ISSN 0203-3755

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Том 8 (36), №4

2018

Динамические системы, 2018, том 8(36), №4, 305–311

MSC 2010: 37D15

On construction of axiom A 3-diffeomorphism with one-dimensional surface attractor-repeller dynamics[1]

M. Barinova, V. Grines, O. Pochinka

Higher School of Economics

Nizhny Novgorod 603005. *E-mail: mkbarinova@yandex.ru, vgrines@yandex.ru, olga-pochinka@yandex.ru*

Abstracts. We suggest a method of a construction of axiom A 3-dieomorphisms whose non-wandering set consists of exactly one-dimensional surface attractor and one-dimensional surface repeller. Unlike from examples constructed by Ch. Bonatti, N. Guilman and Sh. Yi, our diffeomorphisms are not structurally stable, however suggested method gives rather simple construction of new types of 3-manifolds, admitting "hyperbolic sink-hyperbolic source" dynamics.

Keywords: A-diffeomorphism, surface basic set

1. Introduction

Let M be a closed n-manifold and $f : M \to M$ be an axiom A diffeomorphism. By Smale's spectral theorem the non-wandering set of f consists of finite number f-invariant closed subsets, named *basic sets*. For a basic set Λ a pair (a, b), where $a = \dim W^u_\Lambda, b = \dim W^s_\Lambda$ is called *type of the basic set.*

A basic set A of the diffeomorphism f is called *attractor* if it has a *trapping region*, that is a compact neighborhood $U_A \subset M$ such that $f(U_A) \subset int\, U_A$ and $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}} f^j(U_A) = A$. A basic set R is called a *repeller* if it is an attractor for f^{-1}.

A hyperbolic attractor of diffeomorphism f is called *surface* if there exists a compact surface Σ that $A \subset \Sigma$, $f(\Sigma) \subset \Sigma$. A surface repeller is defined as surface attractor for f^{-1}.

There is a natural question: does some manifold admit an A-diffeomorphism with exactly two basic sets of the same dimension and attractor-repeller dynamics? Such a diffeomorphism is automatically Ω-stable. The simplest example of such a system is a Morse-Smale diffeomorphism on n-sphere ($n \geq 1$) whose non-wandering set consists of exactly one sink and one source. These examples are structurally stable and exhaust all possible diffeomorphisms with zero-dimensional attractor and repeller.

For an attractor and repeller with the dimension $2k$ ($k \in \mathbb{N}$) also not so difficult to realize a diffeomorphism on n-manifold ($n > 2k$) as a direct product of Anosov diffeomorphism on $2k$-torus with the type (k, k) by sink-source diffeomorphism on

[1]This work was supported by the Russian Science Foundation (project 14-41-00044).

$(n-2k)$-sphere. Moreover, for 3-manifolds by V. Grines, Yu. Levchenko, V. Medvedev, O. Pochinka [4] proved that two-dimensional attractor-repeller 3-diffeomorphisms there are only on mapping torus and obtained complete topological classification of such rough systems.

Particular case is a surfaces diffeomorphism with one-dimensional attractor and repeller. Such dynamics is achieved, for example, by taking of the connected sum of two DA-models on 2-tori. However R. Robinson, R. Williams [5] proved that among such diffeomorphisms there are no structural stable one.

B. Jiang, Y. Ni and S. Wang [2] proved that a 3-manifold M admits an axiom A diffeomorphism f whose non-wandering set consists of solenoid attractors and repellers if and only if M is a lens space $L(p, q)$ with $p \neq 0$. They also shown that such f are not structural stable. C. Wang and Y. Zhang [6] got infinitely many genus two 3-manifolds, each admits a diffeomorphism whose non-wandering set consists of two Williams solenoids, one attractor and one repeller. These manifolds contain half of Prism manifolds, Poincare's homology 3-sphere and many other Seifert manifolds, all integer Dehn surgeries on the figure eight knot, also many connected sums.

On the other hand, due to Ch. Bonatti, N. Guelman [1], Shi Yi [3], there are examples of rough 3-diffeomorphisms with one-dimensional attracor and repeller. But all examples have very complicated descriptions.

In this paper we suggest a method of a construction of an axiom A 3-diffeomorphisms whose non-wandering set consists of exactly one-dimensional surface attractor and one-dimensional surface repeller. All known examples were constructed in [1] and [3]. Constructed in this paper diffeomorphisms are not structurally stable, however suggested method gives rather simple construction of new 3-manifolds, admitting "hyperbolic sink-hyperbolic source" dynamics, different from the manifolds constructed in [1] and [3].

2. Construction

The diffeomorphism will be constructed step by step in this section as following:

- take an Anosov diffeomorphism of a 2-torus $\mathbb{T}^2$;
- make a Smale "surgery operation" to obtain the system with one fixed source and one-dimensional attractor on the torus;
- multiply $\mathbb{T}^2$ by $\mathbb{R}$ with contraction to 0, hence one-dimensional surface attractor on $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ will be obtained;
- construct a fundamental domain of the attractor;
- take an analogical sample with one-dimensional surface repeller;
- "glue" the fundamental domains of the diffeomorphisms in the basins of attractor and repeller in accordance with dynamics.

2.1. Anosov diffeomorphism of a 2-torus

Let $C \in GL(2,\mathbb{Z})$ be a hyperbolic matrix with the eigenvalues λ_1, λ_2 so that $\lambda = |\lambda_1| > 1$ and $|\lambda_2| = 1/\lambda$. As the matrix C has the determinant equals 1 then it generates the hyperbolic automorphism $\widehat{C} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ with the fixed point O. This automorphism is Anosov diffeomorphism, so there are two transversal foliations (stable and unstable) which are dense on the 2-torus, and a set of periodical points is also dense.

2.2. Smale "surgery operation"

Let $U(O) \subset \mathbb{T}^2$ be a some neighbourhood of the fixed point O of the diffeomorphism $\widehat{C}$ and x, y be local coordinates such that the diffeomorphism $\widehat{C}$ in these coordinates has a form

$$\widehat{C}(x,y) = (x/\lambda, \lambda y)\,.$$

Then $Ox \subset W^s_O$ and $Oy \subset W^u_O$, also $\{y = const\}$ and $\{x = const\}$ are stable and unstable foliations. A diffeomorphism $\widehat{B} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ with properties described below will be constructed in this section:

- $\widehat{B}$ will be identity on $\mathbb{T}^2 \setminus U(O)$;
- $\widehat{B}$ will keep unstable manifolds of $\widehat{C}$ everywhere;
- $\widehat{B}$ will add additional expansion along stable manifolds of $\widehat{C}$ inside some neighbourhood of O;
- the composition $\widehat{\Psi} = \widehat{B} \circ \widehat{C}$ is DA-diffeomorphism with a fixed source O and one-dimensional attractor A.

Let $\nu : [0,1] \to [0,1]$ be a diffeomorphism defined by the graph on Fig. 1. Then $\nu_t(x) = (1-t)x + t\nu(x)$, $t \in [0,1]$ is an isotopy between the identity map $\nu_0(x)$ on $[0,1]$ and $\nu_1(x) = \nu(x)$. Let $\sigma(x,a,b) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a sigmoid function of the form

$$\sigma(x,a,b) = \begin{cases} \frac{1}{1+\exp\left(\frac{(a+b)/2 - x}{(x-a)^2(x-b)^2}\right)}, & a < x < b, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

It monotonically sends $[a,b]$ to $[0,1]$.

For every $t \in [0,1]$ let us define a diffeomorphism $B_t : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ which possess the symmetries with respect to both axis Ox, Oy and in the first quadrant given by the formula

$$B_t(x,y) = \begin{cases} (\nu_t(x), y)\,, & 0 \leqslant y < \frac{1}{2\lambda^3}, \\ \left(\sigma(y, \frac{1}{2\lambda^3}, \frac{1}{2})x + (1 - \sigma(y, \frac{1}{2\lambda^3}, \frac{1}{2}))\nu_t(x), y\right)\,, & \frac{1}{2\lambda^3} \leqslant y < \frac{1}{2}, \\ (x,y), & \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

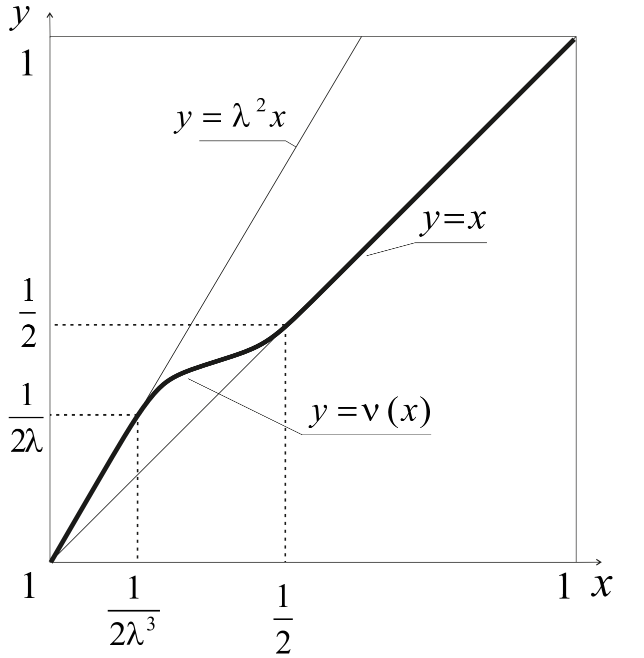


Рис. 1. Graph of funcion $\nu(x)$

By the construction B_t is an isotopy between the identity map $B_0(x,y)$ on $[0,1]^2$ and $B_1(x,y)=B(x,y)$. As B preserves y-coordinate, we will use the following designation: $B(x,y)=(\gamma(x,y),y)$. Let $D=\{(x,y)\in U(O): x^2+y^2\leqslant\frac{1}{(2\lambda^3)^2}\}$. By the construction B is identity out of $[0,1/2]^2$ and for points $(x,y)\in D$ we have $\gamma(x,y)=\lambda^2x$.

Let $\widehat{B_t}$ be a B_t inside $[0,1]^2$ and is identity out of it. By arguments like to [7] it is possible to prove that $\widehat{\Psi}=\widehat{B}\circ\widehat{C}$ is a DA-diffeomorphism, whose non-wandering set consists of a one-dimensional attractor and a source.

2.3. One-dimensional surface attractor of $\mathbb{T}^2\times\mathbb{R}$

Consider a smooth function $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ by the formula $\varphi(z)=\frac{z}{\lambda}$. Define a diffeomorphism of $\mathbb{T}^2\times\mathbb{R}$ in coordinates $w\in\mathbb{T}^2, z\in\mathbb{R}$ by the formula

$$\Phi(w,z)=(\widehat{\Psi}(w),\varphi(z)).$$

The diffeomorphism Φ is an A-diffeomorphism whose non-wandering set contains one saddle point $\{O\}\times\{0\}$ and an one-dimensional attractor $\mathcal{A}$ which is placed on a 2-torus $\mathbb{T}^2\times\{0\}$.

2.4. Fundamental domain of the attractor

To find a fundamental domain of the basin of the attractor $\mathcal{A}$, first of all, notice that $\mathbb{T}^2\times(-\frac{1}{2\lambda^2},\frac{1}{2\lambda^2})$ is a trapping neighbourhood of an attractor $\mathbb{T}^2\times\{0\}$. It is not a trapping neighbourhood for $\mathcal{A}$ because there are a saddle point O and a segment of its stable separatrix $\{O\} \times (-\frac{1}{2\lambda^2}, \frac{1}{2\lambda^2})$ inside. A small neighbourhood of the separatrix will be chosen to remove them.

So $U_1^{\mathcal{A}} = (\mathbb{T}^2 \setminus \widehat{\Psi}^{-1}(D)) \times \left(-\frac{1}{2\lambda^2}, \frac{1}{2\lambda^2}\right)$ is a desired trapping neighbourhood for the attractor $\mathcal{A}$. Indeed, $\Phi(U_1^{\mathcal{A}}) = (\mathbb{T}^2 \setminus D) \times \left(-\frac{1}{2\lambda^3}, \frac{1}{2\lambda^3}\right) = U_2^{\mathcal{A}} \subset int\, U_1^{\mathcal{A}}$ and $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Phi^n(U_1^{\mathcal{A}}) = \mathcal{A}$.

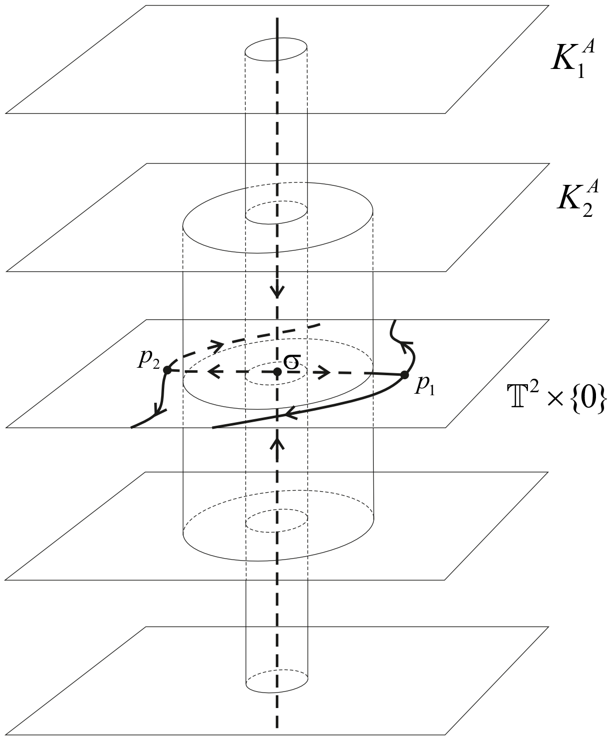


Рис. 2. Fundamental domain of an one-dimensional surface attractor

After that a fundamental domain of a basin of the attractor $\mathcal{A}$ is $K^{\mathcal{A}} = cl\,(U_1^{\mathcal{A}} \setminus U_2^{\mathcal{A}})$ (see Fig. 2). Notice, that $\partial U_1^{\mathcal{A}}$ is a pretzel and $K^{\mathcal{A}}$ is homeomorphic to the direct product of a pretzel by a segment. We will use the following designation: $K_1^{\mathcal{A}} = \partial U_1^{\mathcal{A}}$, $K_2^{\mathcal{A}} = \partial U_2^{\mathcal{A}}$. So $\Phi(K_1^{\mathcal{A}}) = K_2^{\mathcal{A}}$.

2.5. One-dimensional surface repeller of $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$

Define a diffeomorphism $\theta : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ by the formula $\theta(x,y) = (-y,x)$. For every $t \in [0,1]$ let us define a diffeomorphism $Q_t : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ by the formula $Q_t = \theta^{-1} B_t^{-1} \theta$. By the construction Q_t is an isotopy between the identity map $Q_0(x,y)$ on $[0,1]^2$ and $Q_1(x,y) = Q(x,y)$. Let $\widehat{Q}_t$ be a Q_t inside $[0,1]^2$ and is identity out of it. So $\widehat{Q}_t$ keeps stable foliation of $\widehat{C}$ and add additional contraction along unstable manifolds of $\widehat{C}$ inside some neighbourhood of O. Thus $\widehat{\Psi}_- = \widehat{Q} \circ \widehat{C}$ is a DA-diffeomorphism, whose non-wandering set consists of a one-dimensional repeller and a sink.

Consider a copy of $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ with the following diffeomorphisms of it

$$\Phi_-(w,z) = (\widehat{\Psi}_-(w), \varphi^{-1}(z)).$$

The diffeomorphism Φ_- is an A-diffeomorphism whose non-wandering set contains one saddle point $\{O\} \times \{0\}$ and an one-dimensional repeller $\mathcal{R}$ which is placed on a 2-torus $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$. Trapping neighbourhoods $U_1^{\mathcal{R}}$, $U_2^{\mathcal{R}}$ of $\mathcal{R}$ and a fundamental domain $K^{\mathcal{R}}$ of a basin of the repeller $\mathcal{R}$ are the same as for diffeomorphism Φ so $\Phi_-(U_2^{\mathcal{R}}) = U_1^{\mathcal{R}}$, $K_1^{\mathcal{R}} = \partial U_1^{\mathcal{R}}$, $K_2^{\mathcal{R}} = \partial U_2^{\mathcal{R}}$, and $\Phi_-(K_2^{\mathcal{R}}) = K_1^{\mathcal{R}}$.

2.6. Gluing of the fundamental domains

The goal of this section is to construct a diffeomorphism $H : K^{\mathcal{R}} \to K^{\mathcal{A}}$ with the properties:

- $H(K_2^{\mathcal{R}}) = H(K_1^{\mathcal{A}})$ and $H(K_1^{\mathcal{R}}) = H(K_2^{\mathcal{A}})$;
- $H = \Phi$ on $K_1^{\mathcal{R}}$ and $H = \Phi_-$ on $K_2^{\mathcal{R}}$.

For every $t \in [0,1]$ let $\widehat{\xi_t} = \widehat{B}_t \circ \widehat{Q}_t^{-1} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$. Notice that $\widehat{\xi_1} = \widehat{\Psi} \circ \widehat{\Psi}_-^{-1}$. Then $\widehat{\xi_t} \circ \widehat{\Psi}_-$ is an isotopy between $\widehat{\Psi}_-$ and $\widehat{\Psi}$. By the construction $\widehat{\xi_t} \circ \widehat{\Psi}_-$ has a form $\widehat{\xi_t} \circ \widehat{\Psi}_-(x,y) = (k(t)x, k(t)y)$ for $(x,y) \in \widehat{\Psi}(D)$, where

$$k(t) = \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) t + \frac{1}{\lambda}.$$

Finally let $r, q : [0,1] \to \left[\frac{1}{2\lambda^3}, \frac{1}{2\lambda^2}\right]$ be functions given by the formulas

$$r(t) = \frac{\lambda - 1}{2\lambda^3} t + \frac{1}{2\lambda^3}, \quad q(t) = k(t) \cdot r(t).$$

Consider the fundamental domain $K^{\mathcal{R}}$ of the basin of the repeller $\mathcal{R}$ (all reasoning for the attractor $\mathcal{A}$ are analogical). Let $D_{r(t)} = \{(x,y) \in U(O) : x^2 + y^2 \leqslant r^2(t)\}$. Then $K^{\mathcal{R}}$ can be represented foliated by leaves

$$\{G_{r(t)} = G \times r(t),\ t \in [0,1]\}$$

such that $G_{r(0)} = K_2^{\mathcal{R}}$, $G_{r(1)} = K_1^{\mathcal{R}}$ and $G_{r(t)}$ coincides with the tori $\mathbb{T}^2 \times \{\pm r(t)\}$ out of $D_{r(t)} \times \mathbb{R}$ and coincides with the cylinder $\partial D_{r(t)} \times [-r(t), r(t)]$ otherwise (see Fig. 3).

Define a map $H_t : G_{r(t)} \to G_{q(t)}$, $t \in [0,1]$ as follows

$$H_t(w,z) = \left(\widehat{\xi_t}(\widehat{\Psi}_-(w)), \frac{q(t)}{r(t)} z\right).$$

Thus the diffeomorphism $H : K^{\mathcal{R}} \to K^{\mathcal{A}}$, composed by $H_t, t \in [0,1]$, glues the dynamics of Φ_- and Φ along the fundamental domains. After a smoothing the corners

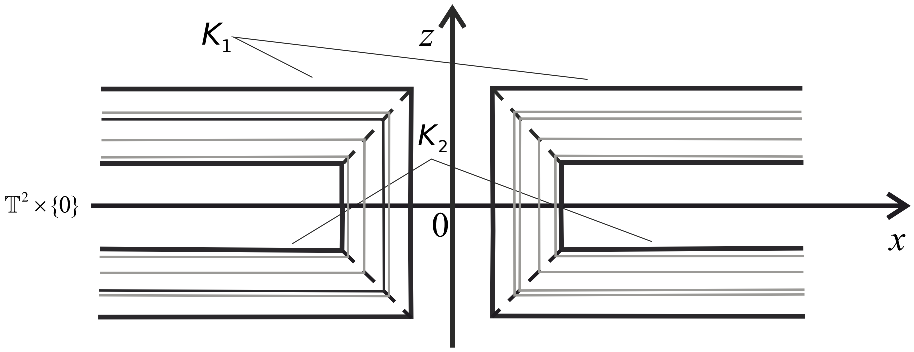


Рис. 3. Foliation of the fundamental domain

we get a new 3-manifold M with the desired A-diffeomorphism whose non-wandering set consists of one-dimensional surface repeller and one-dimensional surface attractor.

References

1. *Bonatti Ch., Guelman N.* Axiom A diffeomorphisms derived from Anosov flows, J. Mod. Dyn. 4, No.1, 1-63 (2010).
2. *Jiang B., Ni Y., Wang S.*, 3-manifolds that admit knotted solenoids as attractors, Trans. Amer. Math. Soc. 356, No.11, 4371-4382 (2004).
3. *Shi Yi* Partially hyperbolic diffeomorphisms on Heisenberg nilmanifolds and holonomy maps, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 352, No.9, 743-747 (2014).
4. *Grines V., Levchenko Y., Medvedev V., Pochinka O.* The topological classification of structural stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets, Nonlinearity 28, No.11, 4081-4102 (2015).
5. *Robinson R. C., Williams R. F.* Finite Stability is not generic (Dynamical Systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971)) вЂ" Academic Press, New York), 451-462 (1973).
6. *Wang Ch., Zhang Y.* Alternating Heegaard diagrams and Williams solenoid attractors in 3-manifolds. Topol. Methods Nonlinear Anal. 47, No.2, 769-798 (2016).
7. *Williams R.* The DA-maps of Smale and structural stability, Global Anal., Proc. Symp. Pure. Math., AMS 14, 329-334 (1970).

Получена 15.10.2018

Динамические системы, 2018, том 8(36), №4, 313–336

УДК 517.9

Синхронизация двух простейших автогенераторов с релейными запаздывающими обратными связями

Д. С. Кащенко

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Ярославль 150003. *E-mail: kasch@uniyar.ac.ru*

Аннотация. Численными и аналитическими методами исследована динамика системы из двух связанных автогенераторов первого порядка с релейной запаздывающей обратной связью. В пространстве параметров выделены области "быстрой" и "долгой" синхронизации, исследован вопрос о синхронизации на неустойчивом цикле, при малых коэффициентах связи аналитическими методами показано, что динамика исходной системы определяется динамикой специального одномерного отображения.

Ключевые слова: устойчивость, динамика, релаксационные циклы, нерегулярные колебания.

Synchronization of two simplest autogenerators with delay reling feedbacks

D. S. Kaschenko

P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl 150003.

Abstract. The dynamics of a system of two coupled first-order autogenerators with a relay delay feedback is studied by numerical and analytical methods. In the parameter space, areas of "fast" and "long" synchronization are highlighted, the issue of synchronization on an unstable cycle is investigated, with small coupling coefficients using analytical methods, it is shown that the dynamics of the original system is determined by the dynamics of a special one-dimensional map.

Keywords: stability, dynamics, relaxation cycles, irregular oscillations.
MSC 2010: 47D99

Введение

Исследованию явлений синхронизации взаимодействующих динамических систем в настоящее время уделяется особое внимание. Из сферы чисто теоретических интересов эти явления перешли в область практического применения. Проведенные в последние годы исследования привели к формированию новых представлений о роли синхронизации (в том числе, синхронизации сложных — хаотических режимов) в природе, наметились перспективы их использования для создания новых информационных технологий. Имеется значительное число аналитических и экспериментальных исследований хаотической синхронизации в динамических системах различной природы [1-11]. Несмотря на то, что в ряде работ получены достаточно общие результаты, характеризующие закономерности возникновения хаотической синхронизации, дальнейшее изучение этого явления представляет как теоретический, так и практический интерес.

В данной работе исследуется явление синхронизации в системе двух связанных простых автогенераторов первого порядка с нелинейной запаздывающей обратной связью релейного типа. Такие системы широко используются в ряде конкретных приложений, например, в электротехнике [12,13].

Статья состоит из трех разделов. В первом из них исследуется динамика базовой математической модели автогенератора указанного класса. Показано, что уравнение имеет единственный устойчивый цикл и счетное множество неустойчивых. Приведены результаты численного анализа, из которых следует, что все решения (с начальными условиями, удовлетворяющими условию типа невырожденности) при $t \to \infty$ стремятся к устойчивому циклу. Важное значение имеет оценка времени сходимости решений к циклу в зависимости от величины запаздывания и от степени сложности начальных условий. Часть результатов этого раздела изложена в [14].

Второй раздел является основным. Сначала в нем сформулирован критерий синхронизации для “системы первого приближения”, которой служит дискретная сиситема уравнений. Как оказывается для исходной задачи о синхронизации в системе двух связанных генераторов этот критерий имеет важное значение. При его выполнении происходит “быстрая” синхронизация колебаний, а при его нарушении — “долгая”. В последнем случае построен график зависимости времени синхронизации от параметра запаздывания.

При уменьшении коэффициентов связи между генераторами структура решений может усложняться. В связи с этим в третьем разделе рассмотрена задача о динамике двух слабо связанных уравнений. Построено конечномерное отображение, динамика которого описывает поведение решений исходной системы.

1. Динамика уравнения первого порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} + x = f(x(t-T)), \tag{1}$$

где $T > 0$ — время запаздывания, а $f(s)$ — функция релейного типа:

$$f(s) = \begin{cases} 1, & s < g \\ 0, & s \geq g \end{cases}, \quad 0 < g < 1. \tag{2}$$

Отметим сразу, что данное уравнение не имеет состояний равновесия.

1.1. Простейший цикл

Назовем цикл $x_0(t,T)$ уравнения (1) *медленно осциллирующим*, если расстояние между соседними корнями уравнения $x_0(t,T) = g$ больше, чем T.

Пусть $x_0(0,T) = g$ и $\dot{x}_0(0,T) < 0$. Тогда из условия медленной осцилляции $x_0(t,T)$ следует неравенство $x_0(t,T) > g$ при $t \in [-T,0]$, и при $t \in (0,T)$ имеем $x_0(t,T) = g\exp(-t)$. На некотором отрезке, примыкающем справа к точке $t = T$ справедливо соотношение

$$x_0(t,T) = x_0(T,T)\exp-(t-T) + 1 - \exp(-(t-T)). \tag{3}$$

Пусть t_1 и t_2, соответственно, первый и второй положительные корни уравнения $x_0(t,T) = g$. Тогда из (3) получаем, что

$$t_1 = T + \ln\frac{1 - g\exp(-T)}{1-g}. \tag{4}$$

Формула (3) остается в силе при $t \in (T, t_1 + T]$. На отрезке $[t_1 + T, t_2]$ имеем равенство

$$x_0(t,T) = x_0(t_1+T,T)\exp(-(t-(t_1+T))),$$

а для t_2 верна формула

$$t_2 = t_1 + T + \ln\frac{x_0(t_1+T,T)}{g}. \tag{5}$$

В итоге получаем следующий результат:

Теорема 1. *Уравнение* (1) *имеет экспоненциально орбитально устойчивое t_2-периодическое решение $x_0(t,T)$. Его период определяется формулами* (4), (5).

На рис. 1a изображен график решения $x_0(t,T)$ при $T = 1$ и $g = 0.3$.

Приведем асимптотические формулы для периодического решения. Сначала рассмотрим случай

$$0 < g \ll 1. \tag{6}$$

Тогда формулы (4) и (5) принимают вид:

$$t_1 = T + o(1), \quad t_2 = O(|\ln(g)|).$$

Примерный вид решения $x(t)$ при $T = 1$ и $g = 0.01$ приведен на рис. 1b.

Отметим, что случай, когда параметр g близок к 1, сводится к случаю (6), если в уравнении (1) произвести замену $x \to 1 - x$.

В дальнейшем нам понадобятся асимптотики периодического решения при $T \to \infty$. Произведем в уравнении (1) замену

$$t \to Tt. \tag{7}$$

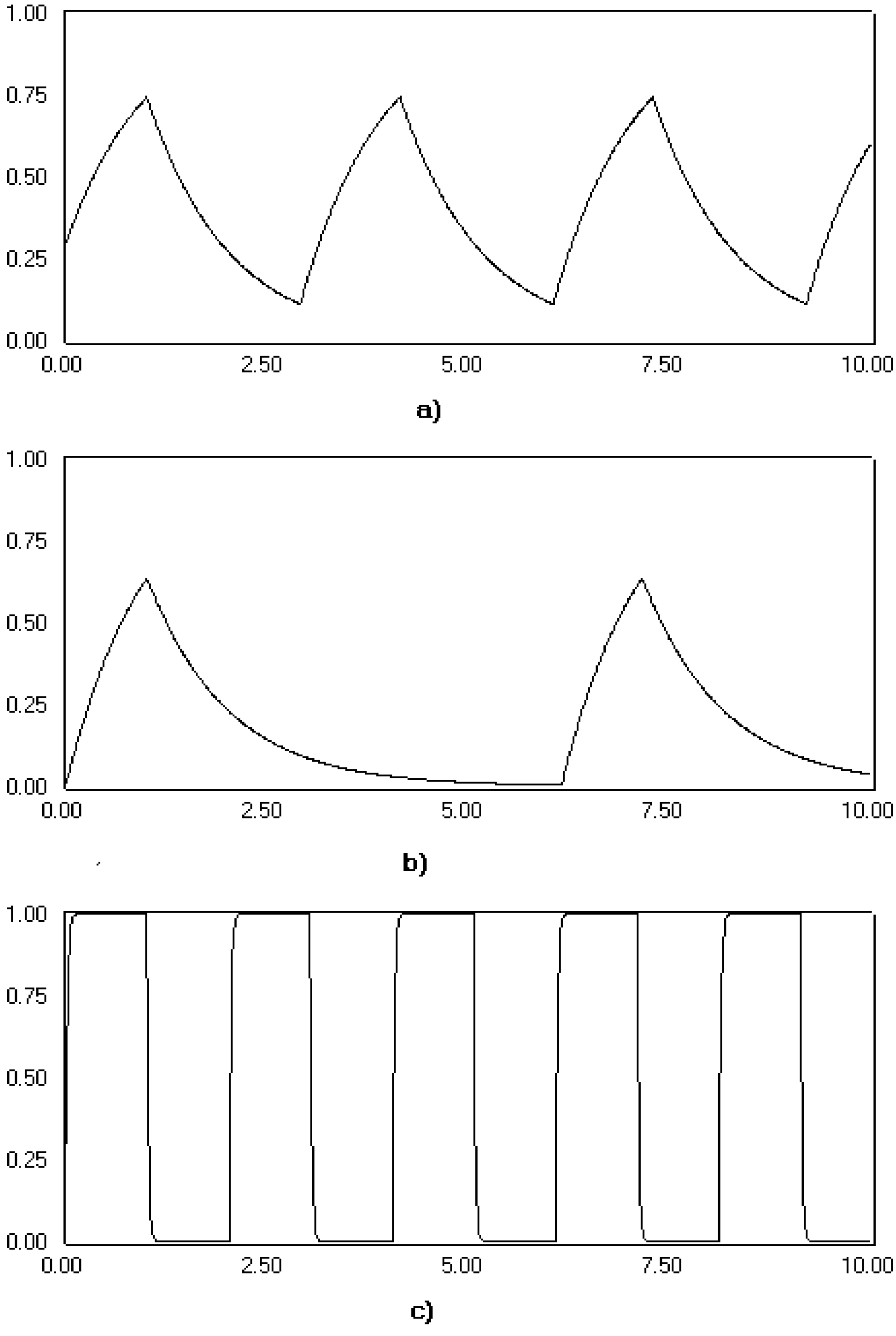


Рис. 1.

Полагая $\varepsilon = T^{-1}$, приходим к уравнению

$$\varepsilon \dot{x} + x = f(x(t-1)). \tag{8}$$

Используя формулы (3)-(5), получаем, что при $\varepsilon \to 0$ простейший цикл уравнения (8) близок к ступенчатой функции, принимающей два значения 0 и 1 поочередно на интервалах времени длины $1 + o(1)$, и имеет период $2 + o(1)$. Примерный вид решения при $\varepsilon = 0.02$ и $g = 0.3$ приведен на рис. 1c.

1.2. Быстро осциллирующие периодические решения

Выше было установлено существование устойчивого периодического решения $x_0(t, T)$, медленно осциллирующего около прямой $x = g$. В этом разделе будет показано, что имеется счетное число быстро осциллирующих около этой же прямой неустойчивых периодических решений.

Рассмотрим множество начальных функций

$$C(\tau_1, \tau_2) = \Big\{ \begin{array}{l} \varphi(s, \tau) \in C_{[-T,0]}, \quad 0 < \tau_1, \tau_2 < 1, \quad \tau_1 + \tau_2 < 1, \\ \varphi(-T + T\tau_1) = \varphi(-T + T(\tau_1 + \tau_2)) = \varphi(0) = g, \\ \varphi(s) > g \text{ при } s \in [-T, -T + T\tau_1) \cup (-T + T(\tau_1 + \tau_2), 0), \\ \varphi(s) < g \text{ при } s \in (-T + T\tau_1, -T + T(\tau_1 + \tau_2))\Big\}. \end{array}$$

Отметим, что решение $x(t, \tau)$ уравнения (1) с начальными условиями $x(s, \tau) \in C(\tau_1, \tau_2)$ зависит только от $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ и не зависит от выбора конкретного элемента множества $C(\tau_1, \tau_2)$. Примерный вид функции $\varphi(s, \tau)$ изображен на рис. 2.

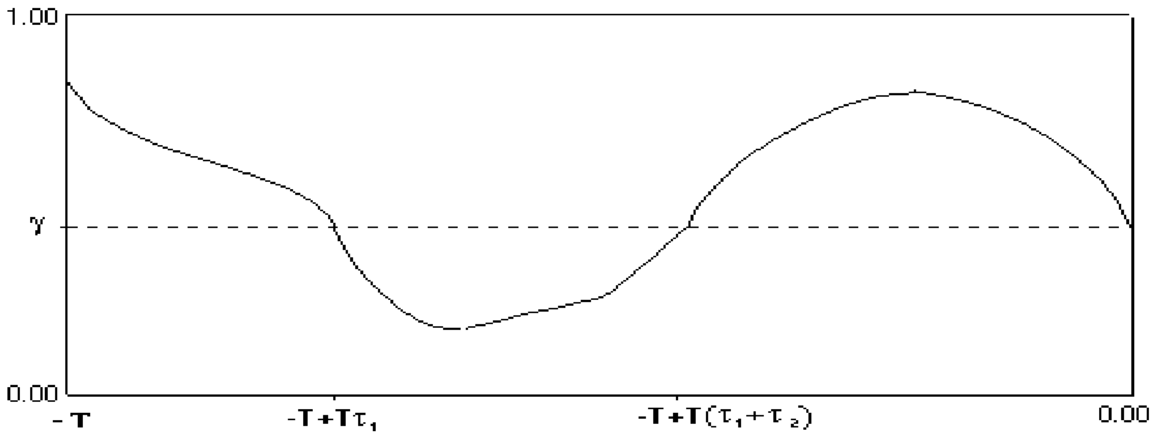


Рис. 2.

Для $x(t, \tau)$ имеем

$$\begin{array}{l} x(t, \tau) = g\exp(-t), \text{ при } t \in [0, T\tau_1], \\ x(t, \tau) = (x(T\tau_1, \tau) - 1)\exp(-(t - T\tau_1)) + 1, \text{ при } t \in (T\tau_1, T(\tau_1 + \tau_2)], \\ x(t, \tau) = x(T(\tau_1 + \tau_2), \tau)\exp(-(t - T(\tau_1 + \tau_2))), \text{ при } t \in (T(\tau_1 + \tau_2), T]. \end{array}$$

При условии $x(T(\tau_1+\tau_2),\tau) < g$ решение $x(t,\tau)$ через некоторое время совпадает с медленно осциллирующим периодическим решением $x_0(t+\mathrm{const},T)$. Пусть

$$x(T(\tau_1+\tau_2),\tau) > g. \tag{9}$$

Обозначим, как и раньше, через t_1, t_2 — первый и второй положительные корни уравнения $x(t,\tau)=g$. Тогда получаем равенства

$$\begin{aligned} t_1 &= T\tau_1 + \ln(1-g\exp(-T\tau_1)) - \ln(1-g), \\ t_2 &= T(\tau_1+\tau_2) + \ln x(T(\tau_1+\tau_2),\tau) - \ln g. \end{aligned}$$

Если $t_2 \geq T$, то $x(t,\tau)$ через некоторое время совпадает с решением $x_0(t+\mathrm{const},T)$. Пусть

$$t_2 < T, \tag{10}$$

Рассмотрим оператор Пуанкаре

$$\Pi(\varphi(s,\tau)) = x(t_2+s,\tau).$$

При условиях (9), (10) этот оператор преобразует множество $C(\tau_1,\tau_2)$ в $C(\bar\tau_1,\bar\tau_2)$, где

$$\bar\tau_1 = 1 - t_2T^{-1}, \quad \bar\tau_2 = t_1T^{-1}. \tag{11}$$

Аналогичным способом строятся $2m$-мерные ($m=2,3,\dots$) отображения, описывающие поведение решений с $2m$ пересечениями прямой $x=g$ на некоторых отрезках времени длины T. Динамика таких отображений определяет поведение решений уравнения (1) при $t\to\infty$ с начальными условиями из выбранных специальных множеств.

Покажем, что каждое из таких отображений имеет неподвижную точку. Отметим, что неподвижной точке отвечает периодическое решение уравнения (1).

Зафиксируем произвольное $z>0$ и рассмотрим функцию $x_0(t,z)$. Через $P(z)$ обозначим период этой функции. Для каждого целого $m=0,1,\dots$ функция $x_0(t,z)$ является периодическим решением уравнения

$$\dot x + x = f(x(t-z-mP(z))).$$

Рассмотрим уравнение относительно z:

$$T = z + mP(z).$$

Поскольку функция $P(z)$ монотонно возрастает и $P(z)\to 0$ при $z\to+0$, то это уравнение для каждого m имеет единственное решение z_m. Отсюда следует, что каждая из функций $x_0(t,z_m)$ ($m=0,1,\dots$) является периодическим решением уравнения (1). На интервале $(-T,0)$ количество корней уравнения $x_0(t,z_m)=g$ равно $2m$.

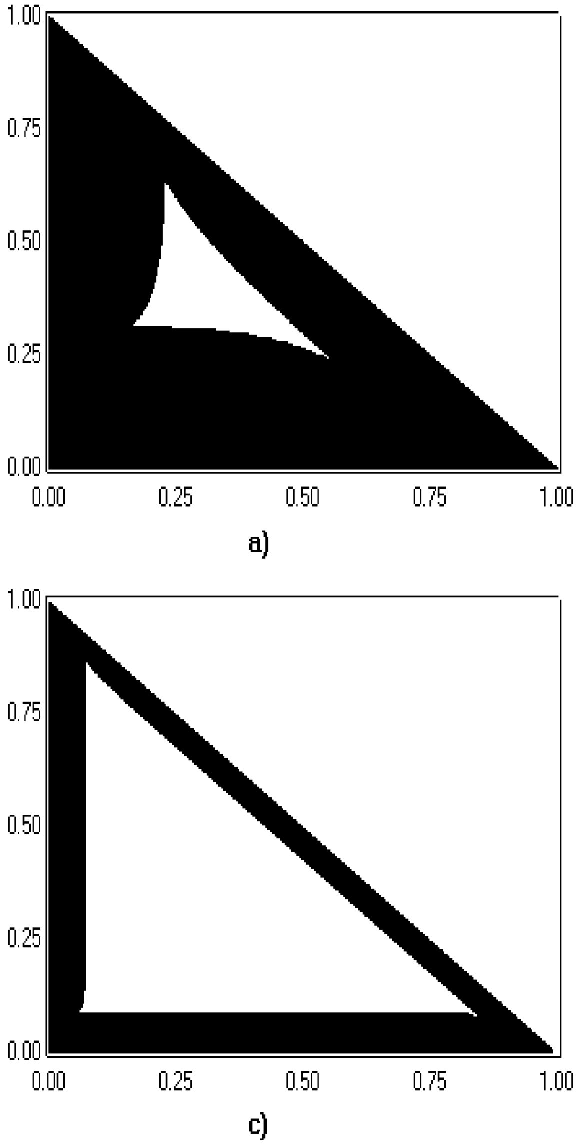


Рис. 3.

Неподвижная точка отображения (11), которой отвечает решение $x_0(t, z_1)$, легко находится из приведенных выше формул для $x_0(t, z)$. Отметим, что периодические решения $x_0(t, z_m)$ при $m \geq 1$ неустойчивы. Численный анализ показывает, что все решения (1) (кроме $x_0(t, z_0)$) через некоторое время совпадают с $x_0(t+\mathrm{const}, T)$.

Чтобы проиллюстрировать это, на "фазовой плоскости" τ_1, τ_2 отображения (11), зафиксируем произвольно точку (τ_1, τ_2) $(0 < \tau_1, \tau_2 < 1,\ \tau_1 + \tau_2 < 1)$, и производим, согласно (11), при $\varepsilon = 0.1$ сначала 20 (рис. 3a), а затем 100 итераций (рис. 3b), а при

$\varepsilon = 0.02$, соответственно 100 (рис. 3c), и 100000 (рис. 3d) итераций. Темным цветом на этой плоскости отмечены те точки, для которых перестают быть верными неравенства (9) и (10), т. е. соответствующее решение теряет начальную структуру и совпадает с $x_0(t + \mathrm{const}, T)$. Отметим, что при незначительном увеличении T количество итераций, необходимых для того, чтобы все точки закрасились в темный цвет, резко возрастает (этот момент подробнее обсуждается в пункте 1.3).

1.3. Оценка времени сходимости к простейшему циклу

Уравнение (1), по-видимому, не имеет устойчивых решений, кроме простейшего цикла $x_0(t, T)$. Результаты численных экспериментов показывают, что все решения, начиная с некоторого момента времени L, совпадают с простейшим циклом. В связи с этим возникают два вопроса:

1. как зависит величина L от параметра T?
2. как зависит величина L от начальных условий?

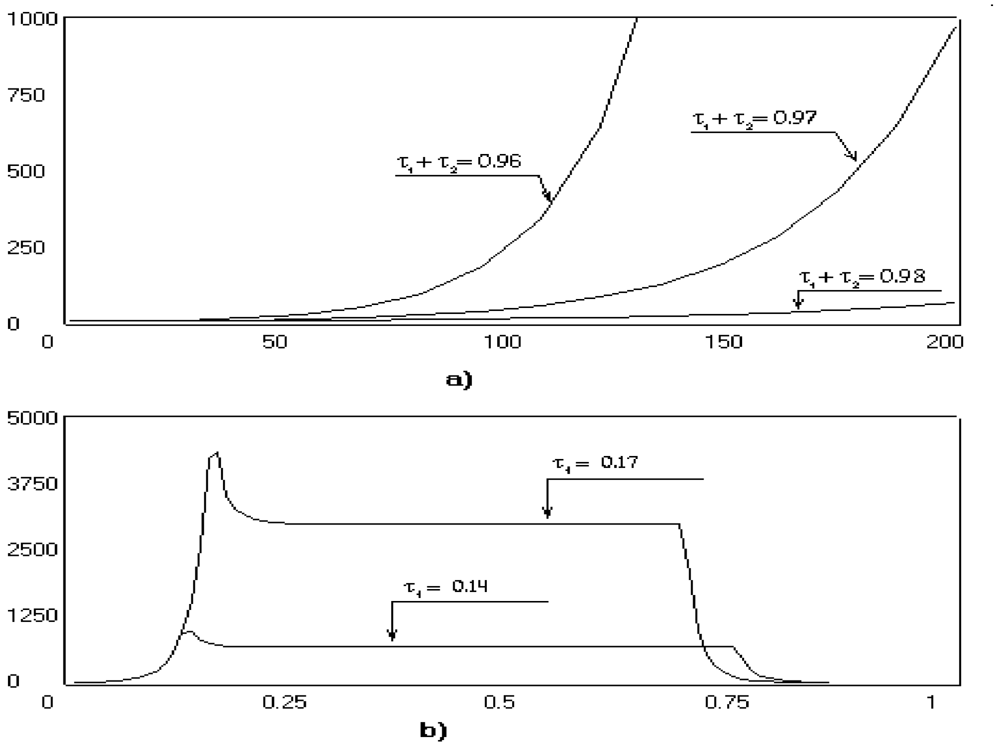


Рис. 4. Графики зависимости величины L
а) от параметра $T = \varepsilon^{-1}$ при различных начальных условиях;
b) от параметра τ_2 при $T = 50, \tau_1 = 0.14$ и $\tau_1 = 0.17$.

На рис. 4a представлены зависимости времени L от $T = \varepsilon^{-1}$ для решений с начальными функциями из $C(\tau_1, \tau_2)$. Стандартные численные методы показывают, что зависимость является экспоненциальной.

Чтобы проследить зависимость величины L от начальных условий, рассмотрим решения с начальными функциями из $C(\tau_1, \tau_2)$ (см. рис 2). Зафиксируем произвольно значение τ_1 и будем менять τ_2 от 0 до $1 - \tau_1$. На рис.4b представлены графики зависимости L от τ_2 при $\tau_1 = 0.14$ и $\tau_1 = 0.17$.

Таким образом, единственным устойчивым режимом уравнения (1) является простейший цикл, но время попадания решений в его “малую” окрестность существенно зависит от малости параметра ε и от степени “сложности” начальных условий.

2. Динамика системы двух связанных уравнений

В этом разделе мы обратимся к исследованию динамики двух одинаковых уравнений вида (1) с различными типами связи между ними. Наибольший интерес представляют два типа связи: диффузионная связь и связь через нелинейность $f(x)$. Рассмотрим отдельно каждую из них.

2.1. Динамика системы уравнений с диффузионной связью

Пусть имеется система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} + x &= f(x(t-T)) + d_1(y-x), \\ \dot{y} + y &= f(y(t-T)) + d_2(x-y), \end{aligned} \tag{12}$$

где коэффициенты диффузионной связи d_1, d_2 неотрицательны, функция $f(s)$ имеет вид (2), а время запаздывания предполагается большим:

$$T \gg 1. \tag{13}$$

Условие (13) представляет собой основное ограничение, при котором здесь исследуется вопрос о синхронизации решений системы (12).

Выполним замену времени (7) и обозначим $\varepsilon = T^{-1}$, тогда систему уравнений (12) принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{x} + x &= f(x(t-1)) + d_1(y-x), \\ \varepsilon\dot{y} + y &= f(y(t-1)) + d_2(x-y). \end{aligned} \tag{14}$$

При $\varepsilon = 0$ имеем систему двух связанных отображений:

$$\begin{aligned} x(t) &= f(x(t-1)) + d_1(y(t)-x(t)), \\ y(t) &= f(y(t-1)) + d_2(x(t)-y(t)). \end{aligned} \tag{15}$$

Рассмотрим сначала вопрос о синхронизации для системы (15).

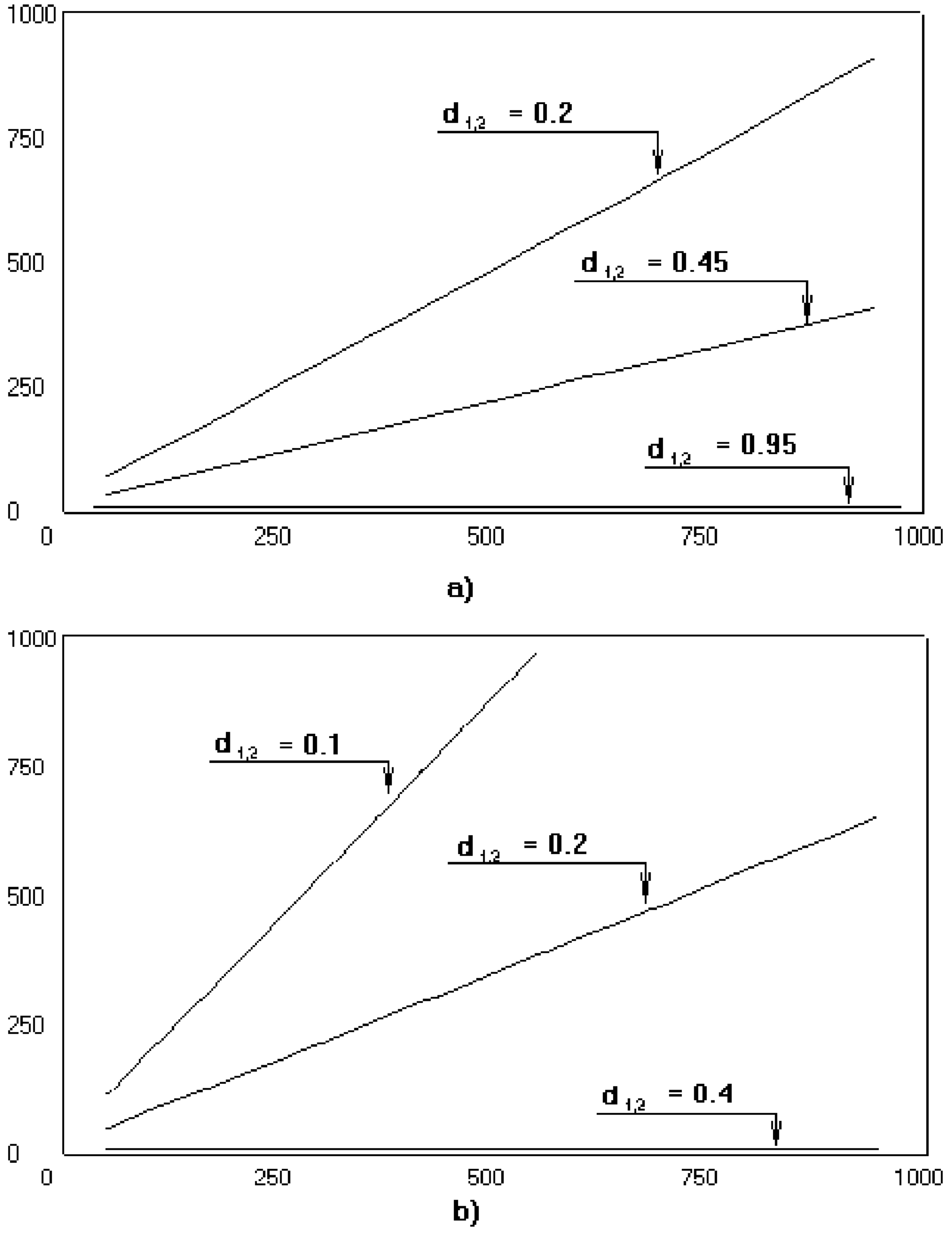

1000
750
500
250
0
0
250
500
750
1000
d 1,2 = 0.2
d 1,2 = 0.45
d 1,2 = 0.95
a)
1000
750
500
250
0
0
250
500
750
1000
d 1,2 = 0.1
d 1,2 = 0.2
d 1,2 = 0.4
b)

Рис. 5.

Поскольку функция f принимает только два значения: 0 и 1, то решая при некотором t систему (15) относительно x и y получаем 4 различных случая:

$$1.\quad \begin{pmatrix} f(x(t-1)) \\ f(y(t-1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$2.\quad \begin{pmatrix} f(x(t-1)) \\ f(y(t-1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Delta^{-1}\begin{pmatrix} 1+d_2 \\ d_2 \end{pmatrix},$$

$$3.\quad \begin{pmatrix} f(x(t-1)) \\ f(y(t-1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Delta^{-1}\begin{pmatrix} d_1 \\ 1+d_1 \end{pmatrix},$$

$$4.\quad \begin{pmatrix} f(x(t-1)) \\ f(y(t-1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} 1+d_1 & -d_1 \\ -d_2 & 1+d_2 \end{pmatrix} = 1 + d_1 + d_2.$$

Из приведенных формул следует, что синхронизация имеет место, если

$$\min\{g, 1-g\} < \Delta^{-1}\max\{d_1, d_2\}, \tag{16}$$

что можно рассматривать как условие на коэффициенты связи d_1 и d_2.

Возвращаясь к системе дифференциальных уравнений, отметим, что в общем случае динамика системы при $\varepsilon = 0$ и при $\varepsilon > 0$ существенно различна, но, как показывают численные эксперименты, при выполнении неравенства (16) (условия синхронизации при $\varepsilon = 0$) в системе (14) происходит "быстрая" синхронизация за относительно короткое время, которое не увеличивается при уменьшении ε. В численных расчетах это время не превышает 10.

Если условие (16) не выполнено, то синхронизация также имеет место, но время, через которое она происходит, существенно больше; при $\varepsilon \to 0$ оно неограниченно растет. На рис. 5а представлены графики зависимости времени синхронизации от ε^{-1} при различных значениях параметров d_1, d_2 и $g = 0.3$. Отметим, что эта зависимость оказывается линейной (если условие (16) выполнено, то график параллелен оси абсцисс).

Важно отметить, что синхронизация в системе (14) происходит существенно быстрее, чем установление простейшего цикла (см., например, рис. 4а и рис. 5а).

2.2. Динамика системы уравнений, связанных через нелинейную функцию

В случае нелинейной связи математической моделью служит система уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} + x &= f[x(t-T) + d_1(y(t-T) - x(t-T))], \\ \dot{y} + y &= f[y(t-T) + d_2(x(t-T) - y(t-T))], \end{aligned} \tag{17}$$

где коэффициенты связи d_1, d_2 удовлетворяют ограничению: $0 \le d_1, d_2 \le 1$, а функция $f(s)$ имеет вид (2).

Исследуется вопрос о синхронизации решений системы (17) при условии (13). После стандартной замены времени, приходим к системе

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{x} + x &= f[x(t-1) + d_1(y(t-1) - x(t-1))], \\ \varepsilon\dot{y} + y &= f[y(t-1) + d_2(x(t-1) - y(t-1))]. \end{aligned} \tag{18}$$

Условие синхронизации вырожденной (при $\varepsilon = 0$) системы (18) состоит в выполнении неравенства

$$\min\{g, 1-g\} < \max\{d_1, d_2\}. \tag{19}$$

При $0 < \varepsilon \ll 1$ здесь, как и в предыдущем случае, при выполнении условия (19) происходит "быстрая" синхронизация (за время, которое не увеличивается при уменьшении ε). Если условие (19) не выполнено, то синхронизация происходит за существенно большее время, которое неограниченно растет при $\varepsilon \to 0$. На рис. 5b представлены графики зависимости времени синхронизации от $T = \varepsilon^{-1}$ при различных значениях параметров d_1, d_2 и $g = 0.3$. Отметим, что эта зависимость тоже оказывается линейной (если условие (19) выполнено, то график параллелен оси абсцисс).

2.3. Оценка параметра синхронизации неустойчивого цикла

Проблема синхронизации неустойчивых циклов возникает при изучении методов обработки и передачи информации (см., например, [1]).

Выше было показано, что уравнение (1) имеет счетное число неустойчивых циклов $x_m(t) = x_0(t, z_m)$ $(m = 1, 2, \dots)$. Зафиксируем произвольно $m \geq 1$. Система уравнений (12) имеет неустойчивое периодическое решение $x(t) = y(t) = x_m(t)$. Рассмотрим отдельно второе уравнение системы при $x(t) = x_m(t)$:

$$\dot{y} + y = f(y(t-T)) + d(x_m(t) - y). \tag{20}$$

Это уравнение имеет периодическое решение

$$y_m(t) = x_m(t). \tag{21}$$

Очевидно, что при малых d оно неустойчиво. Аналитическими методами довольно просто можно установить существование такого значения d_0, что при $d > d_0$ периодическое решение (21) асимптотически устойчиво. Однако, с помощью этих методов получается лишь грубая оценка d_0. Поэтому возникает необходимость численного нахождения величины d_0 в зависимости от параметров m и T. Кроме того, возникает проблема описания области притяжения периодического решения (21) при $d > d_0$. Такие задачи называют задачами о синхронизации на неустойчивом цикле.

Сформулируем основные результаты проведенных численных исследований.

При фиксированных T, g, ε, m значение d_0 оказывается тем больше, чем сложнее начальные условия (т.е. чем большее число пересечений прямой $y = g$ имеется на интервале $(-T, 0)$).

Обозначим через d_{max} пороговое значение величины d_0, такое что при $d \geq d_{max}$ решение (21) оказывается глобально устойчивым при любых начальных условиях. Установлено, что $d_{max} = d_0$ в том случае, если $y(t)$ не имеет пересечений с прямой $y = g$ на интервале $(-T, 0)$ (т.е. начальное условие соответствует простейшему циклу). В таблице 1 приведены результаты расчета d_{max} для уравнения (20) в зависимости от T и m при $g = 0.3$. В таблице 2 представлены аналогичные данные для уравнения

$$\dot{y} + y = f[y(t-T) + d(x_m(t-T) - y(t-T))]$$

Таблица 1

	$m=1$	$m=2$
$T=10$	0.5301	0.8171
$T=20$	0.4335	0.4902

Таблица 2

	m=1	m=2
$T=10$	0.3290	0.4143
$T=20$	0.3011	0.3166

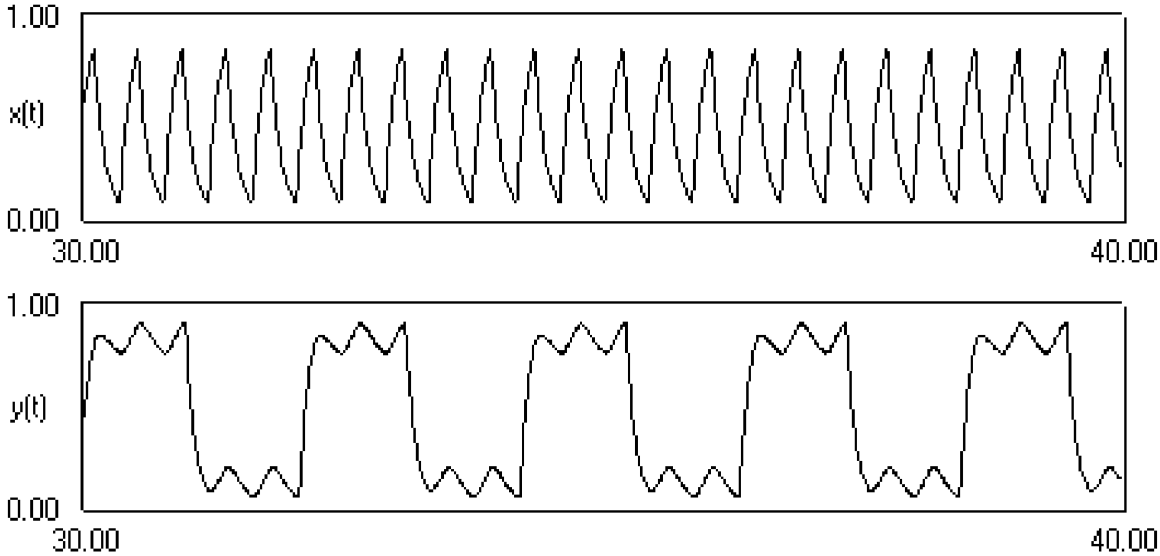


Рис. 6.

Общий вывод заключается в том, что d_{max} уменьшается при увеличении времени запаздывания T и увеличивается при увеличении m.

Заметим, что если решение (21) неустойчиво, то $y(t)$ стремится к более сложному, "близкому к периодическому" решению, вид которого при $m = 2$ представлен на рис. 6.

3. Динамика системы уравнений, при малых значениях коэффициентов связи

Численные результаты показывают, что при уменьшении коэффициентов связи d_1, d_2 структура решений систем (12) и ((17) усложняется. Поэтому представляет интерес исследовать в деталях вопрос о динамике двух слабо связанных генераторов вида (1). В настоящем разделе приведены аналитические результаты, касающиеся динамики таких систем при дополнительном условии (6), когда параметр g мал.

Эти результаты объясняют ряд сложных эффектов, обнаруженных при численном анализе систем со слабой связью.

Сразу отметим, что полученные результаты переносятся и на случай, когда g близко к 1, поскольку он сводится к предыдущему заменой $\bar{x} = 1 - x,\ \bar{y} = 1 - y$.

3.1. Динамика системы (12)

В системе (12) сделаем замену $x \to gx,\ y \to gy$, в результате чего получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} + x = \lambda\Phi(x(t-T)) + d_1(y-x), \\ \dot{y} + y = \lambda\Phi(y(t-T)) + d_2(x-y), \end{array} \right. \tag{22}$$

где $\lambda = g^{-1}$,

$$\Phi(s) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{при } s < 1, \\ 0, & \text{при } s \geq 1. \end{array} \right.$$

Отметим, что система (22) имеет однородный цикл

$$y(t) = x(t) = \lambda x_0(t, T). \tag{23}$$

Для исследования динамики системы (22) сначала положим $z = y(0) - x(0)$ и рассмотрим множество $C(z)$ (зависящее от z как от параметра) таких пар начальных функций $\varphi(s), \psi(s) \in C_{[-T,0]}$, для которых $\varphi(s), \psi(s) \geq 1$ при $s \in [-T, 0]$ и

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi(0) & = 1 - z, \\ \psi(0) & = 1, \end{array} \right. \quad \text{при } z < 0, \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \varphi(0) & = 1, \\ \psi(0) & = 1 + z, \end{array} \right. \quad \text{при } z \geq 0.$$

Пусть $x(t), y(t)$ — решения системы (22) с начальными функциями $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ соответственно, причем $(\varphi(s), \psi(s)) \in C(z)$. Отметим, что x и y не зависят от выбора конкретного элемента из $C(z)$.

Последовательно рассматривая систему (12) на отрезках $[0, T]$, $[T, 2T]$, $[2T, 3T]$, …, можно получить явный вид функций $x(t)$ и $y(t)$. Отметим, что начиная с некоторого момента времени $t = t^*$, эти функции принимают асимптотически большие (поряка l) значения. Тем самым, на асимптотически большом промежутке времени, примыкающем к точке $t_m = t^* + T$, эти функции являются решениями системы линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} + x = d_1(y-x), \\ \dot{y} + y = d_2(x-y). \end{array} \right. \tag{24}$$

Пусть t_{0x}, t_{0y} — первые, при $t > t_m$, корни уравнений $x(t) = 1$ и $y(t) = 1$. Из сказанного выше следует, что $t_{0x} = O(\ln \lambda),\ t_{0y} = O(\ln \lambda)$. Положим $t_0 = \min\{t_{0x}, t_{0y}\}$. Тогда оператор последования Пуанкаре $\Pi(\varphi(s), \psi(s)) = (x(t_0+s), y(t_0+s))$ преобразует множество начальных условий $C(z)$ в $C(\bar{z})$, где $\bar{z}$ зависит только от z. Обозначим через $g(z)$ зависимость величины $\bar{z}$ от z. Траектория отображения $\bar{z} = g(z)$ задает итерации множества начальных условий $C(z)$, и вопрос о динамике решений системы (22) сводится к исследованию одномерного отображения $g(z)$. Далее для него будут получены аналитические выражения.

Поскольку $t_{0x} - t_{0y} = o(1)$, то $\bar{z} = g(z) = o(1)$. Отсюда получаем следующий результат.

Теорема 2. *При любых фиксированных (т.е. независящих от λ) значениях $d_1,\ d_2$ и при достаточно больших λ, функции $x(t)$ и $y(t)$ стремятся к циклу (23) при $t \to \infty$.*

Наиболее интересные результаты относятся к случаю, когда коэффициенты d_1, d_2 малы. В зависимости от степени их малости можно выделить два случая, когда динамика рассматриваемой системы принципиально различна. В первом случае коэффициенты d_j имеют порядок $O(|\ln \lambda|^{-1})$, а во втором $d_j = O(\lambda^{-1})$. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

Пусть сначала $d_j = O(|\ln \lambda|^{-1}),\ j = 1, 2.$ т.е.

$$d_1 = \frac{\tilde{d}_1}{\ln \lambda}, \quad d_2 = \frac{\tilde{d}_2}{\ln \lambda}. \tag{25}$$

Введем вспомогательную функцию $q(d, z)$:

$$q(d, z) = (1 + d)(X - Y)\sigma[(1 + d)X - (X - Y)(1 + d\sigma)]^{-1},$$

где $\sigma = \exp(d)$,

$$\begin{aligned} X &= 1 - \exp(-T), \\ Y &= \begin{cases} 0, & 1 + |z| \geq \exp(T), \\ 1 - (1 + |z|)\exp(-T), & 0 \leq 1 + |z| < \exp(T). \end{cases} \end{aligned} \tag{26}$$

Основное утверждение состоит в том, что функция $g(z)$, фигурирующая в отображении $\bar{z} = g(z)$ (динамика которого определяет поведение решений $x(t)$ и $y(t)$ при $t \to \infty$) с точностью $o(1)$ при $\lambda \to \infty$, имеет вид

$$g(z) = \begin{cases} -q(d, z) & \text{при } z \geq 0, \\ q(d^{-1}, z) & \text{при } z < 0, \end{cases} \quad \text{где } d = \frac{d_2}{d_1}. \tag{27}$$

Для обоснования формул (26), (27) рассмотрим случай $z > 0$ (рассуждения для случая $z < 0$ аналогичны). Пусть числа X и Y составляют главную часть асимптотики при $\lambda \to \infty$ величин $x(t_m)$ и $y(t_m)$, т.е.

$$x(t_m) = \lambda[X + o(1)], \quad y(t_m) = \lambda[Y + o(1)].$$

Найдем выражения для X и Y. Заметим, что при $t \in [0, T]$ функции $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют системе (24), а значит при $\lambda \to \infty$ имеем

$$x(t) = \exp(-t) + o(1), \quad y(t) = (1 + z)\exp(-t) + o(1).$$

Важным фактом, лежащим в основе дальнейших построений, является то, что при любом $z > 0$ существует $r > 0$ такое, что на отрезке $[T, T + r]$ функции $x(t)$, $y(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} + x = \lambda + d_1(y - x), \\ \dot{y} + y = d_2(x - y). \end{cases}$$

Отсюда приходим к выводу, что при достаточно больших λ для каждого r_1, такого, что $0 < r_1 \leq r$, выполнены условия

$$\begin{aligned} x(r_1 + T) &= O(\lambda), \\ y(r_1 + T) &= O(\lambda(\ln\lambda)^{-1}). \end{aligned}$$

Следовательно, можно положить $t_m = 2T + o(1)$.

При $t \in [T, 2T]$ имеем $x(t) = \lambda[1 - \exp(-t + T) + o(1)]$, откуда получаем равенство

$$X = 1 - \exp(-T).$$

Для величины Y определяющим является поведение $y(t)$ на отрезке $[0, T]$. Пусть выполнено условие $(1+z) \geq \exp(T)$, тогда при $t \in [T, 2T]$ $y(t) = O(\lambda(\ln\lambda)^{-1})$, и следовательно, $Y = 0$. Если же $0 \leq 1 + z < \exp(T)$, то $y(t) = 1$ при $t = \ln(1 + z) + o(1)$, поэтому

$$y(t) = \begin{cases} O(\lambda(\ln\lambda)^{-1}) & \text{при } t \in [T, \ln(1 + z) + T], \\ \lambda(1 - \exp(-(t - T - \ln(1 + z))) + o(1)) & \text{при } t \in [\ln(1 + z) + T, 2T] \end{cases}$$

и

$$Y = 1 - (z + 1)\exp(-T).$$

Поскольку $X \geq Y$, то $t_{x0} > t_{y0}$. Следовательно для t_0 верна формула

$$t_0 = t_m + \ln\lambda + \ln[X - \frac{X - Y}{1 + d}(1 + d)] + o(1).$$

Тогда

$$x(t_0) = 1 + \frac{(1 + \ \underset{\cdot}{})(X - Y)d}{(1 + \ \underset{\cdot}{})X - (X - Y)(1 + \ \underset{\cdot}{})} + o(1).$$

Отсюда вытекает, что с точностью до $o(1)$ (при $\lambda \to \infty$) функция $g(z)$ имеет вид (27).

Анализируя отображение $g(z)$, получаем результат:

Теорема 3. *Пусть*

$$\frac{d}{\exp(T)-1} < 1 \quad (> 1).$$

Тогда нулевое состояние равновесия отображения $g(z)$ асимптотически устойчиво (неустойчиво). Этому состоянию равновесия отвечает устойчивый (неустойчивый) однородный цикл системы (12).

Теорема 4. *Пусть*

$$|g(\exp(T))|\ \frac{d^{-1}+1}{1-d} \geq \exp(T)$$

и

$$|g(\exp(T))|\ \frac{d+1}{1-d} \geq \exp(T)$$

Тогда отображение $g(z)$ имеет суперустойчивый цикл периода 2: $(g(\exp(T))$, $g(-\exp(T)))$, и нет циклов других периодов. Этому циклу отображения $g(z)$ отвечает устойчивый неоднородный цикл системы (12).

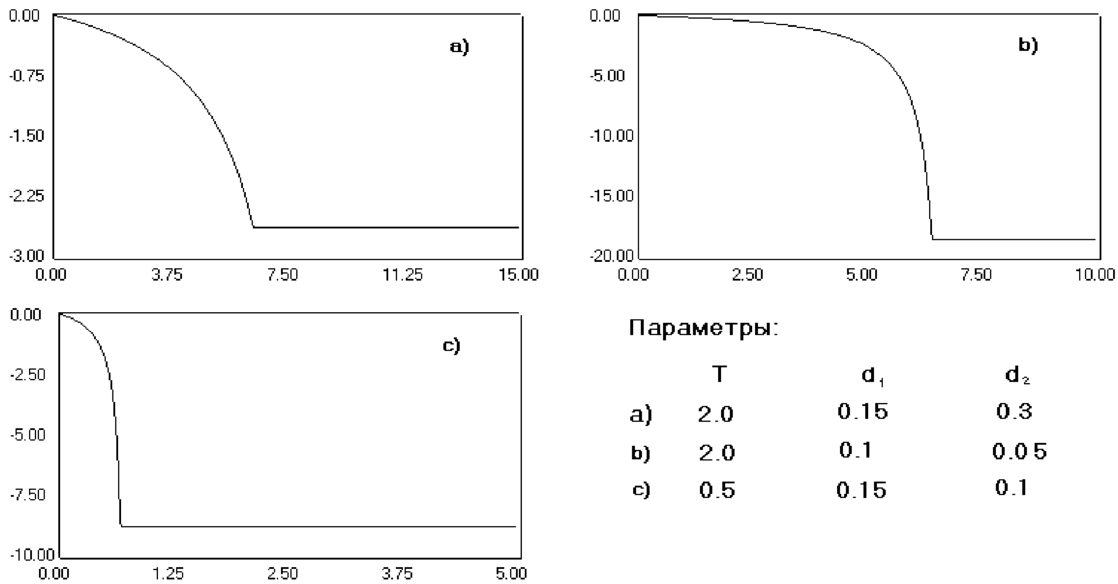


Рис. 7.

На рис. 7 приведены графики отображения $g(z)$ при некоторых значениях параметров $T,\ \tilde{d}_1,\ \tilde{d}_2$.

В предыдущих построениях использовался тот факт, что оба коэффициента связи d_1, d_2 отличны от нуля. Поэтому случай, когда один из коэффициентов равен нулю, нуждается в отдельном рассмотрении. Пусть

$$d_1 = 0 \quad d_2 = \frac{\tilde{d}_2}{\ln\lambda}.$$

Тогда при $z \geq 0$ отображение (27) имеет вид

$$g(z) = -\frac{(X-Y)\exp -(\tilde{d}_2)}{X-(X-Y)\exp -(\tilde{d}_2)}, \tag{28}$$

где X и Y определяются по формулам (26).

Если же $z < 0$, то

$$g(z) = -\frac{|z|\exp(-\tilde{d}_2)}{1+|z|}. \tag{29}$$

Исходя из формул (28) и (29), можно заключить, что нулевое состояние равновесия отображения $g(z)$, которому отвечает однородный цикл (23), является глобально устойчивым при любых d.

В случае, когда коэффициенты связи равны ($\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = d$), нулевое состояние равновесия отображения $g(z)$ асимптотически устойчиво при $d > -\frac{1}{2}\ln(\exp(T)-1)$ и неустойчиво при $d < -\frac{1}{2}\ln(\exp(T)-1)$. При $d \leq \frac{1}{2}\ln(2\exp(-T)+1)$ отображение $g(z)$ имеет суперустойчивый цикл периода 2.

Как оказывается, существенная перестройка фазового портрета исходной системы может произойти, когда коэффициенты связи d_1, d_2 становятся порядка $O(\lambda^{-1})$. Исследуем этот случай.

Будем считать, что

$$d_1 = \frac{\tilde{d}_1}{\lambda}, \quad d_2 = \frac{\tilde{d}_2}{\lambda}. \tag{30}$$

Тогда при $t \in [t_m, t_0]$ имеем

$$\begin{aligned} x(t) &= \lambda[X+o(1)]\exp(-(t-t_m)), \\ y(t) &= \lambda[Y+o(1)]\exp(-(t-t_m)), \end{aligned}$$

где t_0 — первый корень уравнения $y(t) = 1$, если $X \geq Y$, или уравнения $x(t) = 1$, если $X < Y$. Отсюда с точностью до $o(1)$ при $\lambda \to \infty$ получаем формулу для отображения g:

$$g(z) = \begin{cases} (-XY^{-1}+1)\operatorname{sign} z, & X \geq Y, \\ (YX^{-1}-1)\operatorname{sign} z, & X < Y. \end{cases} \tag{31}$$

Найдем выражения для X и Y. В случае $z \geq 0$ (для $z < 0$ рассуждения аналогичны).

При $t \in [0, t_1+T]$ решения $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}+x = \lambda\Phi(x(t-T)) + d_1(y-x), \\ \dot{y}+y = \tilde{d}_2(x-y), \end{cases} \tag{32}$$

где t_1 — такой первый корень уравнения $y(t) = 1$, для которого $\dot{y}(t_1) < 0$. Заметим, что поведение $x(t)$ на отрезке $[0, t_1+T]$ аналогично случаю, когда выполнены условия (25). Используя (32), приходим к выводу, что

$$y(t) = \begin{cases} (1+z)\exp(-t) + o(1), & 0 \le t \le T, \\ (y(T) - \tilde{d}_2)\exp(-(t-T)) + \\ \quad +\tilde{d}_2(1-(t-T)\exp(-(t-T))) + o(1), & T < t \le M, \\ \exp(-(t-2T))[\tilde{d}_2(1-\exp(-T))(t-2T) + \\ \quad +y(2T)] + o(1), & M < t \le t_1 + T, \end{cases} \qquad (3.12)$$

где $M = \min\{2T, t_1 + T\}$.

Обозначим через $t_1, t_2, \ldots$ занумерованные в порядке возрастания корни уравнения

$$y(t) = 1,$$

принадлежащие отрезку $[t_1, t_1+T]$. Поскольку на этом отрезке функция $y(t)$ имеет не более одного максимума и не более одного минимума, то таких корней не может быть больше трех.

Пусть найдено n корней. Удобно положить $t_{n+1} = t_1 + T$. Если при некотором i $(i = \overline{1,n})$ на отрезке $t \in [t_i, t_{i+1}]$ выполнено условие $0 < y(t) \le 1$, то при $t \in [t_i + T, t_{i+1} + T]$ функция $y(t)$ является решением уравнения

$$\dot{y} + y = \lambda[1 + o(1)].$$

Тем самым,

$$y(t) = \lambda + (y(t_i + T) - \lambda)\exp(-(t - t_i - T)) + o(\lambda). \qquad (33)$$

Если же при некотором i $(i = \overline{1,n})$ на отрезке $t \in [t_i, t_{i+1}]$ выполняется неравенство $y(t) \ge 1$, то при $t \in [t_i + T, t_{i+1} + T]$, получаем равенство:

$$y(t) = y(t_i + T)\exp(-(t - t_i - T)) + o(\lambda). \qquad (34)$$

Таким образом, на отрезке $t \in [t_1 + 2T, t_0]$ функции $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют уравнению (24). Поэтому полагаем $t_m = t_1 + 2T$. Используя (33) и (34), получаем для величин X и Y в формуле (31) итоговые соотношения

$$\begin{aligned} y(t_1 + 2T) &= \lambda(Y + o(1)), \\ X &= (1 - \exp(-T))\exp(-t_1). \end{aligned}$$

3.2. Динамика системы (17)

Произведем в ((17) замены $u = (1-d_1)x + yd_1,\ v = d_2x + (1-d_2)y$ и $x = gu,\ y = gv$:

$$\begin{aligned} \dot{x} + x &= \lambda\left[(1-d_1)\Phi(x(t-T)) + d_1\Phi(y(t-T))\right], \\ \dot{y} + y &= \lambda\left[d_2\Phi(x(t-T)) + (1-d_2)\Phi(y(t-T))\right]. \end{aligned} \qquad (35)$$

Построим отображение $g(z)$, задающее итерации множества начальных условий $C(z)$. Во всех случаях с точностью до $o(1)$ функция $g(z)$ имеет вид

$$g(z) = \begin{cases} (-XY^{-1}+1)\operatorname{sign} z, & X \geq Y, \\ (YX^{-1}-1)\operatorname{sign} z, & X < Y. \end{cases} \tag{36}$$

Найдем теперь выражения для X и Y.

Пусть $0 < d_1, d_2 \leq 1$ — произвольные фиксированные числа. Значения X и Y зависят от поведения на отрезке $[0,T]$ функций $x(t)$ и $y(t)$. Для решений $x(t)$ и $y(t)$ при $t \in [0,T]$ получаем равенства

$$\begin{array}{ll} x(t) = \exp(-t), & \\ y(t) = (1+z)\exp(-t), & \end{array} \text{при } z \geq 0; \quad \begin{array}{ll} x(t) = (1+|z|)\exp(-t), & \\ y(t) = \exp(-t), & \end{array} \text{при } z < 0.$$

На отрезке $[T, 2T]$ соответствующие формулы при $z \leq 0$ имеют вид

$$\begin{cases} X = (1-d_1)(1-\exp(-T)), \\ Y = d_2(1-\exp(-T)), \end{cases} \quad 1+|z| \geq \exp(T),$$
$$\begin{cases} X = 1 + ((1-d_1)(1-(1+|z|)^{-1}) - \\ \quad -1)\exp(-T)(1+|z|), \\ Y = 1 + (d_2(1-(1+|z|)^{-1}) - \\ \quad -1)\exp(-T)(1+|z|), \end{cases} \quad 1 \leq 1+|z| < \exp(T),$$

а при $z < 0$

$$\begin{cases} X = (1-d_2)(1-\exp(-T)), \\ Y = d_1(1-\exp(-T)), \end{cases} \quad 1+|z| \geq \exp(T),$$
$$\begin{cases} X = 1 + ((1-d_2)(1-(1+|z|)^{-1}) - \\ \quad -1)\exp(-T)(1+|z|), \\ Y = 1 + (d_1(1-(1+|z|)^{-1}) - \\ \quad -1)\exp(-T)(1+|z|), \end{cases} \quad 1 \leq 1+|z| < \exp(T).$$

На рис. 8 приведены графики отображения $g(z)$ при различных значениях параметров T, d_1 d_2.

Теорема 5. *Пусть*

$$\exp(-T)(1-\exp(-T))^{-1}|1-d_1-d_2| < 1, \quad (> 1),$$

тогда нулевое состояние равновесия отображения $g(z)$, которому соответствует однородный цикл (23) *системы (* (17)*, является устойчивым (неустойчивым).*

Пусть выполнены условия (25). Тогда при $1 \leq 1+|z| < \exp(T)$ получаем

$$\begin{array}{l} X = 1 - \exp(-T), \\ Y = 1 - (1+|z|)\exp(-T). \end{array}$$

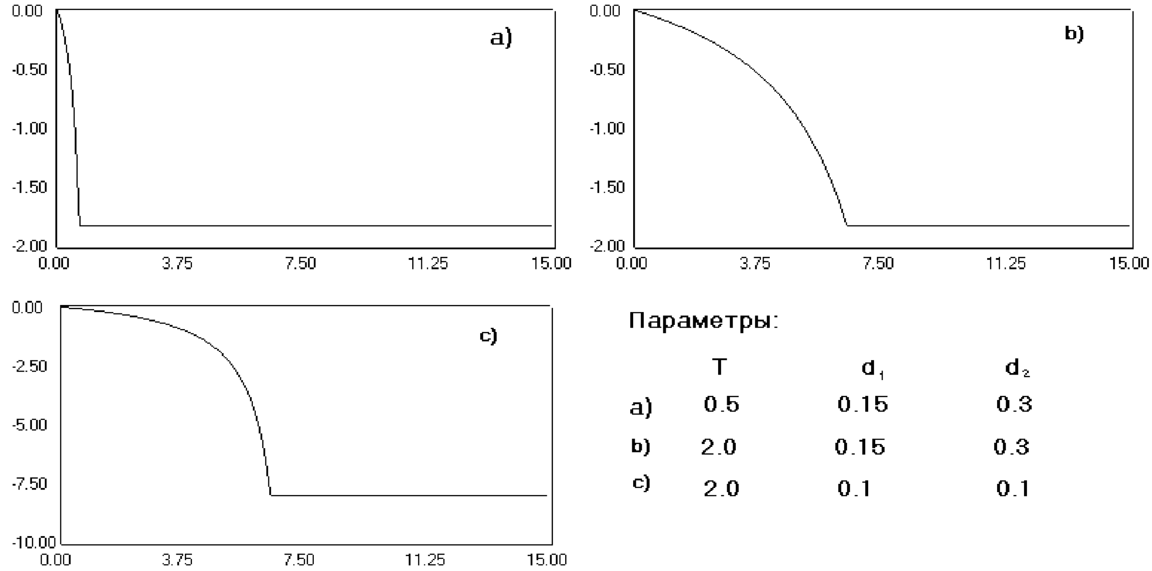


Рис. 8.

Если, однако, $1+|z|>\exp(T)$, то первая же итерация множества начальных условий $C(z)$ есть множество $\tilde{C}(z)$, отличающееся от $C(z)$ тем, что

$$\begin{cases} \varphi(0) &= -z\ln\lambda, \\ \psi(0) &= 1, \end{cases} \quad \text{при } z<0,$$
$$\begin{cases} \varphi(0) &= 1, \\ \psi(0) &= z\ln\lambda, \end{cases} \quad \text{при } z\geq 0.$$

Основное утверждение состоит в том, что оператор последования Пуанкаре $\Pi(\varphi(s),\psi(s)) = (x(t_0+s), y(t_0+s))$, преобразует множество начальных условий $\tilde{C}(z)$ в $\tilde{C}(\bar{z})$, где с точностью до $o(1)$ (при $\lambda\to\infty$)

$$\bar{z} = \tilde{g}(z) = \begin{cases} -\tilde{d}_2^{-1}, & \text{при } 1+z\geq \exp(T), \\ -\tilde{d}_1^{-1}, & \text{при } -1+z\leq -\exp(T). \end{cases}$$

На рис. 9 приведены графики отображения $g(z)$ при различных значениях параметров $T,\ \tilde{d}_1\ \tilde{d}_2$.

Теорема 6. *Пусть*

$$\exp(-T)(1-\exp(-T))^{-1} < 1 \quad (>1),$$

тогда нулевое состояние равновесия отображения $g(z)$, которому соответствует однородный цикл (23) системы ((17), является устойчивым (неустойчивым).

При достаточно больших λ система (35) имеет устойчивый неоднородный цикл, удовлетворяющий начальным условиям $x(s)=\exp(-s),\ y(s)=d_2^{-1}\exp(-s)$.

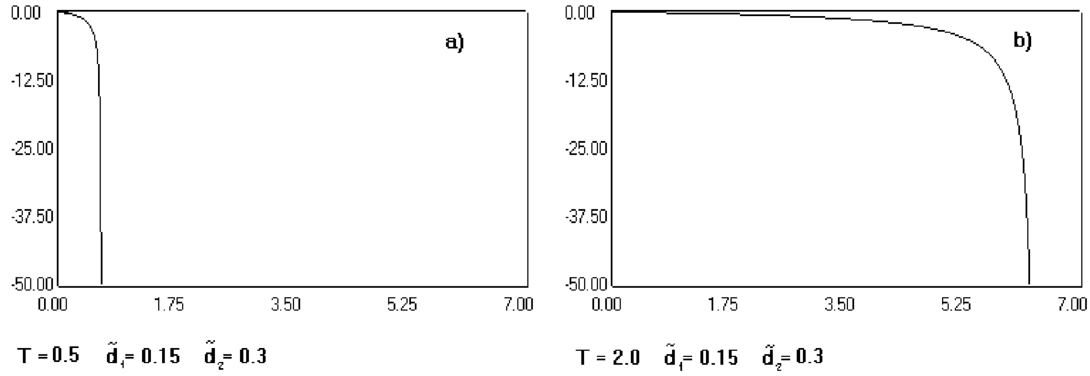


Рис. 9.

При выполнении условий (30) все рассуждения аналогичны приведенным выше.

Заключение

В статье рассмотрена динамика одного из простейших генераторов с запаздыванием. Показано, что его единственным устойчивым режимом является цикл, тогда как неустойчивых периодических режимов имеется бесконечно много. При некоторых условиях (типа невырожденности) каждое решение стремится к циклу при $t \to \infty$. Однако, в зависимости от степени сложности начального условия, соответствующее решение демонстрирует сложное поведение в течение отрезка времени, которое экспоненциально возрастает с увеличением запаздывания.

Исследована динамика двух простейших генераторов с двумя типами связи. Получен критерий "быстрой" и "долгой" — в течение промежутка времени, линейно зависящего от запаздывания — синхронизации. Приведена оценка параметра синхронизации на неустойчивом цикле. Аналитическими методами рассмотрена динамика в случае слабой связи между генераторами. Построены одномерные отображения, динамика которых определяет поведение решений исходной системы. Показано, что наряду с однородным устойчивым циклом может существовать неоднородный устойчивый цикл.

Список цитируемых источников

1. *Дмитриев А. С.* Хаос и обработка информации в нелинейных динамических системах // Радиотехника и электроника. — 1993. — Т.38, №1. — С. 1.

   Dmitriev A. S. Chaos and information processing in nonlinear dynamic systems // Radiotekhnika i elektronika 38, No.1, 1 (1993). (in Russian)

2. *Parlitz U., Chua L. O., Kocarev L., Halle K., Shang A.* Transmission of Digital Signals by Chaotic Synchronization // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 1992. — Vol.2, No.4. — P. 973.

3. *Бельский Ю. Л., Дмитриев А. С.* Передача информации с помощью детерминированного хаоса // Радиотехника и электроника. — 1993. — Т.38. №7. — С. 1310.

Belskiy Yu. L., Dmitriev A. S. Information transfer by means of deterministic chaos // Radiotekhnika i elektronika 38, No.7, 1310 (1993). (in Russian)

4. *Fujisaka H, Yamada T.* Stability theory of synchronized motion on coupled-oscillator systems. IV // Progr. Theor. Phys. — 1986. — Vol.6., No.5. — P. 1087–1104.

5. *Арансон И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М.* Динамическая модель пространственного развития турбулентности // Письма в ЖЭТФ. — 1984. — Т.39. №12. — С. 561.

Aranson I. S., Gaponov-Grekhov A. V., Rabinovich M. I., Starobinets I. M. Dynamical model of spatial development of turbulence. Pis'ma v ZHETPH 39, No.12, 561 (1984). (in Russian)

6. *Анищенко В. С., Арансон И. С., Постнов Д. Э., Рабинович М. И.* Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // ДАН СССР. — 1986. — Т. 286, No.5. — С. 1120–1124.

Anishchenko V. S., Aranson I. S., Postnov D. E., Rabinovich M. I. Spatial synchronization and bifurcations of the development of chaos in a chain of connected generators. Doklady akademii nauk SSSR 286, No.5, 1120–1124 (1986). (in Russian)

7. *Афраймович В. С. Веричев Н. Н. Рабинович М. И.* Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов. Радиофизика. — 1986. — Т. 29, №9. — С. 1050-1060.

Afraimovich V. S. Verichev N. N. Rabinovich M. I. Stochastic oscillation synchronization in dissipative systems. Izv. Vuzov. Radiophizika 29, No.9, 1050-1060 (1986). (in Russian)

8. *Кузнецов Ю. И., Мигулин В. В., Минакова И. И., Сильнов Б. А.* Синхронизация хаотических колебаний // ДАН СССР. — 1984. — Т.275, No.6. — С. 1388-1391.

Kuznetsov Yu. I., Migulin V. V., Minakova I. I., Silnov B. A. Synchronization of chaotic oscillations. Doklady akademii nauk SSSR 275. No.6, 1388-1391 (1984). (in Russian)

9. *Ланда П. С.* Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука, 1983.

Landa P. S. Self-oscillations in distributed systems. Moscow: Nauka, 1983. (in Russian)

10. *Дмитриев А. С. Кислов В. Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. — М.: Наука, 1989.

Dmitriev A. S. Kislov V. I. Stochastic oscillations in radio physics and electronics. Moscow: Nauka, 1989. (in Russian)

11. *Кащенко С. А.* Асимптотический анализ динамики системы из двух связанных автогенераторов с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов, Радиофизика. — 1990. — Т.33, №3. — С. 307-314.

Kashchenko S. A. Asymptotic analysis of the dynamics of a system of two coupled autogenerators with delayed feedback. Izv. Vuzov. Radiophizika 33, No.3, 307-314 (1990). (in Russian)

12. *Kilias T., Kutzer K., Moegel A., Schwarz W.* Electromic chaos generators – design and applications // International Journal of Electronics. — 1995. — Vol. 79, No. 6. — P. 737-753.

13. *Moegel A., Schwarz W., Kaschenko S.* Analysis and simulation principles for chaotic systems containing delay elements. (NDES '96) Seville, Spain, 1996.
14. *Kashchenko D. S., Kashchenko S. A., Schwarz W.* Dynamics of First Order Equations with Nonlinear Delayed Feedback // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. — 2012. — Vol. 22, no. 8. — P. 1250184.

Получена 02.10.2018

Динамические системы, 2018, том 8(36), №4, 337–356

УДК 517.98+517.955+532.5

К проблеме малых движений системы трёх сочленённых маятников с полостями, заполненными однородными несжимаемыми жидкостями

В. И. Войтицкий

Таврическая академия,
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: victor.voytitsky@gmail.com*

Аннотация. В работе представлена физическая и математическая постановка новой линейной начально-краевой задачи, моделирующей малые движения гидросистемы, состоящей из трёх сочленённых маятников с полостями, заполненными однородными несжимаемыми жидкостями. Задача состоит из трёх линеаризованных уравнений изменения кинетического момента (относительно точек подвеса маятников), линеаризованных уравнений Эйлера и Навье-Стокса для идеальных и вязких жидкостей соответственно, динамических и кинематических условий на границе раздела жидкостей, вспомогательных краевых условий и начальных условий. Доказан закон баланса полной энергии и описаны основные ожидаемые свойства решений.

Ключевые слова: физический маятник, уравнение изменения кинетического момента, однородная несжимаемая жидкость, граничное условие, формула Грина, закон баланса полной энергии.

To the Small Motion Problem of Three Joined Pendulums with Cavities Filled with Homogeneous Incompressible Fluids

V. I. Voytitsky

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, 295007.

Abstract. We provide physical and mathematical statement of new linear initial boundary value problem modeling small motion of hydromechanics system consists of three joined pendulums with cavities filled with homogeneous incompressible fluids. The problem consists of three linearized equations of angular momentum deviation (relative to the point of suspension), linearized Euler and Navier-Stokes equations for ideal and viscous fluids respectively, dynamical and kinetic boundary conditions on free boundary surfaces, auxiliary boundary conditions and initial conditions. We prove the law of full energy balance and describe general properties of solutions.

Keywords: physical pendulum, equation of angular momentum deviation, homogeneous incompressible fluid, boundary condition, Green's formula, law of full energy balance.

MSC 2010: 70E55, 35M33

1. Введение

В работе приводится вывод новой начально-краевой задачи о малых движениях системы трёх сочленённых маятников с полостями, заполненными однородными несмешивающимися несжимаемыми жидкостями. Данная задача попадает в класс наиболее интересных и распространенных частично-диссипативных гидромеханических систем, и моделирует случай общего положения, когда часть жидкостей являются идеальными, часть — вязкими.

Задачи для одного маятника с жидкостью исследовались ранее многими авторами, начиная с работы Н.Е. Жуковского [5]. Отметим вклад Н.Н. Моисеева, Г.С. Нариманова, Д.Е. Охоцимского, Б.И. Рабиновича, Л.Н. Сретенского, Ф.Л. Черноусько, С.Ф. Фещенко, И.А. Луковского, С.Г. Крейна, Н.Д. Копачевского (см. [6]) и др.

С помощью использования операторных методов математической физики подобные линейные динамические системы с жидкостями изучаются в последнее время Н. Д. Копачевским и соавторами (Э. Батыром, В. И. Войтицким, З. З. Ситшаевой), см. работы [2]–[4], [7]–[10]. Отметим, что ранее рассматривались преимущественно более простые задачи для консервативных и диссипативных систем. При этом в последних работах был предложен универсальный операторный подход, позволяющий сводить различные постановки задач к задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве с операторными коэффициентами, имеющими определённых физический смысл. Далее предполагается провести полное исследование задачи с доказательством теоремы существования и единственности, а также описанием спектральных свойств. В данной работе сделан первый шаг — проведён формальный вывод уравнений движения маятников и жидкостей и сопутствующих краевых условий, а также доказан закон баланса полной энергии, соответствующий физическому смыслу задачи.

2. Постановка задачи. Вывод уравнений изменения кинетических моментов

Пусть имеется система из трёх сочленённых маятников G_k, $k = \overline{1,3}$, имеющих массы m_k. В каждом теле имеется точка подвеса, относительно который совершаются малые свободные колебания. Пусть тело G_1 имеет неподвижную точку O_1, а тела G_k $(k = 2, 3)$ — соответственно точки O_k, соединяющие G_k с G_{k-1}, в которых расположены сферические шарниры.

Предположим, что внутри каждого тела имеется по одной полости, причём в теле G_1 полость целиком занята системой двух однородных идеальных несжимаемых жидкостей с плотностями $\rho_{11} > \rho_{12}$, занимающих в состоянии равновесия области Ω_{11} и Ω_{12}, разделённых движущейся поверхностью $\Gamma_{11}(t)$; в теле G_2 полость целиком занята системой трёх однородных вязких несжимаемых жидкостей с плотностями $\rho_{21} > \rho_{22} > \rho_{23}$, занимающих в состоянии равновесия области Ω_{21}, Ω_{22} и Ω_{23}, с движущимися границами раздела $\Gamma_{21}(t)$, $\Gamma_{22}(t)$, а полость Ω_{31} тела

G_3 целиком заполнена однородной идеальной несжимаемой жидкостью с плотностью $\rho_{31} > 0$. Пусть кроме движущихся поверхностей жидкости Ω_{ij} $(i = 1, 2)$ контактируют с твердыми стенками S_{ij}.

Будем считать, что на данную систему тел в состоянии покоя действует однородное гравитационное поле $\vec{g}$, а в процессе малых движений — силовое поле $\vec{F} := \vec{g} + \vec{f}(t, x)$, где $\vec{f}(t, x)$ — малая динамическая добавка к гравитационному полю. Предполагаем также, что в шарнире O_k сила трения пропорциональна разности угловых скоростей примыкающих тел G_k и G_{k-1}, причем коэффициент пропорциональности $\alpha_k > 0$, $k = \overline{1, 3}$.

Для описания малых движений системы введем неподвижную систему координат $O_1x^1x^2x^3$ с ортами $\vec{e}^{\,j}$, $j = 1, 2, 3$, так, чтобы $\vec{g} = -g\vec{e}^{\,3}$. Кроме того, введем подвижные системы координат $O_kx^1_kx^2_kx^3_k$, жестко связанные с телами G_k, $k = \overline{1, 3}$. Единичные векторы вдоль осей $O_kx^j_k$ обозначим через $\vec{e}^{\,j}_k$, $j = \overline{1, 3}$. Кроме того, будем считать, что в состоянии покоя центры масс C_k тел G_k, а также точки O_k находятся на одной оси $O_1x^3_1 = O_2x^3_2 = O_3x^3_3$.

Положение подвижной системы координат $O_kx^1_kx^2_kx^3_k$ относительно неподвижной системы $O_1x^1x^2x^3$ в процессе малых движений гидромеханической системы будем задавать малым вектором углового перемещения

$$\vec{\delta}_k(t) = \sum_{j=1}^{3} \delta^j_k(t)\vec{e}^{\,j}_k, \quad k = \overline{1, 3}.$$

Тогда угловая скорость $\vec{\omega}_k(t)$ тела G_k будет равна $d\vec{\delta}_k/dt$, а угловое ускорение этого тела – величине $d^2\vec{\delta}_k/dt^2 = d\vec{\omega}_k/dt$.

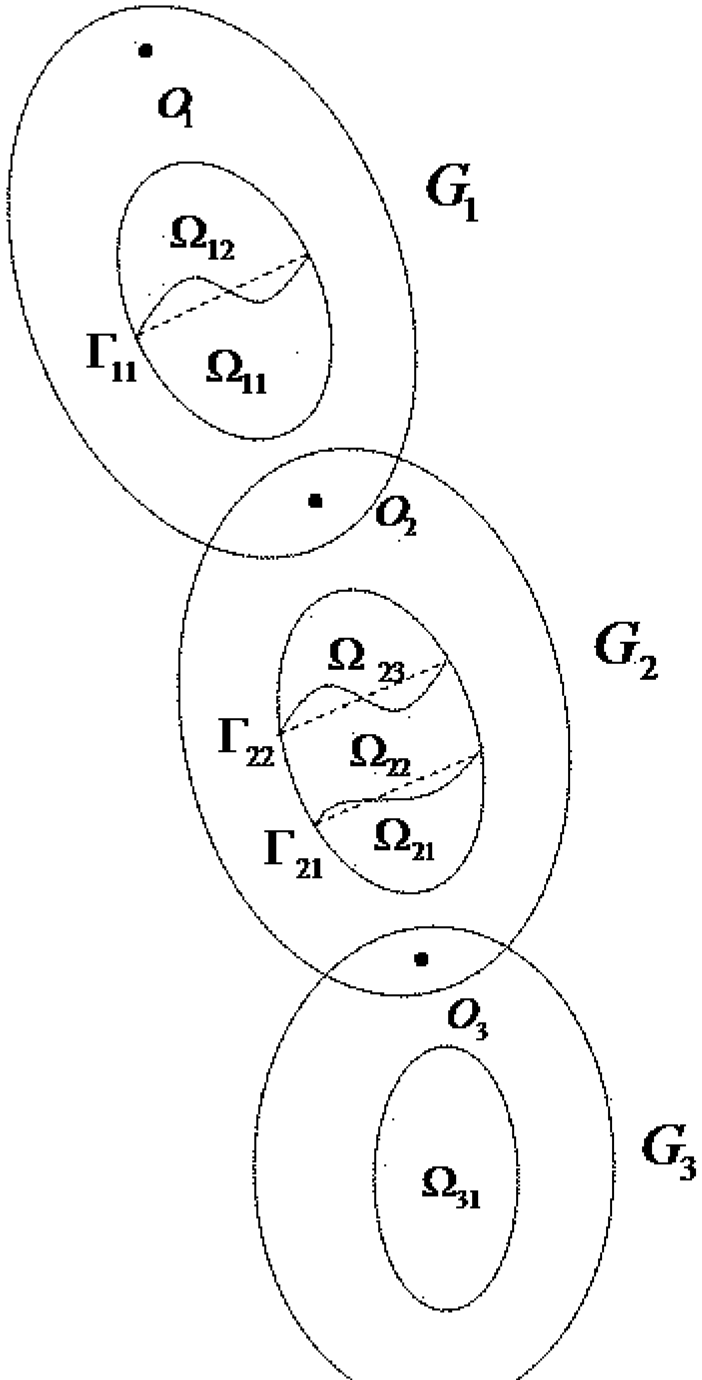
Обозначим через $\vec{R}_k$ — радиус-вектор, идущий из полюса O_1 в любую точку тела G_k, $\vec{r}_k$ — радиус-вектор, идущий из полюса O_k в любую точку тела G_k. Введем также векторы $\vec{h}_k = \overrightarrow{O_kO_{k+1}}$, $k = 1, 2$. Тогда, очевидно, что $\vec{R}_1 = \vec{r}_1$, $\vec{R}_2 = \vec{h}_1 + \vec{r}_2$, $\vec{R}_k = \sum\limits_{l=1}^{k-1}\vec{h}_l + \vec{r}_k$.

Как известно из курса теоретической механики (см., например [6], с. 123), скорость изменения переменного вектора $\vec{a}(t)$ в неподвижной системе координат $d'\vec{a}/dt$ и скорость его изменения в подвижной системе координат $d\vec{a}/dt$ связаны соотношением

$$\frac{d'\vec{a}}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{\omega}(t) \times \vec{a}(t), \tag{2.1}$$

где $\vec{\omega}(t)$ — мгновенная угловая скорость подвижной системы координат. Отсюда следует, что векторы абсолютных скоростей $\vec{v}_k$ произвольной точки тела G_k связаны с малыми векторами относительных скоростей $\vec{u}_k$ по формулам:

$$\vec{v}_k = \frac{d'\vec{R}_k}{dt} = \frac{d'}{dt}\left(\sum_{l=1}^{k-1}\vec{h}_l + \vec{r}_k\right) = \sum_{l=1}^{k-1}\vec{\omega}_l \times \vec{h}_l + \vec{\omega}_k \times \vec{r}_k + \vec{u}_k. \tag{2.2}$$


O_1
G_1
Ω_{12}
Γ_{11}
Ω_{11}
O_2
G_2
Ω_{23}
Γ_{22}
Ω_{22}
Γ_{21}
Ω_{21}
O_3
G_3
Ω_{31}

Аналогично получаем формулы для абсолютного ускорения:

$$\vec{w}_k = \frac{d'}{dt}(\sum_{l=1}^{k-1}\vec{\omega}_l \times \vec{h}_l + \vec{\omega}_k \times \vec{r}_k + \vec{u}_k) =$$

$$= \sum_{l=1}^{k-1}(\frac{d\vec{\omega}_l}{dt} \times \vec{h}_l + \vec{\omega}_l \times (\vec{\omega}_l \times \vec{h}_l)) + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt} \times \vec{r}_k + \vec{\omega}_k \times \frac{d\vec{r}_k}{dt} + \vec{\omega}_k \times (\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k) + \frac{d\vec{u}_k}{dt} + \vec{\omega}_k \times \vec{u}_k =$$

$$= \sum_{l=1}^{k-1}(\frac{d\vec{\omega}_l}{dt} \times \vec{h}_l + \vec{\omega}_l \times (\vec{\omega}_l \times \vec{h}_i)) + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt} \times \vec{r}_k + \vec{\omega}_k \times (\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k) + 2\vec{\omega}_k \times \vec{u}_k + \frac{d\vec{u}_k}{dt}. \tag{2.3}$$

Введем обозначения

$$\int_{G_1} (\ldots) dm_1 := \int_{\Omega_{10}} (\ldots)\rho_{10} d\Omega_{01} + \int_{\Omega_{11}} (\ldots)\rho_{11} d\Omega_{11} + \int_{\Omega_{12}} (\ldots)\rho_{12} d\Omega_{12}, \tag{2.4}$$

$$\int_{G_2} (\ldots) dm_2 := \int_{\Omega_{20}} (\ldots)\rho_{20} d\Omega_{02} + \sum_{j=1}^{3}\int_{\Omega_{2j}} (\ldots)\rho_{2j} d\Omega_{2j}, \tag{2.5}$$

$$\int_{G_3} (\ldots) dm_3 := \int_{\Omega_{30}} (\ldots)\rho_{30} d\Omega_{30} + \int_{\Omega_{31}} (\ldots)\rho_{31} d\Omega_{31}, \tag{2.6}$$

где $\Omega_{0k} \subset G_k$ — область, занятая твердым телом плотности $\rho_{k0} > 0$, $k = \overline{1,3}$.

2.1. Уравнения изменения кинетического момента относительно полюса O_1 системы тел $\{G_1; G_2; G_3\}$.

Уравнение изменения кинетического момента системы сочлёненных тел относительно точки O_1 в движущейся системе координат $O_1x_1^1x_1^2x_1^3$ имеет вид:

$$\frac{d'\vec{K}_1}{dt} = \vec{M}_1 + \vec{M}_1^{tr} + \vec{M}_1^{e} + \vec{M}_1^{cor}, \tag{2.7}$$

где $\vec{K}_1$ — кинетический момент системы в ее движении относительно неподвижной системы координат; $\vec{M}_1$ — главный момент всех внешних сил (силы тяжести и других малых сил), действующих на систему тел; $\vec{M}_1^{tr}$ — момент сил трения; $\vec{M}_1^{e}$ — момент переносных сил инерции; $\vec{M}_1^{cor}$ — момент кориолисовых сил.

Имеем,

$$\vec{K}_1 = \int_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 \, dm_1 + \int_{G_2} (\vec{h}_1 + \vec{r}_2) \times \vec{v}_2 \, dm_2 + \int_{G_3} (\vec{h}_1 + \vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times \vec{v}_3 \, dm_3 =$$

$$= \int_{G_1} \vec{r}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_1) \, dm_1 + \int_{G_2} (\vec{h}_1 + \vec{r}_2) \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2) \, dm_2 +$$

$$+ \int_{G_3} (\vec{h}_1 + \vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3 + \vec{u}_3) \, dm_3; \tag{2.8}$$

$$\vec{M}_1^{tr} = -\alpha_1\vec{\omega}_1. \tag{2.9}$$

С точностью до малых второго порядка имеет место формула (см. [6], с. 132)

$$\vec{g} = -g\vec{e}_k^{\,3} + g\delta_k^2\vec{e}_k^{\,1} - g\delta_k^1\vec{e}_k^{\,2}. \tag{2.10}$$

Пусть $\zeta_{11}(x,t)$ $(x \in \Gamma_{11})$ — функция, описывающая малые отклонения свободной границы раздела $\Gamma_{11}(t)$ от плоской равновесной поверхности Γ_{11} вдоль нормали. Пусть аналогично функции $\zeta_{21}(x,t)$ $(x \in \Gamma_{21})$, $\zeta_{22}(x,t)$ $(x \in \Gamma_{22})$ описывают отклонения $\Gamma_{21}(t)$ и $\Gamma_{22}(t)$ вдоль нормалей относительно плоских равновесных поверхностей Γ_{21} и Γ_{22}. Из условия сохранения объёмов жидкостей во время колебаний следует, что $\int_{\Gamma_{jk}} \zeta_{jk}\, d\Gamma_{jk} = 0$, тогда с точностью до малых более высоких порядков справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&\int_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{g}\, dm_1 = m_1\vec{r}_{1,c} \times \vec{g} + \int_{\Gamma_{11}} (\vec{r}_1 \times \vec{g})\zeta_{11}\Delta\rho_{11}\, d\Gamma_{11} = \\
&= m_1[-l_1\vec{e}_1^{\,3}] \times [-g(\vec{e}_1^{\,3} - \delta_1^2\vec{e}_1^{\,1} + \delta_1^1\vec{e}_1^{\,2})] - \Delta\rho_{11} g \int_{\Gamma_{11}} (\vec{r}_1 \times \vec{e}_1^{\,3})\zeta_{11}\, d\Gamma_{11} = \\
&= -gm_1l_1P_2\vec{\delta}_1 + \Delta\rho_{11} g \int_{\Gamma_{11}} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1)\zeta_{11}\, d\Gamma_{11},
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{G_2} \vec{r}_2 \times \vec{g}\, dm_2 = m_2\vec{r}_{2,c} \times \vec{g} + \int_{\Gamma_{21}} (\vec{r}_2 \times \vec{g})\zeta_{21}\Delta\rho_{21}\, d\Gamma_{21} + \int_{\Gamma_{22}} (\vec{r}_2 \times \vec{g})\zeta_{22}\Delta\rho_{22}\, d\Gamma_{22} = \\
&= m_2[-l_2\vec{e}_2^{\,3}] \times [-g(\vec{e}_2^{\,3} - \delta_2^2\vec{e}_2^{\,1} + \delta_2^1\vec{e}_2^{\,2})] - \sum_{l=1}^{2} \Delta\rho_{2l} g \int_{\Gamma_{2l}} (\vec{r}_2 \times \vec{e}_2^{\,3})\zeta_{2l}\, d\Gamma_{2l} = \\
&= -gm_2l_2P_2\vec{\delta}_2 + \Delta\rho_{21} g \int_{\Gamma_{21}} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2)\zeta_{21}\, d\Gamma_{21} + \Delta\rho_{22} g \int_{\Gamma_{22}} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2)\zeta_{22}\, d\Gamma_{22},
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\int_{G_3} \vec{r}_3 \times \vec{g}\, dm_3 = m_3\vec{r}_{3,c} \times \vec{g} = -gm_3l_3P_2\vec{\delta}_3, \tag{2.13}$$

где $\Delta\rho_{ij} = \rho_{ij} - \rho_{i(j+1)}$, $\vec{r}_{k,c} := \overrightarrow{O_kC_k}$, m_k — масса тела G_k, $l_k := |\overrightarrow{O_kC_k}|$ — расстояние от точки подвеса до центра масс тела G_k в состоянии равновесия, $P_2\vec{\delta}_k := \sum_{j=1}^{2} \delta_k^j \vec{e}_k^{\,j}$.

Также имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{G_2} (\vec{h}_1 \times \vec{g})\, dm_2 = m_2(\vec{h}_1 \times \vec{g}) + \Delta\rho_{21} \int_{\Gamma_{21}} (\vec{h}_1 \times \vec{g})\zeta_{21}\, d\Gamma_{21} + \Delta\rho_{22} \int_{\Gamma_{22}} (\vec{h}_1 \times \vec{g})\zeta_{22}\, d\Gamma_{22} = \\
&= m_2[-h_1\vec{e}_1^{\,3}] \times [-g(\vec{e}_1^{\,3} - \delta_1^2\vec{e}_1^{\,1} + \delta_1^1\vec{e}_1^{\,2})] = -gm_2h_1P_2\vec{\delta}_1,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\int_{G_3} (\vec{h}_1 + \vec{h}_2) \times \vec{g}\, dm_2 = m_3((\vec{h}_1 + \vec{h}_2) \times \vec{g}) = -gm_3(h_1P_2\vec{\delta}_1 + h_2P_2\vec{\delta}_2). \tag{2.15}$$

В последних соотношениях предполагается, что $\vec{h}_l = -h_l \vec{e}_l^{\,3}$ (с точностью до малых более высокого порядка), где $h_l := |\overrightarrow{O_l O_{l+1}}|$ — расстояние между шарнирами. Отсюда следует, что

$$\vec{M}_1 = \int_{G_1} \vec{r}_1 \times (\vec{g} + \vec{f}_1)\, dm_1 + \int_{G_2} (\vec{h}_1 + \vec{r}_2) \times (\vec{g} + \vec{f}_2)\, dm_2 + \int_{G_3} (\vec{h}_1 + \vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times (\vec{g} + \vec{f}_3)\, dm_3 =$$
$$= -gm_1 l_1 P_2 \vec{\delta}_1 + \Delta\rho_{11} g \int_{\Gamma_{11}} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1) \zeta_{11}\, d\Gamma_{11} + \int_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{f}_1\, dm_1 - gm_2 (h_1 P_2 \vec{\delta}_1 + l_2 P_2 \vec{\delta}_2) +$$
$$+ \Delta\rho_{21} g \int_{\Gamma_{21}} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2) \zeta_{21}\, d\Gamma_{21} + \Delta\rho_{22} g \int_{\Gamma_{22}} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2) \zeta_{22}\, d\Gamma_{22} + \int_{G_2} (\vec{h}_1 + \vec{r}_2) \times \vec{f}_2\, dm_2 -$$
$$- -gm_3 (h_1 P_2 \vec{\delta}_1 + h_2 P_2 \vec{\delta}_2 + l_3 P_2 \vec{\delta}_3) + \int_{G_3} (\vec{h}_1 + \vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times \vec{f}_3\, dm_3, \quad (2.16)$$

где $\vec{f}_k(t,x) := \vec{f}(t,x)|_{G_k}$.

Очевидно, $\vec{M}_1^{e} = 0$, при этом

$$\vec{M}_1^{cor} = -\int_{G_1} \vec{r}_1 \times (2\vec{\omega}_1 \times \vec{u}_1)\, dm_1 - \sum_{k=2}^{3} \int_{G_k} (\sum_{l=1}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k) \times (2\vec{\omega}_k \times \vec{u}_k)\, dm_k \quad (2.17)$$

является величиной второго порядка малости, поэтому мы ею пренебрегаем.

Вычислим теперь производную по времени от кинетического момента $\vec{K}_1$:

$$\frac{d'\vec{K}_1}{dt} = \int_{G_1} \frac{d\vec{r}_1}{dt} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_1)\, dm_1 + \int_{G_1} \vec{r}_1 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_1 \times \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{d\vec{u}_1}{dt})\, dm_1 +$$
$$+ \vec{\omega}_1 \times \int_{G_1} \vec{r}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_1)\, dm_1 +$$
$$+ \sum_{k=2}^{3} \int_{G_k} \frac{d}{dt} (\sum_{l=1}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k) \times (\sum_{j=1}^{k-1} \vec{\omega}_j \times \vec{h}_j + \vec{\omega}_k \times \vec{r}_k + \vec{u}_k)\, dm_k +$$
$$+ \sum_{k=2}^{3} \int_{G_k} (\sum_{l=1}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k) \times (\sum_{j=1}^{k-1} [\frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j + \vec{\omega}_j \times \frac{d\vec{h}_j}{dt}] + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt} \times \vec{r}_k + \vec{\omega}_k \times \frac{d\vec{r}_k}{dt} + \frac{d\vec{u}_k}{dt})\, dm_k +$$
$$+ \sum_{k=2}^{3} \vec{\omega}_k \times \int_{G_k} (\sum_{l=1}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k) \times (\sum_{j=1}^{k-1} \vec{\omega}_j \times \vec{h}_j + \vec{\omega}_k \times \vec{r}_k + \vec{u}_k)\, dm_k. \quad (2.18)$$

Поскольку мы предполагаем, что поля $d\vec{r}_k/dt = \vec{u}_k$ (в Ω_k) и $\vec{\omega}_k$ являются бесконечно малыми, то в формуле

$$\frac{d\vec{u}_k}{dt} = \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} + (\vec{u}_k \cdot \nabla) \vec{u}_k, \quad k = 1, 2,$$

можно пренебречь вторым слагаемым. Отсюда после линеаризации (2.18) получаем уравнение изменения кинетического момента относительно точки O_1 системы тел в подвижной системе координат $O_1x_1^1x_1^2x_1^3$:

$$\frac{d'\vec{K}_1}{dt} = \int_{G_1} \vec{r}_1 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1)\, dm_1 + \rho_{11} \int\limits_{\Omega_{11}} \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_{11}}{\partial t}\, d\Omega_{11} + \rho_{12} \int\limits_{\Omega_{12}} \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_{12}}{\partial t}\, d\Omega_{12} +$$
$$+ \sum_{k=2}^{3} \int_{G_k} (\sum_{l=1}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k) \times (\sum_{j=1}^{k-1} \frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt} \times \vec{r}_k)\, dm_k +$$
$$+ \sum_{l=1}^{3} \rho_{2l} \int\limits_{\Omega_{2l}} (\vec{h}_1 + \vec{r}_2) \times \frac{\partial \vec{u}_{2l}}{\partial t}\, d\Omega_{2l} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_{31}} (\vec{h}_1 + \vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t}\, d\Omega_{31} =$$
$$= -\alpha_1 \vec{\omega}_1 - g m_1 l_1 P_2 \vec{\delta}_1 - g \sum_{k=2}^{3} m_k (\sum_{l=1}^{k-1} h_l P_2 \vec{\delta}_l + l_k P_2 \vec{\delta}_k) + g \Delta\rho_{11} \int_{\Gamma_{11}} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1) \zeta_{11}\, d\Gamma_{11} +$$
$$+ g \sum_{l=1}^{2} \Delta\rho_{2l} \int_{\Gamma_{2l}} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2) \zeta_{2l}\, d\Gamma_{2l} + \int_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{f}_1\, dm_1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{G_k} (\sum_{l=1}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k) \times \vec{f}_k\, dm_k. \tag{2.19}$$

2.2. Уравнения изменения кинетического момента относительно полюса O_2 системы тел $\{G_2; G_3\}$.

Вывод уравнения производится аналогично предыдущему подпункту. В подвижной системе координат $O_2x_2^1x_2^2x_2^3$ имеем

$$\vec{K}_2 = \int_{G_2} \vec{r}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2)\, dm_2 + \int_{G_3} (\vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3 + \vec{u}_3)\, dm_3; \tag{2.20}$$

$$\vec{M}_2^{tr} = -\alpha_2 (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1), \quad \alpha_2 > 0; \tag{2.21}$$

$$\vec{M}_2 = \int_{G_2} \vec{r}_2 \times (\vec{g} + \vec{f}_2)\, dm_2 + \int_{G_3} (\vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times (\vec{g} + \vec{f}_3)\, dm_3 =$$
$$= -g m_2 l_2 P_2 \vec{\delta}_2 + \int_{G_2} \vec{r}_2 \times \vec{f}_2\, dm_2 - g m_3 (h_2 P_2 \vec{\delta}_2 + l_3 P_2 \vec{\delta}_3) +$$
$$+ g \Delta\rho_{21} \int_{\Gamma_{21}} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2) \zeta_{21}\, d\Gamma_{21} + g \Delta\rho_{22} \int_{\Gamma_{22}} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2) \zeta_{22}\, d\Gamma_{22} + \int_{G_3} (\vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times \vec{f}_3\, dm_3; \tag{2.22}$$

$$\vec{M}_2^{e} = - \int_{G_2} \vec{r}_2 \times \vec{a}_2^{\,e}\, dm_2 - \int_{G_3} (\vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times \vec{a}_2^{\,e}\, dm_3, \tag{2.23}$$

где $\vec{a}_2^e = \dfrac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1) \approx \dfrac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1$ — ускорение точки O_2. Момент кориолисовых сил является бесконечно малой величиной, порядка выше единицы:

$$\vec{M}_2^{cor} = -\int_{G_2} \vec{r}_2 \times (2\vec{\omega}_2 \times \vec{u}_2)\, dm_2 - \int_{G_3} (\vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times (2\vec{\omega}_3 \times \vec{u}_3)\, dm_3. \tag{2.24}$$

Вычислим производную по времени от величины $\vec{K}_2$ (см. (2.20)):

$$\begin{aligned}\frac{d'\vec{K}_2}{dt} &= \int_{G_2} \frac{d\vec{r}_2}{dt} \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2)\, dm_2 + \int_{G_2} \vec{r}_2 \times (\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 + \vec{\omega}_2 \times \frac{d\vec{r}_i}{dt} + \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t})\, dm_2 + \\ &+ \vec{\omega}_2 \times \int_{G_2} \vec{r}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2)\, dm_2 + \int_{G_3} \frac{d}{dt}(\vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3 + \vec{u}_3)\, dm_3 + \\ &+ \int_{G_3} (\vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times (\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_2 \times \frac{d\vec{h}_2}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 + \vec{\omega}_3 \times \frac{d\vec{r}_3}{dt} + \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t})\, dm_3 + \\ &+ \vec{\omega}_3 \times \int_{G_3} (\vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3 + \vec{u}_3)\, dm_3.\end{aligned} \tag{2.25}$$

После линеаризации (2.25) получаем искомое уравнение изменения кинетического момента системы тел $\{G_2; G_3\}$ относительно точки O_2:

$$\begin{aligned}\frac{d'\vec{K}_2}{dt} &= \int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times (\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2)\, dm_2 + \sum_{l=1}^{3} \rho_{2l} \int\limits_{\Omega_{2l}} \vec{r}_2 \times \frac{\partial \vec{u}_{2l}}{\partial t}\, d\Omega_{2l} + \\ &+ \int_{G_3} (\vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times (\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3)\, dm_3 + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} (\vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t}\, d\Omega_{31} = \\ &= -\alpha_2(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) - g m_2 l_2 P_2 \vec{\delta}_2 - g m_3 (h_2 P_2 \vec{\delta}_2 + l_3 P_2 \vec{\delta}_3) + \\ &+ g \sum_{l=1}^{2} \Delta\rho_{2l} \int_{\Gamma_{2l}} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2) \zeta_{2l}\, d\Gamma_{2l} + \int_{G_2} \vec{r}_2 \times \vec{f}_2\, dm_2 + \int_{G_3} (\vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times \vec{f}_3\, dm_3 - \\ &- \int_{G_2} \vec{r}_2 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1)\, dm_2 - \int_{G_3} (\vec{h}_2 + \vec{r}_3) \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1)\, dm_3.\end{aligned} \tag{2.26}$$

2.3. Уравнения изменения кинетического момента относительно полюса O_3 тела G_3.

В этом случае получаем

$$\vec{K}_3 = \int_{G_3} \vec{r}_3 \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3 + \vec{u}_3)\, dm_3; \tag{2.27}$$

$$\vec{M}_3^{tr} = -\alpha_3(\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2), \quad \alpha_3 > 0; \tag{2.28}$$

$$\vec{M}_3 = \int_{G_3} \vec{r}_3 \times (\vec{g} + \vec{f}_3)\, dm_3 = -g m_3 l_3 P_2 \vec{\delta}_3 + \int_{G_3} \vec{r}_3 \times \vec{f}_3\, dm_3; \tag{2.29}$$

$$\vec{M}_3^e = -\int_{G_3} \vec{r}_3 \times \vec{a}_3^e \, dm_3, \tag{2.30}$$

где $\vec{a}_3^e = \sum_{j=1}^{2} (\frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j + \vec{\omega}_j \times (\vec{\omega}_j \times \vec{h}_j)) \approx \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2$ — ускорение точки O_3. Моментом кориолисовых сил пренебрегаем.

Вычислим производную по времени от величины $\vec{K}_3$:

$$\frac{d'\vec{K}_3}{dt} = \int_{G_3} \frac{d\vec{r}_3}{dt} \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3 + \vec{u}_3) \, dm_3 + \int_{G_3} \vec{r}_3 \times (\frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 + \vec{\omega}_3 \times \frac{d\vec{r}_3}{dt} + \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t}) \, dm_3 + \\ + \vec{\omega}_3 \times \int_{G_3} \vec{r}_3 \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3 + \vec{u}_3) \, dm_3. \tag{2.31}$$

После линеаризации уравнение изменения кинетического момента относительно точки O_3 тела G_3 в подвижной системе $O_3x_3^1x_3^2x_3^3$ координат принимает вид:

$$\int\limits_{G_3} \vec{r}_3 \times (\frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3) \, dm_3 + \rho_{31} \int\limits_{\Omega_{31}} \vec{r}_3 \times \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t} d\Omega_{31} = -\alpha_3(\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2) - \\ - g m_3 l_3 P_2 \vec{\delta}_3 + \int_{G_3} \vec{r}_3 \times \vec{f}_3 \, dm_3 - \int_{G_3} \vec{r}_3 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2) \, dm_3. \tag{2.32}$$

2.4. Преобразование уравнений изменения кинетического момента системы тел.

Из уравнений (2.19), (2.26) и (2.32) следует, что левые и правые части последующего уравнения целиком входят в левые и правые части предыдущего. Вычитая соответствующие левые и правые части, получаем упрощенную форму записи уравнений движения системы тел. Уравнение изменения кинетического момента относительно точки O_3 переписываем без изменений.

$$\int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) \, dm_1 + \rho_{11} \int\limits_{\Omega_{11}} \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_{11}}{\partial t} \, d\Omega_{11} + \rho_{12} \int\limits_{\Omega_{12}} \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_{12}}{\partial t} \, d\Omega_{21} + \\ + \int_{G_2} \vec{h}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) \, dm_2 + \\ + \int_{G_3} \vec{h}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3\right) \, dm_3 + \sum_{l=1}^{3} \rho_{2l} \int_{\Omega_{2l}} \vec{h}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_{2l}}{\partial t} \, d\Omega_{2l} + \\ + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} \vec{h}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t} \, d\Omega_{31} + \alpha_1 \vec{\omega}_1 - \alpha_2(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) + g(m_1 l_1 + h_1 m_2 + h_1 m_3) P_2 \vec{\delta}_1 - \\ - g\Delta\rho_{11} \int_{\Gamma_{11}} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1) \zeta_{11} \, d\Gamma_{11} = \int_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{f}_1 \, dm_1 + \sum_{k=2}^{3} \int_{G_k} \vec{h}_1 \times \vec{f}_k \, dm_k =: \vec{M}_1(t); \tag{2.33}$$

$$\int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 \right) dm_2 + \sum_{l=1}^{3} \rho_{2l} \int\limits_{\Omega_{2l}} \vec{r}_2 \times \frac{\partial \vec{u}_{2l}}{\partial t} \, d\Omega_{2l} +$$
$$+ \int_{G_3} \vec{h}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 \right) dm_3 + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} \vec{h}_2 \times \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t} \, d\Omega_{31} +$$
$$+ \alpha_2(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) - \alpha_3(\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2) + g(m_2 l_2 + h_2 m_3) P_2 \vec{\delta}_2 - g \sum_{l=1}^{2} \Delta\rho_{2l} \int_{\Gamma_{2l}} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2) \zeta_{2l} \, d\Gamma_{2l} =$$
$$= \int_{G_2} \vec{r}_2 \times \vec{f}_2 \, dm_2 + \int_{G_3} \vec{h}_2 \times \vec{f}_3 \, dm_3 =: \vec{M}_2(t), \quad (2.34)$$

$$\int\limits_{G_3} \vec{r}_3 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 \right) dm_3 + \rho_{31} \int\limits_{\Omega_{31}} \vec{r}_3 \times \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t} \, d\Omega_{31} +$$
$$+ \alpha_3(\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2) + g m_3 l_3 P_2 \vec{\delta}_3 = \int_{G_3} \vec{r}_3 \times \vec{f}_3 \, dm_3 =: \vec{M}_3(t). \quad (2.35)$$

3. Уравнения движения жидкостей в полостях

Первый маятник заполнен двумя идеальными жидкостями Ω_{11}, Ω_{12}, для которых выполнены линеаризованные уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial \vec{u}_{11}}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 = -\rho_{11}^{-1} \nabla p_{11} + \vec{f}_{11}, \quad \operatorname{div} \vec{u}_{11} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{11}), \quad (3.1)$$
$$\frac{\partial \vec{u}_{12}}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 = -\rho_{12}^{-1} \nabla p_{12} + \vec{f}_{12}, \quad \operatorname{div} \vec{u}_{12} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{12}), \quad (3.2)$$

с граничными условиями непротекания

$$\vec{u}_{11} \cdot \vec{n}_{11} = 0 \quad (\text{на } S_{11}), \qquad \vec{u}_{12} \cdot \vec{n}_{12} = 0 \quad (\text{на } S_{12}), \quad (3.3)$$

На свободной границе раздела Γ_{11} выполнены кинематические условия

$$\frac{\partial \zeta_{11}}{\partial t} = \vec{u}_{11} \cdot \vec{n}_{11} = \vec{u}_{12} \cdot \vec{n}_{11}, \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \quad \int_{\Gamma_{11}} \zeta_{11} \, d\Gamma_{11} = 0, \quad (3.4)$$

а также линеаризованное динамическое условие

$$p_{11} - p_{12} = \Delta\rho_{11} g (\zeta_{11} + \theta_{11} (P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3}) \quad (\text{на } \Gamma_{11}). \quad (3.5)$$

Отметим, что с учётом условия сохранения объемов жидкостей Ω_{1j}, т.е. равенства $\int_{\Gamma_{11}} \zeta_{11} \, d\Gamma_{11} = 0$, следует, что $\zeta_{11} \in L_{2,\Gamma_{11}} := L_2(\Gamma_{11}) \ominus \operatorname{sp}\{1_{\Gamma_{11}}\}$. В силу того, что давления определяются с точностью до константы, считаем, что $p_{1j} \in L_{2,\Gamma_{11}}$, отсюда в краевом условии (3.5) целесообразно использовать ортопроектор $\theta_{11} : L_2(\Gamma_{11}) \to L_{2,\Gamma_{11}}$.

Будем предполагать, что однородные вязкие жидкости Ω_{2l} имеют кинематические вязкости $\nu_{2l} > 0$. Малые движения этой системы описывается линеаризованными уравнениями Навье–Стокса в подвижных системах координат $O_k x_k^1 x_k^2 x_k^3$ (см. [6], с. 124):

$$\frac{\partial \vec{u}_{21}}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 = -\rho_{21}^{-1} \nabla p_{21} + \nu_{21} \Delta \vec{u}_{21} + \vec{f}_{21}, \ \operatorname{div} \vec{u}_{21} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{21}), \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial \vec{u}_{22}}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 = -\rho_{22}^{-1} \nabla p_{22} + \nu_{22} \Delta \vec{u}_{22} + \vec{f}_{22}, \ \operatorname{div} \vec{u}_{22} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{22}), \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial \vec{u}_{23}}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 = -\rho_{23}^{-1} \nabla p_{23} + \nu_{23} \Delta \vec{u}_{23} + \vec{f}_{23}, \ \operatorname{div} \vec{u}_{23} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{23}). \tag{3.8}$$

На твёрдых стенках выполнены условия прилипания

$$\vec{u}_{2l} = \vec{0} \quad (\text{на } S_{2l}), \quad l = 1, 2, 3. \tag{3.9}$$

Предполагаем, что капиллярными силами можно пренебречь, тогда в состоянии равновесия свободные поверхности $\Gamma_{2l}(t)$ являются неподвижными плоскостями, ортогональными вектору $\vec{e}^{\,3}$. Они могут быть заданы уравнениями $x_3' = -b_{2l} < 0$, где $b_{2l} = \text{const}$.

Приравнивая напряжения в жидкостях на границах раздела после линеаризации получаем касательные динамические условия

$$\mu_{21} \tau_{j3}(\vec{u}_{21}) = \mu_{22} \tau_{j3}(\vec{u}_{22}) \quad (\text{на } \Gamma_{21}), \tag{3.10}$$

$$\mu_{22} \tau_{j3}(\vec{u}_{22}) = \mu_{23} \tau_{j3}(\vec{u}_{23}) \quad (\text{на } \Gamma_{22}), \quad j = 1, 2, \tag{3.11}$$

где $\mu_{2l} := \rho_{2l} \nu_{2l}$ — динамические вязкости в жидкости Ω_{2l},

$$\tau_{jk}(\vec{u}_{2l}) := \frac{\partial u_{2l}^k}{\partial x_{2l}^j} + \frac{\partial u_{2l}^j}{\partial x_{2l}^k}. \tag{3.12}$$

Из условия $x_{2l}^3 = b_{2l} + \zeta_{2l}(t, x_{2l}^1, x_{2l}^2)$, после линеаризации приходим к динамическим краевым условиям для нормального напряжения

$$\left[p_{21} - 2\mu_{21} \frac{\partial u_{21}^3}{\partial x_{21}^3} \right] - \left[p_{22} - 2\mu_{22} \frac{\partial u_{22}^3}{\partial x_{22}^3} \right] = \Delta\rho_{21} g (\zeta_{21} + \theta_{21} (P_2 \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_2^{\,3}) \quad (\text{на } \Gamma_{21}), \tag{3.13}$$

$$\left[p_{22} - 2\mu_{22} \frac{\partial u_{22}^3}{\partial x_{22}^3} \right] - \left[p_{23} - 2\mu_{23} \frac{\partial u_{23}^3}{\partial x_{23}^3} \right] = \Delta\rho_{22} g (\zeta_{22} + \theta_{22} (P_2 \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_2^{\,3}) \quad (\text{на } \Gamma_{22}), \tag{3.14}$$

а также к кинематическим условиям

$$\frac{\partial \zeta_{21}}{\partial t} = \vec{u}_{21} \cdot \vec{n}_{21} = \vec{u}_{22} \cdot \vec{n}_{21}, \quad (\text{на } \Gamma_{21}), \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial \zeta_{22}}{\partial t} = \vec{u}_{22} \cdot \vec{n}_{22} = \vec{u}_{23} \cdot \vec{n}_{22}, \quad (\text{на } \Gamma_{22}), \tag{3.16}$$

с условиями сохранения объемов $\int_{\Gamma_{2l}} \zeta_{2l}\, d\Gamma_{2l} = 0,\ l = 1,2$. В силу последних соотношений в краевых условиях (3.13), (3.14) используются ортопроекторы θ_{2l} : $L_2(\Gamma_{2l}) \to L_{2,\Gamma_{2l}} := L_2(\Gamma_{2l}) \ominus \mathrm{sp}\,\{1_{\Gamma_{2l}}\},\ l = 1,2$.

По условию полость Ω_{31} целиком заполнена однородной несжимаемой идеальной жидкостью. Ее малые движения описываются линеаризованными уравнениями Эйлера:

$$\frac{\partial \vec{u}_{31}}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 = -\rho_{31}^{-1} \nabla p_{31} + \vec{f}_{31},\ \mathrm{div}\, \vec{u}_{31} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{31}), \tag{3.17}$$

с граничным условием непротекания

$$\vec{u}_{31} \cdot \vec{n}_{31} = 0 \quad (\text{на } S_{31}), \tag{3.18}$$

где $\vec{n}_{31}$ — внешняя единичная нормаль к S_{31}.

Для полной постановки задачи необходимо также задать очевидные условия связи

$$\frac{d}{dt} P_2 \vec{\delta}_k = P_2 \vec{\omega}_k, \quad \frac{d}{dt} \vec{\delta}_k^3 = \vec{\omega}_k^3, \quad k = \overline{1,3}, \tag{3.19}$$

и начальные данные

$$\vec{u}_{jk}(0,x) = \vec{u}_{jk}^0(x),\ x \in \Omega_{jk}, \quad \zeta_{jk}(0,x) = \zeta_{jk}^0(x),\ x \in \Gamma_{jk}, \tag{3.20}$$

$$\vec{\omega}_k(0) = \vec{\omega}_k^0, \quad \vec{\delta}_k(0) = \vec{\delta}_k^0, \quad k = 1,3. \tag{3.21}$$

4. Закон баланса полной энергии

Будем считать, что задача (2.33)–(3.21) имеет классическое решение, т.е. в уравнениях, начальных и граничных условиях все слагаемые являются непрерывными функциями по своим переменным. Будем также для простоты обозначений скалярные произведения в $\mathbb{C}^3$ и $L_2(\Omega_{ij})$ обозначать без комплексного сопряжения второго сомножителя. Тогда, умножая обе части уравнения (2.33) скалярно на $\vec{\omega_1}$, используя свойства смешанного произведения векторов, а также очевидное тождество

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |\vec{\omega} \times \vec{r}|^2\, d\Omega = \int_\Omega (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r})\, d\Omega, \tag{4.1}$$

получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{\rho_{10}}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_{10}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1|^2\, d\Omega_{10} + \left[\sum_{j=1}^{2} \rho_{1j} \int_{\Omega_{1j}} (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 + \frac{\partial \vec{u}_{1j}}{\partial t}\right) d\Omega_{1j}\right]_1 + \\
&\quad + \left[\rho_{20} \int_{\Omega_{20}} (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1) \cdot \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) d\Omega_{20}\right]_2 + \\
&\quad + \left[\sum_{j=1}^{3} \rho_{2j} \int_{\Omega_{2j}} (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1) \cdot \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 + \frac{\partial \vec{u}_{2j}}{\partial t}\right) d\Omega_{2j}\right]_3 + \\
&\quad + \left[\rho_{30} \int_{\Omega_{30}} (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1) \cdot \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3\right) d\Omega_{30}\right]_4 + \\
&\quad + \left[\rho_{31} \int_{\Omega_{31}} (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1) \cdot \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 + \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t}\right) d\Omega_{31}\right]_5 + \\
&\quad + (\alpha_1 + \alpha_2)|\vec{\omega}_1|^2 - \alpha_2 \vec{\omega}_2 \cdot \vec{\omega}_1 + \frac{g}{2}(m_1 l_1 + h_1(m_2 + m_3))\frac{d}{dt}|P_2\vec{\delta}_1|^2 + \\
&\quad + \left\{g\Delta\rho_{11} \int_{\Gamma_{11}} \left((\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_1) \times \vec{r}_1\right) \vec{e}_1^{\,3} \zeta_{11}\, d\Gamma_{11}\right\}_1 = \vec{M}_1(t) \cdot \vec{\omega}_1. \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

Аналогично, умножая обе части уравнений (2.34), (2.35) соответственно скалярно на $\vec{\omega}_2$ и $\vec{\omega}_3$, после преобразований получаем

$$
\begin{aligned}
&\left[\rho_{20} \int_{\Omega_{20}} (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) d\Omega_{20}\right]_2 + \\
&\quad + \left[\sum_{j=1}^{3} \rho_{2j} \int_{\Omega_{2j}} (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 + \frac{\partial \vec{u}_{2j}}{\partial t}\right) d\Omega_{2j}\right]_3 + \\
&\quad + \left[\rho_{30} \int_{\Omega_{30}} (\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2) \cdot \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3\right) d\Omega_{30}\right]_4 + \\
&\quad + \left[\rho_{31} \int_{\Omega_{31}} (\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2) \cdot \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 + \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t}\right) d\Omega_{31}\right]_5 + \\
&\quad + (\alpha_2 + \alpha_3)|\vec{\omega}_2|^2 - \alpha_2 \vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2 - \alpha_3 \vec{\omega}_3 \cdot \vec{\omega}_2 + \frac{g}{2}(m_2 l_2 + h_2 m_3)\frac{d}{dt}|P_2\vec{\delta}_2|^2 + \\
&\quad + \left\{g \sum_{l=1}^{2} \Delta\rho_{2l} \int_{\Gamma_{2l}} \left((\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_2) \times \vec{r}_2\right) \vec{e}_2^{\,3} \zeta_{2l}\, d\Gamma_{2l}\right\}_2 = \vec{M}_1(t) \cdot \vec{\omega}_2; \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

$$\left[\rho_{30}\int_{\Omega_{30}}(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3)\cdot\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)d\Omega_{30}\right]_4+$$
$$+\left[\rho_{31}\int_{\Omega_{31}}(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3)\cdot\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3+\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t}\right)d\Omega_{31}\right]_5+$$
$$+\alpha_3|\vec{\omega}_3|^2-\alpha_3\vec{\omega}_2\cdot\vec{\omega}_3+\frac{g}{2}m_3l_3\frac{d}{dt}|P_2\vec{\delta}_3|^2=\vec{M}_3(t)\cdot\vec{\omega}_3. \quad (4.4)$$

Умножая обе части уравнений (3.1), (3.2) соответственно скалярно на $\vec{u}_{11}$ и $\vec{u}_{12}$ и интегрируя полученные равенства по областям Ω_{11} и Ω_{12} с учётом соленоидальности полей $\vec{u}_{1j}$, условий непротекания (3.18) и формулы Гаусса-Остроградского, которая имеет вид $\int_{\Omega_{1j}}\operatorname{div}(p_{1j}\vec{u}_{1j})\,d\Omega_{1j}=\int_{\Omega_{1j}}\nabla p_{1j}\cdot\vec{u}_{1j}\,d\Omega_{1j}=\int_{\Gamma_{11}}p_{1j}(\vec{u}_{1j}\cdot\vec{n})\,d\Gamma_{11}$ ($\vec{n}$ — внешняя нормаль к области Ω_{1j}), после суммирования и использования краевых условий (3.4), (3.5) получаем

$$\left[\sum_{j=1}^{2}\rho_{1j}\int_{\Omega_{1j}}\vec{u}_{1j}\cdot\left(\frac{\partial\vec{u}_{1j}}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)d\Omega_{1j}\right]_1+\sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega_{1j}}\nabla p_{1j}\cdot\vec{u}_{1j}\,d\Omega_{1j}=$$
$$=\Big[\dots\Big]_1+\int_{\Gamma_{11}}(p_{11}-p_{12})\frac{\partial\zeta_{11}}{\partial t}\,d\Gamma_{11}=\Big[\dots\Big]_1+$$
$$+\left\{\frac{g}{2}\Delta\rho_{11}\int_{\Gamma_{11}}[|\zeta_{11}|^2+2\theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3})\frac{\partial\zeta_{11}}{\partial t}]\,d\Gamma_{11}\right\}_1=\sum_{j=1}^{2}\rho_{1j}\int_{\Omega_{1j}}\vec{f}_{1j}\cdot\vec{u}_{1j}\,d\Omega_{1j}. \quad (4.5)$$

Считая, что решения уравнений движения вязких жидкостей (3.6)–(3.8) являются непрерывными функциями по всем своим переменным, выполнены классические формулы Грина для соленоидальных векторных полей в областях $\Omega_{2j}(j=1,2,3)$ (см. [1], с. 14):

$$\int\limits_{\Omega_{21}}(-\mu_{21}\Delta\vec{u}_{21}+\nabla p_{21})\cdot\vec{v}_{21}\,d\Omega_{21}=$$
$$=\mu_{21}E_{21}(\vec{u}_{21},\vec{v}_{21})-\int\limits_{\Gamma_{21}}\sum_{j,k=1}^{3}(\mu_{21}\tau_{jk}(\vec{u}_{21})-p_{21}\delta_{jk})(v_{21})_j\cos(\vec{n}_{21},\vec{e}_2^{\,k})\,d\Gamma_{21};$$

$$\int\limits_{\Omega_{22}}(-\mu_{22}\Delta\vec{u}_{22}+\nabla p_{22})\cdot\vec{v}_{22}\,d\Omega_{22}=\mu_{22}E_{22}(\vec{u}_{22},\vec{v}_{22})-$$
$$-\int\limits_{\Gamma_{22}}\sum_{j,k=1}^{3}(\mu_{22}\tau_{jk}(\vec{u}_{22})-p_{22}\delta_{jk})(v_{22})_j\cos(\vec{n}_{22},\vec{e}_2^{\,k})\,d\Gamma_{22}+$$
$$+\int\limits_{\Gamma_{21}}\sum_{j,k=1}^{3}(\mu_{22}\tau_{jk}(\vec{u}_{22})-p_{22}\delta_{jk})(v_{22})_j\cos(\vec{n}_{21},\vec{e}_2^{\,k})\,d\Gamma_{21};$$

$$\int\limits_{\Omega_{23}} (-\mu_{23}\Delta\vec{u}_{23} + \nabla p_{23}) \cdot \vec{v}_{23}\, d\Omega_{23} =$$

$$= \mu_{23}E_{23}(\vec{u}_{23}, \vec{v}_{23}) + \int\limits_{\Gamma_{22}} \sum_{j,k=1}^{3} (\mu_{23}\tau_{jk}(\vec{u}_{23}) - p_{23}\delta_{jk})(v_{23})_j \cos(\vec{n}_{22}, \vec{e}_2^{\,k})\, d\Gamma_{22},$$

где $\vec{n}_{21} = \vec{n}_{22} = \vec{e}_2^{\,3}$, $E_{2l}(\vec{u}_{2l}, \vec{v}_{2l}) := \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{\Omega_{2l}} \left[\sum_{j,k=1}^{3} \tau_{jk}(\vec{u}_{2l})\tau_{jk}(\vec{v}_{2l})\right] d\Omega_{2l}$, $l = 1, 2, 3.$

Умножая скалярно обе части уравнений (3.6)–(3.8) соответственно на $\vec{u}_{2j}$, интегрируя их по областям Ω_{2j}, после суммирования, использования приведенных формул Грина и краевых условий (3.10)–(3.16) получим

$$\left[\sum_{j=1}^{3} \rho_{2j} \int_{\Omega_{2j}} \vec{u}_{2j} \cdot \left(\frac{\partial \vec{u}_{2j}}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) d\Omega_{2j}\right]_3 +$$
$$+ \sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega_{2j}} (-\mu_{2j}\Delta\vec{u}_{2j} - \nabla p_{1j}) \cdot \vec{u}_{2j}\, d\Omega_{2j} = \Big[\ldots\Big]_3 + \sum_{j=1}^{3} \mu_{2j}E_{2j}(\vec{u}_{2j}, \vec{u}_{2j}) +$$
$$+ \int_{\Gamma_{21}} (p_{21} - p_{22} - 2\mu_{21}\frac{\partial u_{21}^3}{\partial x_{21}^3} + 2\mu_{22}\frac{\partial u_{22}^3}{\partial x_{22}^3})\frac{\partial \zeta_{21}}{\partial t}\, d\Gamma_{21} +$$

$$+ \int_{\Gamma_{22}} (p_{22} - p_{23} - 2\mu_{22}\frac{\partial u_{22}^3}{\partial x_{22}^3} + 2\mu_{23}\frac{\partial u_{23}^3}{\partial x_{23}^3})\frac{\partial \zeta_{22}}{\partial t}\, d\Gamma_{22} = \Big[\ldots\Big]_3 + \sum_{j=1}^{3} \mu_{2j}E_{2j}(\vec{u}_{2j}, \vec{u}_{2j}) +$$
$$+ \left\{\sum_{l=1}^{2} \Delta\rho_{2l}\, g \int_{\Gamma_{2l}} (\zeta_{2l} + \theta_{2l}((P_2\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_2^{\,3}))\frac{\partial \zeta_{2l}}{\partial t}\, d\Gamma_{2l}\right\}_2 = \sum_{j=1}^{3} \rho_{2j} \int_{\Omega_{2j}} \vec{f}_{2j} \cdot \vec{u}_{2j}\, d\Omega_{2j}. \quad (4.6)$$

Аналогично выводу тождества (4.5) уравнение для третьей жидкости (3.17) приводит к соотношению

$$\left[\rho_{31} \int_{\Omega_{31}} \vec{u}_{31} \cdot \left(\frac{\partial \vec{u}_{31}}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3\right) d\Omega_{31}\right]_5 +$$
$$+ \int_{\Omega_{31}} \nabla p_{31} \cdot \vec{u}_{31}\, d\Omega_{31} = \Big[\ldots\Big]_5 = \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} \vec{f}_{31} \cdot \vec{u}_{31}\, d\Omega_{31}. \quad (4.7)$$

Складывая теперь полученные тождества (4.2)–(4.7), можно заметить, что с учётом соотношения (4.1) группы слагаемых в скобках с одинаковыми индексами можно объединить в одну формулу, а именно

$$\sum \Big[\ldots\Big]_1 = \sum_{j=1}^{2} \frac{\rho_{1j}}{2}\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega_{1j}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_{1j}|^2\, d\Omega_{1j};$$

$$\sum\Big[\dots\Big]_2 = \frac{\rho_{20}}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_{20}} |\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2|^2\,d\Omega_{20};$$

$$\sum\Big[\dots\Big]_3 = \sum_{j=1}^{3}\frac{\rho_{2j}}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_{2j}} |\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2+\vec{u}_{2j}|^2\,d\Omega_{2j};$$

$$\sum\Big[\dots\Big]_4 = \frac{\rho_{30}}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_{30}} |\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3|^2\,d\Omega_{30};$$

$$\sum\Big[\dots\Big]_5 = \frac{\rho_{31}}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_{31}} |\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3+\vec{u}_{31}|^2\,d\Omega_{31};$$

$$\sum\Big\{\dots\Big\}_1 = \frac{g\Delta\rho_{11}}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Gamma_{11}} \Big[|\zeta_{11}+\theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3})|^2-|\theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3})|^2\Big]\,d\Gamma_{11};$$

$$\sum\Big\{\dots\Big\}_2 = \sum_{l=1}^{2}\frac{g\Delta\rho_{2l}}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Gamma_{2l}} \Big[|\zeta_{2l}+\theta_{2l}((P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3})|^2-|\theta_{2l}((P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3})|^2\Big]\,d\Gamma_{2l}.$$

При этом несложно заметить, что слагаемые для моментов трения в шарнирах сворачиваются в сумму

$$\alpha_1|\vec{\omega}_1|^2+\alpha_2|\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1|^2+\alpha_3|\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2|^2.$$

Отсюда общая сумма приводит к закону баланса полной энергии в дифференциальной форме:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\rho_{10}\int\limits_{\Omega_{10}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1|^2\,d\Omega_{10}+\sum_{j=1}^{2}\rho_{1j}\int\limits_{\Omega_{1j}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_{1j}|^2\,d\Omega_{1j}+$$
$$+\rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2|^2\,d\Omega_{20}+\sum_{j=1}^{3}\rho_{2j}\int\limits_{\Omega_{2j}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2+\vec{u}_{2j}|^2\,d\Omega_{2j}+$$
$$+\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3|^2\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3+\vec{u}_{31}|^2\,d\Omega_{31}\Big\}+$$
$$+\frac{g}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\Delta\rho_{11}\int\limits_{\Gamma_{11}}\Big[|\zeta_{11}+\theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3})|^2-|\theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3})|^2\Big]\,d\Gamma_{11}+$$
$$+\sum_{l=1}^{2}\Delta\rho_{2l}\int\limits_{\Gamma_{2l}}\Big[|\zeta_{2l}+\theta_{2l}((P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3})|^2-|\theta_{2l}((P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3})|^2\Big]\,d\Gamma_{2l}+$$
$$+(m_1l_1+(m_2+m_3)h_1)|P_2\vec{\delta}_1|^2+(m_2l_2+m_3h_2)|P_2\vec{\delta}_2|^2+m_3l_3|P_2\vec{\delta}_3|^2\Big\}=$$

$$= -\left\{\sum_{j=1}^{3}\mu_{2j}E_{2j}(\vec{u}_{2j},\vec{u}_{2j}) + \alpha_1|\vec{\omega}_1|^2 + \alpha_2|\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1|^2 + \alpha_3|\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2|^2\right\} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{2}\rho_{1j}\int\limits_{\Omega_{1j}}\vec{f}_{1j}\cdot\vec{u}_{1j}\,d\Omega_{1j} + \sum_{j=1}^{3}\rho_{2j}\int\limits_{\Omega_{2j}}\vec{f}_{2j}\cdot\vec{u}_{2j}\,d\Omega_{2j} +$$
$$+ \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\vec{f}_{31}\cdot\vec{u}_{31}\,d\Omega_{31} + \sum_{j=1}^{3}\vec{M}_j\cdot\vec{\omega}_j. \quad (4.8)$$

Поясним смысл групп слагаемых, стоящих в формуле (4.8). Первое выражение, стоящее слева в фигурных скобках, есть удвоенная кинетическая энергия гидромеханической системы, соответственно второе выражение в фигурных скобках — удвоенная потенциальная энергия. Изменение потенциальной энергии обусловливается поворотами маятников и смещением свободных границ раздела жидкостей, отвечающих отклонениям ζ_{11}, ζ_{21} и ζ_{22}. Справа в (4.8) имеем мощность внутренних и внешних сил, состоящая из мощности сил вязкости (второй маятник) и сил трения в шарнирах, а также мощности малых внешних сил, наложенных на гравитационное поле.

5. Предварительные свойства решений начально-краевой задачи

Далее предполагается изучать задачу (2.33)–(3.21), используя методы ортогонального проектирования на подпространства потенциальных и соленоидальных векторных полей и свойства слабых решений вспомогательных начально-краевых задач. Предполагается, что в операторной форме в соответственно подобранном гильбертовом пространстве $H = H_1 \oplus H_2$ исходная начально-краевая задача сведётся к задаче Коши вида

$$\begin{cases} C_1\dfrac{dz_1}{dt} + A_1z_1 + gB_{12}z_2 = f_1(t), \quad z_1(0) = z_1^0; \\ gC_2\dfrac{dz_2}{dt} + gB_{21}z_1 = 0, \quad z_2(0) = z_2^0, \end{cases} \quad (5.1)$$

где $z_1 \in H_1$ — набор динамических переменных, $z_2 \in H_2$ — набор кинематических переменных, $0 \ll C_1 \in \mathcal{L}(H_1)$ — оператор кинетической энергии, $C_2 = C_2^* \in \mathcal{L}(H_2)$ — оператор потенциальной энергии, $0 \le A_1$ — оператор диссипации энергии, а B_{12} и $B_{21} = -B_{12}^*$ — ограниченные операторы, связанные с обменом между кинетической и потенциальной энергиями системы. В частности, к такой форме сводятся задачи для одного маятника с тремя видами рассмотренных видов заполнений полости жидкостями, см. [9], [10]. В [7] доказана теорема о существовании единственного сильного решения задачи (5.1) на заданном отрезке времени $[0;T]$ в предположении статической устойчивости по линейному приближению ($C_2 \gg 0$), либо в ее отсутствие. Основываясь на данной теореме предполагается доказать сильную разрешимость исходной задачи, а также изучить свойства соответствующей спектральной задачи, которые существенно зависят от свойств операторов C_2 и A_1.

Автор выражает благодарность Н. Д. Копачевскому за постановку задачи и руководство работой.

Список цитируемых источников

1. *Азизов Т. Я., Копачевский Н.Д.* Абстрактная формула Грина и её приложения. – Симферополь: ТНУ, 2011. – 136 с.

   Azizov, T. Ya., Kopachevsky, N. D. Abstract Green's formula and its applications. Simferopol: Bondarenko O.A., 2011. (in Russian)

2. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д.* Приложения индефинитной метрики. – Симферополь: ДИАЙПИ, 2014. – 276 с.

   Azizov, T. Ya., Kopachevsky, N. D. Applications of indefinite metrics. Simferopol: DIAIPI, 2014. (in Russian)

3. *Батыр Э. И.* Малые движения системы последовательно сочлененных тел с полостями, содержащими вязкую несжимаемую жидкость // Динамические системы. – 2001. – Вып. 17. – С. 120-125.

   Batyr, E. I. Small motions of a system of joined bodies with cavities contains a viscous incompressible fluid. Dinamicheskie sistemy 17, 120–125 (2001). (in Russian)

4. *Батыр Э. И., Копачевский Н. Д.* Малые движения и нормальные колебания системы сочлененных гиростатов // Современная математика. Фундам. направления. – 2013. – Том 49. – С. 5–88.

   Batyr, E. I., Kopachevsky, N. D. Small motions and normal oscillations of a system of joined gyrostats. Contemporary math. Fundamental directions. 49, 5–88 (2013). (in Russian)

5. *Жуковский Н. Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Избранные сочинения. – Т. 1. – М., Л.: Гостехиздат, 1948. – С. 31–52.

   Zhukovskiy, N. E. On motions of rigid body with cavities filled with homogeneous ideal fluid. Selected works. Moscow: Gostechizdat, 31–52 (1948). (in Russian)

6. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, 1989. – 416 с.

   Kopachevsky, N. D., Krein, S. G. & Ngo Zui Kan Operator methods in linear hydrodynamics. Evolution and spectral problems. Moscow: Nauka, 1989. (in Russian)

7. *Копачевский Н. Д., Войтицкий В. И., Ситшаева З. З.* О колебаниях двух сочлененных маятников, содержащих полости, частично заполненные несжимаемой жидкостью // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2017. – Т.63, №4 . – С. 627-677.

   Kopachevsky, N. D., Voytitsky, V I., Sitshaeva, Z. Z. On oscillations of joined pendulums with cavities partially filled with incompressible fluid. Contemporary math. Fundamental directions. Vol. 63, issue 4, 627–677 (2017). (in Russian)

8. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д.* О малых колебаниях системы из трёх сочленённых маятников с полостями, заполненными несмешивающимися несжимаемыми жидкостями // Материалы международной научной конференции “Современные методы и проблемы математической гидродинамики - 2018” (3-8 мая 2018 г., Воронеж). – 2018. – С. 84-91.

   Voytitsky, V I., Kopachevsky, N. D. On small oscillations of a system of three joined pendulums with cavities filled with incompressible immiscible fluids. Proceedings of int. conf. “Modern methods and problems of mathematical hydrodynamics-2018” (3-8 May 2018, Voronezh), 84–91 (2018). (in Russian)

9. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д.* О малых движениях физического маятника, содержащего полость, заполненную системой однородных несмешивающихся жидкостей // Сборник материалов международной конференции XXIX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2018). Секции 1-3. – Симферополь: "Полипринт 2018. – С. 58-62.

   Voytitsky, V I., Kopachevsky, N. D. On small motions of a physical pendulum with cavity filled with system of homogeneous immiscible fluids. Proceedings of int. conf. “XXIX Crimea Autumn Mathematical School-symposium (KROMSH-2018)” (17-29 September 2018, Laspi), 58–62 (2018). (in Russian)

10. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д.* О малых движениях физического маятника с полостью, заполненной системой трёх однородных несмешивающихся вязких жидкостей // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). – 2018. – № 3(40). – С. 22-45.

   Voytitsky, V I., Kopachevsky, N. D. On small motions of a physical pendulum with cavity filled with system of three homogeneous immiscible viscous fluids. Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics (TVIM). Vol. 3(40), 22-45 (2018). (in Russian)

Получена 11.11.2018

Динамические системы, 2018, том 8(36), №4, 357–371

УДК 917.95

Фредгольмова разрешимость задачи линейного сопряжения для эллиптической системы первого порядка с комплексными коэффициентами[1]

О. В. Чернова

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород 308015. *E-mail: volga@mail.ru*

Аннотация. В открытом множестве комплексной плоскости, представляющем собой объединение конечной и бесконечной областей, для эллиптической системы первого порядка с постоянными комплексными старшими коэффициентами рассматривается задача линейного сопряжения. Посредством специальной обратимой линейной замены, задача сводится к задаче линейного сопряжения для эллиптической системы, записанной в каноническом виде. При этом краевое условие выражается через элементы вспомогательных матриц. Предполагая, что выполнены определенные условия на коэффициенты, правые части системы и правую часть краевого условия, используя интегральное представление решений этой системы и опираясь на результаты классической теории сингулярных операторов, установливается критерий фредгольмовой разрешимости этой задачи и формула индекса.

Ключевые слова: эллиптическая система, задача линейного сопряжения, фредгольмов оператор, индекс, весовое пространство Гельдера.

Fredholm solvability of a linear conjugation problem for a first order elliptic system with complex coefficients

O. V. Chernova

Belgorod National Research University, Belgorod 308015.

Abstract. The general first order elliptic system $L_A U(z) + a(z)U(z) + b(z)\overline{U(z)} = F(z)$ is considered in the domain D of complex plane C, where differential operator $L_A = \partial/\partial y - A \cdot \partial/\partial x$ is defined by a matrix A, the constant matrix $A \in \mathbb{C}^{l \times l}$ has no real eigenvalues, complex $l \times l$ matrix coefficients $a(z)$,$b(z)$ belong to $C(D)$, and $F(z)$ is a complex-valued l-vector-function. The solution of system is a l-vector-function $U = (U_1, \dots, U_l) \in C^1(D)$. We show the reduction of the initial system to a canonical form with respect to another l-vector-function with triangular matrix with eigenvalues from upper half-plane. Let $D = D_1 \cup D_2$ be an open set where D_1 is a finite domain, and D_2 is an infinite domain. For an elliptic system the general linear conjugation problem is considered. We assume that $l \times l$-matrix coefficients of the problem belong to the Hölder class of the order ν, $0 < \nu < 1$. The class $C^\mu_\delta(\hat{D}, \infty)$, $-1 < \delta < 0$, consists of Hölder functions from $C^\mu(\overline{D}_1)$ and weighted Hölder functions from $C^\mu_\delta(\overline{D}_2, \infty)$, $-1 < \delta < 0$. Assuming certain conditions are met fulfilled, we seek the solution U

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект №1.7311.2017/8.9.).

in the class $C^{\mu}_{A,\delta}(\hat{D},\infty)$. This class is defined by $U \in C^{\mu}_{\delta}(\hat{D},\infty)$, $L_A U \in C^{\mu}_{\delta-1}(\hat{D},\infty)$. The problem is reduced to a linear conjugation problem for an elliptic system with a triangular matrix. The boundary condition is expressed in terms of $l \times l$ matrix B and items of $2l \times 2l$ matrix G. Finally, using special representation for the function $\phi(z) \in C^{\mu}_{J,\delta}(\hat{D},\infty)$ we obtain some system of one-dimensional and two-dimensional singular integral equations. The latter system is studied by classical methods.
Keywords: elliptic system, linear conjugation problem, Fredholm operator, index, Hölder weight space.
MSC 2010: 35J56

Введение

Задача линейного сопряжения для обычных аналитических функций была предметом многочисленных исследований и детально изучена в скалярном случае для общей кусочно-гладкой линии L [6] и в матричном случае [4], [2]. В работе А. П. Солдатова [8] рассмотрена задача линейного сопряжения теории аналитических функций в матричном случае для произвольной кусочно-гладкой линии, доказана ее фредгольмовость, построено семейство канонических функций и описано поведение этих решений в узлах линии.

Данная работа имеет своей целью исследование задачи линейного сопряжения для общей эллиптической системы с комплексными коэффициентами в случае простого контура Γ в открытом множестве, представляющем собой объединение конечной и бесконечной областей. Задача линейного сопряжения и теория сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши тесно связаны между собой. По существу, это две эквивалентные теории, связь между ними осуществляется с помощью представлений аналитических функций интегралами типа Коши и формулами скачка для последних. В первом параграфе работы рассматриваются эллиптические системы первого порядка с постоянными старшими коэффициентами, здесь показана редукция этой системы к матричному аналогу систем типа Бельтрами [3]. Во втором параграфе с учетом выполнимости определенных условий на коэффициенты, правые части системы и на правую часть краевого условия, установлен критерий фредгольмовой разрешимости задачи линейного сопряжения и найдена формула ее индекса.

1. Эллиптические системы

Рассмотрим в области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ переменной $z = x + iy$ систему l линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$A_1 \frac{\partial U(z)}{\partial x} + A_2 \frac{\partial U(z)}{\partial y} + a(z)U(z) + b(z)\overline{U(z)} = F(z), \quad z \in D,$$

где коэффициенты при старших членах — постоянные матрицы $A_1, A_2 \in \mathbb{C}^{l \times l}$, а $l \times l$-матричные коэффициенты $a(z), b(z) \in C(D)$. Под ее регулярным решением понимается комплексная l-вектор-функция $U = (U_1, \ldots, U_l) \in C^1(D)$, удовлетворяющая этой системе тождественно. Очевидно, эта система $\mathbb{R}$-линейна и является $\mathbb{C}$-линейной при $b = 0$.

Определение. Систему называем *эллиптической*, если $\det(\xi_1 A_1 + \xi_2 A_2) \neq 0$ для каждого ненулевого вектора $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$.

В частности, это условие означает, что матрицы A_1, A_2 не вырождены и матрица $A = -A_2^{-1} A_1$ не имеет вещественных собственных значений. Таким образом, умножая рассматриваемую систему слева на $-A_2^{-1}$ и переходя к соответствующим переобозначениям $a = -A_2^{-1}a$, $b = -A_2^{-1}b$, $F = -A_2^{-1}F$, ее всегда можно представить в виде

$$\frac{\partial U}{\partial y} - A\frac{\partial U}{\partial x} + aU + b\overline{U} = F. \tag{1}$$

В этой общей эллиптической системе старшие коэффициенты при производных постоянны, а матрица $A \in \mathbb{C}^{l\times l}$ не имеет вещественных собственных значений.

Обозначим l_1 и l_2 число собственных значений матрицы A системы (1) (с учетом кратности, $l_1 + l_2 = l$), лежащих в верхней и нижней полуплоскостях, соответственно. Множество всех собственных значений можно записать в виде

$$\widetilde{\sigma} = \sigma_1 \cup \overline{\sigma}_2, \quad \sigma_j \subseteq \{\lambda,\ \operatorname{Im}\lambda > 0\}, \tag{2}$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Напомним, что жордановой формой матрицы называют блочно-диагональную матрицу

$$J = \operatorname{diag}(J_1(\lambda_1), \ldots, J_l(\lambda_l)), \tag{3}$$

где, в свою очередь, каждая матрица J_i, $1 \le i \le l$ также блочно-диагональна и составлена из клеток Жордана

$$J_{i,k}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{k\times k} \tag{4}$$

различных порядков k.

С помощью подходящей обратимой линейной подстановки систему (1) всегда можно преобразовать к аналогичной системе, в которой $l_2 = 0$, т. е. когда все собственные значения матрицы A лежат в верхней полуплоскости. В основе этого преобразования лежит следующее предложение.

Теорема 1. *Существуют обратимые $l \times l$ матрицы B, J блочной структуры*

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \overline{B}_{12} \\ B_{21} & \overline{B}_{22} \end{pmatrix} = (B_1, \overline{B}_2), \quad J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где прямоугольные матрицы $B_j \in \mathbb{C}^{l\times l_j}$ и квадратные матрицы $J_i \in \mathbb{C}^{l_i\times l_i}$, $i, j = 1, 2$, удовлетворяют соотношениям

$$B^{-1}AB = \widetilde{J}, \quad \widetilde{J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & \overline{J}_2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Матрицы J_i записаны в жордановой форме (3), *при этом их диагональные элементы составляют множество σ_i.*

Доказательство. Пусть $X_1 \subseteq \mathbb{C}^l$ есть собственное подпространство матрицы A, отвечающее собственным значениям из σ_1. По определению оно состоит из всех векторов $\xi \in \mathbb{C}^l$, для которых $(A - \lambda I)^n \xi = 0$ для некоторых $\lambda \in \sigma_1$ и натурального n. Пусть $\overline{X}_2$ имеет аналогичный смысл по отношению к $\overline{\sigma}_2$. Напомним, [5] что вектор x называется *присоединенным вектором матрицы* A, *отвечающим собственному значению* λ, если для некоторого натурального числа $n \geq 1$ выполнены соотношения

$$(A - \lambda I)^{n-1} x \neq 0, \quad (A - \lambda I)^n x = 0.$$

Рассмотрим последовательность векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$, для которых выполнено

$$Ax_1 = \lambda x_1, \quad Ax_2 = \lambda x_2 + x_1,$$

$$Ax_3 = \lambda x_3 + x_2, \dots Ax_n = \lambda x_n + x_{n-1},$$

что в свою очередь эквивалентно

$$(A - \lambda I)x_1 = 0, \quad (A - \lambda I)^2 x_2 = 0, \dots, \quad (A - \lambda I)^n x_n = 0.$$

Таким образом, цепочка $x_1, x_2, \dots, x_n$ есть цепочка собственных и присоединенных векторов, отвечающих собственному значению λ.

Согласно [5] в X_1 и $\overline{X}_2$ можно выбрать базисы, составленные из этих цепочек. Если первые l_1 столбцов матрицы B составлены из элементов базиса X_1, а последующие l_2 столбцов —элементов базиса $\overline{X}_2$, то матрица B приводит матрицу A к жордановой форме, т.е. $B^{-1}AB = \widetilde{J}$. Остается эти матрицы записать в блочной форме (5), (6). $\square$

Свяжем с $l-$вектор–функцией $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, где ϕ_1 означают первые l_1 компонент, а ϕ_2 следующие l_2 компонент, $l-$вектор-функцию $\widetilde{\phi} = (\phi_1, \overline{\phi}_2)$. Аналогично положим $\widetilde{F}_0 = B^{-1}F = (F_1, \overline{F}_2)$, $F_0 = (F_1, F_2)$ и введем блочные матрицы

$$\begin{pmatrix} \widetilde{c}_{11} & \widetilde{c}_{12} \\ \widetilde{c}_{21} & \widetilde{c}_{22} \end{pmatrix} = B^{-1}aB, \quad \begin{pmatrix} \widetilde{d}_{11} & \widetilde{d}_{12} \\ \widetilde{d}_{21} & \widetilde{d}_{22} \end{pmatrix} = B^{-1}b\overline{B}. \tag{7}$$

Сформулируем теперь теорему о приведении общей эллиптической системы (1) к каноническому виду.

Теорема 2. *В обозначениях* (5) *подстановка* $B^{-1}U = (\phi_1, \overline{\phi}_2)$, *или в блочной записи, подстановка*

$$U_i = B_{i1}\phi_1 + \overline{B_{i2}\phi_2}, \quad i = 1, 2, \tag{8}$$

преобразует систему (1) *к эквивалентной системе*

$$\frac{\partial \phi(z)}{\partial y} - J\frac{\partial \phi(z)}{\partial x} + c\phi(z) + d\overline{\phi(z)} = F_0(z), \tag{9}$$

где $l \times l-$матричные коэффициенты имеют вид

$$c = \begin{pmatrix} \widetilde{c}_{11} & \widetilde{d}_{12} \\ \overline{\widetilde{d}_{21}} & \overline{\widetilde{c}_{22}} \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} \widetilde{d}_{11} & \widetilde{c}_{12} \\ \overline{\widetilde{c}_{21}} & \overline{\widetilde{d}_{22}} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Доказательство. Подстановка (8) приводит систему (1) к виду

$$B\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial y} - AB\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial x} + aB\widetilde{\phi} + b\overline{B\widetilde{\phi}} = F.$$

Умножая это равенство слева на B^{-1}, в соответствии с теоремой 1, получим систему

$$\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial y} - \widetilde{J}\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial x} + (B^{-1}aB)\widetilde{\phi} + (B^{-1}b\overline{B})\overline{\widetilde{\phi}} = B^{-1}F,$$

С учетом (7), в соответствующей блочной записи она выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial y} - J_1\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + \widetilde{c}_{11}\phi_1 + \widetilde{c}_{12}\overline{\phi}_2 + \widetilde{d}_{11}\overline{\phi}_1 + \widetilde{d}_{12}\phi_2 = F_1,$$
$$\frac{\partial\overline{\phi}_2}{\partial y} - \overline{J}_2\frac{\partial\overline{\phi}_2}{\partial x} + \widetilde{c}_{21}\phi_1 + \widetilde{c}_{22}\overline{\phi}_2 + \widetilde{d}_{21}\overline{\phi}_1 + \widetilde{d}_{22}\phi_2 = \overline{F}_2.$$

Заменяя второе уравнение этой системы комплексно сопряженным, получим новую систему

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial y} - J_1\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + \widetilde{c}_{11}\phi_1 + \widetilde{c}_{12}\overline{\phi}_2 + \widetilde{d}_{11}\overline{\phi}_1 + \widetilde{d}_{12}\phi_2 = F_1,$$

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial y} - J_2\frac{\partial\phi_2}{\partial x} + \overline{\widetilde{c}_{21}}\overline{\phi}_1 + \overline{\widetilde{c}_{22}}\phi_2 + \overline{\widetilde{d}_{21}}\phi_1 + \overline{\widetilde{d}_{22}}\overline{\phi}_2 = F_2,$$

которая имеет вид (9) с коэффициентами (10). □

Отметим, что матрица J системы (9) составлена из клеток Жордана вида (4) с диагональными элементами из множеств σ_1 и σ_2, лежащих в верхней полуплоскости и фигурирующих в (2).

2. Задача линейного сопряжения

Пусть $\Gamma \in C^{1,\nu}$ простой гладкий ориентируемый контур и открытое множество $D = \mathbb{C}\setminus\Gamma$ есть объединение двух областей—конечной D_1 и бесконечной D_2. Удобно обозначить дифференциальный оператор, который действует в классе $l-$вектор-функций и определяется матрицей A следующим образом $L_A = \dfrac{\partial}{\partial y} - A\dfrac{\partial}{\partial x}$. Аналогичный смысл имеет оператор L_J, определяемый матрицей J из (3).

В этих обозначениях эллиптическая система (1) примет вид

$$L_AU(z) + a(z)U(z) + b(z)\overline{U(z)} = F(z), \quad z \in D. \tag{11}$$

Рассмотрим в D для системы (11) задачу линейного сопряжения, определяемую краевым условием

$$C_{11}U^+(t) - C_{12}U^-(t) + \overline{C_{21}U^+(t)} - \overline{C_{22}U^-(t)} = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{12}$$

где $l \times l-$матричные коэффициенты $C_{ij}(t) \in C^\nu(\Gamma)$, $f(t)$ есть комплексная $l-$вектор-функция и черта означает комплексное сопряжение.

Введем в рассмотрение класс $C^\mu_\delta(\widehat{D}, \infty)$, $-1 < \delta < 0$, заданных в D функций, который определяется условием принадлежности их пространству $C^\mu(\overline{D}_1)$ и весовому пространству Гельдера $C^\mu_\delta(\overline{D}_2, \infty)$, $-1 < \delta < 0$ введенному в [11]. Напомним кратко его определение. Класс $C^\mu_\delta(\overline{D}_2, \infty)$—класс функций $\varphi(z)$, для которых функция $\psi(z) = (1+|z|)^{-\delta+\mu}\varphi(z) \in C^\mu_\mu(\overline{D}_2, \infty)$, то есть $\psi(z)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем μ на всем множестве D_2.

Для матричных коэффициентов и правой части системы (12) предполагаем выполненными условия

$$a,\, b \in C^\mu_{\delta_0}(\widehat{D}, \infty),\ \delta_0 < -1, \tag{13}$$

$$f(t) \in C^\mu(\Gamma), \quad F \in C^\mu_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty), \quad -1 < \delta < 0. \tag{14}$$

В соответствии с этим решения $U = (U_1, \dots, U_l)$ задачи (11)–(12) будем искать в классе $C^\mu_{A,\delta}(\widehat{D}, \infty)$, который явно определяется условиями

$$U \in C^\mu_\delta(\widehat{D}, \infty), \quad L_A U \in C^\mu_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty). \tag{15}$$

Нетрудно показать, что пространство $C^\mu_{A,\delta}(\widehat{D}, \infty)$ банахово относительно нормы

$$|U| = |U|_{C^\mu_\delta(\widehat{D},\infty)} + |L_A U|_{C^\mu_{\delta-1}(\widehat{D},\infty)}.$$

Фредгольмовость задачи (11)—(12) понимается в смысле фредгольвости оператора ее краевого условия, который действует $C^\mu_{A,\delta}(\widehat{D}, \infty)$ в прямое произведение $C^\mu_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty) \times C^\mu(\Gamma)$.

Рассмотрим блочную $2l \times 2l$ матрицу

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & \overline{G}_{22} \\ G_{21} & \overline{G}_{12} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где $l \times l-$матрицы-функции $G_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$ с учетом (5) имеют явный вид

$$G_{11} = (C_{11}B_1, \overline{C}_{21}B_2), \quad G_{12} = (C_{12}B_1, \overline{C}_{22}B_2),$$

$$G_{21} = (C_{21}B_1, \overline{C}_{11}B_2), \quad G_{22} = (C_{22}B_1, \overline{C}_{12}B_2).$$

Теорема 3. *Пусть $\Gamma \in C^{1,\nu}$, открытое множество $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ есть объединение конечной области D_1 и бесконечной области D_2 , $l \times l-$матрицы-функции $C_{ij}(t) \in$*

$C^\nu(\Gamma)$, $i,j = 1,2$, $f(t) \in C^\mu(\Gamma)$ и для матричных коэффициентов a,b и правых частей $f(t)$, $F(z)$ выполнены, соответственно, условия (13), (14). *Тогда условие*

$$\det G(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \tag{17}$$

необходимо и достаточно для фредгольмовости задачи (11)–(12) *в классе* (15) *и ее индекс дается формулой*

$$æ = -\frac{1}{\pi}[\arg\det G]_\Gamma, \tag{18}$$

где приращение $[\ ]_\Gamma$ вдоль Γ берется в направлении, оставляющем область D_1 слева.

Доказательство. С учетом (5) линейную подстановку теоремы 2 можно записать следующим образом

$$U = B_1\phi_1 + \overline{B_2\phi_2}. \tag{19}$$

Заметим, что согласно той же теореме такая подстановка позволяет редуцировать систему (11) к эквивалентной системе

$$L_J\phi(z) + c(z)\phi(z) + d(z)\overline{\phi(z)} = F_0(z), \quad z \in D, \tag{20}$$

относительно $l-$вектор-функции ϕ, где оператор L_J определен выше, $l \times l$ матричные коэффициенты c, d удовлетворяют условиям (13), а правая часть F_0 условию (14).

Подставляя (19) в краевое условие (12) получим

$$C_{11}(B_1\phi_1^+ + \overline{B_2\phi_2^+}) - C_{12}(B_1\phi_1^- + \overline{B_2\phi_2^-}) + \overline{C_{21}(B_1\phi_1^+ + \overline{B_2\phi_2^+})} - \overline{C_{22}(B_1\phi_1^- + \overline{B_2\phi_2^-})} = f,$$

или, перегруппировав слагаемые, по отношению к $l-$вектор-функции ϕ имеем равенство

$$(C_{11}B_1, \overline{C}_{21}B_2)\phi^+ - (C_{12}B_1, \overline{C}_{22}B_2)\phi^- + \overline{(C_{21}B_1, \overline{C}_{11}B_2)\phi^+} - \overline{(C_{22}B_1, \overline{C}_{12}B_2)\phi^-} = f,$$

которое в обозначениях (16) представляет собой краевое условие, эквивалентное краевому условию (12):

$$G_{11}\phi^+(t) - G_{12}\phi^-(t) + \overline{G_{21}\phi^+(t) - G_{22}\phi^-(t)} = f_0(t), \quad t \in \Gamma. \tag{21}$$

Заметим, что подстановка (19) преобразует пространство $C^\mu_{A,\delta}(\widehat{D},\infty)$ в пространство $C^\mu_{J,\delta}(\widehat{D},\infty)$, которое явно характеризуется условиями

$$\phi \in C^\mu_\delta(\widehat{D},\infty), \quad L_J\phi \in C^\mu_{\delta-1}(\widehat{D},\infty). \tag{22}$$

Таким образом, исходная задача (11)—(12) в классе $C^\mu_{A,\delta}(\widehat{D},\infty)$ эквивалентна задаче (20)—(21) в классе $C^\mu_{J,\delta}(\widehat{D},\infty)$, которую, как обычно, считаем фредгольмовой если фредгольмов ее оператор, действующий $C^\mu_{J,\delta}(\widehat{D},\infty) \to C^\mu_{\delta-1}(\widehat{D},\infty) \times C^\mu(\Gamma)$.

Исходя из матричного обозначения $z_J = x \cdot 1 + y \cdot J$ для $z = x + iy \in \mathbb{C}$ введем обобщенный интеграл типа Коши

$$(I_J^1\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)_J^{-1} dt_J \varphi(t), \quad z \in D,$$

где контур Γ ориентирован положительно по отношению к конечной области D_1, $(l \times l)-$матричный дифференциал $dt_J = d_1 + Jd_2$ действует на $l-$вектор-функцию $\phi(z)$ обычным образом и потому поставлен впереди. С ним также связан обобщенный сингулярный интеграл

$$(S_J\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma (t-t_0)_J^{-1} dt_J \varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma,$$

Согласно [12], обозначим I_J^2 обобщенный оператор Векуа-Помпейю. Тогда аналогично [11] можно показать, что любую функцию $\phi \in C_J^\mu(\widehat{D}, \infty)$ единственным образом можно представить в виде обобщенного интеграла типа Коши I_J^1 и обобщенного оператора Векуа-Помпейю I_J^2:

$$\begin{gathered} \phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)_J^{-1} dt_J \varphi_1(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_{D_1} (\zeta - z)_J^{-1}\psi(\zeta) d_2\zeta + i\xi; \quad \zeta, z \in D_1, \\ \phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)_J^{-1} dt_J \varphi_2(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_{D_2} (\zeta - z)_J^{-1}\psi(\zeta) d_2\zeta, \quad \zeta, z \in D_2, \end{gathered} \tag{23}$$

где комплексная $l-$вектор-функция $\psi(z) \in C_{\delta-1}^\mu(\widehat{D}, \infty)$, $\xi \in \mathbb{R}^l-$постоянный вектор, а $l-$вектор-функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ принадлежат классу $C_\mathbb{R}^\mu(\Gamma)$ (здесь нижний индекс $\mathbb{R}$ указывает на то, что элементы соответствующего пространства являются вещественными вектор-функциями), причем $\varphi_2(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_\Gamma \varphi_2(t) d_1 t = 0. \tag{24}$$

Обозначим операторы $(I_J^2\psi)^+$ и $(I_J^2\psi)^-$, действующие из областей D_1 и D_2, соответственно, на контур Γ, через

$$(I_j^{12}\psi)(t_0) = -\frac{1}{\pi i}\int_{D_j} (\zeta - t_0)_J^{-1}\psi(\zeta) d_2\zeta, \quad t_0 \in \Gamma, \quad j = 1, 2, \tag{25}$$

где верхний индекс указывает на то, что этот оператор переводит функцию $\psi(z)$, заданную в области D, в функцию $(I^{12}\psi)(t_0)$, заданную на Γ. Согласно [10] они ограничены соответственно $C^\mu(\overline{D}_1) \to C^{1,\mu}(\Gamma)$, $C_{\delta-1}^\mu(\overline{D}_2, \infty) \to C^{1,\mu}(\Gamma)$.

В этих обозначениях, согласно формулам Сохоцкого-Племеля [9], граничные значения функции ϕ имеют вид

$$2\phi^+ = (1 + S_J)\varphi_1 + 2I_1^{12}\psi + 2i\xi, \quad 2\phi^- = (-1 + S_J)\varphi_2 + 2I_2^{12}\psi.$$

Подставляя эти равенства в краевое условие (21), приходим к системе l сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{gathered} G_{11}(1+S_J)\varphi_1 + G_{12}(1-S_J)\varphi_2 + \overline{G_{21}(1+S_J)\varphi_1} + \overline{G_{22}(1-S_J)\varphi_2} + \\ +2[(G_{11}I_1^{12}\psi + \overline{G_{21}I_1^{12}\psi}) - (G_{12}I_2^{12}\psi + \overline{G_{22}I_2^{12}\psi})] + 2i(G_{11}-G_{21})\xi = 2f_0 \end{gathered} \tag{26}$$

на контуре Γ относительно комплексной l-вектор-функции $\psi(z)$, $z \in D$ и двух вещественных $l-$вектор-функции $\varphi_j(t)$, $t \in \Gamma$, $j = 1, 2$, правая часть которой является комплексной $l-$вектор-функцией. Аналогично (25) удобно ввести оператор

$$(I_j^{21}\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)_J^{-1} dt_J \varphi(t), \quad z \in D_j,$$

действующий из контура Γ на область D_j. Здесь верхний индекс указывает на то, что он переводит функцию $\varphi(t)$, заданную на Γ в функцию $(I_j^{21}\varphi)(z)$, заданную в области D_j и оператор

$$(I_j^{22}\psi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{D_j} (\zeta - z)_J^{-1}\psi(\zeta) d_2\zeta, \quad j = 1, 2,$$

который действует из области D_j в область D_j и верхний индекс понимается аналогичным образом. Отметим, что согласно соответствующим теоремам из [12], [11], [9] эти операторы ограничены соответственно

$$I_1^{21} : C^\mu(\Gamma) \to C^\mu(\overline{D}_1), \quad I_2^{21} : C^\mu(\Gamma) \to C^\mu_\delta(\overline{D}_2, \infty),$$

$$I_1^{22} : C^\mu(\overline{D}_1) \to C^{1,\mu}(\overline{D}_1), \quad I_2^{22} : C^\mu_{\delta-1}(\overline{D}_2, \infty) \to C^{1,\mu}_\delta(\overline{D}_2 \infty).$$

Пользуясь представлениями (23) и рассуждениями теоремы 1 из [11], в этих обозначениях от системы (20) приходим к системе двумерных интегральных уравнений

$$\psi_j + c_j I_j^{21}\varphi_j + d_j\overline{I_j^{21}\varphi_j} + c_j I_j^{22}\psi_j + d_j\overline{I_j^{22}\psi_j} + i(c-d)\xi_j = F_{0j}, \quad j = 1, 2, \tag{27}$$

где ψ_j, c_j, d_j, F_{0j} есть сужения соответствующих функций на область D_j и $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = 0$.

Отметим, что полученная система (26)—(27) эквивалентна задаче (20)—(21) в классе $C^\mu_{J,\delta}(\widehat{D}, \infty)$. Оператор этой системы действует $C^\mu_\mathbb{R}(\Gamma) \times C^\mu_\mathbb{R}(\Gamma) \times C^\mu_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty) \times \mathbb{R}^l \to C^\mu(\Gamma) \times C^\mu_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty)$, где под $C^\mu(\Gamma)$ в правой части понимается пространство комплексных $l-$вектор-функций.

Если $S-$ классический сингулярный оператор Коши

$$(S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \Gamma,$$

то согласно [1] операторы $S_J - S$ и $\overline{S_J} + S$ компактны в пространстве $C^\mu(\Gamma)$. С учетом этого систему (26) запишем следующим образом

$$\frac{1}{2}\big([G_{11}(1+S)+\overline{G}_{21}(1-S)]\varphi_1+[G_{12}(1-S)+\overline{G}_{22}(1+S)]\varphi_2\big)+$$
$$+K_1^{11}\varphi_1+K_2^{11}\varphi_2+K^{12}\psi+i(G_{11}-G_{21})\xi=f_0, \tag{28}$$

где операторы $K_j^{11},\ j=1,2$, компактны в $C^\mu_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ и имеют явный вид

$$K_1^{11}\varphi_1=\frac{1}{2}(G_{11}K_1\varphi_1+\overline{G}_{21}K_2\varphi_1),\quad K_2^{11}\varphi_2=-\frac{1}{2}(G_{12}K_1\varphi_2+\overline{G}_{22}K_2\varphi_2),$$

оператор K^{12} компактен в $C^\mu_{\delta-1}(\widehat{D},\infty)\to C^\mu(\Gamma)$ и равен

$$K^{12}\psi=[(G_{11}I_1^{12}\psi+\overline{G_{21}I_1^{12}\psi})-(G_{12}I_2^{12}\psi+\overline{G_{22}I_2^{12}\psi})].$$

Если A условно означает левую часть (28) и $f_0=f_1-if_2$ с вещественными функциями f_i, то комплексное равенство $A=f_0$ можно заменить на два вещественных $\mathrm{Re}\ A=f_1$ и $\mathrm{Re}\ (iA)=f_2$. Таким образом, систему (28) l комплексных сингулярных интегральных уравнений запишем в виде системы $2l$ вещественных уравнений

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\ \big([G_{11}(1+S)+\overline{G}_{21}(1-S)]\varphi_1+[G_{12}(1-S)+\overline{G}_{22}(1+S)]\varphi_2\big)+$$
$$+\mathrm{Re}\ (K_1^{11}\varphi_1+K_2^{11}\varphi_2+K^{12}\psi)-\mathrm{Im}\ (G_{11}-G_{21})\xi=f_1,$$
$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\ i\big([G_{11}(1+S)+\overline{G}_{21}(1-S)]\varphi_1+[G_{12}(1-S)+\overline{G}_{22}(1+S)]\varphi_2\big)+$$
$$+\mathrm{Re}\ i(K_1^{11}\varphi_1+K_2^{11}\varphi_2+K^{12}\psi)-\mathrm{Re}\ (G_{11}-G_{21})\xi=f_2.$$

Или, полагая $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$, $f_0=(f_1,f_2)$, запишем кратно в операторном виде

$$(R_{11}\varphi)(t)+(R^0_{11}\varphi)(t)+(R_{12}\psi)(t)+L_1(t)\xi=f_0(t),\quad t\in\Gamma, \tag{29}$$

где 2×2 операторные матрицы

$$R_{11}\varphi=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\begin{pmatrix}[G_{11}(1+S)+\overline{G}_{21}(1-S)]\varphi_1 & [\overline{G}_{22}(1+S)+G_{12}(1-S)]\varphi_2\\ i[G_{11}(1+S)+\overline{G}_{21}(1-S)]\varphi_1 & i[\overline{G}_{22}(1+S)+G_{12}(1-S))]\varphi_2\end{pmatrix},$$

$$R^0_{11}\varphi=\mathrm{Re}\begin{pmatrix}K_1^{11}\varphi_1 & K_2^{11}\varphi_2\\ iK_1^{11}\varphi_1 & iK_2^{11}\varphi_2\end{pmatrix},$$

действуют из $C^\mu_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ в прямое произведение $C^\mu_{\mathbb{R}}(\Gamma)\times C^\mu_{\mathbb{R}}(\Gamma)$, операторная матрица порядка 2×1

$$R_{12}\psi=\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\ K^{12}\psi\\ \mathrm{Re}\ iK^{12}\psi\end{pmatrix},$$

действует $C^{\mu}_{\delta-1}(\widehat{D},\infty)\to C^{1,\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ и матрица-функция $L_1(t)\in C^{\nu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ имеют вид

$$L_1(t)=\begin{pmatrix} \mathrm{Im}\ (G_{11}-G_{21})(t) \\ -\mathrm{Re}\ (G_{21}-G_{11})(t) \end{pmatrix}.$$

Обратимся к уравнению (27). Заметим, что функции $\psi(z)$ из класса $C^{\mu}_{J,\delta}(\widehat{D},\infty)$ ставятся в соответствие ее сужения $\psi_1=\psi|_{D_1}$, $\psi_2=\psi|_{D_2}$, поэтому пространство $C^{\mu}_{J,\delta}(\widehat{D},\infty)$ можно отождествить с произведением пространств $C^{\mu}(\overline{D}_1)$ и $C^{\mu}_{\delta}(\overline{D}_2,\infty)$. Таким образом уравнение (27) относительно комплексной $l-$вектор-функции $\psi(z)$ и двух вещественных $l-$вектор–функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, $t\in\Gamma$ можно записать следующим образом

$$\psi_1+c_1I^{21}_1\varphi_1+d_1\overline{I^{21}_1\varphi_1}+c_1I^{22}_j\psi_1+d_1\overline{I^{22}_1\psi_1}+i(c-d)\xi=F_{01},$$

$$\psi_2+c_2I^{21}_2\varphi_2+d_2\overline{I^{21}_2\varphi_2}+c_2I^{22}_2\psi_2+d_2\overline{I^{22}_2\psi_2}=F_{02},$$

или, полагая $F_0=(F_{01},F_{02})$ и, как и выше, $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$, в краткой операторной форме

$$(R_{21}\varphi)(z)+(1+R_{22})\psi(z)+L_2(z)\xi=F_0(z), \tag{30}$$

где 2×2 операторная матрица

$$R_{21}\varphi=\begin{pmatrix} c_1I^{21}_1\varphi_1+d_1\overline{I^{21}_1\varphi_1} & 0 \\ 0 & c_2I^{21}_2\varphi_2+d_2\overline{I^{21}_2\varphi_2} \end{pmatrix}$$

действует из $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ в прямое произведение $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)\times C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$, операторная матрица порядка 2×1

$$R_{22}\psi=\begin{pmatrix} c_1I^{22}_1\psi_1+d_1\overline{I^{22}_1\psi_1} & 0 \\ 0 & c_2I^{22}_2\psi_2+d_2\overline{I^{22}_2\psi_2} \end{pmatrix}$$

действует $C^{\mu}_{\delta-1}(\widehat{D},\infty)\to C^{1,\mu}_{\delta}(\widehat{D},\infty)$ и соответствующая вектор-функция $L_2(z)\in C^{\mu}_{\delta_0}(\widehat{D},\infty)$, $\delta_0<-1$ имеет вид $L_2=(i(c-d),0)$.

Объединяя (24), (29) и (30) окончательно получим следующую систему

$$\begin{gathered}(R_{11}\varphi)(t)+(R^0_{11}\varphi)(t)+(R_{12}\psi)(t)+L_1(t)\xi=f_0(t),\\ (R_{21}\varphi)(z)+(1+R_{22})\psi(z)+L_2(z)\xi=F_0(z),\end{gathered} \tag{31}$$

$$\int_{\Gamma}\varphi_2(t)d_1t=0. \tag{32}$$

Обозначим $\widetilde{\varphi}=(\varphi,\psi)$, $\widetilde{f}=(f_0,F_0)$, где функции $\widetilde{\varphi}$ и $\widetilde{f}$ принадлежат прямому произведению $C^{\mu}(\Gamma)\times C^{\mu}_{\delta-1}(\widehat{D},\infty)$. В этих обозначениях (31) примет краткий операторный вид

$$R\widetilde{\varphi}+L\xi=\widetilde{f}, \tag{33}$$

где оператор (R, L) действует $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma) \times C^{\mu}_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty) \times \mathbb{R}^l \to C^{\mu}(\Gamma) \times C^{\mu}_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty)$ и операторные матрицы имеют вид

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} + R^0_{11} & R_{12} \\ R_{21} & 1 + R_{22} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Рассмотрим подробнее каждый из операторов системы (31). Очевидно операторы R^0_{11}, R_{12}, R_{22} компактны соответственно в пространствах $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$, $C^{\mu}_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty) \to C^{\mu}(\Gamma)$, $C^{\mu}_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty)$, оператор R_{21} ограничен $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma) \times C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma) \to C^{\mu}_{\delta}(\widehat{D}, \infty)$. Поэтому с точностью до компактного слагаемого оператор R совпадает с оператором

$$R_0 = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как R и R_0 отличаются на компактное слагаемое, то они свойством фредгольмовости обладают одновременно и их индексы совпадают

$$\mathrm{ind}\ R = \mathrm{ind}\ R_0. \tag{35}$$

Таким образом, фредгольмовость оператора R_0 влечет фредгольмовость оператора R, и, следовательно, фредгольмовость исходной задачи (11)—(12).

Что касается оператора R_0, то согласно [10] он будет фредгольмов, если фредгольмов оператор R_{11} причем их индексы совпадают

$$\mathrm{ind}\ R_0 = \mathrm{ind}\ R_{11}. \tag{36}$$

Запишем этот оператор следующим образом

$$2(R_{11}\varphi)(t) = \mathrm{Re}\ [A(1 + S) + B(1 - S)]\varphi(t),$$

где матрицы A, B имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} G_{11} & \overline{G}_{22} \\ iG_{11} & i\overline{G}_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \overline{G}_{21} & G_{12} \\ i\overline{G}_{21} & iG_{12} \end{pmatrix}$$

Так как $4R_{11} = 2\mathrm{Re}\ [A(1 + S) + B(1 - S)]$ то

$$R_{11} = \frac{1}{4}((A + \overline{B})(1 + S) + (\overline{A} + B)(1 - S)) + K_0$$

где $K_0 = \dfrac{1}{4}(\overline{A}K^1_0 + BK^2_0)$ есть компактный оператор. Последнее равенство можно продолжить

$$R_{11} = \frac{1}{4}[C(1 + S) + \overline{C}(1 - S) + K_0],$$

где матрица C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} G_{11} + G_{21} & \overline{G}_{22} + \overline{G}_{12} \\ i(G_{11} - G_{21}) & i(\overline{G}_{22} - \overline{G}_{12}) \end{pmatrix}.$$

В обозначениях (16) можем записать

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \cdot G$$

Поэтому согласно [1] оператор R_{11} фредгольмов тогда и только тогда, когда выполнено условие (18) обратимости матрицы $G(t)$. Более того, согласно известным теоремам [7], [6] индекс оператора R_{11} можно выразить через индекс Коши матрицы-функции $G(t)$

$$\text{ind } R_{11} = -2\text{Ind } G, \tag{37}$$

а с учетом [11] это равенство можно продолжить

$$\text{ind } R_{11} = -\frac{1}{\pi}[\arg \det G(t)]|_{\Gamma}.$$

Пространство $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma) \times C^{\mu}_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty) \times \mathbb{R}^l$ есть расширение пространства $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma) \times C^{\mu}_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty)$ на l измерений, поэтому на основании известных свойств фредгольмовых операторов [7] операторы (R, H) и R фредгольмово эквивалентны, а их индексы

$$\text{ind } (R, L) = \text{ind } R + l. \tag{38}$$

С учетом (32) имеем

$$æ = \text{ind } (R, L) - l.$$

Используя формулы (35)—(38) окончательно получаем формулу индекса (18), которая завершает доказательство теоремы 3. □

Заключение

В работе доказан критерий фредгольмовости задачи линейного сопряжения для эллиптической системы первого порядка с комплексными коэффициентами и найдена формула индекса.

Автор выражает признательность своему научному руководителю профессору А. П. Солдатову за постановку задачи и помощь на всех этапах ее решения и профессору В. Б. Васильеву за плодотворное обсуждение вопросов, связанных с написанием и оформлением статьи.

Список цитируемых источников

1. *Абаполова, Е. А., Солдатов, А. П.* К теории сингулярных интегральных уравнений на гладком контуре // Научные ведомости БелГУ. Серия Математика. Физика. — 2010. — №5(76), вып. 18. — С. 6–20.

   Abapolova, E., Soldatov, A. On the theory of singular equations on a smooth contour. Scientific statements of BSU. Mathematics series. Physics No 5(76), 6-20 (2010). (in Russian)

2. *Векуа, Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. — Москва: Наука, 1970. — 380 с.

   Vekua, N. P. Systems of singular integral equations. Groningen, The Netherlands: P. Noordhoff, Ltd., 1967.

3. *Векуа, Н. П.* Обобщенные аналитические функции. — Москва: Наука, 1988. — 512 с.

   Vekua, N. Generalized analytic functions. Moscow: Nauka, 1988. (in Russian)

4. *Гахов, Ф. Д.* Краевая задача Римана для системы n пар функций // УМН. — 1988. — Т.7, вып. 4(50). — С. 3–54.

   Gahov, F. D. The Riemann boundary problem for a system of n pairs of functions. Usp. Mat. Nauk. 7, No. 4(50), 3-54 (1952). (in Russian)

5. *Гельфанд, И. М.* Лекции по линейной алгебре. — Москва: Наука, 1971. — 280 с.

   Gel'fand, I. M. Lectures on Linear Algebra. New-York: Interscience Publishers, Inc., 1961.

6. *Мусхелишвили, Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — Москва: Наука, 1968. — 513 с.

   Muskhelishvili, ,N. I. Singular integral equations. Translated from the second Russian edition. 3rd ed. Groningen: Wolters-Noordhoff Publishing, 1967.

7. *Пале, Р.* Семинар по теореме Атьи–Зингера об индексе. — Москва: Мир, 1970. — 360 с.

   Palais, R. S. Seminar on the Atiyah – Singer index theorem. Princeton: Princeton University Press, 1965.

8. *Солдатов, А. П.* Краевая задача линейного сопряжения теории функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1979. — Т.43, №1. — С. 184–202.

   Soldatov, A. P. The boundary problem of linear conjugation of the theory of functions. Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 43, 184-202 (1979). (in Russian)

9. *Солдатов, А. П.* Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1991. — Т.55, №5. — С. 1070–1100.

   Soldatov, A. P. A method of the theory of functions in boundary value problems on the plane. I: Smooth case. Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 55, No. 5, 1070-1100 (1991). (in Russian)

10. *Солдатов, А. П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические эллиптические краевые задачи. I // Функциональный анализ. СМФН. Российский университет дружбы народов, М. —2017. — Т.63, №1. — С. 1–189.

    Soldatov, A. Singular integral operators and elliptic elliptic boundary value problems. Funkcional'nyj analiz. SMFN Rossijskij universitet druzhby narodov 63, 1–189 (2017). (in Russian)

11. *Солдатов, А. П., Чернова, О. В.* Задача Римана–Гильберта для эллиптических систем первого порядка на плоскости с постоянными старшими коэффициентами // Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики» Кабардино-Балкария, Нальчик, 17–21 мая 2017 г., Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. ВИНИТИ РАН, М. — 2018. — Т.149. — С. 95–102.

    Soldatov, A., Chernova, O. The Riemann – Hilbert problem for first-order elliptic systems on a plane with constant higher coefficients. Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii "Aktual'nye problemy prikladnoj matematiki i fiziki"Kabardino-Balkariya, Nal'chik, 17-21 maya 2017g., Itogi nauki i tekhniki. Ser. Sovrem. mat. i ee pri. Temat. obz. VINITI RAN 149, 95-102 (2018). (in Russian)

12. *Чернова, О. В.* Обобщенный оператор Векуа-Помпейю // Научные ведомости БелГУ. —2018. — Т.50, №1. — С. 40–46.

    Chernova, O. Generalized operator Vekua-Pompeiu. Scientific statements of BSU 50, 40–46 (2018). (in Russian)

Получена 06.11.2018

Динамические системы, 2018, том 8(36), №4, 373–383

УДК 517.925/926

Сингулярно-гиперболический аттрактор отображения многомерного цилиндра

В. Н. Белых, Д. А. Гречко

Волжский государственный университет водного транспорта,
Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
Нижний Новгород, 603950 *E-mail: belykh@vgavt-nn.ru, d.grechko.18@gmail.com*

Аннотация. В работе рассматривается многомерное отображение с одной кусочно-гладкой периодической нелинейностью. Получены условия, при которых отображение имеет аттракторы, лежащие в полнотории. Даны критерии, определяющие колебательный и вращательный тип аттракторов. Доказана теорема, указывающая область параметров, при которых аттракторы как колебательные, так и вращательные, являются сингулярно-гиперболическими. При этих условиях динамическое поведение траекторий отображения представляет собой пример динамического хаоса.

Ключевые слова: динамика систем, нелинейное отображение, аттракторы, гиперболичность, бифуркации

Singular hyperbolic attractor of a multidimensional cylinder map

V. N. Belykh, D. A. Grechko

Volga state university of water transport, Lobachevsky university, Nizhny Novgorod.

Abstract. We consider a multidimensional map with a piecewise-smooth periodic nonlinear function of form F: $(x, y_i) \to (x + \delta - ag(x) + \sum_{i=1}^{n} y_i,\ \lambda_i(-b_i g(x) + y_i)),\ i = 1, \ldots, n$, where $x \in S^1, y \in R^n, g(x) = g(x + 2\pi), a, \delta, \lambda_i, b_i$ are parameters, $|g'(x)| > h$. We divide nonwandering trajectories into oscillating and rotating type via the rotation number $r = \lim_{k\to\infty} \frac{x^*(k)}{2\pi k}$. We prove the existence of absorbing domain D containing the attractors of F. Namely, the next statement is true.

Theorem 1. Let $0 < \lambda_i < \lambda^* < 1,\ \ i = \overline{1, n}$. Then the solid torus $D = \{\|y\| < A, x \in S^1\}$ is the absorbing domain D, $FD \subset D$.

In order to specify the attractors of the map F we introduce two auxiliary 1D maps of the circle $F^{\pm} : x \to x + \delta - ag(x) \pm \gamma$, and prove the next

Theorem 2. 1. If both maps F^+ and F^- have only oscillating attractors then the map F has only oscillating attractor as well. 2. If both maps F^+ and F^- have only rotating attractor then the map F also has only rotating attractor.

We studied the hyperbolic properties of the map F attractors which imply that in each point of an attractor there exist unstable (stable) cone invariant under F (F^{-1} respectively) with local extension (contraction) property in it. For this purpose we consider the variation equation along attractor trajectories $(\xi,\ \eta_i) \to ((1 - ag')\xi + \sum_{i=1}^{n} \eta_i,\ \lambda_i(-bg'\xi + \eta_i)), i = \overline{1, n}$. Introducing the unstable cone $K^u = \{\xi, \eta_i \mid \eta_i = \alpha_i \xi, |\alpha_i| < \chi, i = \overline{1, n}\}$ we obtain a condition when the map $\xi \to \bar{\xi}$ inside the cone is extension. Then finding the condition for value $\chi = \chi^*$ defining the cone K^u we prove the main theorem.

Theorem 3. Each attractor (oscillating or rotating) of the map F is singularly hyperbolic in a parameter region $ah > 2 + \chi^* + \varepsilon, \ \ \varepsilon > 0$.

Finely we note that for this explicitly given region of parameters indipending on whether the attractor is oscillatory or rotatory the attractor is hyperbolic. The dynamical behavior of the attractor trajectories exhibits the example of rear dynamical chaos.

Keywords: dynamical systems, nonlinear maps, attractors, hyperbolicity, bifurcations.

MSC 2010: 34D45

Введение

Задача об условиях существования аттракторов и бифуркаций, формулируемых в терминах правых частей динамических систем, возникла при анализе состояний равновесия предельных циклов Пуанкаре и гомоклинических петель сепаратрис в конкретных системах. В период последних почти 50 лет эта задача приобрела широкий интерес в связи с возникновением концепции странного аттрактора как образа динамического хаоса.

Странные аттракторы как притягивающие инвариантные множества целых неустойчивых траекторий можно разделить на 3 типа: гиперболические, структура которых не меняется во всех точках интервала параметра, характеризующего деформации динамической системы; сингулярно-гиперболические, структура которых меняется только в точках бифуркаций; квазистранные — странные не на интервале, а на точечном, как правило, канторовом множестве параметров.

В классе динамических систем с дискретным временем (отображений) примерами гиперболических аттракторов служат диффеоморфизмы Аносова [1], примеры сингулярно-гиперболических — аттрактор Лоренца для модельных отображений [2, 3], аттракторы Лози [4] и Белых [5], примерами квазиаттракторов — аттрактор Эно [6] и другие. Условия существования приведенных аттракторов выписываются аналитически в силу конкретно заданного вида отображений.

В настоящей работе рассматривается многомерное отображение с одной непрерывной, кусочно-гладкой, периодической нелинейностью $F : S^1 \times R^n \to S^1 \times R^n$, записанное в нормальной форме вида:

$$\begin{cases} \bar{x} = x + \delta - ag(x) + \sum y_i; \\ \bar{y_i} = \lambda_i(-b_i g(x) + y_i), \end{cases} \quad i = \overline{1, n}, \tag{0.1}$$

где $a, \delta, b_i, \lambda_i, i = \overline{1, n}$ — положительные параметры, $x \in S^1, y = colomn(y_1, \ldots, y_n) \in R^n$ переменные, $g(x)$ — 2π-периодическая, непрерывная, кусочно-гладкая функция с разрывами производной в точках экстремума, удовлетворяющая условию

$$\begin{aligned} \max_{x \in S^1} |g(x)| &= 1; \\ \int_0^{2\pi} g(x)dx &= 0; \\ |g'(x)| &> h, \ \ x \in S^1. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Используются общепринятые обозначения: точка $(\bar{x}, \bar{y}) = (x(k+1), y(k+1))$ есть образ точки $(x, y) = (x(k), y(k))$. Случай отрицательных значений параметра δ приводится к исследуемому заменой $(x, y) \to (-x, -y)$. Отображение (0.1) задано в цилиндрическом фазовом пространстве $S^1 \times R^n$. Следовательно, неблуждающие траектории F делятся на колебательные и вращательные. А именно, пусть $O^* = \{x^*(k), y^*(k), k \in Z\}$ неблуждающая траектория отображения F в накрывающем фазовом пространстве R^{n+1}. Введем аналог числа вращения Пуанкаре вдоль этой орбиты

$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{x^*(k)}{2\pi k}. \tag{0.3}$$

Траекторию O^* будем называть колебательной, если $r = 0$ и вращательной, если $r \neq 0$.

И вообще, аттрактор отображения F будем называть колебательным (o-аттрактором), если он не содержит вращательных траекторий, и вращательным (φ-аттрактором), если не содержит колебательных. Смешанным аттрактор (m-аттрактор) будет при наличии в нем и вращательных, и колебательных траекторий.

Такие отображения возникают в задачах хаотической динамики [7] и служат математической моделью дискретной системы фазовой автоподстройки частоты с цифровым фильтром высокого порядка [8].

Заметим, что отображение (0.1), записанное в общем виде

$$\begin{cases} \bar{x} = f(x) + L^T y; \\ \bar{y_i} = -bg(x) + By), \end{cases} \tag{0.4}$$

где $L = colomn(L_1, \ldots, L_n), b = colomn(b_1, \ldots, b_n), B - n \times n$ — матрица с действительными собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, f(x) = x + \delta - ag(x)$, линейным невырожденным преобразованием $y \to Hy$ приводится к нормальной форме вида (0.1).

При использовании свойств ограниченности и отделённости от нуля разрывной производной периодической нелинейности находятся достаточные условия существования сингулярно-гиперболического странного аттрактора.

1. Динамика отображения в вырожденном случае

Рассмотрим простейший случай отображения (0.1) при $\lambda_i = 0, i = \overline{i, n}$. При этом по переменным y_i происходит абсолютное сжатие, так что за одну итерацию $\bar{y_i} \equiv 0, i = \overline{i, n}$ и отображение сводится к отображению окружности на себя

$$\bar{x} = x + \delta - ag(x) \triangleq f(x). \tag{1.1}$$

Мы опускаем "простой" случай, когда это отображение взаимнооднозначно $(1 - ag' > 0)$ и число вращения является инвариантом.

Очевидно, что все траектории этого отображения неустойчивы при условии

$$1 - ag' < -1 \text{ или } 1 - g' > 1 \tag{1.2}$$

для разных участков монотонности функции $g(x)$.

Эти условия, в этом случае принимаемые за "гиперболичность", в силу (0.2) имеют вид

$$ah > 2 \tag{1.3}$$

В результате, мы получаем простое утверждение

Лемма 1. *При $\lambda_i = 0, i = \overline{1,n}$ при условии (1.3) отображение (0.1) имеет сингулярно-гиперболический аттрактор.*

В качестве примера рассмотрим тестовую функцию

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{\nu}, & |x| \leq \nu, x + \nu (\mathrm{mod} 2\pi); \\ -\frac{x-\pi}{\pi-\nu}, & \nu < x < 2\pi - \nu. \end{cases} \tag{1.4}$$

В этом случае условие (1.2), очевидно, принимает вид

$$a > 2\nu, \tag{1.5}$$

и следовательно отображение (1.1), (1.4) при условии (1.5) имеет сингулярно-гиперболический аттрактор.

Замечание 1. Сингулярность аттрактора, порождаемая разрывами производной в критических точках, приводит к тому, что при увеличении параметра δ от нуля происходят бифуркации исчезновения колебательных и рождение вращательных траекторий, однако аттрактор при этом остается сингулярно-гиперболическим.

В случае тестовой функции (1.4), при условии

$$\delta = 0;\ a + \nu < \pi;\ a > 2\nu \tag{1.6}$$

траектории сингулярно-гиперболического аттрактора имеют только колебательный тип, а при

$$\delta > a;\ a > 2\nu \tag{1.7}$$

— только вращательный.

2. Диссипативность отображения F

Для простоты будем рассматривать случай, когда $b_i = b, i = \overline{1,n}$.

При $0 < \lambda_i < 1$ многомерное отображение F имеет поглощающую область. Введем норму

$$\|y\| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |y_i|. \tag{2.1}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть*

$$0 < \lambda_i < \lambda^* < 1, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.2}$$

Тогда отображение F диссипативно по переменной $y = colomn(y_1, \ldots, y_n)$, так что все его траектории из внешности полнотория

$$D = \left\{ \|y\| < \frac{\lambda^* b}{1-\lambda^*},\ x \in S^1 \right\}, \tag{2.3}$$

попадают внутрь него и остаются в нём навсегда.

Доказательство. Найдем область фазового пространства, для которой при любых $x \in S^1$ норма $\|y\|$ убывает при каждой итерации F, т. е. выполняется условие

$$\|\bar{y}\| < \|y\|, \quad x \in S^1. \tag{2.4}$$

В силу (0.1) (при $b_i = b$) получаем

$$\|\bar{y}\| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i| - bg(x) + y_i| < \frac{\lambda^*}{n}\sum_{i=1}^{n}(b + |y_i|). \tag{2.5}$$

Неравенства (2.4), (2.5) выполняются при

$$\|y\| \geq \frac{\lambda^* b}{1-\lambda^*}, \tag{2.6}$$

откуда следует, что во внешности полнотория D траектории действительно приближаются к D, попадая в D за конечное число итераций. Неравенство (2.6), кроме того, означает $FD \subset D$. □

Следствие 1. *Аттракторы отображения F расположены в полнотории D, и их исследование достаточно проводить в области (2.3).*

3. Существование аттракторов отображения *F*

В отображении (0.1), рассматриваемом в области D, оценим сумму, входящую в первое уравнение

$$|\sum y_i| < n\|y\| < \frac{\lambda^* bn}{1-\lambda^*} \triangleq \gamma. \tag{3.1}$$

Введем одномерные отображения сравнения $F^{+(-)}$ вида

$$\bar{x} = x + \delta - ag(x) \pm \gamma \triangleq f(x) \pm \gamma, \tag{3.2}$$

мажорирующие координаты x траекторий отображения $O = \{x(k), y(k), k \in Z^+\}$. При этом любой образ $\bar{x}$, определенный отображением (0.1), ограничен в силу неравенств

$$f(x(k)) - \gamma < x(k+1) < f(x(k)) + \gamma. \tag{3.3}$$

Неравенства (3.3) позволяют эффективно использовать отображения сравнения (3.2) при оценке качественного поведения траекторий отображения F.

Теорема 2. *1. Если оба одномерных отображения (3.2) имеют только o-аттракторы, то отображение F имеет только o-аттрактор.*

2. Если оба отображения (3.2) имеют только φ-аттракторы, т. е. при $\delta > a + \gamma$, то отображение F также имеет только φ-аттрактор.

Доказательство. 1. Очевидно, что траектории o-аттракторов отображений окружности $F^{+(-)}$ $O^{\pm} = \{x^{\pm}(k),\ k \in Z\}$ ограничены.

$$\begin{gathered} x_1 < x^{\pm} < x_2, k \in Z; \\ x_2 - x_1 < 2\pi. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Тогда в силу неравенств (3.3) x — координаты траекторий аттрактора отображения $O^* = \{x^*(k), y^*(k), k \in Z\}$ удовлетворяют неравенству (3.4), а $y^*(k) \in D$, т. е. это o-аттрактор отображения F.

2. Оба отображения сравнения (3.2) имеют только вращательный аттракторы при условии

$$\bar{x} = f(x) \pm \gamma > x, \ \ \forall x \in S^1, \tag{3.5}$$

которое справедливо при $\delta > a + \gamma$.

□

Следствие 2. *Пусть $\delta = 0$ и $a = a_1$ соответствует взаимной однозначности отображений (3.2), $1 - a_1 g'(x) > 0,\ \forall x \in S^1$. Тогда при $a > a_1$, с увеличением параметра a o-аттракторы отображений $F^{+(-)}$, а следовательно, и отображения F, становятся m-аттракторами при бифуркации рождения вращательных траекторий.*

Такие изменения легко проследить на примере F с тестовой функцией (1.4).

Пример 1. Пусть $g(x)$ есть тестовая функция (1.4). Анализ отображений $F^{+(-)}$ в этом случае приводит к следующему утверждению.

Теорема 3. *При условии*

$$\begin{aligned} \nu - a + \delta - \gamma &\geq -\pi - \frac{(\delta - \gamma)(\pi - \nu)}{a} \\ -\nu + a + \delta + \gamma &\leq \pi - \frac{(\delta + \gamma)(\pi - \nu)}{a} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Отображение F имеет o-аттрактор в области $D|I$, где

$$I = \ \Big\{ x \ \mid \ f(\nu) - \gamma < x < f(-\nu) + \gamma \ \Big\},$$

Доказательство. Второе условие есть нервенство $f(-\nu) < f(\tilde{x_2})$, где $\tilde{x_2}$ — координата неподвижной точки отображения $F^+,\ \tilde{x_2} > \nu$.

Первое условие — неравенство $f(\nu) > f(\tilde{x_1})$, где $\tilde{x_1}$ - координата неподвижной точки отображения $F^-,\ \tilde{x_1} < -\nu$. Эти условия есть условия того, что интервал I лежит внутри интервала $(\tilde{x_1}, \tilde{x_2})$, обеспечивая отсутствие φ-траекторий.

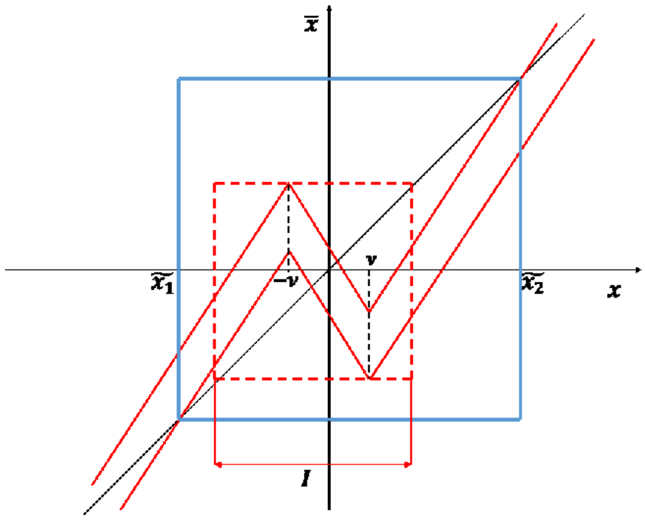


Рис. 1. Аттрактор колебательного типа.

Рис. 1 иллюстрирует интервал, на котором расположены x-координаты o-аттрактора отображения F.

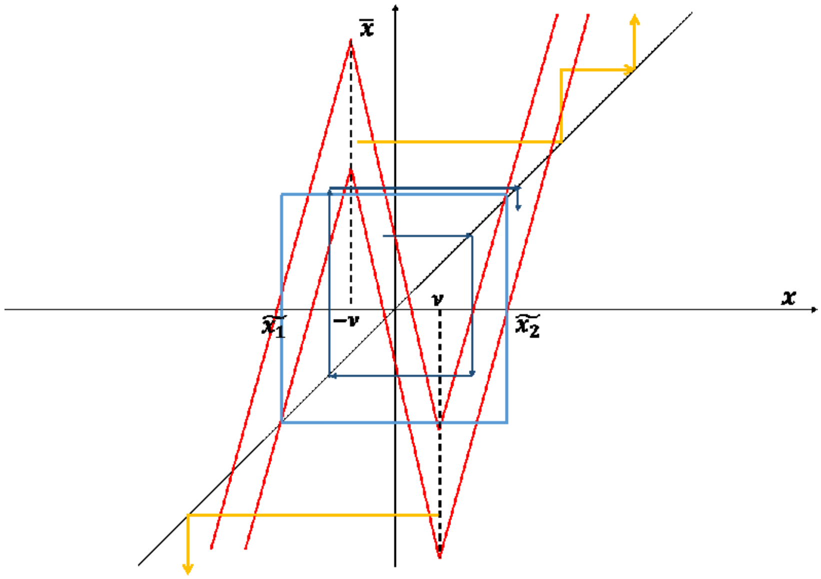


Рис. 2. Аттрактор смешанного типа.

При $\delta > 0$ с увеличением параметра a первым нарушается второе неравенство в (3.6). При этом у отображения могут появиться φ-траектории.

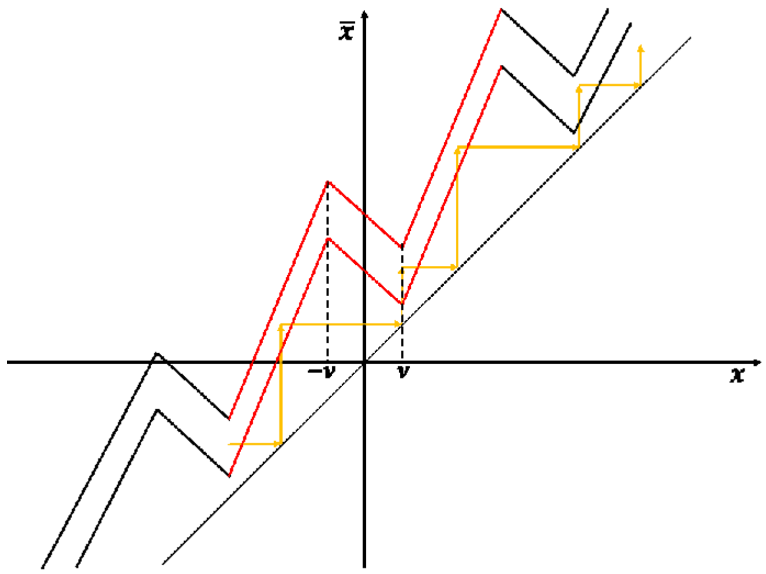


Рис. 3. Аттрактор вращательного типа.

При условии $f(-\nu) - \gamma > \tilde{x_2}$ (рис. 2) отображение F имеет m-аттрактор, содержащий одновременно и o-траектории, и φ-траектории. Рис. 3 иллюстрирует случай $\delta > a + \gamma$, когда аттрактор F не имеет o-траеторий. □

4. Гиперболичность аттракторов

Пусть $O = \{x(k), y(k), k \in Z\}$ есть неблуждающая траектория отображения F. Свойства устойчивости (гиперболичности) траектории O определяются уравнением в вариациях вида

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= [1 - aS(k)]\xi(k) + \sum_{i=1}^{n} \eta_i(k), \\ \eta(k+1) &= \lambda_i[-bS(k)\xi(k) + \eta_i], \end{aligned} \qquad i = \overline{1,n}, \tag{4.1}$$

где $S \triangleq g'(x(k))$.

Для удобства обозначим $p = 1 - aS(k)$, $q = -bS(k)$, $\bar{\xi} = \xi(k+1)$, $\bar{\eta} = \eta(k+1)$, и перепишем (4.1) в виде отображения T

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= p\xi + \sum_{i=1}^{n} \eta_i, \\ \bar{\eta} &= \lambda_i[q\xi(k) + \eta_i], \end{aligned} \qquad i = \overline{1,n}, \tag{4.2}$$

Введем в каждой точке $(x(k), y(k)) \in D$ одинаковые конусы

$$K^u = \{\xi, \eta_i \mid \eta_i = \alpha_i \xi, |\alpha_i| < \chi, i = \overline{1,n}\}, \tag{4.3}$$

Найдем образ образующей линии

$$l = \{\eta_i = \alpha_i \xi, \;\; \xi \in R^1, i = \overline{1,n}\}, \tag{4.4}$$

Подставляя (4.4) в (4.3) получаем Fl в параметрическом виде

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= (p + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\xi, \\ \bar{\eta}_i &= \lambda_i (q + \alpha_i)\xi, \end{aligned} \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.5}$$

Из (4.5) получаем образ Fl

$$\bar{\eta}_i = \bar{\alpha}_i \bar{\xi}, \tag{4.6}$$

где

$$\bar{\alpha}_i = \frac{\lambda_i (q + \alpha_i)}{p + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i}, \;\; i = \overline{1,n}. \tag{4.7}$$

Первое уравнение в (4.5) есть одномерное отображение переменной ξ.

Лемма 2. *Отображение $\xi \to \bar{\xi}$ в точках конуса K^u является растягивающим, т.е.*

$$|p + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i| > 1 + \varepsilon, \;\; \varepsilon > 0, \tag{4.8}$$

при условии

$$ah > \chi n + \varepsilon + 2 \tag{4.9}$$

Доказательство. Неравенство (4.8), очевидно, переписывается в виде двух неравенств

$$\begin{aligned} 1 - ag'(x(k)) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i &< -1 - \varepsilon; \\ 1 - ag'(x(k)) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i &> 1 + \varepsilon \end{aligned} \tag{4.10}$$

Используя условие $|g'| > h$ в (0.2) и границы конуса K^u $|\alpha_i| < \chi$, взамен (4.10) получаем неравенство (4.9) и неравенство $ah > \varepsilon + \chi n$, справедливое при условии (4.9). □

Теорема 4. *При условии*

$$\begin{gathered} ah > 2 + \varepsilon + \frac{\lambda^* bn}{1 - \lambda^*}, \;\; |g'| > h, \;\; \varepsilon > 0, \\ \lambda^* = \min_{i \in [1,n]} \lambda_i \end{gathered} \tag{4.11}$$

аттракторы отображения F сингулярно-гиперболические.

Доказательство. Формула (4.7) задает отображение $\alpha_i \to \bar{\alpha}_i,\ i = \overline{1,n}$ координат направляющих векторов прямых (4.4) и (4.6).

Перепишем (4.6) в виде

$$\bar{\alpha}_i = \frac{\lambda_i q}{p + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i} + (\frac{\lambda_i}{p + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i})\alpha_i \tag{4.12}$$

В силу неравенства (4.10) и условия $|g(x)| < 1$ в (0.2) имеем

$$\left|\frac{\lambda_i q}{p + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i}\right| < \lambda^* b, \quad \left|\frac{\lambda_i}{p + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i}\right| < \lambda^*, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.13}$$

Тогда область, где $|\bar{\alpha}_i| < |\alpha_i|,\ i = \overline{1,n}$ определяется неравенствами

$$\lambda^* b + \lambda^* |\alpha_i| < |\alpha_i|, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.14}$$

Следовательно, область

$$|\alpha_i| < \frac{\lambda^* b}{1 - \lambda^*} \tag{4.15}$$

есть притягивающая область отображения (4.12). В результате, полагая $\chi = \frac{\lambda^* b}{1-\lambda^*}$ в неравенствах (4.15), определяющих конус K^u, получаем его инвариантность, $TK^u \in K^u$. Тогда по лемме 2, где условие (4.9) заменено на условие (4.11), отображение T в инвариантном конусе K^u является растягивающим. В силу свойств отображения (4.12) в качестве устойчивого конуса K^s может быть выбрана внешность конуса K^u.

□

Заключение

В работе проведено исследование многомерного отображения F вида

$$(x,\ y_i) \to (x + \delta - ag(x) + \sum_{i=1}^{n} y_i,\ \lambda_i(-b_i g(x) + y_i)), \quad i = \overline{1,n}$$

с одной кусочно-гладкой периодической нелинейностью $g(x)$.

Получены условия, при которых отображение F имеет аттракторы, лежащие в полнотории

$$D = \left\{ \|y\| < \frac{\lambda^* b}{1 - \lambda^*},\ x \in S^1 \right\}.$$

Даны критерии, определяющие колебательный и вращательный тип аттракторов. Доказана теорема, указывающая область параметров, при которых аттракторы как колебательные, так и вращательные, являются сингулярно-гиперболическими. При этих условиях динамическое поведение траекторий отображения представляет собой пример динамического хаоса.

Список цитируемых источников

1. *Аносов, Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. Тр. МИАН СССР 90, 3–210 (1967).
2. *Afraimovich, V. S., Bykov, V. V. & Shilnikov, L. P.* On attracting structurally unstable limit sets of Lorenz attractor type. Trans. Mosc. Math. Soc. 44, 153–216 (1982).
3. *Robinson, C.* Homoclinic bifurcation to a transitive attractor of Lorenz type. Nonlinearity Anal. 23, 1255–1268 (1989).
4. *Lozi, R.* Un attracteur de Henon. J. Physique 39, 9–10 (1978).
5. *Belykh, V.* Chaotic and strange attractors of a two-dimensional map. Matematicheski Sbornik 186:3, 3–18 (1995).
6. *Henon, M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor. Communications in Mathematical Physics50:1, 69–77 (1976).
7. *Заславский, Г. М., Чириков, Б. В.* Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний. Успехи физических наук №105, 3–39 (1971).
8. *Белых, В. Н.* Модели дискретных СФС и их исследование. В кн. Системы фазовой синхронизации. Под ред. В.В.Шахгильдяна, Л.Н.Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982, 161–162.
9. *Anosov, B., Sinai, J.* Some smooth dynamical systems. Russian Math. Surveys 22:5, 107–172 (1967).
10. *Arnold, V., Afraimovich, V., Il'yashenko, Yu.& Shilnikov, L.* Theory of bifurcations. VINITI Modern Problems of Mathematics 5, 5–218 (1986).
11. *Белых, В. Н.* Странный аттрактор. В кн. Большая российская энциклопедия, Т. 31, 285–286 (2016).
12. *Sataev, E.* Invariant measures for hyperbolic maps with singularities. Russian Math. Surveys 47:1, 147–204 (1992).
13. *Belykh, V., Ukrainsky, B.* Hyperbolic attractor of a continuous piecewise smooth 2-dimensional map. Sbornik Nauchnyh Trudov “Modelirovanie i optimizacia slozhnyh sistem” N. Novgorod: VGAVT, 1997.
14. *Belykh, V., Mordvinkina, I. and Ukrainsky B*. Multidimensional Lurie systems and Henon maps: Smale's horseshoes and bifurcations. Тезисы докладов Международной конференции «Динамика, бифуркации и странные аттракторы» посвященной памяти Л. П. Шильникова (1934–2011) N. Novgorod, 2013.
15. *Belykh, V., Komrakov, N. and Ukrainsky B*. Hyperbolic attractors in a family of multidimensional maps with cusp-points. Proc. of int. conf. “Progress in nonlinear science” dedicated to the 100-th anniversary of A. Andronov. N. Novgorod, 2013.
16. *Белых, В. Н.* Элементарное введение в качественную теорию и теорию бифуркаций динамических систем. Соросовский образовательный журнал №1, 115–121 (1997).

Получена 05.11.2018

Динамические системы, 2018, том 8(36), №4, 385–407

УДК 517.984.50

Оператор градиент дивергенции и пространства Соболева

Р. С. Сакс

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
Уфа 450077. *E-mail: romen-saks@yandex.ru*

Аннотация. Краевая задача для оператора градиент дивергенции с младшим слагаемым $\lambda\mathbf{u}$ изучается в пространствах Соболева в ограниченной области G с гладкой границей. Особенность этого матричного оператора состоит в том, что при $\lambda \neq 0$ он приводим к эллиптическому оператору методом Б. Вайнберга и В. Грушина, а краевая задача удовлетворяет условиям эллиптичности В. Солонникова. Откуда вытекают свойства решений спектральной задачи оператора градиент дивергенции: а) его ненулевые собственные значения имеют конечную кратность, б) их (обобщенные) собственные функции бесконечно дифференцируемы вплоть до границы области.

Оператор градиент дивергенции имеет самосопряженное расширение $\mathcal{N}_d$ в подпространство $\mathcal{A}_\gamma$ в $\mathbf{L}_2(G)$, где он обратим. Его обратный оператор вполне непрерывен, а собственные векторы образуют полный ортогональный базис в $\mathcal{A}_\gamma$. Изучены свойства рядов Фурье градиента дивергенции и его расширения $\mathcal{N}_d$, действующего в $\mathcal{A}_\gamma$ и в его подпространствах $\mathbf{A}^{2k}_\gamma$, — пространствах Соболева в $\mathcal{A}_\gamma$. Определены пространства $\mathbf{A}^1_0$ и $\mathbf{A}^{-1}$.

Выделены шкалы пространств Соболева и доказано, что оператор $\nabla\mathrm{div} + \lambda I$ при почти всех λ отображает их взаимно однозначно и непрерывно. Приведены формулы базисных полей градиента дивергенции в шаре. Изложены аналогичные результаты для оператора ротор и его симметричного расширения S в $\mathcal{B}$.

Ключевые слова: пространства Лебега, пространства Соболева, дифференциальные операторы градиент, дивергенция и вихрь (ротор), эллиптические матрицы, краевые задачи, спектральные задачи, ряды Фурье.

Operator $\nabla\mathrm{div}$ and Sobolev spaces

R. S. Saks

Mathematical Institute with CC UFIC RAS, Upha, 450077.

Abstract. Boundary value problem for a gradient of divergence operator with lower term $\lambda\mathbf{u}$ is studied in Sobolev spaces for a bounded domain G with smooth boundary. The peculiarity of this matrix operator is that for $\lambda \neq 0$ it is reducible to the elliptic operator (by B. Weinberg and V. Grushin method) and the boundary problem satisfy the V. Solonnikov ellipticity condition. The important properties solutions of spectral problems the operator gradient of divergence follow from this: a) each non-zero eigenvalue has a finite multiplicity, b) any (generalized) eigenfunction is infinitely differentiable up to the boundary of the domain.

The gradient of divergence has a self-adjoint expansion $\mathcal{N}_d$ in the subspace $\mathcal{A}_\gamma$ of $\mathbf{L}_2(G)$, where it is convertible. The inverse operator is compact and a system of its eigenvectors is a complete orthogonal basis of the space $\mathcal{A}_\gamma$. Properties of Fourier series for this operator have been investigated. Operator $\mathcal{N}_d$ acts in the space $\mathcal{A}_\gamma$ and in subspaces $\mathbf{A}^{2k}$ that are Sobolev spaces of order $2k$ in $\mathcal{A}_\gamma$.

The scales of Sobolev spaces are selected. It is proved that operator $\nabla\mathrm{div} + \lambda I$ maps them one to one and continuously at almost all λ. The formulas of basic fields of a gradient of divergence in a ball are presented.
Keywords: Lebesgue spaces, Sobolev spaces, gradient, divergence, rotor, elliptic matrix, boundary value problem, spectral problem, Fourier series.
MSC 2010: 35F45, 35G45, 46E35, 46E40

Посвящается Сергею Львовичу Соболеву к его 110-летию.

1. Введение и основные результаты

1.1. Основные пространства и операторы

В статье мы рассматриваем линейные пространства над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Через $\mathbf{L}_2(G)$ обозначаем пространство Лебега вектор-функций, квадратично интегрируемых в G с внутренним произведением $(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_G \mathbf{u}\cdot\overline{\mathbf{v}}d\,\mathbf{x}$ и нормой $\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u},\mathbf{u})^{1/2}$.

Пространство Соболева порядка $s \geq 0$, состоящее из вектор-функций, принадлежащих $\mathbf{L}_2(G)$ вместе с обобщенными производными до порядка $s \geq 0$, обозначается через $\mathbf{H}^s(G)$, $\|\mathbf{f}\|_s$ — норма его элемента $\mathbf{f}$; замыкание в $\mathbf{H}^s(G)$ пространства $\mathcal{C}_0^\infty(G)$ обозначается через $\mathbf{H}_0^s(G)$. Пространство Соболева отрицательного порядка $\mathbf{H}^{-s}(G)$ двойственно к $\mathbf{H}_0^s(G)$ (см. $W_p^{(l)}(\Omega)$ при $p=2$ в §3 гл.4 [22], $H^k(Q)$ в §4 гл.3 [10] и гл.1 в [1]). В области G с гладкой границей Γ в каждой точке $y \in \Gamma$ определена нормаль $\mathbf{n}(y)$ к Γ. Вектор-функция $\mathbf{u}$ из $\mathbf{H}^{s+1}(G)$ имеет след $\gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})$ на Γ ее нормальной компоненты, который принадлежит пространству Соболева-Слободецкого $\mathbf{H}^{s+1/2}(G)$, $|\gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})|_{s+1/2}$ — его норма.

Операторы ротор, градиент, дивергенция и их свойства. Операторы градиент, ротор и дивергенция определяются в трехмерном векторном анализе [6]. Им соответствует оператор d внешнего дифференцирования на формах ω^k степени $k = 0, 1, 2$. Соотношения $dd\,\omega^k = 0$ при $k = 0, 1$ имеют вид $\mathrm{rot}\nabla h = 0$ и $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = 0$.

Формулы $\mathbf{u}\cdot\nabla h + h\mathrm{div}\mathbf{u} = \mathrm{div}(h\mathbf{u})$, $\mathbf{u}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{v} - \mathrm{rot}\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathrm{div}[\mathbf{v},\mathbf{u}]$, где $[\mathbf{v},\mathbf{u}]$ — векторное произведение, и интегрирование по области G используются при определении операторов $\mathrm{div}\,\mathbf{u}$ и $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ в $\mathbf{L}_2(G)$ и в $\mathcal{D}'(G)$.

Пусть функция $h \in H^1(G)$, а $\mathbf{u} = \nabla h$ — ее градиент. Через $\mathcal{A}(G)$ обозначим пространство $\mathcal{A}(G) = \{\nabla h, h \in H^1(G)\}$, оно содержится в $\mathbf{L}_2(G)$ и содержит подпространство

$$\mathcal{A}_\gamma = \{\nabla h, h \in H^2(G), \gamma(\mathbf{n}\cdot\nabla)\,h = 0\}, \tag{1.1}$$

$\mathcal{A}_\gamma$ плотно в $\mathcal{A}(G)$ и содержит подпространство

$$\mathbf{A}_\gamma^2 = \{\mathbf{u} \in \mathcal{A}_\gamma(G) : \nabla\mathrm{div}\mathbf{u} \in \mathcal{A}_\gamma(G)\}. \tag{1.2}$$

Мы доказываем, что оператор $\mathcal{N}_d \colon \mathcal{A}_\gamma(G) \to \mathcal{A}_\gamma(G)$ с областью определения $\mathbf{A}_\gamma^2$, совпадающий с $\nabla\mathrm{div}$ на $\mathbf{A}_\gamma^2 \subset \mathbf{H}^2(G)$, самосопряжен. Обратный оператор $\mathcal{N}_d^{-1} \colon \mathcal{A}_\gamma \to$

$\mathbf{A}_\gamma^2$ вполне непрерывен. Следовательно, этот оператор имеет полную систему собственных функций, отвечающих ненулевым собственным значениям:

$$-\nabla \mathrm{div}\mathbf{q}_j = \mu_j \mathbf{q}_j, \quad \mu_j \in M \subset \mathbb{R},$$

$$\mathbf{a}(x) = \sum_{\mu_j \in M} (\mathbf{a}, \mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j(x), \quad \text{если} \quad \mathbf{a}(x) \in \mathcal{A}_\gamma(G), \quad \|\mathbf{q}_j\| = 1.$$

Ортогональное дополнение $\mathcal{A}(G)$ в $\mathbf{L}_2(G)$ обозначим через $\mathcal{B}(G)$. Z. Yoshida и Y. Giga в [34] обозначают пространство $\mathcal{B}(G)$ через $L^2_\sigma(G)$, А. Фурсиков в [30] — как $\mathbf{V}(G)$. В обобщенном смысле оно формулируется так:

$$\mathcal{B}(G) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G) : \, \mathrm{div}\, \mathbf{u} = 0, \, \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = 0\}.$$

Если граница области G имеет положительный род ρ, то $\mathcal{B}(G)$ содержит конечномерное подпространство

$$\mathcal{B}_H = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G) : \mathrm{rot}\, \mathbf{u} = 0, \; \mathrm{div}\, \mathbf{u} = 0, \; \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = 0\}. \tag{1.3}$$

Его размерность равна ρ [26], а базисные поля $h_j \in \mathcal{C}^\infty(G)$ [33].

Ортогональное дополнение $\mathcal{B}_H$ в $\mathcal{B}(G)$ обозначим через $\mathbf{V}^0(G)$. Итак,

$$\mathbf{L}_2(G) = \mathcal{A}(G) \oplus \mathcal{B}(G), \quad \mathcal{B}(G) = \mathbf{V}^0(G) \oplus \mathcal{B}_H(G). \tag{1.4}$$

Отметим, что разложение $\mathbf{L}_2(\Omega)$ на ортогональные подпространства изучали Г. Вейль [33], С. Л. Соболев [23], О. А. Ладыженская [9], К. Фридрихс [29], Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе [8], Э. Быховский и Н. Смирнов [2], Z. Yoshida и Y. Giga [34]. Мы воспользовались разложением, предложенном в [34].

Пространство $\mathbf{V}^0(G)$ содержит подпространство

$$\mathbf{W}^1 = \{\mathbf{u} \in \mathbf{V}^0(G) : \mathrm{rot}\mathbf{u} \in \mathbf{V}^0(G)\}.$$

Z.Yoshida и Y.Giga показали в [34], что оператор $S\colon \mathbf{V}^0 \to \mathbf{V}^0$ с областью определения $\mathbf{W}^1$, совпадающий с $\mathrm{rot}\, \mathbf{u}$ на $\mathbf{W}^1 \subset \mathbf{H}^1(G)$ — самосопряжен, а его обратный оператор — вполне непрерывен. Его собственные поля, отвечающие ненулевым собственным значениям, образуют в $\mathbf{V}^0(G)$ полный ортогональный базис.

В гидродинамической интерпретации [8] им соответствуют потоки, имеющие ненулевую завихренность, а собственным функциям градиента дивергенции соответствуют потенциальные (безвихревые) потоки.

Приложения смотрите в работах [7, 32, 31, 28], а также [14]-[18].

В шаре B радиуса R собственные поля $\mathbf{u}_\kappa^\pm$ ротора, отвечающие ненулевым собственным значениям $\pm\lambda_\kappa = \pm\rho_{n,m}/R$ и собственные поля $\mathbf{q}_\kappa$ градиента дивергенции с собственными значениями $-\nu_\kappa^2$, $\nu_\kappa = \alpha_{n,m}/R$, выражаются явными формулами [18], причем

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{u}_\kappa^\pm = \pm\lambda_\kappa\, \mathbf{u}_\kappa^\pm, \quad \nabla\, div\, \mathbf{u}_\kappa^\pm = 0, \quad \gamma\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_\kappa^\pm = 0; \quad \kappa = (n, m, k),$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{q}_\kappa = 0, \quad -\nabla\, div\, \mathbf{q}_\kappa = \nu_\kappa^2 \mathbf{q}_\kappa, \quad \gamma \mathbf{n}\cdot\mathbf{q}_\kappa = 0, \qquad |k| \le n,$$

где числа $\pm\rho_{n,m}$ и $\alpha_{n,m}$ — нули функций ψ_n и их производных ψ_n', а

$$\psi_n(z) = (-z)^n \left(\frac{d}{zdz}\right)^n \frac{\sin z}{z}, \quad n \ge 0,\ m \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Они составляют полные базисы в $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B} \subset \mathbf{L}_2(B)$ [18].

Доказано, что условие $\mathbf{v} \in \mathbf{A}_\gamma^{2s}(G)$ необходимо и достаточно для сходимости ряда Фурье поля $\mathbf{v}$ из $\mathcal{A}_\gamma(G)$ по собственным функциям оператора $\nabla\,\mathrm{div}$ в норме пространства Соболева $\mathbf{H}^{2s}(G)$ порядка $s > 0$ (Теорема 3).

1.2. Структура работы

В §2 мы изучаем в ограниченной области G с гладкой границей Γ разрешимость краевой задачи $\gamma\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = g$ для системы $\nabla\mathbf{div}\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f}$ в G в пространствах $\mathbf{H}^s(G)$ при $s \ge 2$.

Эта система не является эллиптической [11]. При $\lambda \ne 0$ ее расширение по Б. Вайбергу и В. Грушину [3] является эллиптической переопределенной системой, а краевая задача удовлетворяет условиям эллиптичности Солонникова ([24] Теоремы 1.1).

Следовательно, оператор $\mathbb{B}$ задачи в пространствах (2.8) имеет левый регуляризатор, конечномерное ядро и выполняются априорная оценка:

$$C_s\|\mathbf{u}\|_{s+2} \le |\lambda|\,\|\mathrm{rot}^2\,\mathbf{u}\|_s + \|\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|_s + |\gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})|_{s+3/2} + \|\mathbf{u}\|_s \tag{1.6}$$

Разрешимость этой задачи зависит от пространств, к которым принадлежат $\mathbf{f}$ и g. Пространство $\mathcal{B}(G)$ принадлежит ядру оператора градиента дивергенции в $\mathbf{L}_2(G)$, а $\mathcal{A}(G)$ — ядру ротора, поэтому уравнение $\nabla\mathbf{div}\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f}$ на $\mathcal{B}(G)$ сводится к уравнению $\lambda\mathbf{u} = \mathbf{f}$, а на $\mathcal{A}(G)$ — к уравнению $\Delta\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f}$. На подпространство $\mathcal{A}_\gamma$ оператор $\nabla\mathbf{div} + \lambda I$ продолжается как самосопряженный оператор $\mathcal{N}_d + \lambda I : \mathcal{A}_\gamma \to \mathcal{A}_\gamma$. Необходимые и достаточные условия обратимости этого оператора Фредгольма см. в Теореме 2.

В §3 спектральная задача для оператора градиент дивергенции в области с гладкой границей сводится к решению спектральной задачи Неймана для скалярного оператора Лапласа.

В шаре ее решения вычислены явно [4]. В результате мы получаем формулы (3.4) собственных функций $\mathbf{q}_\mu(\mathbf{x})$ градиента дивергенции.

В § 4 методом Фурье в шаре B решается краевая задача $\gamma\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = 0$, $\nabla\mathbf{div}\mathbf{v} + \lambda\mathbf{v} = \mathbf{f}$ при любых λ (Теорема 4). Вводим пространства $\mathbf{H}^2_{\gamma\delta\gamma}(B)$ и $\mathbf{F}^0_\gamma(B)$ и доказываем, что если $\lambda \,\overline{\in}\, Sp\,(-\nabla\mathrm{div})$, $(\lambda \ne 0, \nu^2_{n,m})$, то оператор $\nabla\mathrm{div} + \lambda I$ осуществляет взаимно однозначное и непрерывное отображение пространств $\mathbf{H}^2_{\gamma\delta\gamma}(B)$ и $\mathbf{F}^0_\gamma(B)$ (Лемма 3).

Выписаны ряды для операторов $\mathcal{N}_d$ и $\mathcal{N}_d^{-1}$ и пространства $\mathbf{A}^{2p}_\gamma$ — пространства Соболева $\mathbf{H}^{2p}$ в $\mathcal{A}_\gamma$, $p = 1, 2, \ldots$, которые они отображают.

Попутно изложены аналогичные результаты для оператора ротор и его симметричного расширения S в $\mathbf{V}^0$.

2. Градиент дивергенции в ограниченной области

2.1. Краевая задача

Пусть G — ограниченная область в R^3 с гладкой границей Γ, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к Γ. В частности, G может быть шаром B, $|x| < R$, с границей S.

Задача 1. В области G и на ее границе Γ заданы векторная и скалярная функции $\mathbf{f}$ и g, найти вектор-функцию $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{s+2}(G)$, такую что

$$\nabla \operatorname{div}\mathbf{u} + \lambda\, \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad G, \quad \mathbf{f} \in \mathbf{H}^s(G), \tag{2.1}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = g, \quad g \in H^{s+3/2}(\Gamma), \tag{2.2}$$

где $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{n}$.

Эта задача *не эллиптична.* Оператор $\nabla \operatorname{div} + \lambda \mathrm{I}$ второго порядка не является эллиптическим, так как ранг его символической матрицы $\nabla \operatorname{div}(i\xi)$ равен единице при всех $\xi \in \mathcal{R}^3 \backslash 0$ и меньше трех [11].

2.2. Классы обобщенно эллиптических систем [REESp]

Б. Вайнберг и В. Грушин [3] в 1967 году определили на гладком многообразии X без края класс *равномерно неэллиптических систем* (РНС) сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и класс матричных с.и.д.операторов, *глобально приводимых к эллиптическим матрицам* [REEM]=[REduced to Elliptic Matrix], и доказали их эквивалентность. Эти определения требуют введения дополнительных понятий.

Мы приведем их для систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, который обозначим как [REESp].

Система дифференциальных уравнений, $S(D)u = f$ порядка m, из этого класса обладает свойствами:

а) *ее символическая матрица $S_0(i\xi)$ имеет постоянный ранг при всех $\xi \in \mathcal{R}^3 \backslash 0$.* Это позволяет построить аннулятор $C(D)$ оператора $S_0(D)$ такой, что $(CS_0)(D)\mathbf{u} \equiv 0$ на X и определить

б) *расширенную систему* $\quad Su = f, //CSu = Cf$ *порядка* $m//l$.

Ее символическая матрица $S_0(i\xi), //(CS)_0(i\xi)$ определяется младшей частью оператора $S(D)$ и дополняет матрицу $S_0(i\xi)$.

в) *Если ранг расширенной матрицы максимален, то исходная система $Su = f$ принадлежит классу [REES1] и степень ее приводимости равна единице.*

г) *Если система $Su = f$ такова, что ранг расширенной матрицы не максимален, но постоянный, то процесс повторяется* и при определенных условиях система принадлежит классу [REES2]. И так далее.

Б. Вайнберг и В. Грушин [3] доказали, что на замкнутом многообразии X система $Su = f$ класса [REESp] являются разрешимой по Фредгольму или Нетеру в пространствах Соболева $\mathbf{H}^s(X)$, если $f \in \mathbf{H}^{s-m+p}(X)$, где $s \geq m$ целое. В качестве примера оператора из класса [REESp] приводится оператор $d + *$ на дифференциальных формах степени k на $2k+1$-мерном многообразии X.

Покажем, что система (2.1) принадлежит классу [REES1] при $\lambda \neq 0$. Действительно, оператор $\nabla \operatorname{div} + \lambda \mathrm{I}$ таков, что

а) *ранг его символической матрицы* ∇ *div*$(i\xi)$ *равен единице при любых* $\xi \neq 0$,

б) оператор $\nabla \operatorname{div}$ имеет левый аннулятор rot, так как $\operatorname{rot} \nabla \operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ для любой $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^3(G)$,

в) (6×3)-*оператор* ∇ *div*// λ*rot порядка* $2//1$ *эллиптичен.*

Его символическая матрица имеет максимальный ранг (=3) при выборе определенных порядков s_k и t_j для его строк и столбцов, а именно при $s_k = 0$ для $k = 1,2,3$ и $s_k = -1$ для $k = 4,5,6$; и при $t_j = 2$ для $j = 1,2,3$ [11]. Ранг матрицы $\nabla \operatorname{div}(i\xi)//\ \lambda \operatorname{rot}(i\xi$ равен трем при всех $\xi \neq 0$, поэтому расширенная система:

$$\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \lambda \operatorname{rot} \mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{f} \tag{2.3}$$

является эллиптической по Даглису-Ниренбергу. В общем случае (при $\mathbf{F}$ вместо $\operatorname{rot}\mathbf{f}$)эта система переопределена.

Оказывается, что формально переопределенная краевая задача (2.2), (2.3), эллиптична по определению В. А. Солонникова [24]. Это означает что

1) система (2.3) эллиптична,

2) граничный оператор $\gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$ “накрывает” оператор системы (2.3).

Первое утверждение выполняется, если

1^0) однородная система линейных алгебраических уравнений:

$$\lambda \operatorname{rot}(i\xi)\mathbf{w} = 0, \quad (\nabla \operatorname{div})(i\xi)\mathbf{w} = 0, \quad \forall \xi \neq 0 \tag{2.4}$$

с параметром $\xi \neq 0$ имеет только тривиальное решение $\mathbf{w}(\xi) = 0$;

Пусть τ и $\mathbf{n}$- касательный и нормальный векторы к Γ в точке $y \in \Gamma$ и $|\mathbf{n}| = 1$. Второе утверждение выполняется, если

2^0) однородная система линейных дифференциальных уравнений (на полуоси $z \geq 0$ с параметром $|\tau| > 0$):

$$\lambda \operatorname{rot}(i\tau + \mathbf{n}d/dz)\mathbf{v} = 0, \quad (\nabla \operatorname{div})(i\tau + \mathbf{n}d/dz)\mathbf{v} = 0 \tag{2.5}$$

с условиями: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|_{z=0} = 0$ и $\mathbf{v} \to 0$ при $z \to +\infty$ имеет только тривиальное решение $\mathbf{v}(y, \tau; z)$.

Для доказательства 1^0), 2^0) воспользуемся соотношением

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = -\Delta \mathbf{v} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}. \tag{2.6}$$

1^0). Из уравнений (2.4) вытекает уравнение $-\Delta(i\xi)\mathbf{w} = 0$, которое распадается на три скалярных уравнения $|\xi|^2 w_j(\xi) = 0$. Значит, $\mathbf{w} = 0$ ибо $|\xi| \neq 0$, и система (2.3) — эллиптична.

2^0). Из уравнений (2.5) вытекает уравнение $(-|\tau|^2+(d/dz)^2)\mathbf{v}=0$ с параметром $|\tau|>0$. Следовательно, $\mathbf{v}=\mathbf{w}e^{-|\tau|z}$. Эта вектор-функция удовлетворяет уравнениям (2.5), если вектор $\mathbf{w}$ таков, что $\quad \omega\times\mathbf{w}=0 \quad \omega(\omega'\cdot\mathbf{w})=0$, где $\omega=i\tau-|\tau|\mathbf{n}$ — вектор-столбец. Так как $\overline{\omega'}\cdot\omega=|\tau|^2\neq 0$, то $\omega'\cdot\mathbf{w}=0$.

Уравнения $\omega\times\omega=0, \quad \omega'\cdot\omega=0$, имеют решение $\mathbf{w}=c\omega$, где c — постоянная. Граничное условие приводит нас к равенству $|\tau|c=0$. Следовательно, $c=0$ ибо $|\tau|>0$ и $\mathbf{v}=0$.

Итак, задача (2.2), (2.3) эллиптична по Солонникову. Мы скажем в этом случае, что краевая задача (2.1), (2.2) при $\lambda\neq 0$ является обобщенно эллиптической класса [REES1].

2.3. Оператор задачи 1 в пространствах Соболева

Пусть $\mathbf{u}$ принадлежит пространству $\mathbf{H}^{s+2}(G)$, то есть каждая компонента $u_j\in H^{s+2}(G)$. Тогда $\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}$ принадлежит $\mathbf{H}^s(G)$ и $\mathrm{rot}^2\mathbf{u}$ принадлежит $\mathbf{H}^s(G)$. Поэтому вектор-функция $\mathbf{f}:=\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}+\lambda\mathbf{u}$ принадлежит пространству

$$\mathbf{F^s}(G)=\{\mathbf{f}\in\mathbf{H}^s(G):\mathrm{rot}^2\,\mathbf{f}\in\mathbf{H}^s(G)\}, \tag{2.7}$$

которое снабдим нормой $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{F}^s}=(\|\mathbf{v}\|_s^2+\|\mathrm{rot}^2\mathbf{v}\|_s^2)^{1/2}$. Функция $g:=\gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})\equiv\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_\Gamma$ принадлежит пространству $H^{s+3/2}(\Gamma)$. Следовательно, при $\lambda\neq 0$ задаче соответствует ограниченный оператор

$$\mathbb{B}\mathbf{u}\equiv\begin{pmatrix}\nabla\mathrm{div}\,+\lambda\,I\\ \gamma\mathbf{n}\cdot\end{pmatrix}\mathbf{u}:\mathbf{H^{s+2}(G)}\to\begin{pmatrix}\mathbf{F^s(G)}\\ H^{s+3/2}(\Gamma)\end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Согласно Теореме 1.1 из работы Солонникова [24], о переопределенных эллиптических краевых задачах, в ограниченной области G с гладкой границей $\Gamma\in\mathcal{C}^{s+2}$, обобщенно эллиптический оператор (2.8) имеет левый регуляризатор, то есть ограниченный оператор $\mathbb{B}^L$ такой, что $\mathbb{B}^L\mathbb{B}=\mathbb{I}+\mathbb{T}$, где $\mathbb{I}$ - единичный, а $\mathbb{T}$ — вполне непрерывный операторы, область значений замкнута, и существует постоянная $C_s>0$ такая, что выполняется оценка:

$$C_s\|\mathbf{u}\|_{s+2}\leq|\lambda|\,\|\mathrm{rot}^2\,\mathbf{u}\|_s+\|\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|_s+|\gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})|_{s+3/2}+\|\mathbf{u}\|_s \tag{2.9}$$

где $\|\mathbf{u}\|_{s+2}$ норма $\mathbf{u}$ в $\mathbf{H}^{s+2}(G)$, $|\gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})|_{s+3/2}$ — норма следа нормальной компоненты $\mathbf{u}$ на Γ в $H^{s+3/2}(\Gamma)$, $s\geq 0$ [24, 11]. Итак, имеет место

Теорема 1. *Оператор $\mathbb{B}$ в пространствах (2.8) имеет левый регуляризатор. Его ядро $\mathcal{M}$ конечномерно, область значений замкнута и выполняется априорная оценка* (2.9).

Из этой теоремы и оценки следует, что при $\lambda\neq 0$

a) *число линейно независимых решений однородной задачи 1 конечно*,

b) *любое ее обобщенное решение бесконечно дифференцируемо вплоть до границы, если граница области бесконечно дифференцируема.*

Из этой теоремы и оценки вытекают полезные свойства решений *спектральной задачи* оператора градиента дивергенции:

а) каждое *ненулевое собственное значение* μ имеет конечную кратность,

б) любая соответствующая ему *обобщенная собственная функция* бесконечно дифференцируема вплоть до границы области, то-есть, поле $\mathbf{v}_\mu(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{G})$.

Замечание. Оценку (2.9) я не видел у других авторов. Известна [34] другая оценка: существует постоянная $C_s > 0$ такая, что

$$C_s \|\mathbf{u}\|_{s+1} \leq \|\mathrm{rot}\, \mathbf{u}\|_s + \|\mathrm{div}\, \mathbf{u}\|_s + |\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})|_{s+1/2} + \|\mathbf{u}\|_s \tag{2.10}$$

2.4. Оператор $\nabla \mathrm{div} + \lambda I$ в подпространствах

На подпространстве $\mathcal{B}$ в $\mathbf{L}_2(G)$, ортогональном $\mathcal{A} = \{\mathbf{u} = \nabla h : \ h \in H^1(G)\}$ оператор $\nabla\, \mathrm{div}\mathbf{u} + \lambda \mathbf{u}$ является алгебраическим оператором вида: $\lambda \mathbf{u}$.

Пространство $\mathcal{A}_\gamma = \{\mathbf{u} = \nabla h : \ h \in H^2(G), \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})|_\Gamma = 0\}$ плотно в $\mathcal{A}$, так как функции из $\mathcal{C}_0^\infty \cap \mathcal{A}_\gamma$ плотны в $\mathbf{L}_2(G)$. Пространство

$$\mathbf{A}^2_\gamma(G) = \{\mathbf{v} \in \mathcal{A}_\gamma : \nabla \mathrm{div} \mathbf{v} \in \mathcal{A}_\gamma\}.$$

плотно в $\mathcal{A}_\gamma$ и содержится в $\mathbf{H}^2(G)$ согласно оценке (2.9).

Рассмотрим оператор $\mathcal{N}_d : \mathcal{A}_\gamma \to \mathcal{A}_\gamma$ с областью определения $\mathbf{A}^2_\gamma(G)$, который при $\mathbf{u} \in \mathbf{A}^2_\gamma(G)$ совпадает с $\nabla \mathrm{div}\mathbf{u}$.

Оператор $\mathcal{N}_d + \lambda I$, где I — единичный оператор, является эрмитовым [4]. Действительно, по формуле Гаусса-Остроградского

$$\int_G (\nabla \mathrm{div}\mathbf{u} + \lambda \mathbf{u}) \cdot \ \mathbf{v} dx = \int_G \mathbf{u} \cdot \ (\nabla \mathrm{div}\mathbf{v} + \lambda \mathbf{v}) dx + \tag{2.11}$$

$$\int_\Gamma [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \mathrm{div}\mathbf{u} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \mathrm{div}\mathbf{v}]\, dS.$$

Если вектор-функции $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ принадлежат $\mathbf{A}^2_\gamma(G)$, то граничные интегралы пропадают, остальные интегралы сходятся. Следовательно,

$$((\nabla \mathrm{div}\mathbf{u} + \lambda \mathbf{u}), \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, (\nabla \mathrm{div}\mathbf{v} + \lambda \mathbf{v})) \quad \text{в} \quad \mathbf{A}^2_\gamma(G). \tag{2.12}$$

Покажем, что

2.5. Оператор $\mathcal{N}_d$ — самосопряжен.

Сопряженный оператор $\mathcal{N}_d^*$ определяется равенством

$$(\mathcal{N}_d\, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathcal{N}_d^*\, \mathbf{v}) \quad \text{для любого} \quad \mathbf{u} \in \mathbf{A}^2_\gamma \equiv \mathcal{D}(\mathcal{N}_d).$$

Его левая часть существует, если $\mathbf{v} \in \mathcal{A}_\gamma$. Значит, $\mathcal{N}_d^* \mathbf{v} \in \mathcal{A}_\gamma$.

При $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\mathcal{N}_d^*)$ линейная форма $\mathbf{u} \to (\mathcal{N}_d\, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ непрерывна на $\mathcal{D}(\mathcal{N}_d)$ в топологии $\mathcal{A}_\gamma$ и $(\mathcal{N}_d\, \mathbf{u}, \mathbf{v}_j) \to 0$ при $\mathbf{v}_j \to 0$ в $\mathcal{A}_\gamma$.

В частности, если $\mathbf{u} \in \mathcal{C}_0^\infty(G) \cap \mathcal{D}(\mathcal{N}_d)$, то

$$(\mathcal{N}_d\, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \nabla \mathrm{div}\, \mathbf{v}).$$

Итак, мы видим, что $\nabla \mathrm{div}\, \mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(G)$, если $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\mathcal{N}_d^*)$.

Учитывая оценку (2.9), получаем, что $\mathcal{D}(\mathcal{N}_d^*) \subset \mathbf{H}^2(G)$.

Следовательно, $\mathcal{D}(\mathcal{N}_d^*) = \mathcal{D}(\mathcal{N}_d)$ и $\mathcal{N}_d^* = \mathcal{N}_d$.

2.6. Оператор $\mathcal{N}_d^{-1}$.

Так как $\mathcal{A}_\gamma$ ортогонально $Ker\mathcal{N}_d$, оператор $\mathcal{N}_d$ имеет единственный обратный $\mathcal{N}_d^{-1}$ определенный на $\mathcal{A}_\gamma$. Оператор $\mathcal{N}_d^{-1}\colon \mathcal{A}_\gamma \to \mathbf{A}_\gamma^2(G)$ имеет точечный спектр, который не содержит точек накопления кроме нуля.

Их множество счетно и каждое из собственных значений μ имеет конечную кратность. Перенумеруем их в порядке возрастания: $0 < \mu_1 \le \mu_2 \le \dots$, повторяя μ_k столько раз, какова его кратность. Соответствующие собственные функции обозначим через $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots$, так чтобы каждому собственному значению μ_k соответствовала только одна собственная функция $\mathbf{q}_k$: $-\mathcal{N}_d\, \mathbf{q}_k = \mu_k\, \mathbf{q}_k, \quad k = 1, 2, \dots$

Собственные функции, соответствующие одному и тому же собственному значению, выберем ортонормальными, используя процесс ортогонализации Шмидта [4]. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. Их нормируем.

Таким образом, в подпространстве $\mathcal{A}_\gamma \subset \mathbf{L}_2(G)$ строится ортонормальный базис, состоящий из собственных функций $\{\mathbf{q}_j(\mathbf{x})\}$ оператора $-\mathcal{N}_d$.

2.7. Ряды Фурье по собстенным векторам оператора $-\mathcal{N}_d$ и пространство $\mathcal{A}_\gamma$

Проекция вектор-функции $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(G)$ на $\mathcal{A}_\gamma$ имеет вид:

$$\mathbf{f}_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j(\mathbf{x}). \tag{2.13}$$

Действительно, частичные суммы $\mathbf{f}_{\mathbf{A}}^n$ этого ряда состоят из элементов, для которых $0 < \mu_j \le n$:

$$\mathbf{f}_{\mathbf{A}}^n = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j(\mathbf{x}) \quad \text{и} \quad \|\mathbf{f}_{\mathbf{A}}^n\|^2 = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)^2 \le \|\mathbf{f}\|^2,$$

проекции $(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{\mathbf{A}}^n, \mathbf{q}_j) = 0$, если $-\nabla \mathrm{div}\, \mathbf{q}_j = \mu_j \mathbf{q}_j, \qquad 0 < \mu_j \le n, \quad$ и

$$\|\mathbf{f}_{\mathbf{A}} - \mathbf{f}_{\mathbf{A}}^n\|^2 = \|\mathbf{f}_{\mathbf{A}}\|^2 - \|\mathbf{f}_{\mathbf{A}}^n\|^2 \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отметим, что $\mathbf{f}_{\mathbf{A}}^n \in \mathcal{C}^\infty(\overline{G}), \quad \mathrm{rot}\, \mathbf{f}_{\mathbf{A}}^n = 0$, $\gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{f}_{\mathbf{A}}^n = 0$ и при любом n вектор $\mathbf{f}_{\mathbf{A}}^n \perp \mathcal{B}$ в $\mathbf{L}_2(G)$. Значит, вектор $\mathbf{f}_{\mathbf{A}} \in \mathcal{A}_\gamma(G)$.

Согласно определению, $\mathcal{N}_d\mathbf{w} = \nabla\mathrm{div}\mathbf{w}$, *если* $\mathbf{w} \in \mathcal{D}(\mathcal{N}_d) = \mathbf{A}^2_\gamma$. Следовательно,

$$\mathcal{N}_d\mathbf{f_A} = \lim_{n\to\infty} \nabla\mathrm{div}\,(\mathbf{f}^n_\mathbf{A}) = -\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j(\mathbf{f},\mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j, \qquad (2.14)$$

если ряд сходится и принадлежит $\mathcal{A}_\gamma$. Это так, если $f \in \mathbf{H}^2(G)$. Действительно, $\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(G)$, $(\nabla\mathbf{div}\,\mathbf{f},\mathbf{q}_j) = -\mu_j(\mathbf{f},\mathbf{q}_j)$,

$$(\nabla\mathbf{div}\,\mathbf{f})^n_\mathbf{A} = -\sum_{j=1}^{n}\mu_j(\mathbf{f},\mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j,$$

$$\|(\nabla\mathbf{div}\,\mathbf{f})^n_\mathbf{A}\|^2 = \sum_{j=1}^{n}\mu^2_j(\mathbf{f},\mathbf{q}_j)^2 \le \|\nabla\mathbf{div}\,\mathbf{f}\|^2 \quad \text{и} \quad \nabla\mathbf{div}(\mathbf{f_A})\perp\mathcal{B}$$

Оператор $\mathcal{N}_d$ *замкнут.* Действительно, если $\mathbf{w}_i$ - последовательность из $\mathcal{D}(\mathcal{N}_d)$ $(i = 1,2,\dots)$ такая, что $\mathbf{w}_i \to \mathbf{w}$ и $\mathcal{N}_d\mathbf{w}_i \to \mathbf{v}$ в $\mathcal{A}_\gamma$, то $\mathbf{w} \in \mathcal{D}(\mathcal{N}_d)$, так как по условию $\mathbf{w} = \lim_{i\to\infty}\mathbf{w}_i \in \mathcal{A}_\gamma$ и $\mathcal{N}_d\mathbf{v} = \lim_{i\to\infty}\mathcal{N}_d\,\mathbf{w}_i = \lim_{i\to\infty}\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{w}_i \in \mathcal{A}_\gamma$. Значит, $\mathbf{v} = \mathcal{N}_d\mathbf{w}$.

Следствие. *Оператор* $\mathcal{N}_d$ *не зависит не зависит от порядка выбора частичных сумм* $\mathbf{w}_n \in \mathbf{A}^2_\gamma(G)$ *ряда* $\mathbf{f_A}$.

Введем пространства

$$\mathbf{A}^{2k}_\gamma(G) = \{\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma(G),\dots,(\nabla\mathrm{div})^k\,\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma(G)\} \quad \text{при} \quad k \ge 1. \qquad (2.15)$$

Согласно оценкам (2.9) $\mathbf{A}^2_\gamma \subset \mathbf{H}^2(G)$ и по индукции $\mathbf{A}^{2k}_\gamma \subset \mathbf{H}^{2k}(G)$.

С другой стороны, $\mathcal{A}_\gamma \cap \mathbf{H}^{2k} \subset \mathbf{A}^{2k}_\gamma(G)$

Поля $\mathbf{f}^n_\mathbf{A}$ при фиксированном n принадлежат любому из этих пространств. Оператор $\mathcal{N}_d$ отображает пространство $\mathbf{A}^{2k}_\gamma$ на $\mathbf{A}^{2(k-1)}_\gamma$ при $k > 1$, а $\mathbf{A}^2_\gamma$ на $\mathcal{A}_\gamma$.

Пространство $\mathcal{A}_\gamma$ ортогонально ядру оператора $\mathcal{N}_d$ в $\mathbf{L}_2(G)$, поэтому $\mathcal{N}_d$ имеет единственный обратный оператор $\mathcal{N}_d^{-1}$ на $\mathcal{A}_\gamma$:

$$\mathcal{N}_d^{-1}\mathbf{f_A} = \lim_{n\to\infty}\mathcal{N}_d^{-1}\,(\mathbf{f}^n_\mathbf{A}) = -\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j^{-1}(\mathbf{f},\mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j, \qquad (2.16)$$

Оператор $\mathcal{N}_d^{-1}$ *- компактен.* Доказательство. Пусть $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,2,\dots}$-ограниченная последовательность в $\mathcal{A}_\gamma$. Тогда последовательность $\mathbf{w}_i = \mathcal{N}_d^{-1}\mathbf{v}_i$ -ограничена в $\mathbf{H}^2(G)$ ввиду оценки $c\|\mathbf{u}\|_2 \le \|\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}\|$. По теореме Кондрашева-Reellich последовательность $\{\mathbf{v}_i\}$ сильно сходится в топологии $\mathcal{A}_\gamma$, т.е., $\mathcal{N}_d^{-1}$ компактен.

Следствие. *Спектр оператора* $\mathcal{N}_d^{-1}$ *точечный с единственной точкой накопления в нуле,* $\mu_j^{-1} \to 0$ *при* $j \to \infty$.

Пространство $\mathcal{N}_d^{-1}\mathcal{A}_\gamma = \mathbf{A}^2_\gamma$, и так далее, $\mathcal{N}_d^{-1}\mathbf{A}^{2(k-1)}_\gamma = \mathbf{A}^{2k}_\gamma$.

2.8. Полнота пространства $\mathcal{A}_\gamma(G)$

В базисе из собственных функ-ций ∇div скалярное произведение векторов $\mathbf{f},\mathbf{g}\in\mathcal{A}_\gamma$ имеет вид:

$$(\mathbf{f},\mathbf{g})=\lim_{n\to\infty}(\mathbf{f}^n_{\mathbf{A}},\mathbf{g}^n_{\mathbf{A}})=\sum_{j=1}^{\infty}(\mathbf{f},\mathbf{q}_j)(\mathbf{g},\mathbf{q}_j). \tag{2.17}$$

Согласно книге [4] §1.9, ортонормальная система $\{\mathbf{q}_j\}_{j=1,2,\dots}$ полна в $\mathcal{A}_\gamma$, если для любой $\mathbf{f}\in\mathcal{A}_\gamma$ ее ряд Фурье (2.13) сходится к $\mathbf{f}$ в $\mathbf{L}_2(G)$. По Теореме 1 из [4] эта система полна в $\mathcal{A}_\gamma$, тогда и только тогда, когда для любой функции $\mathbf{f}\in\mathcal{A}_\gamma$ выполняется равенство Парсеваля-Стеклова, то-есть уравнение замкнутости:

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\mathbf{f},\mathbf{q}_j)^2=\|\mathbf{f}\|^2. \tag{2.18}$$

Пространство $\mathbf{A}^2_\gamma(G)$ плотно в $\mathcal{A}_\gamma(G)$, так как плотное в нем множество $\mathbf{C}^\infty_0\cap\mathcal{A}_\gamma(G)$ содержится в $\mathcal{A}_\gamma(G)$. Если $\mathbf{f}\in\mathbf{C}^\infty_0\cap\mathcal{A}_\gamma(G)$, то

$$\|\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{A}^2_\gamma}=\|\mathbf{f}\|^2+\|\nabla\mathrm{div}\mathbf{f}\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}(1+\mu_j^2)(\mathbf{f},\mathbf{q}_j)^2<\infty \quad \text{и}$$

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathbf{f}^n_{\mathbf{A}}\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}(\mathbf{f},\mathbf{q}_j)^2=\|\mathbf{f}\|^2.$$

2.9. Оператор $\mathcal{N}_d$ самосопряжен (эрмитов) в пространстве $\mathcal{A}_\gamma(G)$

Действительно, если $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ принадлежат $\mathbf{A}^2_\gamma(G)$, то имеют место равенства

$$(\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{f},\mathbf{g})=(\mathbf{f},\nabla\mathrm{div}\mathbf{g})=-\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j(\mathbf{f},\mathbf{q}_j)(\mathbf{g},\mathbf{q}_j). \tag{2.19}$$

Отметим, что равенство

$$\int_G(\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}\,d\mathbf{x}=\int_G\mathbf{u}\cdot(\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{v})\,d\mathbf{x} \tag{2.20}$$

для любых функций $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ из $\mathcal{D}(\mathcal{N}_d)=\mathbf{A}^2_\gamma(G)$ доказано в п.2.4.

2.10. Оператор $\mathcal{N}_d + \lambda I$ фредгольмов в $\mathcal{A}_\gamma(G)$

Оператор $\mathcal{N}_d + \lambda I$ совпадает с $\nabla\mathrm{div} + \lambda I$ на $\mathbf{A}^2_\gamma$ и по определению

$$(\mathcal{N}_d + \lambda I)\mathbf{f} = \lim_{n\to\infty}(\nabla\mathrm{div} + \lambda \mathrm{I})\,(\mathbf{f}^n_{\mathbf{A}}) = \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda - \mu_j)(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j(\mathbf{x}), \tag{2.21}$$

если ряд сходится в $\mathbf{L}_2(G)$. Это так для всех $\mathbf{f} \in \mathbf{A}^2_\gamma(G)$. Причем, если $\lambda = \mu_{j_0}$ при $j = j_0$, то соответствующее слагаемое исчезает.

Если элемент $(\mathcal{N}_d + \lambda I)^{-1}\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma(G)$, то $(\mathcal{N}_d + \lambda I)^{-1}\mathbf{f} =$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}(\lambda - \mu_j)^{-1}(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda - \mu_j)^{-1}(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j \tag{2.22}$$

и ни одно из слагаемых этого ряда не обращается в бесконечность. Это означает, что $(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j) = 0$ при $\lambda = \mu_j = \mu_{j_0}$, то-есть функция $\mathbf{f}$ ортогональна всем собственным функциям $\mathbf{q}_j(\mathbf{x})$ градиента дивергенции, отвечающим собственному значению μ_{j_0}. Итак, имеет место

Теорема 2. *a). Оператор $\mathcal{N}_d : \mathcal{A}_\gamma \to \mathcal{A}_\gamma$ является самосопряженным. Его спектр $\sigma(\mathcal{N}_d)$ точечный и действительный. Семейство собственных функций $\mathbf{q}_j(\mathbf{x})$ оператора $\mathcal{N}_d$ образует полный ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{A}_\gamma$; разложение $\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma(G)$ имеет вид* (2.13). *b). Если λ не совпадает ни с одним из собственных значений оператора $\mathcal{N}_d$, то оператор $\mathcal{N}_d + \lambda I : \mathcal{A}_\gamma \to \mathcal{A}_\gamma$ однозначно обратим, и его обратный задается формулой* (2.22). *Если $\lambda = \mu_{j_0}$, то он обратим тогда и только тогда,когда*

$$\int_G \mathbf{f}\cdot\mathbf{q_j}\,dx = 0 \quad \text{для } \forall\mathbf{q_j} : \mu_j = \mu_{j_0}. \tag{2.23}$$

Ядро оператора $\mathcal{N}_d + \mu_{j_0} I$ определяется собственными функциями $\mathbf{q_j}(\mathbf{x})$, собственные значения которых равны μ_{j_0}:

$$Ker(\mathcal{N}_d + \mu_{j_0} I) = \sum_{\mu_j = \mu_{j_0}} c_j\,\mathbf{q}_j(\mathbf{x}), \quad \text{для } \forall c_j \in \mathcal{R}. \tag{2.24}$$

3. Построение собственных функций оператора ∇div

3.1. Связь между собственными функциями операторов ∇div и Лапласа-Неймана

Задача 2. Найти все ненулевые собственные значения μ и собственные вектор-функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ в $\mathbf{L}_2(G)$ оператора минус градиент дивергенции такие, что

$$-\nabla\mathrm{div}\mathbf{u} = \mu\,\mathbf{u} \quad \text{в} \quad G, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_\Gamma = 0, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}$ - проекция вектора $\mathbf{u}$ на нормальный вектор $\mathbf{n}$.

К области определения оператора задачи 2 мы отнесли все вектор-функции $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathbf{A}^2_\gamma(G)$. Согласно п.2.5, оператор имеет самосопряженное расширение $-\mathcal{N}_d$ в пространство $\mathcal{A}_\gamma$. Решения задачи 2 принадлежат классу $\mathcal{C}^\infty(\overline{G})$, так как $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty$ (см. следствие теоремы 1).

Эта задача связана со спектральной задачей Неймана для скалярного оператора Лапласа.

Задача 3. Найти все собственные значения ν и собственные функции $g(\mathbf{x})$ оператора Лапласа $-\Delta$ такие, что

$$-\Delta g = \nu g \quad \text{в } G, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla\, g|_\Gamma = 0. \tag{3.2}$$

К области определения оператора задачи 3 относят все функции $g(\mathbf{x})$ класса $\mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}^1(\overline{G})$, такие что $\mathbf{n} \cdot \nabla\, g|_\Gamma = 0$, $\Delta\, g \in L_2(G)$.

Эта задача является самосопряженной [4, 10]. Решения задачи 3 принадлежат классу $\mathcal{C}^\infty(\overline{G})$, так как $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty$. Легко видеть, что

Лемма 1. *Любому решению $(\mu, \mathbf{u})$ задачи 2 в области G соответствует решение $(\nu, g) = (\mu, div\, \mathbf{u})$ задачи 3. Обратно, любому решению (ν, g) задачи 3 соответствует решение $(\mu, \mathbf{u}) = (\nu, \nabla g)$ задачи 2.*

3.2. Явные решения спектральной задачи Лапласа-Неймана в шаре

Согласно книге [4] В. С. Владимирова

собственные значения оператора Лапласа-Неймана 3 в шаре B равны $\nu^2_{n,m}$, где $\nu_{n,m} = \alpha_{n,m} R^{-1}$, $n \geq 0$, $m \in N$, а числа $\alpha_{n,m} > 0$ суть нули функций $\psi'_n(z)$, производных $\psi_n(z)$, т.е. ${\psi_n}'(\alpha_{n,m}) = 0$. Соответствующие $\nu^2_{n,m}$ собственные функции g_κ имеют вид:

$$g_\kappa(r, \theta, \varphi) = c_\kappa \psi_n(\alpha_{n,m} r/R) Y^k_n(\theta, \varphi), \tag{3.3}$$

где $\kappa = (n, m, k)$ — мультииндекс, c_κ — произвольные действительные постоянные, $Y^k_n(\theta, \varphi)$ — действительные сферические функции, $n \geq 0$, $|k| \leq n$, $m \in N$.

Функции $g_\kappa(x)$ принадлежат классу $C^\infty(\overline{B})$ и при различных κ ортогональны в $L_2(B)$. Система функций $\{g_\kappa\}$ полна в $L_2(B)$ [10]. Нормируя их, получим ортонормированный в $L_2(B)$ базис.

3.3. Решение спектральной задачи 2 для ∇div в шаре

Согласно лемме 1 вектор-функции $\mathbf{q}_\kappa(x) = \nabla g_\kappa(x)$ являются решениями задачи 3 при $\nu_{n,m} = \alpha^2_{n,m} R^{-2}$ в $\mathbf{L}_2(B)$. Их компоненты $(q_r, q_\theta, q_\varphi)$ имеют вид

$$\begin{aligned} q_{r,\kappa}(r, \theta, \varphi) &= c_\kappa (\alpha_{n,m}/R) \psi'_n(\alpha_{n,m} r/R) Y^k_n(\theta, \varphi), \\ (q_\varphi + i q_\theta)_\kappa &= c_\kappa (1/r) \psi_n(\alpha_{n,m} r/R) \mathrm{H} Y^k_n(\theta, \varphi). \end{aligned} \tag{3.4}$$

При $\kappa = (0, m, 0)$ функция $Y^0_0(\theta, \varphi) = 1$, $\mathrm{H}Y^0_0 = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} &q_{r,(0,m,0)}(r) = c_{(0,m,0)} (\alpha_{0,m}/R) \psi'_0(\alpha_{0,m} r/R), \\ &(q_\varphi + i q_\theta)_{(0,m,0)} = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Из этих формул легко выписать величины нормирующих множителей c_κ, при которых $\|\mathbf{q}_\kappa(x)\| = 1$.

Отметим, что $\mathbf{q}_\kappa$ и $\mathbf{q}_{\kappa'}$ ортогональны при $\kappa' \neq \kappa$.

Действительно, используя формулу Гаусса-Остроградского легко убедиться, что

$$\int\limits_B \mathbf{q}_{\kappa'} \cdot \mathbf{q}_\kappa dx = \frac{\alpha_{n,m}^2}{R^2} \int\limits_B g_{\kappa'} g_\kappa dx. \tag{3.6}$$

Но функции $g_\kappa(x)$ и $g_{\kappa'}(x)$, согласно (3.3), взаимно ортогональны в $\mathrm{L}_2(B)$ при $\kappa' \neq \kappa$. Значит, последний интеграл в (3.6) равен нулю и вектор - функции $\mathbf{q}_\kappa$ и $\mathbf{q}_{\kappa'}$ взаимно ортогональны в $\mathbf{L}_2(B)$; при этом $\|\mathbf{q}_\kappa(x)\| = (\alpha_{n,m}/R)\,\|g_\kappa(x)\|$.

3.4. Сходимость ряда Фурье по собственным функциям оператора Лапласа-Неймана в норме пространства Соболева

В § 2.5 главы 4 книги В.П.Михайлова [10] для областей G с границей $\Gamma \in \mathcal{C}^s$ определены подпространства $H^s_{\mathcal{N}}(G)$ в $H^s(G)$:

$$H^s_{\mathcal{N}}(G) = \{f \in H^s(B) : \gamma(\mathbf{n}\cdot\nabla)\, f = 0, \ldots, \gamma(\mathbf{n}\cdot\nabla)\triangle^\sigma f = 0\}, \tag{3.7}$$

где σ равна целой части $[s/2-1]$ числа $s/2-1$, $s \geq 2$, и $H^0_{\mathcal{N}}(G) = L_2(G)$, $H^1_{\mathcal{N}}(G) = H^1(G)$ по определению. Доказано, что принадлежность f пространству $H^s_{\mathcal{N}}(G)$ необходима и достаточна для сходимости ее ряда Фурье по системе собственных функций g_κ оператора Лапласа-Неймана в $H^s(G)$(см. теоремы 8 и 9 § 2.5 гл. 4).

3.5. Полнота системы собственных вектор-функций оператора градиент дивергенции в пространстве $\mathcal{A}_\gamma$

Действительно, каждый элемент $\mathbf{q}_\kappa(x) = \nabla\, g_\kappa$ принадлежит пространству $\mathcal{A}_\gamma$, так как $g_\kappa \in H^1(B)$ и $\gamma\mathbf{n}\cdot\nabla g_\kappa = 0$. С другой стороны, функция h из $H^1(B)$ разлагается в сходящийся в среднем ряд

$$h = \sum_\kappa (h, \widehat{g}_\kappa)\widehat{g}_\kappa, \quad \widehat{g}_\kappa = (\alpha_{n,m}/R) g_\kappa, \quad (\widehat{g}_\kappa, \widehat{g}_{\kappa'}) = \delta_{\kappa,\kappa'}. \tag{3.8}$$

Следовательно,

$$\nabla h = \sum_\kappa (h, \widehat{g}_\kappa)\nabla\widehat{g}_\kappa = \sum_\kappa (h, \widehat{g}_\kappa)\mathbf{q}_\kappa. \tag{3.9}$$

3.6. Сходимость ряда Фурье оператора ∇DIV в норме пространства $\mathbf{H}^{2k}(G)$

Напомним, что скалярное произведение в $\mathbf{H}^k(G)$ С.Л.Соболев определяет так:

$$(\mathbf{f},\mathbf{g})_k = (\mathbf{f},\mathbf{g}) + \int_G \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!}\partial^\alpha\mathbf{f}\cdot\partial^\alpha\mathbf{g}\, d\,\mathbf{x}, \quad k \geq 1. \tag{3.10}$$

В п.2.5 мы определили пространства

$$\mathbf{A}_\gamma^{2k}(G) = \{\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma(G), \dots, (\nabla \mathrm{div})^k \, \mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma(G)\} \quad \text{при} \quad k \geq 1. \tag{3.11}$$

Согласно оценкам (2.9) $\mathbf{A}_\gamma^{2k} \subset \mathbf{H}^{2k}(G)$. Имеет место

Теорема 3. *Для того, чтобы $\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma$ разлагалась в ряд Фурье*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_j(\mathbf{x}) \tag{3.12}$$

по системе собственных вектор-функций $\mathbf{q}_j(\mathbf{x})$ оператора градиента дивергенции в G, сходящийся в норме пространства Соболева $\mathbf{H}^{2k}(G)$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{f}$ принадлежала $\mathbf{A}_\gamma^{2k}(G)$.

Если $\mathbf{f} \in \mathbf{A}_\gamma^{2k}(G)$, то сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{2k} \, |(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)|^2 \tag{3.13}$$

и существует такая постоянная $C > 0$, не зависящая от $\mathbf{f}$, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{2k} \, |(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)|^2 \leq C \|\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{H}^{2k}(G)}. \tag{3.14}$$

Кроме того, если $k > 1$, то любая вектор-функция $\mathbf{f}$ из $\mathbf{A}_\gamma^{2k}(G)$ разлагается в ряд Фурье, сходящийся в пространстве $\mathbf{C}^{2k-2}(\overline{G})$.

Действительно, по определению область G имеет границу $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty$. Следовательно, собственные функции $\mathbf{q}_j(\mathbf{x})$ оператора градиент дивергенции $: -\nabla \mathrm{div}\, \mathbf{q}_j(\mathbf{x}) = \mu_j \, \mathbf{q}_j(\mathbf{x})$ в G $\gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_j(\mathbf{x}) = 0$, принадлежат классу $\mathcal{C}^\infty(\overline{G})$. Значит, они и их конечные линейные комбинации принадлежат любому из пространств $\mathbf{A}_\gamma^{2l}(G) \subset \mathbf{L}_2(G)$. Поэтому, если ряд Фурье (3.12) вектор-функции $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{2k}(G)$ сходится в норме $\mathbf{H}^{2k}(G)$, то $\mathbf{f}, \nabla \mathrm{div}\, \mathbf{f}, \dots, (\nabla \mathrm{div})^k \, \mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma \subset \mathbf{L}_2(G)$ и, значит, $\mathbf{f} \in \mathbf{A}_\gamma^{2k}(G)$. Необходимость доказана.

Пусть $\mathbf{f} \in \mathbf{A}_\gamma^{2k}(G)$. Установим справедливость неравенства (3.14).

Согласно формуле Грина (2.12)

$$-(\nabla \mathrm{div}\, \mathbf{f}, \mathbf{q}_j) = -(\mathbf{f}, \nabla \mathrm{div}\, \mathbf{q}_j) = \mu_j (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j). \tag{3.15}$$

Обозначим через $\beta_{k,j}$ коэффициенты Фурье функции $(-\nabla \mathrm{div})^k \mathbf{f}$. Следовательно,

$$\beta_{k,j} = ((-\nabla \mathrm{div})^k \, \mathbf{f}, \mathbf{q}_j) = \mu_j ((-\nabla \mathrm{div})^{k-1} \, \mathbf{f}, \mathbf{q}_j) = \dots = \mu_j^k (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j). \tag{3.16}$$

Поскольку $(-\nabla \mathrm{div})^k \mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(G)$, то

$$\sum_{j=1}^{\infty} \beta_{k,j}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{2k} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)^2 = \|(-\nabla \mathrm{div})^k \mathbf{f}\|^2 \leq C \|\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{H}^{2k}(G)}; \tag{3.17}$$

Последнее неравенство вытекает из определения нормы в $\mathbf{H}^{2k}(G)$ Неравенство (3.14) доказано.

Докажем сходимость ряда (3.12) к $\mathbf{f}$ в $\mathbf{H}^{2k}(G)$. Пусть $\mathbf{S}_l(\mathbf{x})$ - частичная сумма ряда (3.12).

Как мы уже отмечали $\mathbf{S}_l(\mathbf{x}) \in \mathbf{A}^{2k}_\gamma(G)$ при всех $l > 0$. В частности, имеем $\mathrm{rot}\mathbf{S}_l(\mathbf{x}) = 0$ и $\gamma\mathbf{n} \cdot \nabla\mathrm{div}\mathbf{S}_l = 0$.

Поэтому оценка (2.9) при $s = 0$ принимает вид

$$C_1\|\mathbf{S}_l\|_{\mathbf{H}^2(G)} \leq \|\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{S}_l\|_{\mathbf{L}_2(G)} + \|\mathbf{S}_l\|_{\mathbf{L}_2(G)}. \tag{3.18}$$

Легко видеть, что $\|\mathbf{S}_l\|^2_{\mathbf{L}_2(G)} \leq c\|\nabla\mathrm{div}\mathbf{S}_l\|^2_{\mathbf{L}_2(G)}$, где $c = max_j\mu_j^{-2}$. Поэтому $\|\mathbf{S}_l\|^2_{\mathbf{H}^2(G)} \leq a_1\|\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{S}_l\|^2$.Следовательно, по индукции при $s = 2p > 2$

$$\|\mathbf{S}_l\|^2_{\mathbf{H}^s(B)} \leq a_p\|(\nabla\mathrm{div})^p\,\mathbf{S}_l\|^2. \tag{3.19}$$

Пусть $\mathbf{f} \in \mathbf{A}^{2k}_\gamma(G)$, где $k > 0$. Согласно неравенству (3.14), ряды в правой части (3.19) сходятся и если $l > m \geq 1$, то $\|\mathbf{S}_l - \mathbf{S}_m\|^2_{\mathbf{H}^s(B)} \leq$

$$a_p(\|(\nabla\mathrm{div})^p(\mathbf{S}_l - \mathbf{S}_m)\|^2 = a_p\sum_{m+1}^{l}\nu_\kappa^{2p}|\mathbf{f}, \mathbf{q}_\kappa)|^2 \to 0$$

при $l, m \to \infty$. Это означает, что ряд (3.12) сходится к $\mathbf{f}$ в $\mathbf{H}^{2k}(G)$.

Далее, при $s \geq 2$ в трехмерной области G имеется вложение пространств $\mathbf{H}^s(G) \subset \mathbf{C}^{s-2}(\overline{G})$ и оценка:

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{C}^{s-2}(\overline{G})} \leq C_s\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^s(G)} \tag{3.20}$$

для любой функции $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^s(G)$, в которой постоянная $C_s > 0$ не зависит от $\mathbf{f}$ (см., например, Теорему 3 § 6.2 в [10])). В частности,

$$\|\mathbf{S}_l - \mathbf{S}_m\|_{\mathbf{C}^{s-2}(\overline{G})} \leq C_s\|\mathbf{S}_l - \mathbf{S}_m\|_{\mathbf{H}^s(G)}. \tag{3.21}$$

Если $\|\mathbf{S}_l - \mathbf{S}_m\|_{\mathbf{H}^s(G)} \to 0$ при $l, m \to \infty$, то $\|\mathbf{S}_l - \mathbf{S}_m\|_{\mathbf{C}^{s-2}(\overline{G})} \to 0$. Это означает, что ряд (3.12) сходится к $\mathbf{f}$ в $\mathbf{C}^{s-2}(\overline{G})$. Теорема доказана.

Замечание. Итак, $\mathbf{A}^{2k}_\gamma(G)$–это пространство Соболева порядка $2k$ в подпространстве $\mathcal{A}_\gamma$. Оно определяется степенями оператора $\nabla\, div$. Соответственно, $\mathbf{W}^k(G) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0(G), \ldots, (\mathrm{rot})^k\,\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0(G)$–это пространство Соболева порядка k в подпространстве $\mathcal{B}$ в $\mathbf{L}_2(G)$ (см.п.1.1). Оно определяется степенями оператора rot.

Следствие. *Вектор-функция f из $\mathcal{A} \cap \mathbf{C}^\infty_0(G)$ разлагается в ряд Фурье* (3.12), *сходящийся в пространстве $\mathbf{C}^k(\overline{G})$ для любого $k > 0$.*

4. Решение краевой задачи в шаре

4.1.

Методом Фурье легко решается краевая задача.

Задача 4. Задана вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2(B)$. Найти вектор-функцию $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ в $\mathbf{H}^2(B)$ такую, что

$$\nabla\mathbf{div}\,\mathbf{v} + \lambda\mathbf{v} = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad B, \quad \gamma_{\mathbf{n}}\mathbf{v} = 0, \tag{4.1}$$

Определение. *Вектор-функция* $\mathbf{v}$ *из* $\mathbf{L}_2(B)$ *есть обобщенное решение задачи при* $\mathbf{f} \in \mathbf{F}^0_\gamma(B)$, *если она удовлетворяет тождеству*

$$(\mathbf{v}, (\nabla \operatorname{div} + \lambda)\mathbf{w}) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}) \quad \text{для} \quad \text{любой} \quad \mathbf{w} \in \mathbf{H}^2_0(B). \tag{4.2}$$

Отметим,что $\mathbf{F}^0_\gamma(B) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(B), \operatorname{rot}^2\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(B), \gamma_{\mathbf{n}}\mathbf{f} = 0\}$. Если $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}$ и $\lambda \neq 0$, то $\mathbf{v} = \lambda^{-1}\mathbf{f}_{\mathcal{B}}$ есть решение уравнения (4.2).

Далее, будем полагать, что $\mathbf{f} \neq \mathbf{f}_{\mathcal{B}}$.

4.2. Решение краевой задачи 4 при $\lambda \overline{\in} Sp\,(-\nabla\mathrm{div})$

Имеет место

Теорема 4. *Если* $\lambda \neq 0, \nu^2_{n,m}$ $(n \geq 0, m > 0)$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{F}^0_\gamma(B)$, *то единственное решение* $\mathbf{v}$ *задачи 4 есть сумма* $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ *рядов*

$$\mathbf{v}_1 = \sum_{\kappa, n \geq 0} \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{q}_\kappa)}{\lambda - \nu^2_{n,m}}\, \mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x}), \quad \kappa = (n, m, k), \tag{4.3}$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{f}_{\mathcal{B}}}{\lambda} \equiv \frac{1}{\lambda} \sum_{\kappa, n \geq 1} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}^+_\kappa)\, \mathbf{q}^+_\kappa + (\mathbf{f}, \mathbf{q}^-_\kappa)\, \mathbf{q}^-_\kappa(\mathbf{x})]. \tag{4.4}$$

Решение задачи принадлежит пространству Соболева $\mathbf{H}^2_\gamma(B)$.

Если $\mathbf{f} \in \mathcal{A} \subset \mathbf{L}_2(B)$, *то* $\mathbf{v}_2 = 0$, *а* $\mathbf{v}_1$ *принадлежит* $\mathbf{A}^2_\gamma \subset \mathbf{H}^2_\gamma$.

Если $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(B)$, *то ряды* (4.3) *и* (4.4) *Сходятся в любом из пространств* $\mathbf{H}^s(B)$, $s \geq 1$, *и их сумма есть решение задачи класса* $C^\infty(\overline{B})$.

Замечание. При суммировании рядов вначале складываются элементы, для которых $0 < \nu_{m,n} < N$ (соотв. $0 < \lambda_{m,n} < N$), а затем $N \to \infty$.

Из соотношений (4.2) имеем:

$$(\lambda - \nu^2_{n,m})\,(\mathbf{v}, \mathbf{q}_\kappa) = (\mathbf{f}, \mathbf{q}_\kappa), \quad \lambda\,(\mathbf{v}, \mathbf{q}^\pm_\kappa) = (\mathbf{f}, \mathbf{q}^\pm_\kappa). \tag{4.5}$$

Формулы (4.3) и (4.4) получают из равенств (4.5).

Ряды (4.3), (4.4) сходятся в $\mathbf{L}_2(B)$, так как $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(B)$ и числа $|\lambda - \nu^2_{n,m})|^{-1}$ стремятся к нулю, при $\nu_{n,m} \to \infty$.

Функция $\mathbf{v}_2 = \lambda^{-1}\mathbf{f}_{\mathcal{B}}$ есть решение уравнения

$$(\lambda^{-1}\mathbf{f}_{\mathcal{B}}, (\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{w} + \lambda\,\mathbf{w})) = (\mathbf{f}_{\mathcal{B}}, \mathbf{w}) = (\mathbf{f}_{\mathcal{B}}, \mathbf{w}_{\mathcal{B}}) \quad \forall\mathbf{w} \in \mathcal{D}(B).$$

При $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\mathcal{A}}$

$$\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{w} + \lambda\,\mathbf{w} = \sum_{\kappa, n \geq 0} (\mathbf{w}, \mathbf{q}_\kappa)(\lambda - \nu^2_{n,m})\, \mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x}),$$

$$(\mathbf{v}_1, (\nabla \mathrm{div}\, \mathbf{w} + \lambda\, \mathbf{w})) = \sum_{\kappa, n \geq 0} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_\kappa)(\mathbf{w}, \mathbf{q}_\kappa) = (\mathbf{f}_\mathcal{A}, \mathbf{w}_\mathcal{A}).$$

Следовательно, $((\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2), (\nabla \mathrm{div}\, \mathbf{w} + \lambda\, \mathbf{w})) = (\mathbf{f}, \mathbf{w})$. Существование обобщенного решения доказано.

Единственность решения задачи 4 вытекает из полноты семейства собственных функций ротора и градиента дивергенции в $\mathbf{L}_2(B)$.

Далее обосновываем сходимость рядов.

4.3. Свойство операторов задачи

Введем пространство $\mathbf{H}^2_{\gamma\delta\gamma}(B) = \{\mathbf{g} \in \mathbf{H}^2(B) : \gamma_\mathbf{n} \mathbf{g} = 0,\ \gamma_\mathbf{n} \nabla \mathrm{div}\, \mathbf{g} = 0\}$. Обозначим через $Q_\lambda\, \mathbf{f}$ ряд (4.3), а через $\lambda^{-1} \mathcal{P}_\mathcal{B}\, \mathbf{f}$ –ряд (4.4).

Спектр оператора $-\nabla \mathrm{div}$ не имеет конечных предельных точек, поэтому числа $|\lambda|^{-1},\ |\lambda - \nu^2_{n,m}|^{-1}$ ограничены при $\lambda \neq 0, \nu^2_{n,m}$ и

$$\|\lambda^{-1} \mathcal{P}_\mathcal{B}\, \mathbf{f}\| \leq |\lambda|^{-1} \|\mathbf{f}\|, \quad \|Q_\lambda\, \mathbf{f}\| \leq \Lambda \|\mathbf{f}\|, \tag{4.6}$$

причем постоянные $|\lambda|^{-1}$ и $\Lambda = \max_{n,m} |\lambda - \nu^2_{n,m}|^{-1}$ зависят только от расстояния точки λ до этих точек спектра.

Пусть $\mathbf{f} \in \mathbf{F}^0_\gamma(B)$, то-есть $\{\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(B), \mathrm{rot}^2 \mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(B), \gamma_\mathbf{n} \mathbf{f} = 0\}$. Так как $\mathbf{f} = \mathbf{f}_\mathcal{A} + \mathbf{f}_\mathcal{B}$, $\mathbf{v}_2 = \lambda^{-1} \mathbf{f}_\mathcal{B}$ и $\mathrm{rot}\, \mathbf{f}_\mathcal{A} = 0$, то $\mathbf{v}_2$ и $\mathrm{rot}^2\, \mathbf{v}_2 = \lambda^{-1} \mathrm{rot}^2\, \mathbf{f}$ принадлежат $L_2(B)$. Далее, $\mathrm{div} \mathbf{f}_\mathcal{B} = 0$ и $\gamma_\mathbf{n} \mathbf{f} = 0$, поэтому $\mathrm{div}\, \mathbf{v}_2 = 0$ в B и $\gamma_\mathbf{n}\, \mathbf{v}_2 = 0$. Согласно оценкам (4.6) и (2.9)(при $s = 0$):

$$\|\lambda^{-1} \mathcal{P}_\mathcal{B}\, \mathbf{f}\|_2 \leq (C_0 |\lambda|)^{-1} (\|\mathbf{f}\| + \|\mathrm{rot}^2\, \mathbf{f}\|). \tag{4.7}$$

Значит, $\lambda^{-1} \mathcal{P}_\mathcal{B}\, \mathbf{f} \in \mathcal{B} \cap \mathbf{H}^2_\gamma(B)$, которое содержится в $\mathbf{H}^2_{\gamma\delta\gamma}(B)$

Далее, ряд $\mathbf{v}_1(\mathbf{x}) = Q_\lambda\, \mathbf{f}$ принадлежит пространству $\mathcal{A}_\gamma(B)$

$$\nabla \mathrm{div}\, \mathbf{v}_1 = -\sum_{\kappa, n \geq 0} \frac{\nu^2_{n,m}}{\lambda - \nu^2_{n,m}} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_\kappa)\, \mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x}), \quad \kappa = (n, m, k), \tag{4.8}$$

$$\|\nabla \mathrm{div}\, \mathbf{v}_1\|^2 =\leq \Pi^2\, \|\mathbf{f}\|^2, \quad \Pi^2 = \max_{n,m} \frac{\nu^4_{n,m}}{|\lambda - \nu^2_{n,m}|^2} \tag{4.9}$$

Значит, $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{A}^2_\gamma(B)$. Из оценок (4.6) и (4.9) вытекает, что

$$\|Q_\lambda\, \mathbf{f}\|_2 \leq C_0^{-1} (\Lambda + \Pi) \|\mathbf{f}\|. \tag{4.10}$$

Значит, $Q_\lambda\, \mathbf{f} \in \mathbf{H}^2_{\gamma\delta\gamma}(B)$. Поэтому $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \lambda^{-1} \mathcal{P}_\mathcal{B}\, \mathbf{f} + Q_\lambda\, \mathbf{f}$, решение задачи 6, принадлежит пространству $\mathbf{H}^2_{\gamma\delta\gamma}(B)$ и выполняется оценка:

$$\|v\|_{\mathbf{H}^2_{\gamma\delta\gamma}(B)} \leq C_0^2 \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{F}^0_\gamma(B)}. \tag{4.11}$$

Обратно. Пусть $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^2_{\gamma\delta\gamma}(B) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^2,\, \gamma_{\mathbf{n}}\,\mathbf{v} = 0, \gamma_{\mathbf{n}}\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0\}$, тогда $\mathbf{f} = \nabla\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} + \lambda\mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(B)$, $\mathrm{rot}^2\mathbf{f} = \lambda\mathrm{rot}^2\mathbf{v} \in L_2(B)$ и $\gamma_{\mathbf{n}}\mathbf{f} = \gamma_{\mathbf{n}}\nabla\mathrm{div}\mathbf{v} + \lambda\gamma_{\mathbf{n}}\mathbf{v} = 0$. Значит, $\mathbf{f} \in \mathbf{F}^0_\gamma(B)$ и

$$\|f\|_{\mathbf{F}^0_\gamma(B)} \leq C^0_1\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^2_{\gamma\delta\gamma}(B)}. \tag{4.12}$$

Таким образом, доказана следующая

Лемма 2. *Если $\lambda \overline{\in} Sp\,(-\nabla\mathrm{div})$, то-есть если $\lambda \neq 0, \nu^2_{n,m}$, то оператор $\nabla\,div + \lambda I$ осуществляет взаимно однозначное и непрерывное отображение пространств $\mathbf{H}^2_{\gamma\delta\gamma}(B)$ и $\mathbf{F}^0_\gamma(B)$.*

Не трудно доказать более общее утверждение.

Лемма 3. *Если $\lambda \overline{\in} Sp\,(-\nabla\mathrm{div})$, то оператор $\nabla\,div + \lambda I$ осуществляет гомеоморфизм пространств $\mathbf{H}^{k+2}_{\gamma\delta\gamma}(B)$ и $\mathbf{F}^k_\gamma(B)$ при любом $k \geq 0$.*

4.4. Разрешимость краевой задачи 4 при $\lambda \in Sp\,(-\nabla\mathrm{div})$

Из соотношений (4.5) видим, что

при $\lambda = 0$ однородная задача имеет счетное линейно независимых решений $\mathbf{q}^\pm_\kappa(\mathbf{x})$, а неоднородная задача 5 разрешима тогда и только тогда, когда $(\mathbf{f}, \mathbf{q}^\pm_\kappa) = 0\ \forall\,\kappa$, то-есть $\mathbf{f}_{\mathcal{B}} = 0$ или $rot\,\mathbf{f} = 0$,

при $\lambda = \nu^2_{n,m}$ $(n, m$-фиксированы$)$ однородная задача имеет $2n{+}1$ линейно независимых решений $\mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x})$, где $\kappa = (n, m, k)$, $k = -n, \ldots, n$, а неоднородная задача 5 разрешима тогда и только тогда, когда $(\mathbf{f}, \mathbf{q}_\kappa) = 0$; значит, задача разрешима по Фредгольму.

4.5. Оператор $\mathcal{N}_d + \lambda\,I$ в пространстве $\mathcal{A}_\gamma$

Согласно п.2.8 оператор $\nabla\mathbf{div} + \lambda\,I$ и его расширение $\mathcal{N}_d + \lambda\,I$ в $\mathcal{A}_\gamma$ задаются рядом

$$(\mathcal{N}_d\,+\lambda)\,\mathbf{w} = \sum_{\kappa,n\geq 0}(\mathbf{w}, \mathbf{q}_\kappa)(\lambda - \nu^2_{n,m})\,\mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x}), \quad \mathbf{w} \in \mathcal{A}_\gamma,$$

если он сходится в $\mathbf{L}_2(B)$. Обратный оператор имеет вид:

$$(\mathcal{N}_d\,+\lambda)^{-1}\,\mathbf{v} = \sum_{\kappa,n\geq 0}\frac{(\mathbf{v}, \mathbf{q}_\kappa)}{(\lambda - \nu^2_{n,m})}\,\mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x}), \quad \mathbf{v} \in \mathcal{A}_\gamma,$$

если $\lambda \neq \nu^2_{n,m}$, где $\nu_{n,m} = (\alpha_{n,m})/R$, $n \geq 0$, $m \in N$, а числа $\alpha_{n,m} > 0$ суть нули функций $\psi'_n(z)$,- производных функций $\psi_n(z)$ (см. (1.5)).

При $\lambda = 0$ оператор $\mathcal{N}^{-1}_d$ определен и отображает пространство $\mathcal{A}_\gamma$ на $\mathbf{A}^2_\gamma = \{\mathbf{v} \in \mathcal{A}_\gamma : \nabla\mathbf{div}\mathbf{v} \in \mathcal{A}_\gamma\}$, причем $\mathbf{A}^2_\gamma \subset \mathbf{H}^2_\gamma(B)$.

Если $\lambda = \nu^2_{n,m}$ при фиксированных n и m, то однородное уравнение $(\mathcal{N}_d\,+\lambda)\,\mathbf{w} = 0$ имеет $2n{+}1$ линейно независимых решений $\mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x})$, где $\kappa = (n, m, k)$, $k = -n, \ldots, n$, которые являются собственными функциями оператора $-\nabla\mathbf{div}$ и вычислены явно в п.3.3. Неоднородное уравнение $(\mathcal{N}_d+\lambda)\,\mathbf{w}=\mathbf{v}$ разрешимо тогда и только тогда, когда $(\mathbf{v},\mathbf{q}_\kappa)=0$ при $\kappa=(n,m,k),\ k=-n,\dots,n$ (см. Теорема 2).

Значит оператор $\mathcal{N}_d+\lambda\,I:\mathcal{A}_\gamma\to\mathcal{A}_\gamma$ является фредгольмовым, а оператор $\mathcal{N}_d:\mathbf{A}^2_\gamma\to\mathcal{A}_\gamma$ – однозначно обратимым.

Определены степени оператора $-\mathcal{N}_d$, это ряды:

$$(-\mathcal{N}_d)^p\,\mathbf{v}=\sum_{\kappa,n\geq 0}\nu^{2p}_{n,m}\,(\mathbf{v},\mathbf{q}_\kappa)\,\mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x}),\quad p=2,3,\dots.$$

Согласно Теореме 3 они сходятся в $\mathbf{L}_2(B)$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{v}\in\mathbf{A}^{2p}_\gamma(B)=\{\mathbf{f}\in\mathcal{A}_\gamma,\dots,(-\nabla\mathrm{div})^p\mathbf{f}\in\mathcal{A}_\gamma\}\subset\mathbf{H}^{2p}_\gamma(B).$$

Степени обратного оператора:

$$(-\mathcal{N}_d)^{-p}\,\mathbf{w}=\sum_{\kappa,n\geq 0}\frac{(\mathbf{w},\mathbf{q}_\kappa)}{\nu^{2p}_{n,m}}\,\mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x}),\quad p=1,2,3,\dots,$$

отображают пространство $\mathcal{A}_\gamma(B)$ на пространства $\mathbf{A}^{2p}_\gamma(B)$, так как

$$(-\mathcal{N}_d)^p\,(-\mathcal{N}_d)^{-p}\,\mathbf{w}_A=\lim_{n\to\infty}\sum_{\kappa,n}(\mathbf{w}^n_A,\mathbf{q}_\kappa)\,\mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x})=\mathbf{w}_A,\quad \mathbf{w}\in\mathcal{A}_\gamma(B),$$

и ряд сходится. Значит, $\mathbf{w}_A=\mathbf{w}$.

Таким образом, $\mathbf{A}^{2p}_\gamma(B)$–это пространства Соболева четного порядка $2p$ в подпросранстве $\mathcal{A}$ в $\mathbf{L}_2(B)$. Чтобы определить эти пространства для нечетного порядка p введем операторы $(-\mathcal{N}_d)^{\pm 1/2}$ по формулам

$$(-\mathcal{N}_d)^{\pm 1/2}\,\mathbf{v}=\sum_{\kappa,n\geq 0}(\nu_{n,m})^{\pm 1}\,(\mathbf{v},\mathbf{q}_\kappa)\,\mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x}),\quad \mathbf{v}\in\mathbf{H}^1_\gamma(B).$$

Тогда $\mathbf{A}^1_\gamma(B)=\{\mathbf{g}\in\mathcal{A}_\gamma,(-\nabla\mathrm{div})^{1/2}\mathbf{g}\in\mathcal{A}_\gamma\}$ это пространство Соболева порядка 1 в $\mathcal{A}_\gamma$, $\mathcal{A}^1_0(B)$ — замыкание множества $\mathcal{C}^\infty_0(B)$ в норме $\mathbf{A}^1_\gamma$, а $\mathbf{A}^{-1}(B)$–пространство, двойственное $\mathcal{A}^1_0(B)$.

Детальнее мы рассмотрим эти вопросы в другой работе.

Благодарности. Автор глубоко признателен профессору, доктору физ.-мат. наук М. Д. Рамазанову и доценту, кандидату физ.-мат. наук Р. Н. Гарифуллину за помощь и поддержку.

Список цитируемых источников

1. *Агранович, М. С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. М.: МЦНМО, 2013. 365 с.

2. *Быховский, Э. Б., Смирнов, Н. В.* Об ортогональном разложении пространства $\mathbf{L}_2(\Omega)$ и операторах векторного анализа. Труды МИАН им. В. А. Стеклова, LIX. Матем. вопросы гидродинамики и магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости. М.-Л.: Изд. АН СССР, 1960, с. 5-36.

   Bykhovski, E.B., Smirnov, N.V. About orthogonal decomposition of Spaces $\mathbf{L}_2(\Omega)$ and operators of the vector analysis. Trudy MIAN, LIX. Moscow- Leningrad: Izd. AN SSSR, 5-36 (1960). (in Russian)

3. *Вайнберг Б. Р., Грушин, В. В.* О равномерно неэллиптических задачах I. Матем. сборник 72(114), №4, 602-636 (1967).

   Vainberg, B. R., Grushin, V. V. Uniformly nonelliptic problems I. Math. USSR-Sb. 2(1), 111-133 (1967).

4. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.

   Vladimirov, V. S. Equations of Mathematical Physics. New York: Marcel Dekker, 1971.

5. *Дюво, Г., Лионс, Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.

6. *Зорич, В. А.* Математический анализ. Часть II. М.: Наука, 1984. 640 с.

7. *Козлов, В. В.* Общая теория вихрей. Ижевск: Изд. дом «Удмурдский университет», 1998. 240 с.

   Kozlov, V. V.General Vortex Theory. Izhevsk: Udmurd.Univ., 1998. (in Russian)

8. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, ч. II. М.: Гостехиздат, 1948.

9. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.

   Ladyzhenskaya, O A. Mathematical Theory of Viscous Incompressible flow. New York: Gordon and Breach, 1969.

10. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1975. 392с.

    Mikhailov, V.P. Partial Differential Equations. Moscow: Mir, 1978.

11. *Сакс, Р. С.* Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений. Новосибирск: НГУ, 1975. 164 с.

    Saks, R. S. Boundary Value Problems for Elliptic Systems of Differential Equations. Novosibirsk: Gos. Univ., 1975. (in Russian)

12. *Сакс, Р. С.* О свойствах обобщенно эллиптических псевдодифференциальных операторов на замкнутых многообразиях. Записки научн. семинаров ПОМИ 243, 215-269 (1997).

13. *Сакс, Р. С.* Решение спектральной задачи для оператора ротор и оператора Стокса с периодическими краевыми условиям. Записки научн. семинаров ПОМИ 318, 246-276 (2004).

14. *Сакс, Р. С.* Глобальные решения уравнений Навье-Стокса в равномерно вращающемся пространстве. Теоретическая и математическая физика 162, no.2, 196-215 (2010).

Saks, R. S. Global solutions of the Navier-Stokes equations in uniformly rotating space. Theor. Math. Phys. 162, No.2, 163-178 (2010).

15. *Сакс, Р. С., Хайбуллин, А. Г.* Об одном методе численного решения задачи Коши для уравнений Навье-Стокса и рядах Фурье оператора ротор. Доклады РАН 429, №1, 22-27 (2009).

16. *Сакс, Р. С.* Задача Коши для уравнений Навье-Стокса, метод Фурье. Уфимский математический журнал 3, №1, 53-79 (2011).

Saks, R. S. Cauchy Problem for the Navier-Stokes equations, Fourier method. Ufimskiy Matem. Zh. 3, №1, 53-79 (2011).

17. *Сакс, Р. С.* Спектральные задачи для операторов ротора и Стокса. Доклады РАН 416, № 4, 446-450 (2007).

18. *Сакс, Р. С.* Решение спектральных задач для операторов ротора и Стокса. Уфимский математический журнал 5, №2, 63-81 (2013).

Saks, R. S. Solving of Spectal Problems for the curl and Stokes operators. Ufim. Matem. Zh. 5, No.2, 63-81 (2013). (in Russian)

19. *Сакс, Р. С.* Ортогональные подпространства пространства $\mathbf{L}_2(G)$ и самосопряженные расширения операторов ротора и градиента дивергенции. Доклады РАН 462, №3, 278-282 (2015).

20. *Сакс, Р. С.* Оператор градиент дивергенции в $\mathbf{L_2(G)}$. Доклады РАН 462, №5, 61-65 (2015).

21. *Сакс, Р. С.* Оператор ротор в пространстве $L_2(G)$. Таврический вестник информатики и математики №1, 87-103 (2015).

22. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 810 с.

Sobolev S.L. Cubature Formulas and Modern Analysis: An Introduction. Monteux: Gordon and Breach, 1992.

23. *Соболев С.Л.* Об одной новой задаче математической физики. Известия АН СССР, серия математическая 18, 3-50 (1954).

Sobolev, S. L. About one new problem in mathematical physics. Izvestiya AN SSSR 18, 3-50 (1954). (in Russian)

24. *Солонников, В. А.* Переопределенные эллиптические задачи. Записки научных семинаров ЛОМИ 21, №5, 112-158 (1971).

Solonnikov, V. A. Overdeterminate elliptic problems Zapiski nauchnykh seminarov LOMI 21, no.5, 112-158 (1971).

25. *Темам, Р.* Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с.

Temam, R. I. Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis. Amsterdam: North-Holland, 1979.

26. *Borchers W., Sohr H.* The equations $div\, u = f$ and $rot\, v = g$ with zero boundary conditions. Hokkaido Math. J. 19, 67-87 (1990).

27. *Bourguignon, J. P., Brezis, H.* Remarks on the Euler equation. J. Funct. Anal. 15, 341-363 (1974).
28. *Cantarella, J., DeTurck, D., Gluck, H., Teitel, M.* The spectrum of the curl operator on spherically symmetric domains. Physics of plasmas 7, no.7, 2766-2775 (2000).
29. *Fridrichs, K.* Differential form on Riemannian manifolds. Comm. Pure Appl. Math. VIII, №2, (1955).
30. *Fursikov, A.* Local existence theorems with unboundet set of input data and unboundeness of stable invariant manifolds for 3D Navier-Stokes equations. AIMS' Journal 3, no.2, 269-289 (2010).
31. *Montgomery, D., Turner, L., Vahala, G.* Three-dimentional magnetohydrodyamic turbulence in cylindrical geometry. Phys. Fluids. 21, no.5, 757-764 (1978).
32. *Taylor, J. B.* Relaxation of toroidal plasma and generation of reverse magnetic fields. Phys. Rev. Letters. 33, 1139-1141 (1974).
33. *Weyl, H.* The method of orthogonal projection in potetial theory. Duke Math. 7, 411-444 (1941).
34. *Yoshida, Z. and Giga, Y.* Remark on spectra of operator rot. Math. Z. 204, 235-245 (1990).

Получена 14.11.2018

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ за 2018 г.

РЕФЕРАТЫ

УДК 517.938.5

М. БАРИНОВА, В. ГРИНЕС, О. ПОЧИНКА. **О построении трехмерного А-диффеоморфизма с динамикой “одномерный поверхностный аттрактор-репеллер”** (английский) // Динамические системы, 2018. — Том 8(36), №4. — С. 305–311.

В работе предлагается метод построения трехмерного А-диффеоморфизма, неблуждающее множество которого состоит из одномерного поверхностного аттрактора и репеллера. В отличие от известных примеров, построенный диффеоморфизм не является структурно устойчивым, однако предложенный метод дает довольно простой алгоритм построения новых типов 3-многообразий, допускающих динамику “гиперболический источник-сток”.

Ключевые слова: А-диффеоморфизм, поверхностные базисные множества

Ил. 3. Библиогр. 7 назв.

УДК 517.9

Д. С. КАЩЕНКО. **Синхронизация двух простейших автогенераторов с релейными запаздывающими обратными связями** (русский) // Динамические системы, 2018. — Том 8(36), №4. — С. 313–336.

Численными и аналитическими методами исследована динамика системы из двух связанных автогенераторов первого порядка с релейной запаздывающей обратной связью. В пространстве параметров выделены области “быстрой” и “долгой” синхронизации, исследован вопрос о синхронизации на неустойчивом цикле, при малых коэффициентах связи аналитическими методами показано, что динамика исходной системы определяется динамикой специального одномерного отображения.

Ключевые слова: устойчивость, динамика, релаксационные циклы, нерегулярные колебания.

Ил. 9. Библиогр. 14 назв.

УДК 517.98+517.955+532.5

В. И. ВОЙТИЦКИЙ. **К проблеме малых движений системы трёх сочленённых маятников с полостями, заполненными однородными несжимаемыми жидкостями** (русский) // Динамические системы, 2018. — Том 8(36), №4. — С. 337–356.

В работе представлена физическая и математическая постановка новой линейной начально-краевой задачи, моделирующей малые движения гидросистемы, состоящей из трёх сочленённых маятников с полостями, заполненными однородными несжимаемыми жидкостями. Задача состоит из трёх линеаризованных уравнений изменения кинетического момента (относительно точек подвеса маятников), линеаризованных уравнений Эйлера и Навье-Стокса для идеальных и вязких жидкостей соответственно, динамических и кинематических условий на границе раздела жидкостей, вспомогательных краевых условий и начальных условий. Доказан закон баланса полной энергии и описаны основные ожидаемые свойства решений.

Ключевые слова: физический маятник, уравнение изменения кинетического момента, однородная несжимаемая жидкость, граничное условие, формула Грина, закон баланса полной энергии.

Библиогр. 10 назв.

УДК 917.95

О. В. ЧЕРНОВА. **Фредгольмова разрешимость задачи линейного сопряжения для эллиптической системы первого порядка с комплексными коэффициентами** (русский) // Динамические системы, 2018. — Том 8(36), №4. — С. 357–371.

В открытом множестве комплексной плоскости, представляющем собой объединение конечной и бесконечной областей, для эллиптической системы первого порядка с постоянными комплексными старшими коэффициентами рассматривается задача линейного сопряжения. Посредством специальной обратимой линейной замены, задача сводится к задаче линейного сопряжения для эллиптической системы, записанной в каноническом виде. При этом краевое условие выражается через элементы вспомогательных матриц. Предполагая, что выполнены определенные условия на коэффициенты, правые части системы и правую часть краевого условия, используя интегральное представление решений этой системы и опираясь на результаты классической теории сингулярных операторов, установливается критерий фредгольмовой разрешимости этой задачи и формула индекса.

Ключевые слова: эллиптическая система, задача линейного сопряжения, фредгольмов оператор, индекс, весовое пространство Гельдера.

Библиогр. 12 назв.

УДК 517.925/926

В. Н. БЕЛЫХ, Д. А. ГРЕЧКО. **Сингулярно-гиперболический аттрактор отображения многомерного цилиндра** (русский) // Динамические системы, 2018. — Том 8(36), №4. — С. 373–383.

В работе рассматривается многомерное отображение с одной кусочно-гладкой периодической нелинейностью. Получены условия, при которых отображение имеет аттракторы, лежащие в полнотории. Даны критерии, определяющие колебательный и вращательный тип аттракторов. Доказана теорема, указывающая область параметров, при которых аттракторы как колебательные, так и вращательные, являются сингулярно-гиперболическими. При этих условиях динамическое поведение траекторий отображения представляет собой пример динамического хаоса.

Ключевые слова: динамика систем, нелинейное отображение, аттракторы, гиперболичность, бифуркации

Ил. 3. Библиогр. 16 назв.

УДК 517.984.50

Р. С. САКС. **Оператор градиент дивергенции и пространства Соболева** (русский) // Динамические системы, 2018. — Том 8(36), №4. — С. 385–407.

Краевая задача для оператора градиент дивергенции с младшим слагаемым $\lambda\mathbf{u}$ изучается в пространствах Соболева в ограниченной области G с гладкой границей. Особенность этого матричного оператора состоит в том, что при $\lambda \neq 0$ он приводим к эллиптическому оператору методом Б. Вайнберга и В. Грушина, а краевая задача удовлетворяет условиям эллиптичности В. Солонникова. Откуда вытекают свойства решений спектральной задачи оператора градиент дивергенции: а) его ненулевые собственные значения имеют конечную кратность, б) их (обобщенные) собственные функции бесконечно дифференцируемы вплоть до границы области.

Оператор градиент дивергенции имеет самосопряженное расширение $\mathcal{N}_d$ в подпространство $\mathcal{A}_\gamma$ в $\mathbf{L}_2(G)$, где он обратим. Его обратный оператор вполне непрерывен, а собственные векторы образуют полный ортогональный базис в $\mathcal{A}_\gamma$. Изучены свойства рядов Фурье градиента дивергенции и его расширения $\mathcal{N}_d$, действующего в $\mathcal{A}_\gamma$ и в его подпространствах $\mathbf{A}^{2k}_\gamma$, — пространствах Соболева в $\mathcal{A}_\gamma$. Определены пространства $\mathbf{A}^1_0$ и $\mathbf{A}^{-1}$.

Выделены шкалы пространств Соболева и доказано, что оператор $\nabla \mathrm{div} + \lambda I$ при почти всех λ отображает их взаимно однозначно и непрерывно. Приведены формулы базисных полей градиента дивергенции в шаре. Изложены аналогичные результаты для оператора ротор и его симметричного расширения S в $\mathcal{B}$.

Ключевые слова: пространства Лебега, пространства Соболева, дифференциальные операторы градиент, дивергенция и вихрь (ротор), эллиптические матрицы, краевые задачи, спектральные задачи, ряды Фурье.

Библиогр. 34 назв.

ABSTRACTS

MSC 2010: 37D15

M. BARINOVA, V. GRINES, O. POCHINKA. **On construction of axiom A 3-diffeomorphism with one-dimensional surface attractor-repeller dynamics** (English). Dinamicheskie Sistemy **8(36)**, no.4, 305–311 (2018).

We suggest a method of a construction of axiom A 3-dieomorphisms whose non-wandering set consists of exactly one-dimensional surface attractor and one-dimensional surface repeller. Unlike from examples constructed by Ch. Bonatti, N. Guilman and Sh. Yi, our diffeomorphisms are not structurally stable, however suggested method gives rather simple construction of new types of 3-manifolds, admitting "hyperbolic sink-hyperbolic source" dynamics.

Keywords: A-diffeomorphism, surface basic set

Fig. 3. Ref. 7.

MSC 2010: 47D99

D. S. KASCHENKO. **Synchronization of two simplest autogenerators with delay reling feedbacks** (Russian). Dinamicheskie Sistemy **8(36)**, no.4, 313–336 (2018).

The dynamics of a system of two coupled first-order autogenerators with a relay delay feedback is studied by numerical and analytical methods. In the parameter space, areas of "fast" and "long" synchronization are highlighted, the issue of synchronization on an unstable cycle is investigated, with small coupling coefficients using analytical methods, it is shown that the dynamics of the original system is determined by the dynamics of a special one-dimensional map.

Keywords: stability, dynamics, relaxation cycles, irregular oscillations.

Fig. 9. Ref. 14.

MSC 2010: 70E55, 35M33

V. I. VOYTITSKY. **To the Small Motion Problem of Three Joined Pendulums with Cavities Filled with Homogeneous Incompressible Fluids** (Russian). Dinamicheskie Sistemy **8(36)**, no.4, 337–356 (2018).

We provide physical and mathematical statement of new linear initial boundary value problem modeling small motion of hydromechanics system consists of three joined pendulums with cavities filled with homogeneous incompressible fluids. The problem consists of three linearized equations of angular momentum deviation (relative to the point of suspension), linearized Euler and Navier-Stokes equations for ideal and viscous fluids respectively, dynamical and kinetic boundary conditions on free boundary surfaces, auxiliary boundary conditions and initial conditions. We prove the law of full energy balance and describe general properties of solutions.

Keywords: physical pendulum, equation of angular momentum deviation, homogeneous incompressible fluid, boundary condition, Green's formula, law of full energy balance.

Ref. 10.

MSC 2010: 35J56

O. V. CHERNOVA. **Fredholm solvability of a linear conjugation problem for a first order elliptic system with complex coefficients** (Russian). Dinamicheskie Sistemy **8(36)**, no.4, 357–371 (2018).

The general first order elliptic system $L_A U(z) + a(z)U(z) + b(z)\overline{U(z)} = F(z)$ is considered in the domain D of complex plane C, where differential operator $L_A = \partial/\partial y - A \cdot \partial/\partial x$ is defined by a matrix A, the constant matrix $A \in \mathbb{C}^{l\times l}$ has no real eigenvalues, complex $l \times l$ matrix coefficients $a(z)$,$b(z)$ belong to $C(D)$, and $F(z)$ is a complex-valued l-vector-function. The solution of system is a l-vector-function $U = (U_1, \ldots, U_l) \in C^1(D)$. We show the reduction of the initial system to a canonical form with respect to another l-vector-function with triangular matrix with eigenvalues from upper half-plane. Let $D = D_1 \cup D_2$ be an open set where D_1 is a finite domain, and D_2 is an infinite domain. For an elliptic system the general linear conjugation problem is considered. We assume that $l \times l$-matrix coefficients of the problem belong to the Hölder class of the order ν, $0 < \nu < 1$. The class $C^{\mu}_{\delta}(\hat{D}, \infty)$, $-1 < \delta < 0$, consists of Hölder functions from $C^{\mu}(\overline{D}_1)$ and weighted Hölder functions from $C^{\mu}_{\delta}(\overline{D}_2, \infty)$, $-1 < \delta < 0$. Assuming certain conditions are met fulfilled, we seek the solution U in the class $C^{\mu}_{A,\delta}(\hat{D}, \infty)$. This class is defined by $U \in C^{\mu}_{\delta}(\hat{D}, \infty)$, $L_A U \in C^{\mu}_{\delta-1}(\hat{D}, \infty)$. The problem is reduced to a linear conjugation problem for an elliptic system with a triangular matrix. The boundary condition is expressed in terms of $l \times l$ matrix B and items of $2l \times 2l$ matrix G. Finally, using special representation for the function $\phi(z) \in C^{\mu}_{J,\delta}(\hat{D}, \infty)$ we obtain some system of one-dimensional and two-dimensional singular integral equations. The latter system is studied by classical methods.

Keywords: elliptic system, linear conjugation problem, Fredholm operator, index, Hölder weight space.

Ref. 12.

MSC 2010: 34D45

V. N. BELYKH, D. A. GRECHKO. **Singular hyperbolic attractor of a multidimensional cylinder map** (Russian). Dinamicheskie Sistemy **8(36)**, no.4, 373–383 (2018).

We consider a multidimensional map with a piecewise-smooth periodic nonlinear function of form $F\colon (x, y_i) \to (x+\delta-ag(x)+\sum @@_{i=1}^{n} y_i,\ \lambda_i(-b_i g(x)+y_i))$, $i = 1, \ldots, n$, where $x \in S^1, y \in R^n, g(x) = g(x+2\pi), a, \delta, \lambda_i, b_i$ are parameters, $|g'(x)| > h$. We divide nonwandering trajectories into oscillating and rotating type via the rotation number $r = \lim_{k\to\infty} \frac{x^*(k)}{2\pi k}$. We prove the existence of absorbing domain D containing the attractors of F. Namely, the next statement is true.

Theorem 1. Let $0 < \lambda_i < \lambda^* < 1$, $\ i = \overline{1,n}$. Then the solid torus $D = \{\|y\| < A, x \in S^1\}$ is the absorbing domain D, $FD \subset D$.

In order to specify the attractors of the map F we introduce two auxiliary 1D maps of the circle $F^{\pm} : x \to x + \delta - ag(x) \pm \gamma$, and prove the next

Theorem 2. 1. If both maps F^+ and F^- have only oscillating attractors then the map F has only oscillating attractor as well. 2. If both maps F^+ and F^- have only rotating attractor then the map F also has only rotating attractor.

We studied the hyperbolic properties of the map F attractors which imply that in each point of an attractor there exist unstable (stable) cone invariant under F (F^{-1} respectively) with local extension (contraction) property in it. For this purpose we consider the variation equation along attractor trajectories $(\xi,\ \eta_i) \to ((1 - ag')\xi + \sum @@_{i=1}^{n} \eta_i,\ \lambda_i(-bg'\xi + \eta_i)), i = \overline{1,n}$. Introducing the unstable cone $K^u = \{\xi, \eta_i \mid \eta_i = \alpha_i \xi, |\alpha_i| < \chi, i = \overline{1,n}\}$ we obtain a condition when the map $\xi \to \bar{\xi}$ inside the cone is extension. Then finding the condition for value $\chi = \chi^*$ defining the cone K^u we prove the main theorem.

Theorem 3. Each attractor (oscillating or rotating) of the map F is singularly hyperbolic in a parameter region $ah > 2 + \chi^* + \varepsilon$, $\ \varepsilon > 0$.

Finely we note that for this explicitly given region of parameters indipending on whether the attractor is oscillatory or rotatory the attractor is hyperbolic. The dynamical behavior of the attractor trajectories exhibits the example of rear dynamical chaos.

Keywords: dynamical systems, nonlinear maps, attractors, hyperbolicity, bifurcations.

Fig. 3. Ref. 16.

MSC 2010: 35F45, 35G45, 46E35, 46E40

R. S. SAKS. **Operator** ∇div **and Sobolev spaces** (Russian). Dinamicheskie Sistemy **8(36)**, no.4, 385–407 (2018).

Boundary value problem for a gradient of divergence operator with lower term $\lambda\mathbf{u}$ is studied in Sobolev spaces for a bounded domain G with smooth boundary. The peculiarity of this matrix operator is that for $\lambda \neq 0$ it is reducible to the elliptic operator (by B. Weinberg and V. Grushin method) and the boundary problem satisfy the V. Solonnikov ellipticity condition. The important properties solutions of spectral problems the operator gradient of divergence follow from this: a) each non-zero eigenvalue has a finite multiplicity, b) any (generalized) eigenfunction is infinitely differentiable up to the boundary of the domain.

The gradient of divergence has a self-adjoint expansion $\mathcal{N}_d$ in the subspace $\mathcal{A}_\gamma$ of $\mathbf{L}_2(G)$, where it is convertible. The inverse operator is compact and a system of its eigenvectors is a complete orthogonal basis of the space $\mathcal{A}_\gamma$. Properties of Fourier series for this operator have been investigated. Operator $\mathcal{N}_d$ acts in the space $\mathcal{A}_\gamma$ and in subspaces $\mathbf{A}^{2k}$ that are Sobolev spaces of order $2k$ in $\mathcal{A}_\gamma$.

The scales of Sobolev spaces are selected. It is proved that operator $\nabla\mathrm{div} + \lambda I$ maps them one to one and continuously at almost all λ. The formulas of basic fields of a gradient of divergence in a ball are presented.

Keywords: Lebesgue spaces, Sobolev spaces, gradient, divergence, rotor, elliptic matrix, boundary value problem, spectral problem, Fourier series.

Ref. 34.

Подписано в печать 25.12.2018. Формат 60x84/8.
Усл. печ. л. 13,02. Тираж 50 экз. Заказ № НП/250.
Подписной индекс объединенного каталога «Пресса России» 64971.
Цена 400 руб. Дата выхода в свет 14.03.2019.
Отпечатано в управлении редакционно-издательской деятельности
КФУ имени В. И. Вернадского
295051, г. Симферополь, б. Ленина, 5/7.