Динамические системы, 2018, том 8(36), №3, 235–244

УДК 517.938

Хирургическая операция для эндоморфизма Аносова двумерного тора не дает растягивающийся аттрактор[1]

В. З. Гринес, Е. В. Жужома, Е. Д. Куренков

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики
Нижний Новгород 603005. *E-mail: vgrines@hse.ru, nzhuzhoma@hse.ru, ekurenkov@hse.ru*

Аннотация. В 1967 году С. Смейл предложил способ построения гиперболических аттракторов и репеллеров коразмерности один диффеоморфизмов, заданных на n-мерном торе, отталкиваясь от алгебраического автоморфизма Аносова. Фактически, С. Смейл схематично описал локальное изменение такого автоморфизма, называемое хирургической операцией, в результате которого получается так называемый ДА-диффеоморфизм. Неблуждающее множество ДА-диффеоморфизма состоит в точности из одного растягивающегося аттрактора коразмерности один и одной источниковой неподвижной точки, или в точности одного сжимающегося репеллера коразмерности один и одной стоковой неподвижной точки. В настоящей работе устанавливается, что применение хирургической операции С. Смейла к алгебраическому эндоморфизму Аносова, являющимся конечно-листным накрытием степени не меньшей двух, не приводит к построению A-эндоморфизма, неблуждающее множество которого содержит одномерный растягивающийся аттрактор.

Ключевые слова: гиперболический аттрактор, репеллер, эндоморфизмы Аносова, аксиома A.

Surgery operation for Anosov endomorphism gives no expanding attractor

V. Z. Grines, E. V Zhuzhoma, E. D. Kurenkov

National Research University Higher School of Economics
Nizhny Novgorod 603005..

Abstract. In 1967 S. Smale proposed a method how to construct hyperbolic codimension one attractors and repellers of diffeomorphisms given on n-torus. The construction was based on Anosov toral algebraic diffeomorphism. In essence, he described local modification of such automorphism that leads to so-called derived from Anosov diffeomorphism. The nonwandering set of DA-diffeomorphism consists either of an expanding codimension one attractor and a trivial source or of codimension one contracting repeller and a trivial sink. In the present paper we show that Smale's surgery operation applied to Anosov endomorphism that is k-fold covering map of degree not less than two does not lead to an A-endomorphism with one-dimensional expanding attractor.

Keywords: hyperbolic attractor, repeller, Anosov endomorphism, axiom A.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ, грант 17-11-01041), кроме доказательства предложения 2 и следствия из него. Это доказательство было поддержано ЦФИ НИУ ВШЭ и получено в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ, проект ТЗ-95, в 2018 году.

MSC 2010: 47N10, 49J20, 49J35, 93C20, 70E99

1. Введение

В 1967 году Смейл [13] предложил способ построения нетривиальных базисных множеств, отталкиваясь от диффеоморфизма Аносова (основные понятия и факты теории динамических систем см. в книгах [3, 6] и обзорах [1, 13]). Фактически, Смейл схематично описал *хирургическую операцию* над диффеоморфизмом Аносова, в результате которой получается ДА-диффеоморфизм (аббревиатура ДА получается из первых букв словосочетания *Derived* from *Anosov*) с базисными множествами, имеющими топологическую размерность на единицу меньшую, чем размерность несущего многообразия. Аккуратное описание хирургической операции для автоморфизма Аносова $F_0\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ двумерного тора, заданного формулой (1.1), имеется в монографиях [8, 11].

$$\begin{cases} \bar{x} = 2x + y \\ \bar{y} = x + y \end{cases} \qquad \mathrm{mod}\ 1 \tag{1.1}$$

Идея хирургической операции состоит в том, что вместо неподвижной седловой точки $O = (0; 0)$ в ее малой окрестности определенным образом образуется одна узловая (стоковая или источниковая) и две седловые неподвижные точки. При этом одинаково возможны следующие два сценария: 1) узловая неподвижная точка является источником; 2) узловая неподвижная точка является стоком, см. рис. 1.

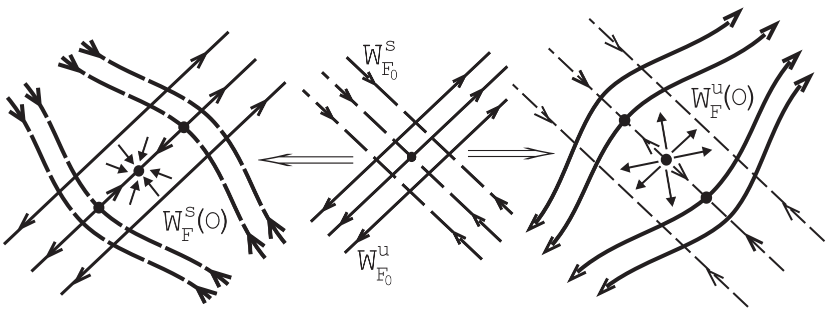

Рис. 1. Возможные сценарии хирургической операции.

В первом случае неблуждающее множество полученного ДА-диффеоморфизма состоит из источниковой неподвижной точки одномерного растягивающегося аттрактора. Во втором случае (см. левую часть рис. 1) неблуждающее множество полученного ДА-диффеоморфизма состоит из стоковой неподвижной точки и одномерного сжимающегося репеллера. Поскольку хирургическая операция сконцентрирована вблизи малой окрестности седловой неподвижной точки, то ДА-диффеоморфизм гомотопен (даже, изотопен) исходному автоморфизму Аносова.

Для первого сценария (см. правую часть рис. 1) в результате хирургической бифуркации получается ДА-диффеоморфизм $F\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ со следующими свойствами:

1) F является А-диффеоморфизмом, то есть его неблуждающее множество является гиперболическим и множество периодических точек плотно в неблуждающе множестве;

2) неблуждающее множество F состоит в точности из двух базисных множеств: неподвижной источниковой точки O и одномерного растягивающегося аттрактора Λ (то есть $F(\Lambda) = \Lambda = F^{-1}(\Lambda)$ и $\bigcup_{x\in\Lambda} W^u(x) = \Lambda$);

3) каждое неустойчивое многообразие $W^u(x)$, $x \in \Lambda$, является одномерной незамкнутой кривой, причем множество $\bigcup_{x\in\Lambda} W^u(x)$ образует одномерную ламинацию, локально гомеоморфную произведению отрезка на канторово множество (о ламинациях см., например, [2]);

4) дополнение $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$ к Λ является областью, гомеоморфной открытому диску, которая содержит неподвижную точку O, и достижимая изнутри граница области $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$ состоит из двух слоев ламинации Λ.

Второй сценарий аналогичен первому, но неблуждающее множество полученного ДА-диффеоморфизма состоит из стоковой неподвижной точки и единственного сжимающегося одномерного репеллера. При этом свойства полученного диффеоморфизма аналогичны свойствам 1)-4) диффеоморфизма в первом случае (с очевидными изменениями). В силу [5] любой диффеоморфизм Аносова двумерного тора сопряжен алгебраическому гиперболическому автоморфизму (то есть автоморфизму, заданному целочисленной унимодулярной матрицей, собственные значения которой не равны по модулю единице). Поэтому в понятном смысле можно считать, что хирургическая операция строится для любого диффеоморфизма Аносова на двумерном торе.

Существенно более широкий класс динамических систем Аносова на двумерном торе образуют эндоморфизмы Аносова, не являющиеся, вообще говоря, взаимно-однозначными отображениями. Известно, что имеется массивное множество неалгебраических эндоморфизмов Аносова, не сопряженных ни с каким алгебраическим эндоморфизмом [14]. Принципиальное отличие эндоморфизмов Аносова от диффеоморфизмов Аносова состоит в возможной зависимости неустойчивых многообразий точек от отрицательных полуорбит. Этим фактом обусловлена структурная неустойчивость эндоморфизмов Аносова, не являющихся диффеоморфизмами или растягивающими эндоморфизмами [10]. Непосредственно проверяется, что для алгебраических эндоморфизмов Аносова, заданных на двумерном торе, неустойчивые многообразия точек не зависят от отрицательных полуорбит. Поэтому представляется вполне естественным шагом сперва рассмотреть хирургическую операцию именно для алгебраических эндоморфизмов, например, для эндоморфизма Аносова $f_0 \colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, заданного формулой (1.2).

$$\begin{cases} \bar{x} = 3x + y, \\ \bar{y} = x + y. \end{cases} \quad \mod 1 \tag{1.2}$$

Поскольку f_0 является локальным диффеоморфизмом и локально топологически сопряжен с диффеоморфизмом F_0 в окрестности седловой неподвижной точки $O = (0; 0)$, то оба сценария хирургической операции формально возможны.

В работе [4] реализован второй сценарий хирургической операции Смейла для алгебраического эндоморфизма Аносова вида (1.2). В результате был построен А-эндоморфизм $f \colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ двумерного тора, неблуждающее множество которого состоит из гиперболического сжимающегося репеллера Λ, неустойчивые многообразия которого не зависят от выбора отрицательной полуорбиты, и одной стоковой неподвижной точки O. При этом множество Λ обладает следующими свойствами:

1) Λ является строго инвариантным (то есть, $f^{-1}(\Lambda) = \Lambda$);

2) Λ образует ламинацию, не содержащую слоев, гомеоморфных окружности;

3) достижимая изнутри граница любой компоненты связности множества $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$ состоит ровно из двух слоев ламинации Λ.

Однако, как будет следовать из основного результата данной работы, первый сценарий для эндоморфизма Аносова (1.2) не приводит к А-эндоморфизму с нетривиальным одномерным растягивающимся аттрактором, обладающим аналогичными свойствами.

Теорема 1. *Пусть $f \colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ — А-эндоморфизм, являющийся k-накрытием, $k \geq 2$. Тогда f не имеет одномерных аттракторов Λ, удовлетворяющих следующим условиям:*

- *Λ является строго инвариантным;*
- *неустойчивое многообразие $W^u(x)$ каждой точки $x \in \Lambda$ не зависит от ее отрицательной полуорбиты и является одномерной незамкнутой кривой;*
- *имеет место равенство $\bigcup_{x\in\Lambda} W^u(x) = \Lambda$ и Λ образует ламинацию локально гомеоморфную произведению отрезка на канторовское множество;*
- *любая достижимая изнутри граница компоненты связности множества $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$ состоит из конечного числа слоев ламинации Λ.*

Этот результат согласуется с результатами Шуба [12] и Нитецки [9], относящимся к неособым эндоморфизмам окружности. Напомним, что ещё в 1969 году

Шуб [12] описал хирургическую операцию линейного растягивающего отображения окружности[2], в результате которой получается неособый эндоморфизм с изолированным источником и репеллером канторовского типа. Через год Нитецки [9] доказал, что нетривиальные базисные множества неособого А-эндоморфизма окружности являются репеллерами.

2. Предварительные сведения

Пусть M^n — n-мерное ($n \geq 1$) замкнутое многообразие. Будем называть C^r-гладкое ($r \geq 1$) сюрьективное отображение $f\colon M^n \to M^n$ *C^r-эндоморфизмом* или *C^r-гладким эндоморфизмом.*

Орбитой или *f-орбитой* точки $x_0 \in M = M^n$ называется множество $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty} = O(x_0)$ такое, что $f(x_i) = x_{i+1}$ для любого $i \in \mathbb{Z}$. Множество $\{x_i\}_{i=0}^{\infty} = O^+(x_0) \subset O(x_0)$ называется *положительной полуорбитой* точки x_0. Положительная полуорбита определена однозначно, в то время как множество орбит, проходящих через фиксированную точку, в общем случае может быть континуальным. Для фиксированной орбиты $\{x_i\}_{-\infty}^{\infty} = O(x_0)$ множество $\{x_i\}_{-\infty}^{0} = O^-(x_0)$ называется *отрицательной полуорбитой* орбиты $O(x_0)$.

Точка $x \in M$ эндоморфизма $f\colon M \to M$ называется *неблуждающей*, если для любой окрестности U точки x и любого $i_0 \in \mathbb{N}$ найдется $i \geq i_0$ такое, что $f^i(U) \cap U \neq \emptyset$. Множество неблуждающих точек образует *неблуждающее множество* эндоморфизма f, и обозначается через $NW(f)$. Известно, что неблуждающее множество является инвариантным относительно действия эндоморфизма f, то есть $f\left(NW(f)\right) \subset NW(f)$.

Определение 1. Орбита $O(x_0)$ называется *гиперболической*, если существует непрерывное расслоение касательного подрасслоения

$$\mathbb{T}_{O(x_0)}M = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{T}_{x_i}M = \mathbb{E}^s \bigoplus \mathbb{E}^u = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}^s_{x_i} \bigoplus \mathbb{E}^u_{x_i},$$

инвариантное относительно Df, и такое, что

$$0 < ||Df^m(v)|| \leq c\mu^m ||v||, \ ||Df^m(w)|| \geq c^{-1}\mu^{-m}||w|| \quad \text{для} \ \ v \in \mathbb{E}^s, \ w \in \mathbb{E}^u, \ \forall m \in \mathbb{N}$$

для некоторых постоянных $c > 0$, $0 < \mu < 1$ и римановой метрики на TM.

Отметим, что неустойчивое подрасслоение $\mathbb{E}^u(x_0)$ зависит, вообще говоря, от отрицательной полуорбиты $\{x_i\}_{i=-\infty}^{0}$. Может оказаться $\mathbb{E}^u(x_0) \neq \mathbb{E}^u(y_0)$ для $x_0 = y_0$ с $O(x_0) \neq O(y_0)$. Такой эффект невозможен для устойчивого подрасслоения $\mathbb{E}^s(x_0)$, зависящего только от начальной точки x_0. Множество Λ называется *гиперболическим*, если $f(\Lambda) = \Lambda$, и любая орбита, лежащая в Λ гиперболическая, причем постоянные $c > 0$, $0 < \mu < 1$ в вышеприведенных оценках не зависят от выбора орбиты (поэтому иногда говорят о *равномерной гиперболичности*).

[2]Это отображение, в силу свойств устойчивости и транзитивности, можно рассматривать как некоторый аналог автоморфизма Аносова

Определение 2. Эндоморфизм $f\colon M \to M$, называется эндоморфизмом Аносова, если все объемлющее многообразие M^n является гиперболическим множеством эндоморфизма f.

Хорошо изученными эндоморфизмами Аносова являются растягивающие эндоморфизмы, то есть такие эндоморфизмы, для которых разложение $\mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u$ тривиально, $\mathbb{E}^s$ — нульмерно, а размерность $\mathbb{E}^u$ совпадает с размерностью объемлющего многообразия. В частности, в работе [12] доказано, что если M компактно, то периодические точки растягивающего эндоморфизма f плотны в M. Таким образом, любой растягивающий эндоморфизм компактного многообразия автоматически удовлетворяет аксиоме A, а его неблуждающее множество совпадает со всем объемлющим многообразием. В той же работе было показано, что любое гладкое компактное многообразие, допускающее растягивающий эндоморфизм, имеет эйлерову характеристику равную нулю, а его универсальное накрывающее пространство диффеоморфно $\mathbb{R}^n$. Если компактное многообразие M является плоским[3], то, как следует из работы [7], на нем существует растягивающий эндоморфизм.

В работе [12] было показано, что если многообразие M^n диффеоморфно n-мерному тору $\mathbb{T}^n$, то растягивающий эндоморфизм f топологически сопряжен с алгебраическим растягивающим автоморфизмом этого тора.

Определение 3. C^r-гладкий $(r \geq 1)$ эндоморфизм $f\colon M \to M$ называется *A-эндоморфизмом*, если его неблуждающее множество $NW(f)$ гиперболическое, и в $NW(f)$ всюду плотны периодические точки.

Напомним, что отображение $f\colon N \to N$ называется *транзитивным*, если существует точка $x \in N$, положительная полуорбита которой плотна в N. Приведем формулировку следующей так называемой Спектральной Теоремы для A-эндоморфизмов, доказанной в [10], и являющейся обобщением теоремы о спектральном разложении С. Смейла для диффеоморфизмов [13].

Предложение 1. *Неблуждающее множество $NW(f)$ A-эндоморфизма $f\colon M \to M$ единственным образом с точностью до нумерации представляется в виде объединения замкнутых и попарно непересекающихся множеств*

$$NW(f) = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_l, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \ \ \text{\textit{при}} \ \ l \neq j,$$

таких, что

- $f(\Omega_j) = \Omega_j$ *для всех* $1 \leq j \leq l$.
- $f|_{\Omega_j}\colon \Omega_j \to \Omega_j$ *транзитивен для всех* $1 \leq j \leq l$.

Множества $\Omega_1,\ldots,\Omega_l$, удовлетворяющие теореме 1, называются *базисными множествами.*

Заметим, что из условия $f(\Omega_j) = \Omega_j$ вообще говоря не следует, что $f^{-1}(\Omega_j) = \Omega_j$. В связи с этим дадим следующее определение.

[3]То есть таким, у которого кривизна всюду равна нулю.

Определение 4. Базисное множество Λ A-эндоморфизма$f\colon M \to M$ называется *строго инвариантным*, если имеет место равенство $f^{-1}(\Lambda) = \Lambda$.

Для доказательства основного результата нам понадобится следующее топологическое утверждение.

Предложение 2. *Пусть X — топологическое пространство, обладающее базой $\mathcal{B}$, состоящей из связных множеств, и пусть $N \subset X$ — замкнутое подмножество. Тогда каждая компонента связности дополнения $X \setminus N$ является открытым множеством.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $x \in X \setminus N$. Так как $X \setminus N$ — открытое множество, то найдется связное открытой множество $U \in \mathcal{B}$ такое, что $x \in U$. Пусть K — компонента связности $X \setminus N$, содержащая точку x. Так как K есть наибольшее связное подмножество $X \setminus N$, содержащую точку x, а U связна, имеет место включение $U \subset K$. Доказываемое утверждение теперь немедленно следует из произвольности выбора точки x. □

Следствие. *Пусть M — замкнутое многообразие, а $N \subset M$ — его замкнутое подмножество. Тогда каждая компонента связности $M \setminus N$ является открытым множеством.*

Доказательство. В качестве базы $\mathcal{B}$, состоящей из связных множеств, достаточно взять объединение всех множеств вида $\varphi(B_r(p))$, где $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to M$ — координатное отображение атласа многообразия M, а $B_r(p)$ — открытый шар радиуса r. □

3. Доказательство теоремы 1

Предположим противное, то есть, что существует A-эндоморфизм $f\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, обладающий аттрактором Λ с указанными в формулировке теоремы свойствами.

Так как неустойчивое многообразие $W^u(x)$ любой точки $x \in \Lambda$ является незамкнутой кривой без самопересечений, и $f(W^u(x)) = W^u(f(x))$, то ограничение $f|_{W^u(x)}$ является инъективным отображением.

Покажем теперь, что в дополнении $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$ имеется компонента связности K, содержащая некоторую периодическую точку O эндоморфизма f. Так как Λ является аттрактором, то найдется его замкнутая окрестность $U \supset \Lambda$ такая, что $f(U) \subset \mathrm{int}(U)$, и $\bigcap\limits_{l=0}^{\infty} f^l(U) = \Lambda$. Рассмотрим произвольную точку $y_0 \in \mathbb{T}^2 \setminus U$ и ее произвольную отрицательную полуорбиту $O^-(y_0)$. Из включения $f(U) \subset U$ непосредственно вытекает, что пересечение $O^-(y_0) \cap U$ пусто. Так как α-предельное множество любой точки $x \in \mathbb{T}^2$ содержится в неблуждающем множестве $NW(f)$, то замыкание $cl(O^-(y_0))$ содержит точку $w \in NW(f) \setminus \Lambda$. Тогда в силу предложения 1 существует базисное множество $\Lambda_1 \subset \mathbb{T}^2 \setminus U$, отличное от Λ, содержащее точку w. В базисном множестве Λ_1 выберем произвольную периодическую точку

O некоторого наименьшего периода k. Если $k > 1$, то можно провести дальнейшие рассуждения для отображения f^k. Таким образом, можно без ограничения общности считать точку O неподвижной точкой отображения f.

Пусть K — компонента связности дополнения $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$, содержащая неподвижную точку O. Обозначим через $\delta(K)$ достижимую изнутри K границу компоненты K, и возьмем слой $l \subset \Lambda$ ламинации Λ из $\delta(K)$. По условию, l является неустойчивым многообразием некоторой точки из Λ. Покажем, что $f^r(l) = l$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$. Действительно, достижимость изнутри K означает, что для любой точки $z \in l$ существует дуга d с концевыми точками O и z такая, что $d \setminus \{z\} \subset K$. Поскольку f является локальным диффеоморфизмом, а Λ и $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$ инвариантны относительно f, то аналогичная дуга $f(d)$ существует для точки $f(z)$. Следовательно, $f(z)$ принадлежит достижимому из K слою $f(l)$ ламинации Λ. Это означает инвариантность множества $\delta(K)$. Поскольку $\delta(K)$ состоит из конечного числа слоев, то $f^r(l) = l$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$. Перейдя к итерации f^{nr}, если необходимо, будем далее считать, что теперь все слои ламинации Λ из $\delta(K)$ инвариантны относительно f.

Рассмотрим произвольную точку $p \in l$. Так как f является k-накрытием, $k \geq 2$, то полный прообраз $f^{-1}(p)$ содержит точку $p_1 \neq p$. Так как $f(\Lambda) = \Lambda = f^{-1}(\Lambda)$, то $p_1 \in \Lambda$. В силу инъективности ограничения $f|_{W^u(x)}$ имеем $p_1 \notin l$. Ясно, что p_1 не принадлежит достижимой из K границе $\delta(K)$. Действительно, если $p_1 \in l_*$, где l_* — достижимый из K слой ламинации Λ, инвариантный относительно f, отличный от l, то $f(l_*) = l_*$. С другой стороны, $f(l_*) = l$, чего не может быть.

Так как f является накрытием, а множества Λ и $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$ инвариантны относительно f, то из рассмотрения поднятия пути соединяющего точки p и O с началом в точке p_1 следует, что точка p_1 принадлежит достижимой изнутри границе некоторой компоненты связности K_1 множества $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$. Более того, p_1 принадлежит слою, скажем l_1, ламинации Λ такому, что $f(l_1) = l$. Из предыдущего вытекает, что $l_1 \notin \delta(K)$. Поэтому $K \neq K_1$. Более того, в K_1 имеется точка O_1 такая, что $f(O_1) = O$. Аналогично показывается, что полный прообраз $f^{-1}(p_1)$ содержит точку $p_2 \notin \{p, p_1\}$, принадлежащую компоненте K_2 дополнения $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$ к Λ такой, что $K_2 \notin \{K, K_1\}$, и существует точка $O_2 \in K_2$ такая, что $f(O_2) = O_1$. Продолжая этот процесс, получим отрицательную полуорбиту $O^-(p) = \{p = p_0, p_1, p_2, \ldots\}$, $f(p_{j+1}) = p_j$, точки p, и последовательность $\{K = K_0, K_1, K_2, \ldots\}$, $f(K_{j+1}) = K_j$, со следующими свойствами

1) точка $p_i \in K_i$ принадлежит достижимой из K_i границе области K_i для всех $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

2) K_i суть попарно различные компоненты связности дополнения $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$ к Λ;

3) существует отрицательная полуорбита $O^-(O) = \{O, O_1, O_2, \ldots\}$, $f(O_{j+1}) = O_j$, точки O такая, что $O_i \in K_i$ для всех $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Так как $O \in \mathbb{T}^2 \setminus U$, и $f(U) \subset U$, то имеет место включение $O^-(O) \subset \mathbb{T}^2 \setminus \mathrm{int}(U)$. Из включения $O^-(O) \subset \mathbb{T}^2 \setminus \mathrm{int}(U)$ и компактности множества $\mathbb{T}^2 \setminus \mathrm{int}(U)$, следует, что последовательность $O^-(O)$ имеет предельную точку $O^* \in \mathbb{T}^2 \setminus \mathrm{int}(U)$. Пусть K^* — компонента связности множества $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$, содержащая точку O^*. В силу следствия из предложения 2 компонента связности K^* является открытым множеством. Тогда найдутся два различных числа $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ таких, что $O_{n_1} \in K^*$ и $O_{n_2} \in K^*$, что противоречит тому, что K_{n_1} и K_{n_1} — различные компоненты связности дополнения $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$. $\square$

Список цитируемых источников

1. *Аносов, Д. В.* Исходные понятия. Элементарная теория. // “Современные проблемы математики” Фундаментальные направления (Итоги науки и техники), Дин. системы - 1. / Под ред. Д. В. Аносова. — 1985. — С. 156–178, С. 178–204.

   Anosov, D. V. Basic Concepts. Elementary Theory. Dynamical systems 1, 156-178 (1985).

2. *Аносов, Д. В., Жужома, Е. В.* Нелокальное асимптотическое поведение кривых и слоев ламинаций на универсальных накрывающих. — Москва: Наука (Труды МИАН, 249), 2005. — 239 с.

   Anosov, D. V., Zhuzhoma, E. V. Asymptotic behavior of covering curves on the universal coverings of surfaces. Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova 238, 5-54 (2002).

3. *Гринес, В. З., Починка, О. В.* Введение в топологическую классификацию диффеоморфизмов на многообразиях размерности два и три. — Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. — 424 с.

   Grines, V. Z. , Medvedev, T. V., Pochinka, O. V. Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. Switzerland Springer International Publishing, 295, 2016.

4. *Куренков, Е. Д.* О существовании эндоморфизма двумерного тора со строго инвариантным сжимающимся репеллером // Журнал Средневолжского математического общества. — 2017. — Т.19, №1. — С. 60–66.

   Kurenkov, E. D. On existence of endomorphism of 2-torus with strictly invariant contracting repeller. Zhurnal Srednevozhskogo matematicheskogo obshetva 19(1), 60-66 (2017).

5. *Синай, Я. Г.* Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы // Функциональный анализ и его приложения. — 1968. — Т.2, №1. — С. 64–89.

   Sinai, Ya. G. Markov partitions and C-diffeomorphisms. Functional Analysis and its applications 2, No.1, 61-82 (1968).

6. *Aranson, S., Belitsky, G., Zhuzhoma, E.* Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces. // Translations of Math. Monographs, Amer. Math. Soc., Vol.153, 1996.

7. *Epstein, D., Shub, M.* Expanding endomorphisms of flat manifolds // Topology. — 1968. — Vol.7, No.2. — P. 139–141.

8. *Katok, A., Hasselblatt, B.* Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. — Cambridge University Press, 1995.

9. *Nitecki, Z.* Nonsingular endomorphisms of the circle // Proc. Symp. Pure Math. — 1970. — Vol.14. — P. 203–220.

10. *Przytycki, F.* Anosov endomorphisms // Studia Math. — 1977. — Vol.58, No.3. — P. 249–285.

11. *Robinson, C.* Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. Studies in Adv. Math., Sec. edition. — CRC Press, 1999.
12. *Shub, M.* Endomorphisms of compact differentiable manifolds // Amer. J. Math. — 1969. — Vol.91. — P. 175–199.
13. *Smale S.* Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. — 1967. — Vol.73. — P. 747–817.
14. *Zhang, M.* On the topologically conjugate classes of Anosov endomorphisms on tori. // Chinese Annals of Math., ser. B. — 1989. — Vol.10. — P. 416–425.

Получена 20.09.2018