_k$ — радиус-вектор, идущий из полюса O_k в любую точку тела G_k. Введем также векторы $\vec{h}_k = \overrightarrow{O_kO_{k+1}}$, $k = 1, 2$. Тогда, очевидно, что $\vec{R}_1 = \vec{r}_1$, $\vec{R}_2 = \vec{h}_1 + \vec{r}_2$, $\vec{R}_k = \sum\limits_{l=1}^{k-1}\vec{h}_l + \vec{r}_k$.

Как известно из курса теоретической механики (см., например [6], с. 123), скорость изменения переменного вектора $\vec{a}(t)$ в неподвижной системе координат $d'\vec{a}/dt$ и скорость его изменения в подвижной системе координат $d\vec{a}/dt$ связаны соотношением

$$\frac{d'\vec{a}}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{\omega}(t) \times \vec{a}(t), \tag{2.1}$$

где $\vec{\omega}(t)$ — мгновенная угловая скорость подвижной системы координат. Отсюда следует, что векторы абсолютных скоростей $\vec{v}_k$ произвольной точки тела G_k связаны с малыми векторами относительных скоростей $\vec{u}_k$ по формулам:

$$\vec{v}_k = \frac{d'\vec{R}_k}{dt} = \frac{d'}{dt}\left(\sum_{l=1}^{k-1}\vec{h}_l + \vec{r}_k\right) = \sum_{l=1}^{k-1}\vec{\omega}_l \times \vec{h}_l + \vec{\omega}_k \times \vec{r}_k + \vec{u}_k. \tag{2.2}$$


O_1
G_1
Ω_{12}
Γ_{11}
Ω_{11}
O_2
G_2
Ω_{23}
Γ_{22}
Ω_{22}
Γ_{21}
Ω_{21}
O_3
G_3
Ω_{31}

Аналогично получаем формулы для абсолютного ускорения:

$$\vec{w}_k = \frac{d'}{dt}(\sum_{l=1}^{k-1}\vec{\omega}_l \times \vec{h}_l + \vec{\omega}_k \times \vec{r}_k + \vec{u}_k) =$$

$$= \sum_{l=1}^{k-1}(\frac{d\vec{\omega}_l}{dt}\times\vec{h}_l+\vec{\omega}_l\times(\vec{\omega}_l\times\vec{h}_l))+\frac{d\vec{\omega}_k}{dt}\times\vec{r}_k+\vec{\omega}_k\times\frac{d\vec{r}_k}{dt}+\vec{\omega}_k\times(\vec{\omega}_k\times\vec{r}_k)+\frac{d\vec{u}_k}{dt}+\vec{\omega}_k\times\vec{u}_k =$$

$$= \sum_{l=1}^{k-1}(\frac{d\vec{\omega}_l}{dt} \times \vec{h}_l + \vec{\omega}_l \times (\vec{\omega}_l \times \vec{h}_i)) + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt} \times \vec{r}_k + \vec{\omega}_k \times (\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k) + 2\vec{\omega}_k \times \vec{u}_k + \frac{d\vec{u}_k}{dt}. \tag{2.3}$$

Введем обозначения

$$\int\limits_{G_1}(\ldots)dm_1 := \int\limits_{\Omega_{10}}(\ldots)\rho_{10}d\Omega_{01} + \int\limits_{\Omega_{11}}(\ldots)\rho_{11}d\Omega_{11} + \int\limits_{\Omega_{12}}(\ldots)\rho_{12}d\Omega_{12}, \tag{2.4}$$

$$\int\limits_{G_2}(\ldots)dm_2 := \int\limits_{\Omega_{20}}(\ldots)\rho_{20}d\Omega_{02} + \sum_{j=1}^{3}\int\limits_{\Omega_{2j}}(\ldots)\rho_{2j}d\Omega_{2j}, \tag{2.5}$$

$$\int\limits_{G_3}(\ldots)dm_3 := \int\limits_{\Omega_{30}}(\ldots)\rho_{30}d\Omega_{30} + \int\limits_{\Omega_{31}}(\ldots)\rho_{31}d\Omega_{31}, \tag{2.6}$$

где $\Omega_{0k} \subset G_k$ — область, занятая твердым телом плотности $\rho_{k0} > 0$, $k = \overline{1,3}$.

2.1. Уравнения изменения кинетического момента относительно полюса O_1 системы тел $\{G_1; G_2; G_3\}$.

Уравнение изменения кинетического момента системы сочлёненных тел относительно точки O_1 в движущейся системе координат $O_1x_1^1x_1^2x_1^3$ имеет вид:

$$\frac{d'\vec{K}_1}{dt} = \vec{M}_1 + \vec{M}_1^{tr} + \vec{M}_1^{e} + \vec{M}_1^{cor}, \tag{2.7}$$

где $\vec{K}_1$ — кинетический момент системы в ее движении относительно неподвижной системы координат; $\vec{M}_1$ — главный момент всех внешних сил (силы тяжести и других малых сил), действующих на систему тел; $\vec{M}_1^{tr}$ — момент сил трения; $\vec{M}_1^{e}$ — момент переносных сил инерции; $\vec{M}_1^{cor}$ — момент кориолисовых сил.

Имеем,

$$\vec{K}_1 = \int_{G_1}\vec{r}_1 \times \vec{v}_1\, dm_1 + \int_{G_2}(\vec{h}_1 + \vec{r}_2) \times \vec{v}_2\, dm_2 + \int_{G_3}(\vec{h}_1 + \vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times \vec{v}_3\, dm_3 =$$

$$= \int_{G_1}\vec{r}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_1)\, dm_1 + \int_{G_2}(\vec{h}_1 + \vec{r}_2) \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2)\, dm_2 +$$

$$+ \int_{G_3}(\vec{h}_1 + \vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3 + \vec{u}_3)\, dm_3; \tag{2.8}$$

$$\vec{M}_1^{tr} = -\alpha_1 \vec{\omega}_1. \tag{2.9}$$

С точностью до малых второго порядка имеет место формула (см. [6], с. 132)

$$\vec{g} = -g\vec{e}_k^{\,3} + g\delta_k^2 \vec{e}_k^{\,1} - g\delta_k^1 \vec{e}_k^{\,2}. \tag{2.10}$$

Пусть $\zeta_{11}(x,t)$ $(x \in \Gamma_{11})$ — функция, описывающая малые отклонения свободной границы раздела $\Gamma_{11}(t)$ от плоской равновесной поверхности Γ_{11} вдоль нормали. Пусть аналогично функции $\zeta_{21}(x,t)$ $(x \in \Gamma_{21})$, $\zeta_{22}(x,t)$ $(x \in \Gamma_{22})$ описывают отклонения $\Gamma_{21}(t)$ и $\Gamma_{22}(t)$ вдоль нормалей относительно плоских равновесных поверхностей Γ_{21} и Γ_{22}. Из условия сохранения объёмов жидкостей во время колебаний следует, что $\int_{\Gamma_{jk}} \zeta_{jk}\, d\Gamma_{jk} = 0$, тогда с точностью до малых более высоких порядков справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\int_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{g}\, dm_1 &= m_1 \vec{r}_{1,c} \times \vec{g} + \int_{\Gamma_{11}} (\vec{r}_1 \times \vec{g})\zeta_{11}\Delta\rho_{11}\, d\Gamma_{11} = \\ &= m_1[-l_1\vec{e}_1^{\,3}] \times [-g(\vec{e}_1^{\,3} - \delta_1^2\vec{e}_1^{\,1} + \delta_1^1\vec{e}_1^{\,2})] - \Delta\rho_{11} g \int_{\Gamma_{11}} (\vec{r}_1 \times \vec{e}_1^{\,3})\zeta_{11}\, d\Gamma_{11} = \\ &= -gm_1 l_1 P_2 \vec{\delta}_1 + \Delta\rho_{11} g \int_{\Gamma_{11}} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1)\zeta_{11}\, d\Gamma_{11},\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}\int_{G_2} \vec{r}_2 \times \vec{g}\, dm_2 &= m_2 \vec{r}_{2,c} \times \vec{g} + \int_{\Gamma_{21}} (\vec{r}_2 \times \vec{g})\zeta_{21}\Delta\rho_{21}\, d\Gamma_{21} + \int_{\Gamma_{22}} (\vec{r}_2 \times \vec{g})\zeta_{22}\Delta\rho_{22}\, d\Gamma_{22} = \\ &= m_2[-l_2\vec{e}_2^{\,3}] \times [-g(\vec{e}_2^{\,3} - \delta_2^2\vec{e}_2^{\,1} + \delta_2^1\vec{e}_2^{\,2})] - \sum_{l=1}^{2} \Delta\rho_{2l} g \int_{\Gamma_{2l}} (\vec{r}_2 \times \vec{e}_2^{\,3})\zeta_{2l}\, d\Gamma_{2l} = \\ &= -gm_2 l_2 P_2 \vec{\delta}_2 + \Delta\rho_{21} g \int_{\Gamma_{21}} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2)\zeta_{21}\, d\Gamma_{21} + \Delta\rho_{22} g \int_{\Gamma_{22}} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2)\zeta_{22}\, d\Gamma_{22},\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\int_{G_3} \vec{r}_3 \times \vec{g}\, dm_3 = m_3 \vec{r}_{3,c} \times \vec{g} = -gm_3 l_3 P_2 \vec{\delta}_3, \tag{2.13}$$

где $\Delta\rho_{ij} = \rho_{ij} - \rho_{i(j+1)}$, $\vec{r}_{k,c} := \overrightarrow{O_k C_k}$, m_k — масса тела G_k, $l_k := |\overrightarrow{O_k C_k}|$ — расстояние от точки подвеса до центра масс тела G_k в состоянии равновесия, $P_2\vec{\delta}_k := \sum_{j=1}^{2} \delta_k^j \vec{e}_k^{\,j}$.

Также имеем

$$\begin{aligned}\int_{G_2} (\vec{h}_1 \times \vec{g})\, dm_2 &= m_2(\vec{h}_1 \times \vec{g}) + \Delta\rho_{21} \int_{\Gamma_{21}} (\vec{h}_1 \times \vec{g})\zeta_{21}\, d\Gamma_{21} + \Delta\rho_{22} \int_{\Gamma_{22}} (\vec{h}_1 \times \vec{g})\zeta_{22}\, d\Gamma_{22} = \\ &= m_2[-h_1\vec{e}_1^{\,3}] \times [-g(\vec{e}_1^{\,3} - \delta_1^2\vec{e}_1^{\,1} + \delta_1^1\vec{e}_1^{\,2})] = -gm_2 h_1 P_2 \vec{\delta}_1,\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\int_{G_3} (\vec{h}_1 + \vec{h}_2) \times \vec{g}\, dm_2 = m_3((\vec{h}_1 + \vec{h}_2) \times \vec{g}) = -gm_3(h_1 P_2\vec{\delta}_1 + h_2 P_2 \vec{\delta}_2). \tag{2.15}$$

В последних соотношениях предполагается, что $\vec{h}_l = -h_l\vec{e}_l^{\,3}$ (с точностью до малых более высокого порядка), где $h_l := |\overrightarrow{O_lO_{l+1}}|$ — расстояние между шарнирами. Отсюда следует, что

$$\vec{M}_1 = \int_{G_1} \vec{r}_1\times(\vec{g}+\vec{f}_1)\,dm_1 + \int_{G_2} (\vec{h}_1+\vec{r}_2)\times(\vec{g}+\vec{f}_2)\,dm_2 + \int_{G_3} (\vec{h}_1+\vec{h}_2+\vec{r}_3)\times(\vec{g}+\vec{f}_3)\,dm_3 =$$

$$= -gm_1l_1P_2\vec{\delta}_1 + \Delta\rho_{11}g\int_{\Gamma_{11}} (\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_1)\zeta_{11}\,d\Gamma_{11} + \int_{G_1} \vec{r}_1\times\vec{f}_1\,dm_1 - gm_2(h_1P_2\vec{\delta}_1 + l_2P_2\vec{\delta}_2) +$$

$$+ \Delta\rho_{21}g\int_{\Gamma_{21}} (\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_2)\zeta_{21}\,d\Gamma_{21} + \Delta\rho_{22}g\int_{\Gamma_{22}} (\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_2)\zeta_{22}\,d\Gamma_{22} + \int_{G_2} (\vec{h}_1+\vec{r}_2)\times\vec{f}_2\,dm_2 -$$

$$- -gm_3(h_1P_2\vec{\delta}_1 + h_2P_2\vec{\delta}_2 + l_3P_2\vec{\delta}_3) + \int_{G_3} (\vec{h}_1+\vec{h}_2+\vec{r}_3)\times\vec{f}_3\,dm_3, \quad (2.16)$$

где $\vec{f}_k(t,x) := \vec{f}(t,x)|_{G_k}$.

Очевидно, $\vec{M}_1^e = 0$, при этом

$$\vec{M}_1^{cor} = -\int_{G_1} \vec{r}_1\times(2\vec{\omega}_1\times\vec{u}_1)\,dm_1 - \sum_{k=2}^{3}\int_{G_k} (\sum_{l=1}^{k-1}\vec{h}_l + \vec{r}_k)\times(2\vec{\omega}_k\times\vec{u}_k)\,dm_k \quad (2.17)$$

является величиной второго порядка малости, поэтому мы ею пренебрегаем.

Вычислим теперь производную по времени от кинетического момента $\vec{K}_1$:

$$\frac{d'\vec{K}_1}{dt} = \int_{G_1} \frac{d\vec{r}_1}{dt}\times(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_1)\,dm_1 + \int_{G_1} \vec{r}_1\times(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1 + \vec{\omega}_1\times\frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{d\vec{u}_1}{dt})\,dm_1 +$$

$$+ \vec{\omega}_1\times\int_{G_1} \vec{r}_1\times(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_1)\,dm_1 +$$

$$+ \sum_{k=2}^{3}\int_{G_k} \frac{d}{dt}(\sum_{l=1}^{k-1}\vec{h}_l + \vec{r}_k)\times(\sum_{j=1}^{k-1}\vec{\omega}_j\times\vec{h}_j + \vec{\omega}_k\times\vec{r}_k + \vec{u}_k)\,dm_k +$$

$$+ \sum_{k=2}^{3}\int_{G_k} (\sum_{l=1}^{k-1}\vec{h}_l + \vec{r}_k)\times(\sum_{j=1}^{k-1}[\frac{d\vec{\omega}_j}{dt}\times\vec{h}_j + \vec{\omega}_j\times\frac{d\vec{h}_j}{dt}] + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt}\times\vec{r}_k + \vec{\omega}_k\times\frac{d\vec{r}_k}{dt} + \frac{d\vec{u}_k}{dt})\,dm_k +$$

$$+ \sum_{k=2}^{3}\vec{\omega}_k\times\int_{G_k} (\sum_{l=1}^{k-1}\vec{h}_l + \vec{r}_k)\times(\sum_{j=1}^{k-1}\vec{\omega}_j\times\vec{h}_j + \vec{\omega}_k\times\vec{r}_k + \vec{u}_k)\,dm_k. \quad (2.18)$$

Поскольку мы предполагаем, что поля $d\vec{r}_k/dt = \vec{u}_k$ (в Ω_k) и $\vec{\omega}_k$ являются бесконечно малыми, то в формуле

$$\frac{d\vec{u}_k}{dt} = \frac{\partial\vec{u}_k}{\partial t} + (\vec{u}_k\cdot\nabla)\vec{u}_k, \quad k = 1, 2,$$

можно пренебречь вторым слагаемым. Отсюда после линеаризации (2.18) получаем уравнение изменения кинетического момента относительно точки O_1 системы тел в подвижной системе координат $O_1x_1^1x_1^2x_1^3$:

$$\frac{d'\vec{K}_1}{dt} = \int_{G_1} \vec{r}_1 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1)\, dm_1 + \rho_{11} \int\limits_{\Omega_{11}} \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_{11}}{\partial t}\, d\Omega_{11} + \rho_{12} \int\limits_{\Omega_{12}} \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_{12}}{\partial t}\, d\Omega_{12} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{3} \int_{G_k} (\sum_{l=1}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k) \times (\sum_{j=1}^{k-1} \frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt} \times \vec{r}_k)\, dm_k +$$

$$+ \sum_{l=1}^{3} \rho_{2l} \int\limits_{\Omega_{2l}} (\vec{h}_1 + \vec{r}_2) \times \frac{\partial \vec{u}_{2l}}{\partial t}\, d\Omega_{2l} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_{31}} (\vec{h}_1 + \vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t}\, d\Omega_{31} =$$

$$= -\alpha_1 \vec{\omega}_1 - g m_1 l_1 P_2 \vec{\delta}_1 - g \sum_{k=2}^{3} m_k (\sum_{l=1}^{k-1} h_l P_2 \vec{\delta}_l + l_k P_2 \vec{\delta}_k) + g \Delta\rho_{11} \int_{\Gamma_{11}} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1) \zeta_{11}\, d\Gamma_{11} +$$

$$+ g \sum_{l=1}^{2} \Delta\rho_{2l} \int_{\Gamma_{2l}} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2) \zeta_{2l}\, d\Gamma_{2l} + \int_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{f}_1\, dm_1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{G_k} (\sum_{l=1}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k) \times \vec{f}_k\, dm_k. \tag{2.19}$$

2.2. Уравнения изменения кинетического момента относительно полюса O_2 системы тел $\{G_2; G_3\}$.

Вывод уравнения производится аналогично предыдущему подпункту. В подвижной системе координат $O_2x_2^1x_2^2x_2^3$ имеем

$$\vec{K}_2 = \int_{G_2} \vec{r}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2)\, dm_2 + \int_{G_3} (\vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3 + \vec{u}_3)\, dm_3; \tag{2.20}$$

$$\vec{M}_2^{tr} = -\alpha_2 (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1), \quad \alpha_2 > 0; \tag{2.21}$$

$$\vec{M}_2 = \int_{G_2} \vec{r}_2 \times (\vec{g} + \vec{f}_2)\, dm_2 + \int_{G_3} (\vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times (\vec{g} + \vec{f}_3)\, dm_3 =$$

$$= -g m_2 l_2 P_2 \vec{\delta}_2 + \int_{G_2} \vec{r}_2 \times \vec{f}_2\, dm_2 - g m_3 (h_2 P_2 \vec{\delta}_2 + l_3 P_2 \vec{\delta}_3) +$$

$$+ g \Delta\rho_{21} \int_{\Gamma_{21}} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2) \zeta_{21}\, d\Gamma_{21} + g \Delta\rho_{22} \int_{\Gamma_{22}} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2) \zeta_{22}\, d\Gamma_{22} + \int_{G_3} (\vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times \vec{f}_3\, dm_3; \tag{2.22}$$

$$\vec{M}_2^e = -\int_{G_2} \vec{r}_2 \times \vec{a}_2^{\,e}\, dm_2 - \int_{G_3} (\vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times \vec{a}_2^{\,e}\, dm_3, \tag{2.23}$$

где $\vec{a}_2^{\,e} = \dfrac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1) \approx \dfrac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1$ — ускорение точки O_2. Момент кориолисовых сил является бесконечно малой величиной, порядка выше единицы:

$$\vec{M}_2^{cor} = -\int_{G_2} \vec{r}_2 \times (2\vec{\omega}_2 \times \vec{u}_2)\, dm_2 - \int_{G_3} (\vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times (2\vec{\omega}_3 \times \vec{u}_3)\, dm_3. \tag{2.24}$$

Вычислим производную по времени от величины $\vec{K}_2$ (см. (2.20)):

$$\begin{gathered}
\frac{d'\vec{K}_2}{dt} = \int_{G_2} \frac{d\vec{r}_2}{dt} \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2)\, dm_2 + \int_{G_2} \vec{r}_2 \times (\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 + \vec{\omega}_2 \times \frac{d\vec{r}_i}{dt} + \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t})\, dm_2 + \\
+ \vec{\omega}_2 \times \int_{G_2} \vec{r}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2)\, dm_2 + \int_{G_3} \frac{d}{dt}(\vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3 + \vec{u}_3)\, dm_3 + \\
+ \int_{G_3} (\vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times (\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_2 \times \frac{d\vec{h}_2}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 + \vec{\omega}_3 \times \frac{d\vec{r}_3}{dt} + \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t})\, dm_3 + \\
+ \vec{\omega}_3 \times \int_{G_3} (\vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3 + \vec{u}_3)\, dm_3.
\end{gathered} \tag{2.25}$$

После линеаризации (2.25) получаем искомое уравнение изменения кинетического момента системы тел $\{G_2; G_3\}$ относительно точки O_2:

$$\begin{gathered}
\frac{d'\vec{K}_2}{dt} = \int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times (\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2)\, dm_2 + \sum_{l=1}^{3} \rho_{2l} \int\limits_{\Omega_{2l}} \vec{r}_2 \times \frac{\partial \vec{u}_{2l}}{\partial t}\, d\Omega_{2l} + \\
+ \int_{G_3} (\vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times (\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3)\, dm_3 + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} (\vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t}\, d\Omega_{31} = \\
= -\alpha_2(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) - g m_2 l_2 P_2 \vec{\delta}_2 - g m_3 (h_2 P_2 \vec{\delta}_2 + l_3 P_2 \vec{\delta}_3) + \\
+ g \sum_{l=1}^{2} \Delta\rho_{2l} \int_{\Gamma_{2l}} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2) \zeta_{2l}\, d\Gamma_{2l} + \int_{G_2} \vec{r}_2 \times \vec{f}_2\, dm_2 + \int_{G_3} (\vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times \vec{f}_3\, dm_3 - \\
- \int_{G_2} \vec{r}_2 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1)\, dm_2 - \int_{G_3} (\vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1)\, dm_3.
\end{gathered} \tag{2.26}$$

2.3. Уравнения изменения кинетического момента относительно полюса O_3 тела G_3.

В этом случае получаем

$$\vec{K}_3 = \int_{G_3} \vec{r}_3 \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3 + \vec{u}_3)\, dm_3; \tag{2.27}$$

$$\vec{M}_3^{tr} = -\alpha_3(\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2), \quad \alpha_3 > 0; \tag{2.28}$$

$$\vec{M}_3 = \int_{G_3} \vec{r}_3 \times (\vec{g} + \vec{f}_3)\, dm_3 = -g m_3 l_3 P_2 \vec{\delta}_3 + \int_{G_3} \vec{r}_3 \times \vec{f}_3\, dm_3; \tag{2.29}$$

$$\vec{M}_3^e = -\int_{G_3} \vec{r}_3 \times \vec{a}_3^e \, dm_3, \tag{2.30}$$

где $\vec{a}_3^e = \sum_{j=1}^{2} (\frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j + \vec{\omega}_j \times (\vec{\omega}_j \times \vec{h}_j)) \approx \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2$ — ускорение точки O_3. Моментом кориолисовых сил пренебрегаем.

Вычислим производную по времени от величины $\vec{K}_3$:

$$\frac{d'\vec{K}_3}{dt} = \int_{G_3} \frac{d\vec{r}_3}{dt} \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3 + \vec{u}_3) \, dm_3 + \int_{G_3} \vec{r}_3 \times (\frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 + \vec{\omega}_3 \times \frac{d\vec{r}_3}{dt} + \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t}) \, dm_3 + \\ + \vec{\omega}_3 \times \int_{G_3} \vec{r}_3 \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3 + \vec{u}_3) \, dm_3. \tag{2.31}$$

После линеаризации уравнение изменения кинетического момента относительно точки O_3 тела G_3 в подвижной системе $O_3 x_3^1 x_3^2 x_3^3$ координат принимает вид:

$$\int\limits_{G_3} \vec{r}_3 \times (\frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3) \, dm_3 + \rho_{31} \int\limits_{\Omega_{31}} \vec{r}_3 \times \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t} d\Omega_{31} = -\alpha_3(\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2) - \\ - g m_3 l_3 P_2 \vec{\delta}_3 + \int_{G_3} \vec{r}_3 \times \vec{f}_3 \, dm_3 - \int_{G_3} \vec{r}_3 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2) \, dm_3. \tag{2.32}$$

2.4. Преобразование уравнений изменения кинетического момента системы тел.

Из уравнений (2.19), (2.26) и (2.32) следует, что левые и правые части последующего уравнения целиком входят в левые и правые части предыдущего. Вычитая соответствующие левые и правые части, получаем упрощенную форму записи уравнений движения системы тел. Уравнение изменения кинетического момента относительно точки O_3 переписываем без изменений.

$$\int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) \, dm_1 + \rho_{11} \int\limits_{\Omega_{11}} \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_{11}}{\partial t} \, d\Omega_{11} + \rho_{12} \int\limits_{\Omega_{12}} \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_{12}}{\partial t} \, d\Omega_{21} + \\ + \int_{G_2} \vec{h}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) \, dm_2 + \\ + \int_{G_3} \vec{h}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3\right) \, dm_3 + \sum_{l=1}^{3} \rho_{2l} \int_{\Omega_{2l}} \vec{h}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_{2l}}{\partial t} \, d\Omega_{2l} + \\ + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} \vec{h}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t} \, d\Omega_{31} + \alpha_1 \vec{\omega}_1 - \alpha_2(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) + g(m_1 l_1 + h_1 m_2 + h_1 m_3) P_2 \vec{\delta}_1 - \\ - g\Delta\rho_{11} \int_{\Gamma_{11}} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1) \zeta_{11} \, d\Gamma_{11} = \int_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{f}_1 \, dm_1 + \sum_{k=2}^{3} \int_{G_k} \vec{h}_1 \times \vec{f}_k \, dm_k =: \vec{M}_1(t); \tag{2.33}$$

$$\int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 \right) dm_2 + \sum_{l=1}^{3} \rho_{2l} \int\limits_{\Omega_{2l}} \vec{r}_2 \times \frac{\partial \vec{u}_{2l}}{\partial t}\, d\Omega_{2l} +$$

$$+ \int_{G_3} \vec{h}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 \right) dm_3 + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} \vec{h}_2 \times \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t}\, d\Omega_{31} +$$

$$+ \alpha_2(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) - \alpha_3(\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2) + g(m_2 l_2 + h_2 m_3) P_2 \vec{\delta}_2 - g \sum_{l=1}^{2} \Delta\rho_{2l} \int_{\Gamma_{2l}} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2) \zeta_{2l}\, d\Gamma_{2l} =$$

$$= \int_{G_2} \vec{r}_2 \times \vec{f}_2\, dm_2 + \int_{G_3} \vec{h}_2 \times \vec{f}_3\, dm_3 =: \vec{M}_2(t), \quad (2.34)$$

$$\int\limits_{G_3} \vec{r}_3 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 \right) dm_3 + \rho_{31} \int\limits_{\Omega_{31}} \vec{r}_3 \times \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t}\, d\Omega_{31} +$$

$$+ \alpha_3(\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2) + g m_3 l_3 P_2 \vec{\delta}_3 = \int_{G_3} \vec{r}_3 \times \vec{f}_3\, dm_3 =: \vec{M}_3(t). \quad (2.35)$$

3. Уравнения движения жидкостей в полостях

Первый маятник заполнен двумя идеальными жидкостями Ω_{11}, Ω_{12}, для которых выполнены линеаризованные уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial \vec{u}_{11}}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 = -\rho_{11}^{-1} \nabla p_{11} + \vec{f}_{11}, \quad \operatorname{div} \vec{u}_{11} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{11}), \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}_{12}}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 = -\rho_{12}^{-1} \nabla p_{12} + \vec{f}_{12}, \quad \operatorname{div} \vec{u}_{12} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{12}), \quad (3.2)$$

с граничными условиями непротекания

$$\vec{u}_{11} \cdot \vec{n}_{11} = 0 \quad (\text{на } S_{11}), \qquad \vec{u}_{12} \cdot \vec{n}_{12} = 0 \quad (\text{на } S_{12}), \quad (3.3)$$

На свободной границе раздела Γ_{11} выполнены кинематические условия

$$\frac{\partial \zeta_{11}}{\partial t} = \vec{u}_{11} \cdot \vec{n}_{11} = \vec{u}_{12} \cdot \vec{n}_{11}, \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \quad \int_{\Gamma_{11}} \zeta_{11}\, d\Gamma_{11} = 0, \quad (3.4)$$

а также линеаризованное динамическое условие

$$p_{11} - p_{12} = \Delta\rho_{11} g (\zeta_{11} + \theta_{11} (P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3}) \quad (\text{на } \Gamma_{11}). \quad (3.5)$$

Отметим, что с учётом условия сохранения объемов жидкостей Ω_{1j}, т.е. равенства $\int_{\Gamma_{11}} \zeta_{11}\, d\Gamma_{11} = 0$, следует, что $\zeta_{11} \in L_{2,\Gamma_{11}} := L_2(\Gamma_{11}) \ominus \operatorname{sp}\{1_{\Gamma_{11}}\}$. В силу того, что давления определяются с точностью до константы, считаем, что $p_{1j} \in L_{2,\Gamma_{11}}$, отсюда в краевом условии (3.5) целесообразно использовать ортопроектор $\theta_{11} :\ L_2(\Gamma_{11}) \to L_{2,\Gamma_{11}}$.

Будем предполагать, что однородные вязкие жидкости Ω_{2l} имеют кинематические вязкости $\nu_{2l} > 0$. Малые движения этой системы описывается линеаризованными уравнениями Навье–Стокса в подвижных системах координат $O_k x_k^1 x_k^2 x_k^3$ (см. [6], с. 124):

$$\frac{\partial \vec{u}_{21}}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 = -\rho_{21}^{-1} \nabla p_{21} + \nu_{21} \Delta \vec{u}_{21} + \vec{f}_{21}, \ \operatorname{div} \vec{u}_{21} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{21}), \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial \vec{u}_{22}}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 = -\rho_{22}^{-1} \nabla p_{22} + \nu_{22} \Delta \vec{u}_{22} + \vec{f}_{22}, \ \operatorname{div} \vec{u}_{22} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{22}), \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial \vec{u}_{23}}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 = -\rho_{23}^{-1} \nabla p_{23} + \nu_{23} \Delta \vec{u}_{23} + \vec{f}_{23}, \ \operatorname{div} \vec{u}_{23} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{23}). \tag{3.8}$$

На твёрдых стенках выполнены условия прилипания

$$\vec{u}_{2l} = \vec{0} \quad (\text{на } S_{2l}), \quad l = 1, 2, 3. \tag{3.9}$$

Предполагаем, что капиллярными силами можно пренебречь, тогда в состоянии равновесия свободные поверхности $\Gamma_{2l}(t)$ являются неподвижными плоскостями, ортогональными вектору $\vec{e}^{\,3}$. Они могут быть заданы уравнениями $x_3' = -b_{2l} < 0$, где $b_{2l} = \text{const}$.

Приравнивая напряжения в жидкостях на границах раздела после линеаризации получаем касательные динамические условия

$$\mu_{21} \tau_{j3}(\vec{u}_{21}) = \mu_{22} \tau_{j3}(\vec{u}_{22}) \quad (\text{на } \Gamma_{21}), \tag{3.10}$$

$$\mu_{22} \tau_{j3}(\vec{u}_{22}) = \mu_{23} \tau_{j3}(\vec{u}_{23}) \quad (\text{на } \Gamma_{22}), \quad j = 1, 2, \tag{3.11}$$

где $\mu_{2l} := \rho_{2l} \nu_{2l}$ — динамические вязкости в жидкости Ω_{2l},

$$\tau_{jk}(\vec{u}_{2l}) := \frac{\partial u_{2l}^k}{\partial x_{2l}^j} + \frac{\partial u_{2l}^j}{\partial x_{2l}^k}. \tag{3.12}$$

Из условия $x_{2l}^3 = b_{2l} + \zeta_{2l}(t, x_{2l}^1, x_{2l}^2)$, после линеаризации приходим к динамическим краевым условиям для нормального напряжения

$$\left[p_{21} - 2\mu_{21} \frac{\partial u_{21}^3}{\partial x_{21}^3}\right] - \left[p_{22} - 2\mu_{22} \frac{\partial u_{22}^3}{\partial x_{22}^3}\right] = \Delta \rho_{21} g (\zeta_{21} + \theta_{21} (P_2 \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_2^{\,3}) \quad (\text{на } \Gamma_{21}), \tag{3.13}$$

$$\left[p_{22} - 2\mu_{22} \frac{\partial u_{22}^3}{\partial x_{22}^3}\right] - \left[p_{23} - 2\mu_{23} \frac{\partial u_{23}^3}{\partial x_{23}^3}\right] = \Delta \rho_{22} g (\zeta_{22} + \theta_{22} (P_2 \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_2^{\,3}) \quad (\text{на } \Gamma_{22}), \tag{3.14}$$

а также к кинематическим условиям

$$\frac{\partial\zeta_{21}}{\partial t} = \vec{u}_{21}\cdot\vec{n}_{21} = \vec{u}_{22}\cdot\vec{n}_{21}, \quad (\text{на } \Gamma_{21}), \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial\zeta_{22}}{\partial t} = \vec{u}_{22}\cdot\vec{n}_{22} = \vec{u}_{23}\cdot\vec{n}_{22}, \quad (\text{на } \Gamma_{22}), \tag{3.16}$$

с условиями сохранения объемов $\int_{\Gamma_{2l}} \zeta_{2l}\, d\Gamma_{2l} = 0,\ l = 1,2$. В силу последних соотношений в краевых условиях (3.13), (3.14) используются ортопроекторы θ_{2l} : $L_2(\Gamma_{2l}) \to L_{2,\Gamma_{2l}} := L_2(\Gamma_{2l}) \ominus \mathrm{sp}\,\{1_{\Gamma_{2l}}\},\ l = 1,2$.

По условию полость Ω_{31} целиком заполнена однородной несжимаемой идеальной жидкостью. Ее малые движения описываются линеаризованными уравнениями Эйлера:

$$\frac{\partial\vec{u}_{31}}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3 = -\rho_{31}^{-1}\nabla p_{31} + \vec{f}_{31},\ \operatorname{div}\vec{u}_{31} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{31}), \tag{3.17}$$

с граничным условием непротекания

$$\vec{u}_{31}\cdot\vec{n}_{31} = 0 \quad (\text{на } S_{31}), \tag{3.18}$$

где $\vec{n}_{31}$ — внешняя единичная нормаль к S_{31}.

Для полной постановки задачи необходимо также задать очевидные условия связи

$$\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_k = P_2\vec{\omega}_k, \quad \frac{d}{dt}\vec{\delta}_k^3 = \vec{\omega}_k^3, \quad k = \overline{1,3}, \tag{3.19}$$

и начальные данные

$$\vec{u}_{jk}(0,x) = \vec{u}_{jk}^0(x),\ x\in\Omega_{jk}, \quad \zeta_{jk}(0,x) = \zeta_{jk}^0(x),\ x\in\Gamma_{jk}, \tag{3.20}$$

$$\vec{\omega}_k(0) = \vec{\omega}_k^0, \quad \vec{\delta}_k(0) = \vec{\delta}_k^0, \quad k = 1,3. \tag{3.21}$$

4. Закон баланса полной энергии

Будем считать, что задача (2.33)–(3.21) имеет классическое решение, т.е. в уравнениях, начальных и граничных условиях все слагаемые являются непрерывными функциями по своим переменным. Будем также для простоты обозначений скалярные произведения в $\mathbb{C}^3$ и $L_2(\Omega_{ij})$ обозначать без комплексного сопряжения второго сомножителя. Тогда, умножая обе части уравнения (2.33) скалярно на $\vec{\omega_1}$, используя свойства смешанного произведения векторов, а также очевидное тождество

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\vec{\omega}\times\vec{r}|^2\,d\Omega = \int_\Omega (\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r})\,d\Omega, \tag{4.1}$$

получим

$$\frac{\rho_{10}}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_{10}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1|^2\,d\Omega_{10}+\left[\sum_{j=1}^{2}\rho_{1j}\int_{\Omega_{1j}}(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)\cdot\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1+\frac{\partial\vec{u}_{1j}}{\partial t}\right)\,d\Omega_{1j}\right]_1+$$
$$+\left[\rho_{20}\int_{\Omega_{20}}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)\cdot\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)\,d\Omega_{20}\right]_2+$$
$$+\left[\sum_{j=1}^{3}\rho_{2j}\int_{\Omega_{2j}}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)\cdot\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2+\frac{\partial\vec{u}_{2j}}{\partial t}\right)\,d\Omega_{2j}\right]_3+$$
$$+\left[\rho_{30}\int_{\Omega_{30}}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)\cdot\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)\,d\Omega_{30}\right]_4+$$
$$+\left[\rho_{31}\int_{\Omega_{31}}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)\cdot\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3+\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t}\right)\,d\Omega_{31}\right]_5+$$
$$+(\alpha_1+\alpha_2)|\vec{\omega}_1|^2-\alpha_2\vec{\omega}_2\cdot\vec{\omega}_1+\frac{g}{2}(m_1l_1+h_1(m_2+m_3))\frac{d}{dt}|P_2\vec{\delta}_1|^2+$$
$$+\left\{g\Delta\rho_{11}\int_{\Gamma_{11}}\left((\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_1)\times\vec{r}_1\right)\vec{e}_1^{\,3}\zeta_{11}\,d\Gamma_{11}\right\}_1=\vec{M}_1(t)\cdot\vec{\omega}_1. \quad (4.2)$$

Аналогично, умножая обе части уравнений (2.34), (2.35) соответственно скалярно на $\vec{\omega}_2$ и $\vec{\omega}_3$, после преобразований получаем

$$\left[\rho_{20}\int_{\Omega_{20}}(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2)\cdot\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)\,d\Omega_{20}\right]_2+$$
$$+\left[\sum_{j=1}^{3}\rho_{2j}\int_{\Omega_{2j}}(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2)\cdot\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2+\frac{\partial\vec{u}_{2j}}{\partial t}\right)\,d\Omega_{2j}\right]_3+$$
$$+\left[\rho_{30}\int_{\Omega_{30}}(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2)\cdot\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)\,d\Omega_{30}\right]_4+$$
$$+\left[\rho_{31}\int_{\Omega_{31}}(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2)\cdot\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3+\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t}\right)\,d\Omega_{31}\right]_5+$$
$$+(\alpha_2+\alpha_3)|\vec{\omega}_2|^2-\alpha_2\vec{\omega}_1\cdot\vec{\omega}_2-\alpha_3\vec{\omega}_3\cdot\vec{\omega}_2+\frac{g}{2}(m_2l_2+h_2m_3)\frac{d}{dt}|P_2\vec{\delta}_2|^2+$$
$$+\left\{g\sum_{l=1}^{2}\Delta\rho_{2l}\int_{\Gamma_{2l}}\left((\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_2)\times\vec{r}_2\right)\vec{e}_2^{\,3}\zeta_{2l}\,d\Gamma_{2l}\right\}_2=\vec{M}_1(t)\cdot\vec{\omega}_2; \quad (4.3)$$

$$\left[\rho_{30}\int_{\Omega_{30}}(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3)\cdot\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)d\Omega_{30}\right]_4+$$
$$+\left[\rho_{31}\int_{\Omega_{31}}(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3)\cdot\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3+\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t}\right)d\Omega_{31}\right]_5+$$
$$+\alpha_3|\vec{\omega}_3|^2-\alpha_3\vec{\omega}_2\cdot\vec{\omega}_3+\frac{g}{2}m_3l_3\frac{d}{dt}|P_2\vec{\delta}_3|^2=\vec{M}_3(t)\cdot\vec{\omega}_3. \quad (4.4)$$

Умножая обе части уравнений (3.1), (3.2) соответственно скалярно на $\vec{u}_{11}$ и $\vec{u}_{12}$ и интегрируя полученные равенства по областям Ω_{11} и Ω_{12} с учётом соленоидальности полей $\vec{u}_{1j}$, условий непротекания (3.18) и формулы Гаусса-Остроградского, которая имеет вид $\int_{\Omega_{1j}}\operatorname{div}(p_{1j}\vec{u}_{1j})\,d\Omega_{1j}=\int_{\Omega_{1j}}\nabla p_{1j}\cdot\vec{u}_{1j}\,d\Omega_{1j}=\int_{\Gamma_{11}}p_{1j}(\vec{u}_{1j}\cdot\vec{n})\,d\Gamma_{11}$ ($\vec{n}$ — внешняя нормаль к области Ω_{1j}), после суммирования и использования краевых условий (3.4), (3.5) получаем

$$\left[\sum_{j=1}^{2}\rho_{1j}\int_{\Omega_{1j}}\vec{u}_{1j}\cdot\left(\frac{\partial\vec{u}_{1j}}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)d\Omega_{1j}\right]_1+\sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega_{1j}}\nabla p_{1j}\cdot\vec{u}_{1j}\,d\Omega_{1j}=$$
$$=\Big[\ldots\Big]_1+\int_{\Gamma_{11}}(p_{11}-p_{12})\frac{\partial\zeta_{11}}{\partial t}\,d\Gamma_{11}=\Big[\ldots\Big]_1+$$
$$+\left\{\frac{g}{2}\Delta\rho_{11}\int_{\Gamma_{11}}[|\zeta_{11}|^2+2\theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3})\frac{\partial\zeta_{11}}{\partial t}]\,d\Gamma_{11}\right\}_1=\sum_{j=1}^{2}\rho_{1j}\int_{\Omega_{1j}}\vec{f}_{1j}\cdot\vec{u}_{1j}\,d\Omega_{1j}. \quad (4.5)$$

Считая, что решения уравнений движения вязких жидкостей (3.6)–(3.8) являются непрерывными функциями по всем своим переменным, выполнены классические формулы Грина для соленоидальных векторных полей в областях $\Omega_{2j}(j=1,2,3)$ (см. [1], с. 14):

$$\int\limits_{\Omega_{21}}(-\mu_{21}\Delta\vec{u}_{21}+\nabla p_{21})\cdot\vec{v}_{21}\,d\Omega_{21}=$$
$$=\mu_{21}E_{21}(\vec{u}_{21},\vec{v}_{21})-\int\limits_{\Gamma_{21}}\sum_{j,k=1}^{3}(\mu_{21}\tau_{jk}(\vec{u}_{21})-p_{21}\delta_{jk})(v_{21})_j\cos(\vec{n}_{21},\vec{e}_2^{\,k})\,d\Gamma_{21};$$

$$\int\limits_{\Omega_{22}}(-\mu_{22}\Delta\vec{u}_{22}+\nabla p_{22})\cdot\vec{v}_{22}\,d\Omega_{22}=\mu_{22}E_{22}(\vec{u}_{22},\vec{v}_{22})-$$
$$-\int\limits_{\Gamma_{22}}\sum_{j,k=1}^{3}(\mu_{22}\tau_{jk}(\vec{u}_{22})-p_{22}\delta_{jk})(v_{22})_j\cos(\vec{n}_{22},\vec{e}_2^{\,k})\,d\Gamma_{22}+$$
$$+\int\limits_{\Gamma_{21}}\sum_{j,k=1}^{3}(\mu_{22}\tau_{jk}(\vec{u}_{22})-p_{22}\delta_{jk})(v_{22})_j\cos(\vec{n}_{21},\vec{e}_2^{\,k})\,d\Gamma_{21};$$

$$\int\limits_{\Omega_{23}} (-\mu_{23}\Delta\vec{u}_{23} + \nabla p_{23}) \cdot \vec{v}_{23}\, d\Omega_{23} =$$

$$= \mu_{23}E_{23}(\vec{u}_{23}, \vec{v}_{23}) + \int\limits_{\Gamma_{22}} \sum_{j,k=1}^{3} (\mu_{23}\tau_{jk}(\vec{u}_{23}) - p_{23}\delta_{jk})(v_{23})_j \cos(\vec{n}_{22}, \vec{e}_2^{\,k})\, d\Gamma_{22},$$

где $\vec{n}_{21} = \vec{n}_{22} = \vec{e}_2^{\,3}$, $E_{2l}(\vec{u}_{2l}, \vec{v}_{2l}) := \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{\Omega_{2l}} \left[\sum_{j,k=1}^{3} \tau_{jk}(\vec{u}_{2l})\tau_{jk}(\vec{v}_{2l})\right] d\Omega_{2l},\ l = 1, 2, 3.$

Умножая скалярно обе части уравнений (3.6)–(3.8) соответственно на $\vec{u}_{2j}$, интегрируя их по областям Ω_{2j}, после суммирования, использования приведенных формул Грина и краевых условий (3.10)–(3.16) получим

$$\left[\sum_{j=1}^{3} \rho_{2j} \int_{\Omega_{2j}} \vec{u}_{2j} \cdot \left(\frac{\partial \vec{u}_{2j}}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) d\Omega_{2j}\right]_3 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega_{2j}} (-\mu_{2j}\Delta\vec{u}_{2j} - \nabla p_{1j}) \cdot \vec{u}_{2j}\, d\Omega_{2j} = \Big[\ldots\Big]_3 + \sum_{j=1}^{3} \mu_{2j}E_{2j}(\vec{u}_{2j}, \vec{u}_{2j}) +$$

$$+ \int_{\Gamma_{21}} (p_{21} - p_{22} - 2\mu_{21}\frac{\partial u_{21}^3}{\partial x_{21}^3} + 2\mu_{22}\frac{\partial u_{22}^3}{\partial x_{22}^3})\frac{\partial \zeta_{21}}{\partial t}\, d\Gamma_{21} +$$

$$+ \int_{\Gamma_{22}} (p_{22} - p_{23} - 2\mu_{22}\frac{\partial u_{22}^3}{\partial x_{22}^3} + 2\mu_{23}\frac{\partial u_{23}^3}{\partial x_{23}^3})\frac{\partial \zeta_{22}}{\partial t}\, d\Gamma_{22} = \Big[\ldots\Big]_3 + \sum_{j=1}^{3} \mu_{2j}E_{2j}(\vec{u}_{2j}, \vec{u}_{2j}) +$$

$$+ \left\{\sum_{l=1}^{2} \Delta\rho_{2l}g \int_{\Gamma_{2l}} (\zeta_{2l} + \theta_{2l}((P_2\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_2^{\,3}))\frac{\partial \zeta_{2l}}{\partial t}\, d\Gamma_{2l}\right\}_2 = \sum_{j=1}^{3} \rho_{2j} \int_{\Omega_{2j}} \vec{f}_{2j} \cdot \vec{u}_{2j}\, d\Omega_{2j}. \tag{4.6}$$

Аналогично выводу тождества (4.5) уравнение для третьей жидкости (3.17) приводит к соотношению

$$\left[\rho_{31} \int_{\Omega_{31}} \vec{u}_{31} \cdot \left(\frac{\partial \vec{u}_{31}}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3\right) d\Omega_{31}\right]_5 +$$

$$+ \int_{\Omega_{31}} \nabla p_{31} \cdot \vec{u}_{31}\, d\Omega_{31} = \Big[\ldots\Big]_5 = \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} \vec{f}_{31} \cdot \vec{u}_{31}\, d\Omega_{31}. \tag{4.7}$$

Складывая теперь полученные тождества (4.2)–(4.7), можно заметить, что с учётом соотношения (4.1) группы слагаемых в скобках с одинаковыми индексами можно объединить в одну формулу, а именно

$$\sum \Big[\ldots\Big]_1 = \sum_{j=1}^{2} \frac{\rho_{1j}}{2}\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega_{1j}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_{1j}|^2\, d\Omega_{1j};$$

$$\sum \Big[\dots\Big]_2 = \frac{\rho_{20}}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_{20}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2|^2\, d\Omega_{20};$$

$$\sum \Big[\dots\Big]_3 = \sum_{j=1}^{3} \frac{\rho_{2j}}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_{2j}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_{2j}|^2\, d\Omega_{2j};$$

$$\sum \Big[\dots\Big]_4 = \frac{\rho_{30}}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_{30}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3|^2\, d\Omega_{30};$$

$$\sum \Big[\dots\Big]_5 = \frac{\rho_{31}}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_{31}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3 + \vec{u}_{31}|^2\, d\Omega_{31};$$

$$\sum \Big\{\dots\Big\}_1 = \frac{g\Delta\rho_{11}}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Gamma_{11}} \Big[|\zeta_{11} + \theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1)\cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2 - |\theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1)\cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2\Big]\, d\Gamma_{11};$$

$$\sum \Big\{\dots\Big\}_2 = \sum_{l=1}^{2} \frac{g\Delta\rho_{2l}}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Gamma_{2l}} \Big[|\zeta_{2l} + \theta_{2l}((P_2\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2)\cdot \vec{e}_2^{\,3})|^2 - |\theta_{2l}((P_2\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2)\cdot \vec{e}_2^{\,3})|^2\Big]\, d\Gamma_{2l}.$$

При этом несложно заметить, что слагаемые для моментов трения в шарнирах сворачиваются в сумму

$$\alpha_1|\vec{\omega}_1|^2 + \alpha_2|\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1|^2 + \alpha_3|\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2|^2.$$

Отсюда общая сумма приводит к закону баланса полной энергии в дифференциальной форме:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Bigg\{\rho_{10}\int\limits_{\Omega_{10}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1|^2\, d\Omega_{10} + \sum_{j=1}^{2}\rho_{1j}\int\limits_{\Omega_{1j}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_{1j}|^2\, d\Omega_{1j} +$$

$$+ \rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2|^2\, d\Omega_{20} + \sum_{j=1}^{3}\rho_{2j}\int\limits_{\Omega_{2j}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_{2j}|^2\, d\Omega_{2j} +$$

$$+\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} |\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3|^2\, d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} |\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3+\vec{u}_{31}|^2\, d\Omega_{31}\Bigg\}+$$

$$+ \frac{g}{2}\frac{d}{dt}\Bigg\{\Delta\rho_{11}\int\limits_{\Gamma_{11}} \Big[|\zeta_{11} + \theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1)\cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2 - |\theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1)\cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2\Big]\, d\Gamma_{11} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{2}\Delta\rho_{2l}\int\limits_{\Gamma_{2l}} \Big[|\zeta_{2l} + \theta_{2l}((P_2\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2)\cdot \vec{e}_2^{\,3})|^2 - |\theta_{2l}((P_2\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2)\cdot \vec{e}_2^{\,3})|^2\Big]\, d\Gamma_{2l} +$$

$$+ (m_1l_1 + (m_2+m_3)h_1)|P_2\vec{\delta}_1|^2 + (m_2l_2 + m_3h_2)|P_2\vec{\delta}_2|^2 + m_3l_3|P_2\vec{\delta}_3|^2\Bigg\} =$$

$$= -\left\{\sum_{j=1}^{3}\mu_{2j}E_{2j}(\vec{u}_{2j},\vec{u}_{2j}) + \alpha_1|\vec{\omega}_1|^2 + \alpha_2|\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1|^2 + \alpha_3|\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2|^2\right\} +$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\rho_{1j}\int\limits_{\Omega_{1j}}\vec{f}_{1j}\cdot\vec{u}_{1j}\,d\Omega_{1j} + \sum_{j=1}^{3}\rho_{2j}\int\limits_{\Omega_{2j}}\vec{f}_{2j}\cdot\vec{u}_{2j}\,d\Omega_{2j} +$$

$$+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\vec{f}_{31}\cdot\vec{u}_{31}\,d\Omega_{31} + \sum_{j=1}^{3}\vec{M}_j\cdot\vec{\omega}_j. \quad (4.8)$$

Поясним смысл групп слагаемых, стоящих в формуле (4.8). Первое выражение, стоящее слева в фигурных скобках, есть удвоенная кинетическая энергия гидромеханической системы, соответственно второе выражение в фигурных скобках — удвоенная потенциальная энергия. Изменение потенциальной энергии обусловливается поворотами маятников и смещением свободных границ раздела жидкостей, отвечающих отклонениям ζ_{11}, ζ_{21} и ζ_{22}. Справа в (4.8) имеем мощность внутренних и внешних сил, состоящая из мощности сил вязкости (второй маятник) и сил трения в шарнирах, а также мощности малых внешних сил, наложенных на гравитационное поле.

5. Предварительные свойства решений начально-краевой задачи

Далее предполагается изучать задачу (2.33)–(3.21), используя методы ортогонального проектирования на подпространства потенциальных и соленоидальных векторных полей и свойства слабых решений вспомогательных начально-краевых задач. Предполагается, что в операторной форме в соответственно подобранном гильбертовом пространстве $H = H_1 \oplus H_2$ исходная начально-краевая задача сведётся к задаче Коши вида

$$\begin{cases} C_1\dfrac{dz_1}{dt} + A_1 z_1 + gB_{12}z_2 = f_1(t), \quad z_1(0) = z_1^0; \\ gC_2\dfrac{dz_2}{dt} + gB_{21}z_1 = 0, \quad z_2(0) = z_2^0, \end{cases} \quad (5.1)$$

где $z_1 \in H_1$ — набор динамических переменных, $z_2 \in H_2$ — набор кинематических переменных, $0 \ll C_1 \in \mathcal{L}(H_1)$ — оператор кинетической энергии, $C_2 = C_2^* \in \mathcal{L}(H_2)$ — оператор потенциальной энергии, $0 \leq A_1$ — оператор диссипации энергии, а B_{12} и $B_{21} = -B_{12}^*$ — ограниченные операторы, связанные с обменом между кинетической и потенциальной энергиями системы. В частности, к такой форме сводятся задачи для одного маятника с тремя видами рассмотренных видов заполнений полости жидкостями, см. [9], [10]. В [7] доказана теорема о существовании единственного сильного решения задачи (5.1) на заданном отрезке времени $[0;T]$ в предположении статической устойчивости по линейному приближению ($C_2 \gg 0$), либо в ее отсутствие. Основываясь на данной теореме предполагается доказать сильную разрешимость исходной задачи, а также изучить свойства соответствующей спектральной задачи, которые существенно зависят от свойств операторов C_2 и A_1.

Автор выражает благодарность Н. Д. Копачевскому за постановку задачи и руководство работой.

Список цитируемых источников

1. *Азизов Т. Я., Копачевский Н.Д.* Абстрактная формула Грина и её приложения. – Симферополь: ТНУ, 2011. – 136 с.

   Azizov, T. Ya., Kopachevsky, N. D. Abstract Green's formula and its applications. Simferopol: Bondarenko O.A., 2011. (in Russian)

2. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д.* Приложения индефинитной метрики. – Симферополь: ДИАЙПИ, 2014. – 276 с.

   Azizov, T. Ya., Kopachevsky, N. D. Applications of indefinite metrics. Simferopol: DIAIPI, 2014. (in Russian)

3. *Батыр Э. И.* Малые движения системы последовательно сочлененных тел с полостями, содержащими вязкую несжимаемую жидкость // Динамические системы. – 2001. – Вып. 17. – С. 120-125.

   Batyr, E. I. Small motions of a system of joined bodies with cavities contains a viscous incompressible fluid. Dinamicheskie sistemy 17, 120–125 (2001). (in Russian)

4. *Батыр Э. И., Копачевский Н. Д.* Малые движения и нормальные колебания системы сочлененных гиростатов // Современная математика. Фундам. направления. – 2013. – Том 49. – С. 5–88.

   Batyr, E. I., Kopachevsky, N. D. Small motions and normal oscillations of a system of joined gyrostats. Contemporary math. Fundamental directions. 49, 5–88 (2013). (in Russian)

5. *Жуковский Н. Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Избранные сочинения. – Т. 1. – М., Л.: Гостехиздат, 1948. – С. 31–52.

   Zhukovskiy, N. E. On motions of rigid body with cavities filled with homogeneous ideal fluid. Selected works. Moscow: Gostechizdat, 31–52 (1948). (in Russian)

6. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, 1989. – 416 с.

   Kopachevsky, N. D., Krein, S. G. & Ngo Zui Kan Operator methods in linear hydrodynamics. Evolution and spectral problems. Moscow: Nauka, 1989. (in Russian)

7. *Копачевский Н. Д., Войтицкий В. И., Ситшаева З. З.* О колебаниях двух сочлененных маятников, содержащих полости, частично заполненные несжимаемой жидкостью // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2017. – Т.63, №4 . – С. 627-677.

   Kopachevsky, N. D., Voytitsky, V I., Sitshaeva, Z. Z. On oscillations of joined pendulums with cavities partially filled with incompressible fluid. Contemporary math. Fundamental directions. Vol. 63, issue 4, 627–677 (2017). (in Russian)

8. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д.* О малых колебаниях системы из трёх сочленённых маятников с полостями, заполненными несмешивающимися несжимаемыми жидкостями // Материалы международной научной конференции "Современные методы и проблемы математической гидродинамики - 2018" (3-8 мая 2018 г., Воронеж). – 2018. – С. 84-91.

Voytitsky, V I., Kopachevsky, N. D. On small oscillations of a system of three joined pendulums with cavities filled with incompressible immiscible fluids. Proceedings of int. conf. "Modern methods and problems of mathematical hydrodynamics-2018" (3-8 May 2018, Voronezh), 84–91 (2018). (in Russian)

9. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д.* О малых движениях физического маятника, содержащего полость, заполненную системой однородных несмешивающихся жидкостей // Сборник материалов международной конференции XXIX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2018). Секции 1-3. – Симферополь: "Полипринт 2018. – С. 58-62.

Voytitsky, V I., Kopachevsky, N. D. On small motions of a physical pendulum with cavity filled with system of homogeneous immiscible fluids. Proceedings of int. conf. "XXIX Crimea Autumn Mathematical School-symposium (KROMSH-2018)" (17-29 September 2018, Laspi), 58–62 (2018). (in Russian)

10. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д.* О малых движениях физического маятника с полостью, заполненной системой трёх однородных несмешивающихся вязких жидкостей // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). – 2018. – № 3(40). – С. 22-45.

Voytitsky, V I., Kopachevsky, N. D. On small motions of a physical pendulum with cavity filled with system of three homogeneous immiscible viscous fluids. Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics (TVIM). Vol. 3(40), 22-45 (2018). (in Russian)

Получена 11.11.2018