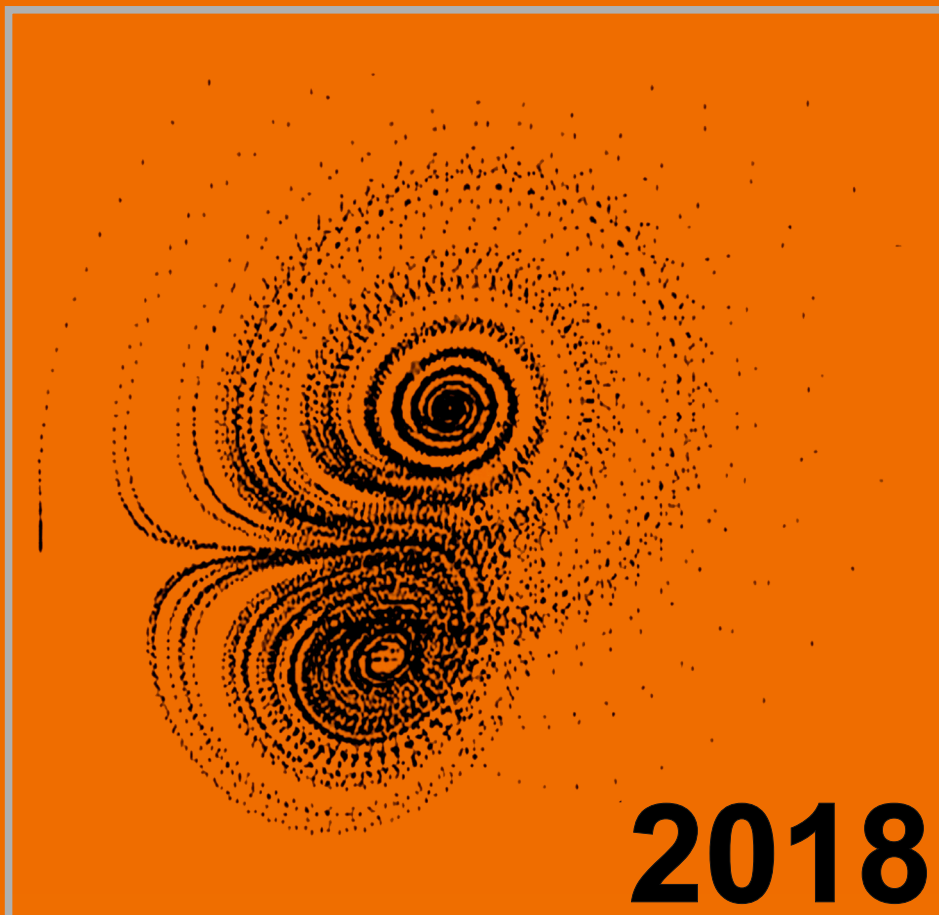


ISSN 0203-3755

# ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Том 8 (36), №3



УДК 517.925.5 + 517.929

# Предельные теоремы для одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом<sup>1</sup>

Г. В. Демиденко<sup>\*,\*\*</sup>, И. А. Уварова<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup>Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

<sup>\*\*</sup>Новосибирский государственный университет,  
Новосибирск 630090.

*E-mail: demidenk@math.nsc.ru, sibirochka@ngs.ru*

**Аннотация.** Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности, возникающая в биологических задачах при моделировании многостадийного синтеза вещества. При некоторых условиях на нелинейные члены получены оценки решений системы, характеризующие экспоненциальное убывание при  $t \rightarrow \infty$  независимо от размерности  $n$  и установлены связи между решениями системы дифференциальных уравнений и уравнений с запаздывающим аргументом. На основе этих результатов получаем метод для приближенного построения последней компоненты решения системы высокой размерности на всей полуоси  $(0, \infty)$ . Установлены глобальные оценки аппроксимации при  $n \gg 1$ .

**Ключевые слова:** система обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности, уравнение с запаздывающим аргументом, проблема большой размерности, глобальные оценки аппроксимации, предельные теоремы.

## Limit theorems for one system of ordinary differential equations of high dimension and delay differential equations

G. V. Demidenko, I. A. Uvarova

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,

Novosibirsk State University,

Novosibirsk 630090.

**Abstract.** We consider a system of ordinary differential equations of high dimension arising in biological problems when modeling multi-stage substance synthesis. Under some conditions on nonlinear terms we obtain estimates of solutions to the system characterizing the exponential decay as  $t \rightarrow \infty$  regardless of dimension  $n$  and establish connections between solutions to the system of differential equations and delay equations. Based on these results we obtain a method for approximate

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 17-41-543365, № 18-29-10086).

construction of the last component of the solution to the system of high dimension on the entire semi-axis  $(0, \infty)$ . Global estimates of approximation are established for  $n \gg 1$ .

**Keywords:** system of ordinary differential equations of high dimension, delay differential equation, problem of high dimension, global estimates of approximation, limit theorems.

**MSC 2010:** 34K05, 34A12, 34A34

## 1. Введение

В настоящей работе мы будем рассматривать задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности следующего вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A_n x + F(t, x), & t > 0, \\ x|_{t=0} = x^0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где

$$A_n = \begin{pmatrix} -\frac{n-1}{\tau} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{n-1}{\tau} & -\frac{n-1}{\tau} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{n-1}{\tau} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{n-1}{\tau} & -\theta \end{pmatrix}, \quad \theta > 0, \quad \tau > 0, \quad n \gg 1,$$

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T, \quad x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T,$$

$$F(t, x) = (g(t, x_n), 0, \dots, 0)^T.$$

Такие системы возникают при изучении некоторых биологических и химических процессов (см., например, [10, 3] и имеющуюся там литературу). В частности, их используют при моделировании многостадийного синтеза вещества [3, 9]. В этом случае число стадий  $n$  определяет число дифференциальных уравнений в (1.1),  $\tau$  — суммарное время протекания стадий из первого состояния в  $n$ -е. Компоненты  $x_i(t)$  искомой вектор-функции  $x(t)$  определяют концентрацию вещества на  $i$ -й стадии процесса. Первое нелинейное уравнение системы (1.1) определяет закон инициации синтеза вещества, последнее уравнение задает закон диссипации вещества, остальные уравнения характеризуют скорость изменения концентрации вещества на промежуточных стадиях (см. [3]).

Отметим, что процесс синтеза вещества может иметь сотни тысяч промежуточных стадий. Следовательно, при изучении модели (1.1) исследователь сталкивается с серьезными трудностями, поскольку ввиду нелинейности функции  $g(t, z)$  аналитическое решение системы практически невозможно, а в силу огромного

числа уравнений построение приближенного решения задачи Коши с помощью компьютера может представлять очень серьезную проблему.

Следует подчеркнуть, что в задаче синтеза вещества биологов прежде всего интересуют концентрация конечного продукта. Поэтому, рассматривая систему (1.1), нужно уметь достаточно точно вычислять последнюю компоненту решения  $x_n(t)$  при  $n \gg 1$ . Но из вида системы вытекает, что ни одним из ее уравнений пренебречь нельзя. Кроме того, эту систему нельзя рассматривать как “укороченную” некоторой счетной системы [15], так как коэффициенты системы (1.1) являются неограниченными при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно, при рассмотрении систем вида (1.1) с очень большим числом уравнений возникает “проблема большой размерности”.

Для системы (1.1) эта проблема была решена в 2002 году в результате совместной деятельности биологов и математиков. Метод ее решения основан на установленных связях между решениями системы (1.1) и решениями уравнения с запаздывающим аргументом. Предположение о возможных связях между последней компонентой решения системы (1.1) (при  $g(t, z) \equiv g(z)$ ,  $n \gg 1$ ) и решением уравнения

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(y(t - \tau)) \quad (1.2)$$

было высказано В. А. Лихошваем, исходя из биологических соображений. Численные расчеты, проведенные С. И. Фадеевым для конкретных систем, подтверждали это предположение. Строгое математическое доказательство существования таких связей на малом интервале  $(0, T)$  впервые было получено Г. В. Демиденко и опубликовано в совместной работе [9]. В частности, при нулевых данных  $x^0 = 0$  в [9] была доказана оценка

$$\max_{t \in [0, T]} |x_n(t) - y(t)| \leq \frac{c}{n^{1/4}}, \quad n \geq n_0, \quad (1.3)$$

где  $y(t)$  — решение уравнения (1.2), удовлетворяющее условиям

$$y(t) \equiv 0, \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad y(\tau + 0) = 0, \quad (1.4)$$

константа  $c > 0$  зависит от функции  $g(z)$ , величины  $T$  и параметров  $\tau, \theta$ .

Из вышесказанного вытекает, что, если число стадий  $n$  достаточно велико, то для приближенного нахождения концентрации конечного продукта  $x_n(t)$  достаточно найти решение  $y(t)$  начальной задачи (1.2), (1.4). А неравенство (1.3) будет характеризовать теоретическую оценку точности полученного результата. Конечно, в виду нелинейности при нахождении решения задачи (1.2), (1.4) нужно будет использовать приближенные методы, которые неизбежно повлекут дополнительные погрешности при вычислениях. Однако при использовании метода шагов (см., например, [14]), эти погрешности будут возникать при построении приближенных решений задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, и их не трудно оценить.

Как отмечено в [1]: “. . . с математической точки зрения гипотезу о наличии связей между компонентой  $x_n(t)$  решения системы (1.1) и решением уравнения

(1.2) можно было высказать, проводя параллель с исследованиями [17, 8, 16, 19]". Напомним, что в этих работах изучался *обратный* вопрос об аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с помощью решений специального класса систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности.

Результаты [9] о связях решений систем (1.1) при  $n \gg 1$  и уравнений с запаздывающим аргументом (1.2) были обобщены на некоторые классы систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности и установлены на произвольном конечном интервале  $(0, T)$  (см., например, [4, 13, 5, 12, 18, 6, 11, 2, 20, 7]). Однако при получении аналогичных результатов на всей полуоси  $(0, \infty)$  возникают принципиальные сложности, связанные с поведением решений на бесконечности при всех достаточно больших  $n \gg 1$ . В настоящей работе мы указываем условия на нелинейную функцию  $g(t, z)$ , при которых удастся доказать некоторые предельные теоремы (при  $n \rightarrow \infty$ ), из которых вытекают аналоги результатов [9] на всей полуоси  $(0, \infty)$ . Тем самым, как и на конечном интервале  $(0, T)$ , мы получаем метод для приближенного построения последней компоненты решения системы (1.1) высокой размерности на всей полуоси  $(0, \infty)$ , при этом устанавливаем глобальные оценки аппроксимации при  $n \gg 1$ .

В дальнейшем мы будем предполагать, что функция  $g(t, z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$  ограничена,  $g(t, 0) \equiv 0$  и удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу

$$|g(t, z)| \leq G < \infty, \quad |g(t, z^1) - g(t, z^2)| \leq L|z^1 - z^2|, \quad t \geq 0, \quad z^1, z^2 \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

## 2. Асимптотические свойства решения задачи Коши

В этом параграфе мы получим оценки решения задачи Коши (1.1) для любой размерности системы  $n > n_0$ . Из этих оценок будет вытекать экспоненциальное убывание решений системы при  $t \rightarrow \infty$  не зависимо от ее размерности.

Из условий на функцию  $g(t, z)$  следует, что задача Коши (1.1) однозначно разрешима, при этом решение существует на всей полуоси  $[0, \infty)$ . В дальнейшем, чтобы подчеркивать размерность системы  $n$ , для ее решения будем использовать обозначение

$$x^n(t) = (x_1^n(t), x_2^n(t), \dots, x_n^n(t))^T.$$

Выпишем некоторые интегральные соотношения для компонент решения  $x_j^n(t)$ , полученные в работе [6].

**Лемма 1.** *Для компонент решения задачи Коши (1.1) справедливы интегральные соотношения*

$$x_j^n(t) = \sum_{k=1}^j x_k^{n,0} e^{-\frac{n-1}{\tau}t} \frac{\left(\frac{n-1}{\tau}t\right)^{j-k}}{(j-k)!} + \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-s)} \frac{\left(\frac{n-1}{\tau}(t-s)\right)^{j-1}}{(j-1)!} g(s, x_n^n(s)) ds, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (2.1)$$

$$x_n^n(t) = \sum_{k=1}^n x_k^{n,0} \hat{\psi}_{n-k+1}^n(t) + \int_0^t \hat{\psi}_n^n(t-s)g(s, x_n^n(s))ds, \quad (2.2)$$

где  $x_k^{n,0}$  — компоненты начального вектора  $x^0$ ,

$$\hat{\psi}_1^n(t) = e^{-\theta t}, \quad (2.3)$$

$$\hat{\psi}_k^n(t) = \frac{e^{-\theta t}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{k-1}} \left(1 - e^{-\omega_n t} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\omega_n t)^j}{j!}\right), \quad k = 2, \dots, n, \quad (2.4)$$

$$\omega_n = \frac{n-1}{\tau} - \theta.$$

Для получения оценок решения задачи (1.1) нам понадобится следующее утверждение.

**Лемма 2.** *Найдется  $n_* = n_*(\theta, \tau) > \theta\tau + 1$  такое, что для всех  $n > n_*$  выполнены оценки*

$$0 < \hat{\psi}_k^n(t) < 2e^{-\theta(t-\tau)}, \quad k = 1, \dots, n, \quad t > 0. \quad (2.5)$$

**Доказательство.** Для  $\hat{\psi}_1^n(t) = e^{-\theta t}$  оценка (2.5) очевидна.

Пусть  $k \geq 2$ . Рассмотрим сначала выражение, стоящее в знаменателе функции  $\hat{\psi}_k^n(t)$

$$\beta_{n,k} = \left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{k-1}. \quad (2.6)$$

Вначале заметим, что при всех  $n > \theta\tau + 1$  выполняется неравенство

$$\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{k_1} > \left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{k_2}, \quad k_1 < k_2.$$

А поскольку

$$\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{n-1} \rightarrow e^{-\theta\tau}, \quad n \rightarrow \infty,$$

то найдется  $n_* = n_*(\theta, \tau) > \theta\tau + 1$  такое, что для всех  $n > n_*$  имеет место неравенство

$$\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{n-1} > e^{-\theta\tau}/2.$$

Таким образом для чисел (2.6) справедливо

$$\beta_{n,k} \geq \beta_{n,n} > e^{-\theta\tau}/2, \quad k = 2, \dots, n, \quad n > n_*. \quad (2.7)$$

Учитывая теперь, что при  $n > \theta\tau + 1$  выполнено

$$0 < e^{-\omega_n t} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\omega_n t)^j}{j!} \leq e^{-\omega_n t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\omega_n t)^j}{j!} \equiv 1, \quad t \geq 0,$$

отсюда получаем

$$0 \leq 1 - e^{-\omega_n t} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\omega_n t)^j}{j!} < 1, \quad t \geq 0. \quad (2.8)$$

Из оценок (2.7), (2.8) вытекает неравенство (2.5).

Лемма доказана.

Используя леммы 1 и 2, в следующей теореме мы получим оценки решения задачи Коши (1.1) для любой размерности системы.

**Теорема 1.** Пусть  $g(t, 0) \equiv 0$  и выполнены условия (1.5). Тогда при  $0 < L < \theta$  нулевое решение задачи Коши (1.1) асимптотически устойчиво и при всех достаточно больших  $n \gg 1$  имеют место следующие оценки

$$|x_j^n(t)| \leq c_j \left( \sum_{k=1}^n |x_k^{n,0}| \right) e^{-\delta t}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (2.9)$$

$$|x_n^n(t)| \leq c \left( \sum_{k=1}^n |x_k^{n,0}| \right) e^{-\delta t}, \quad t > 0, \quad (2.10)$$

где

$$\delta = \min \left\{ \frac{\theta - L}{2}, \frac{1}{\tau} \ln \frac{\theta + L}{2L} \right\}, \quad (2.11)$$

и константы  $c_j, c$  не зависят от  $n$ .

**Доказательство.** Рассмотрим соотношение (2.2). Умножим обе его части на  $e^{\delta t}$ , где параметр  $\delta \in (0, \theta)$  определим позже, и при  $n > n_*$  воспользуемся оценкой (2.5)

$$e^{\delta t} |x_n^n(t)| \leq 2e^{-(\theta-\delta)t+\theta\tau} \sum_{k=1}^n |x_k^{n,0}| + \int_0^t \left| \hat{\psi}_n^n(t-s) \right| e^{\delta t} |g(s, x_n^n(s))| ds.$$

Учитывая условие Липшица (1.5), получаем

$$|g(s, x_n^n(s))| = |g(s, x_n^n(s)) - g(s, 0)| \leq L |x_n^n(s)|.$$

Тогда справедлива оценка

$$e^{\delta t} |x_n^n(t)| \leq 2e^{-(\theta-\delta)t+\theta\tau} \sum_{k=1}^n |x_k^{n,0}| + L \int_0^t \left| \hat{\psi}_n^n(t-s) \right| e^{\delta(t-s)} e^{\delta s} |x_n^n(s)| ds.$$

Отсюда

$$e^{\delta t} |x_n^n(t)| \leq 2e^{-(\theta-\delta)t+\theta\tau} \sum_{k=1}^n |x_k^{n,0}| + L \max_{s \in [0, T]} \{e^{\delta s} |x_n^n(s)|\} \int_0^t \left| \hat{\psi}_n^n(s) \right| e^{\delta s} ds,$$

а также

$$\max_{s \in [0, T]} \{e^{\delta s} |x_n^n(s)|\} \leq 2e^{\theta\tau} \sum_{k=1}^n |x_k^{n,0}| + L \max_{s \in [0, T]} \{e^{\delta s} |x_n^n(s)|\} \int_0^T |\hat{\psi}_n^n(s)| e^{\delta s} ds.$$

Следовательно

$$\left(1 - L \int_0^T |\hat{\psi}_n^n(s)| e^{\delta s} ds\right) \max_{s \in [0, T]} \{e^{\delta s} |x_n^n(s)|\} \leq 2e^{\theta\tau} \sum_{k=1}^n |x_k^{n,0}|. \quad (2.12)$$

Напомним, что в работе [9] было доказано, что для любого  $\varepsilon > 0$  имеет место равномерная сходимость

$$\hat{\psi}_n^n(t) \rightarrow \begin{cases} 0, & t \in [0, \tau(1 - \varepsilon)], \\ e^{-\theta(t-\tau)}, & t \in [\tau(1 + \varepsilon), T], \end{cases} \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.13)$$

Тогда в силу теоремы Лебега при  $n \rightarrow \infty$  имеем

$$\int_0^T |\hat{\psi}_n^n(s)| e^{\delta s} ds \rightarrow \int_{\tau}^T e^{-\theta(s-\tau)} e^{\delta s} ds = \frac{e^{\delta\tau} - e^{-\theta(T-\tau)+\delta T}}{\theta - \delta} \leq \frac{e^{\delta\tau}}{\theta - \delta}. \quad (2.14)$$

Зафиксируем теперь параметр  $\delta \in (0, \theta)$  так, чтобы

$$1 - \frac{Le^{\delta\tau}}{\theta - \delta} > 0. \quad (2.15)$$

Ясно, что такие  $\delta$  существуют, поскольку по условию  $0 < L < \theta$ . Возьмем, например,  $\delta$  из (2.11). Очевидно,  $0 < \delta < \theta$ .

Учитывая теперь (2.14), (2.15), получаем, что найдется число  $N(\delta)$  такое, что для всех  $n \geq N(\delta)$  выполнено неравенство

$$1 - L \int_0^T |\hat{\psi}_n^n(s)| e^{\delta s} ds \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{Le^{\delta\tau}}{\theta - \delta}\right) > 0.$$

Тогда из (2.12) при  $n \geq N(\delta)$  следует

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{Le^{\delta\tau}}{\theta - \delta}\right) \max_{s \in [0, T]} \{e^{\delta s} |x_n^n(s)|\} \leq 2e^{\theta\tau} \sum_{k=1}^n |x_k^{n,0}|$$

или

$$\max_{s \in [0, T]} \{e^{\delta s} |x_n^n(s)|\} \leq 4e^{\theta\tau} \left(\frac{\theta - \delta}{\theta - \delta - Le^{\delta\tau}}\right) \left(\sum_{k=1}^n |x_k^{n,0}|\right).$$



А так как правая часть этого неравенства не зависит от  $T$ , то получаем

$$|x_n^n(t)| \leq 4e^{\theta\tau} \left( \frac{\theta - \delta}{\theta - \delta - Le^{\delta\tau}} \right) \left( \sum_{k=1}^n |x_k^{n,0}| \right) e^{-\delta t}, \quad t > 0. \quad (2.16)$$

Отсюда следует оценка (2.10) с константой

$$c = 4e^{\theta\tau} \left( \frac{\theta - \delta}{\theta - \delta - Le^{\delta\tau}} \right),$$

где  $\delta \in (0, \theta)$  определяется из неравенства (2.15).

Подчеркнем, что найденная константа  $c$  не зависит от  $n$ .

Из представления (2.1) для компонент решения задачи Коши  $x_j^n(t)$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , условия Липшица (1.5) и оценки (2.16) имеем

$$|x_j^n(t)| \leq \sum_{k=1}^j |x_k^{n,0}| e^{-\frac{n-1}{\tau}t} \frac{\left(\frac{n-1}{\tau}t\right)^{j-k}}{(j-k)!} + 4Le^{\theta\tau} \left( \frac{\theta - \delta}{\theta - \delta - Le^{\delta\tau}} \right) \left( \sum_{k=1}^n |x_k^{n,0}| \right) \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-s)} \frac{\left(\frac{n-1}{\tau}(t-s)\right)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\delta s} ds.$$

Вычисляя интеграл в правой части неравенства, нетрудно убедиться, что он совпадает с функцией  $\hat{\psi}_{j+1}^n(t)$  из (2.4), если в указанной формуле положить  $\theta = \delta$ . Оценки для этих функций были получены в работе [7] (лемма 3.3). Используя эти оценки (заменяя в них  $\theta$  на  $\delta$ ), для компонент  $x_j^n(t)$  получаем

$$|x_j^n(t)| \leq \sum_{k=1}^j |x_k^{n,0}| e^{-\frac{n-1}{\tau}t} \frac{\left(\frac{n-1}{\tau}t\right)^{j-k}}{(j-k)!} + 8Le^{\theta\tau+\delta\tau} \left( \frac{\theta - \delta}{\theta - \delta - Le^{\delta\tau}} \right) \left( \sum_{k=1}^n |x_k^{n,0}| \right) e^{-\delta t}.$$

Отсюда, очевидно, следует, что найдутся константы  $c_j > 0$  такие, что

$$|x_j^n(t)| \leq c_j \left( \sum_{k=1}^n |x_k^{n,0}| \right) e^{-\delta t}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad t > 0.$$

Из полученных оценок вытекает асимптотическая устойчивость нулевого решения задачи Коши (1.1).

Теорема доказана.

### 3. Свойства функций $\hat{\psi}_k^n(t)$

В этом параграфе мы приведем оценки для функций  $\hat{\psi}_k^n(t)$ , заданных в (2.4), их разностей  $(\hat{\psi}_{k_1}^{n_1}(t) - \hat{\psi}_{k_2}^{n_2}(t))$ , изучим сходимость последовательностей  $\{\hat{\psi}_k^n(t)\}$

при различных  $k = k(n)$  и укажем оценки скорости этой сходимости. Полученные оценки понадобятся нам при доказательстве предельных теорем.

Будем неограниченно увеличивать размерность системы в (1.1). Как уже отмечалось, при наших предположениях для любого  $n$  каждая из задач Коши (1.1) однозначно разрешима на всей полуоси  $\{t \geq 0\}$ , и ее решение обозначается

$$x^n(t) = (x_1^n(t), x_2^n(t), \dots, x_n^n(t))^T.$$

Верхний индекс указывает на число уравнений в системе, нижний — номер компоненты решения. В частности, рассматривая только последние компоненты решения каждой из задач (1.1), получаем последовательность функций  $\{x_n^n(t)\}$ .

Вначале напомним оценки на функции  $\hat{\psi}_k^n(t)$ , полученные в работе [7].

**Лемма 3.** Пусть  $n_1 > \theta\tau + 1$  такое, что

$$\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{n-1} > e^{-\theta\tau}/2, \quad n > n_1.$$

Тогда при всех  $n > n_1$  выполнены оценки

$$0 < \hat{\psi}_k^n(t) < 2e^{-\theta(t-\tau)}, \quad k = 1, \dots, n, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

$$\left\| \hat{\psi}_{k+1}^n(t) - \hat{\psi}_k^n(t), L_1(0, T) \right\| \leq \frac{4\tau e^{\theta\tau}}{n-1}, \quad T > \tau, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (3.2)$$

Теперь рассмотрим предельные свойства последовательностей  $\{\hat{\psi}_k^n(t)\}$  при различных  $k \leq n$ .

Вначале напомним, что для последовательности  $\{\hat{\psi}_n^n(t)\}$  при любых  $\varepsilon > 0$  и  $T > \tau$  имеет место равномерная сходимость (2.13). Этот факт был установлен Г. В. Демиденко в работе [9] и послужил основой для доказательства первых предельных теорем для систем дифференциальных уравнений высокой размерности (см. [9, 4]). Его обобщение было получено в [6] и содержится в следующих четырех леммах.

**Лемма 4.** Пусть  $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  фиксировано, тогда для любых  $T > \tau$  и сколь угодно малых  $\varepsilon > 0$  имеет место равномерная сходимость

$$\hat{\psi}_{n-i}^n(t) \rightarrow \begin{cases} 0, & t \in [0, \tau(1-\varepsilon)], \\ e^{-\theta(t-\tau)}, & t \in [\tau(1+\varepsilon), T], \end{cases} \quad n \rightarrow \infty.$$

**Лемма 5.** Пусть  $n = ml + 1$ . Тогда для любых  $T > \tau$  и сколь угодно малых  $\varepsilon > 0$  имеет место равномерная сходимость

$$\hat{\psi}_{l+1}^{ml+1}(t) \rightarrow \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{\tau}{m}(1-\varepsilon)], \\ e^{-\theta(t-\frac{\tau}{m})}, & t \in [\frac{\tau}{m}(1+\varepsilon), T], \end{cases} \quad l \rightarrow \infty.$$

**Лемма 6.** Пусть  $k \in \mathbb{N}$  фиксировано, тогда для любых  $T > \tau$  и сколь угодно малых  $\varepsilon > 0$  имеет место равномерная сходимость

$$\hat{\psi}_k^n(t) \rightarrow e^{-\theta t}, \quad t \in [\varepsilon, T], \quad n \rightarrow \infty.$$

**Лемма 7.** Пусть  $n = ml + 1$ ,  $s > 0$  и  $k$  — целые,  $1 \leq sl + k \leq ml + 1$ ,  $m$ ,  $s$ ,  $k$  — фиксированы. Тогда для любых  $\varepsilon > 0$ ,  $T > \tau$  имеет место равномерная сходимость

$$\hat{\psi}_{sl+k}^{ml+1}(t) \rightarrow \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{s\tau}{m}(1 - \varepsilon)], \\ e^{-\theta(t - \frac{s\tau}{m})}, & t \in [\frac{s\tau}{m}(1 + \varepsilon), T], \end{cases} \quad l \rightarrow \infty.$$

Отметим, что при доказательстве этих лемм существенно используется неравенство Стирлинга

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} < n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{4n}\right). \quad (3.3)$$

С его помощью удастся получить оценки скорости сходимости последовательностей  $\{\hat{\psi}_k^n(t)\}$ . В дальнейшем эти оценки нам будут полезны, поэтому приведем их в следующей лемме.

**Лемма 8.** Пусть  $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  фиксировано, тогда для любого сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  при

$$n > 2\theta\tau - i + 1 + 2\varepsilon^{-1}|i - \theta\tau|$$

и  $l \geq 1$  справедливы оценки

$$\left| \hat{\psi}_{n-i}^n(t) - \hat{\psi}_{n+l-i}^{n+l}(t) \right| \leq \frac{4e^{-\theta(t-\tau)}}{\varepsilon\sqrt{(n-i-1)}}, \quad t \in [0, \tau(1 - \varepsilon)], \quad (3.4)$$

$$\left| \hat{\psi}_{n-i}^n(t) - \hat{\psi}_{n+l-i}^{n+l}(t) \right| \leq 2e^{-\theta t} A_{n,i} + \frac{2e^{-\theta(t-\tau)}}{\varepsilon\sqrt{n-i-1}}, \quad t \in [\tau(1 + \varepsilon), T], \quad (3.5)$$

где

$$A_{n,i} = \left| \frac{1}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{n-i-1}} - e^{\theta\tau} \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

при этом

$$\left\| \hat{\psi}_{n-i}^n(t) - \hat{\psi}_{n+l-i}^{n+l}(t), L_1(0, T) \right\| \leq c_1\varepsilon + \frac{c_2}{\varepsilon(n-1)}, \quad (3.6)$$

где  $c_1, c_2 > 0$  — константы, не зависящие от  $T$ ,  $\varepsilon$  и  $n$ .

**Доказательство.** В силу (2.4) функции  $\hat{\psi}_k^n(t)$ ,  $k = 2, \dots, n$ , можно записать в виде

$$\hat{\psi}_k^n(t) = \frac{e^{-\theta t}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{k-1}} S_k^n(t), \quad (3.7)$$

где

$$S_k^n(t) = \left( 1 - e^{-\omega_n t} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\omega_n t)^j}{j!} \right), \quad \omega_n = \frac{n-1}{\tau} - \theta.$$

Заметим, что в силу определения  $0 \leq S_k^n(t) \leq 1$  при  $t \geq 0$  и  $n \geq \theta\tau + 1$ . В условиях леммы  $k = n - i$ .

Рассмотрим сначала выражение, стоящее в знаменателе в определении (2.4) функции  $\hat{\psi}_{n-i}^n(t)$

$$\beta_{n,n-i} = \left( 1 - \frac{\theta\tau}{n-1} \right)^{n-i-1} = \left( 1 - \frac{\theta\tau}{n-1} \right)^{n-1} \left( 1 - \frac{\theta\tau}{n-1} \right)^{-i}.$$

Очевидно,  $\beta_{n,n-i} \rightarrow e^{-\theta\tau}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Оценим  $S_{n-i}^n(t)$ . Очевидно,

$$\begin{aligned} S_{n-i}^n(t) &= 1 - e^{-\omega_n t} \sum_{j=0}^{n-i-2} \frac{(\omega_n t)^j}{j!} = e^{-\omega_n t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\omega_n t)^j}{j!} - e^{-\omega_n t} \sum_{j=0}^{n-i-2} \frac{(\omega_n t)^j}{j!} \\ &= e^{-\omega_n t} \sum_{j=n-i-1}^{\infty} \frac{(\omega_n t)^j}{j!} = e^{-\omega_n t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega_n t)^{(n-i-1+k)}}{(n-i-1+k)!}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

При  $n > \theta\tau + 1$  каждое слагаемое в (3.8) можно оценить следующим образом

$$\frac{(\omega_n t)^{(n-i-1+k)}}{(n-i-1+k)!} \leq \frac{(\omega_n t)^{(n-i-1+k)}}{(n-i-1)!(n-i-1)^k}.$$

Отсюда

$$S_{n-i}^n(t) \leq e^{-\omega_n t} \frac{(\omega_n t)^{(n-i-1)}}{(n-i-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega_n t)^k}{(n-i-1)^k}.$$

Для сходимости степенного ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega_n t)^k}{(n-i-1)^k}$  необходимо и достаточно, чтобы

выполнялось условие  $\frac{\omega_n t}{n-i-1} < 1$ . Это неравенство выполнено при больших  $n$  и

$0 \leq t < \tau$ . Действительно, условие  $\frac{\omega_n t}{n-i-1} < 1$  эквивалентно неравенству

$$t(n-1-\theta\tau) < \tau(n-i-1),$$

которое выполнено при  $n > \theta\tau + 1 + \frac{\tau}{\tau-t}(i-\theta\tau)$  и  $0 \leq t < \tau$ . Тогда

$$S_{n-i}^n(t) \leq e^{-\omega_n t} \frac{(\omega_n t)^{(n-i-1)}}{(n-i-1)!} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega_n t}{n-i-1}\right)}. \tag{3.9}$$

Используя неравенство Стирлинга (3.3), получаем, что при

$$n > \theta\tau + 1 + \frac{\tau}{\tau - t}(i - \theta\tau)$$

выполнена оценка

$$S_{n-i}^n(t) < \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-i-1)} \left(1 - \frac{\omega_n t}{n-i-1}\right)} \left(\frac{\omega_n t}{n-i-1} e^{1 - \frac{\omega_n t}{n-i-1}}\right)^{n-i-1}.$$

Отметим, что величина

$$\left(\frac{\omega_n t}{n-i-1} e^{1 - \frac{\omega_n t}{n-i-1}}\right)^{n-i-1}$$

ограничена, так как  $0 < x e^{1-x} \leq 1$  при  $x > 0$ . Кроме того, для всех  $t \in [0, \tau(1 - \varepsilon)]$  имеем

$$\left(1 - \frac{\omega_n t}{n-i-1}\right) > \varepsilon/2 \quad \text{при} \quad n > 2\theta\tau - i + 1 + 2\varepsilon^{-1}(i - \theta\tau).$$

Следовательно, при  $t \in [0, \tau(1 - \varepsilon)]$  и  $n > 2\theta\tau - i + 1 + 2\varepsilon^{-1}(i - \theta\tau)$  выполнено неравенство

$$S_{n-i}^n(t) < \frac{2}{\varepsilon \sqrt{2\pi(n-i-1)}}. \quad (3.10)$$

Учитывая теперь формулу (3.7), из неравенства (3.10) получаем (3.4).

Рассмотрим отрезок  $[\tau(1 + \varepsilon), T]$ . Имеем

$$0 < 1 - S_{n-i}^n(t) = e^{-\omega_n t} \sum_{j=0}^{n-i-2} \frac{(\omega_n t)^j}{j!} = e^{-\omega_n t} \sum_{j=0}^{n-i-2} \frac{(\omega_n t)^{n-i-2-j}}{(n-i-2-j)!}.$$

Каждое слагаемое в этом выражении можно оценить следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{(\omega_n t)^{n-i-2-j}}{(n-i-2-j)!} &= \frac{(\omega_n t)^{n-i-2-j} (n-i-2-j+1) \cdots (n-i-2)}{(n-i-2)!} \\ &\leq \frac{(\omega_n t)^{n-i-2-j} (n-i-1)^j}{(n-i-2)!}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} 1 - S_{n-i}^n(t) &\leq e^{-\omega_n t} \frac{(\omega_n t)^{n-i-2}}{(n-i-2)!} \sum_{j=0}^{n-i-2} \left(\frac{n-i-1}{\omega_n t}\right)^j \\ &\leq e^{-\omega_n t} \frac{(\omega_n t)^{n-i-2}}{(n-i-2)!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{n-i-1}{\omega_n t}\right)^j. \end{aligned}$$

Для сходимости степенного ряда  $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{n-i-1}{\omega_n t}\right)^j$  необходимо и достаточно, чтобы  $\frac{n-i-1}{\omega_n t} < 1$ . Это неравенство выполнено для больших  $n$  и  $\tau < t \leq T$ . Действительно, условие  $\frac{n-i-1}{\omega_n t} < 1$  эквивалентно неравенству  $\tau(n-i-1) < t(n-1-\theta\tau)$ , которое выполнено при  $n > \frac{\theta\tau t}{t-\tau} + 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} 0 < 1 - S_{n-i}^n(t) &\leq e^{-\omega_n t} \frac{(\omega_n t)^{n-i-2}}{(n-i-2)!} \frac{1}{\left(1 - \frac{n-i-1}{\omega_n t}\right)} \\ &= e^{-\omega_n t} \frac{(\omega_n t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \frac{1}{\left(\frac{\omega_n t}{n-i-1} - 1\right)}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Применяя неравенство Стирлинга (3.3), получаем, что при  $n > \frac{\theta\tau t}{t-\tau} + 1$  выполняется неравенство

$$0 < 1 - S_{n-i}^n(t) < \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-i-1)} \left(\frac{\omega_n t}{n-i-1} - 1\right)} \left(\frac{\omega_n t}{n-i-1} e^{1-\frac{\omega_n t}{n-i-1}}\right)^{n-i-1}.$$

Как отмечалось выше, справедлива оценка

$$\left(\frac{\omega_n t}{n-i-1} e^{1-\frac{\omega_n t}{n-i-1}}\right)^{n-i-1} \leq 1,$$

а для всех  $t \in [\tau(1+\varepsilon), T]$  имеет место неравенство

$$\frac{\omega_n t}{n-i-1} - 1 > \varepsilon/2 \quad \text{при} \quad n > 2\theta\tau - i + 1 + 2\varepsilon^{-1}(\theta\tau - i).$$

Таким образом, учитывая (3.11), получаем

$$0 < 1 - S_{n-i}^n(t) < \frac{2}{\varepsilon\sqrt{2\pi(n-i-1)}} \tag{3.12}$$

при  $t \in [\tau(1+\varepsilon), T]$  и  $n > 2\theta\tau - i + 1 + 2\varepsilon^{-1}(\theta\tau - i)$ .

Чтобы получить оценку (3.5), добавим и отнимем  $e^{-\theta(t-\tau)}$ . Тогда, очевидно, получим

$$\left|\hat{\psi}_{n-i}^n(t) - \hat{\psi}_{n+l-i}^{n+l}(t)\right| \leq \left|\hat{\psi}_{n-i}^n(t) - e^{-\theta(t-\tau)}\right| + \left|\hat{\psi}_{n+l-i}^{n+l}(t) - e^{-\theta(t-\tau)}\right| = I_1(t) + I_2(t).$$

Первое слагаемое  $I_1(t)$  допускает следующую оценку

$$I_1(t) \leq e^{-\theta t} \left( \left| \frac{1}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{n-i-1}} - e^{\theta\tau} \right| S_{n-i}^n(t) + e^{\theta\tau} (1 - S_{n-i}^n(t)) \right).$$

Тогда, учитывая оценку (3.12), на отрезке  $[\tau(1 + \varepsilon), T]$  имеем

$$I_1(t) = \left| \hat{\psi}_{n-i}^n(t) - e^{-\theta(t-\tau)} \right| \leq e^{-\theta t} A_{n,i} + \frac{e^{-\theta(t-\tau)}}{\varepsilon \sqrt{n-i-1}}.$$

Точно такая же оценка справедлива для второго слагаемого  $I_2(t)$ . Отсюда непосредственно вытекает (3.5).

Для доказательства оценки (3.6) воспользуемся неравенствами (3.4), (3.5), (3.9), (3.10) и леммой 3.

Для любого  $\varepsilon > 0$  имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \hat{\psi}_{n-i}^n(t) - \hat{\psi}_{n+l-i}^{n+l}(t), L_1(0, T) \right\| \leq \left\| \hat{\psi}_{n-i}^n(t) - \hat{\psi}_{n+l-i}^{n+l}(t), L_1(0, \tau(1 - \varepsilon)) \right\| \\ & \quad + \left\| \hat{\psi}_{n-i}^n(t) - \hat{\psi}_{n+l-i}^{n+l}(t), L_1(\tau(1 - \varepsilon), \tau(1 + \varepsilon)) \right\| \\ & \quad + \left\| \hat{\psi}_{n-i}^n(t) - \hat{\psi}_{n+l-i}^{n+l}(t), L_1(\tau(1 + \varepsilon), T) \right\| = N_1 + N_2 + N_3. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Для первого слагаемого  $N_1$ , очевидно,

$$N_1 \leq \left\| \hat{\psi}_{n-i}^n(t), L_1(0, \tau(1 - \varepsilon)) \right\| + \left\| \hat{\psi}_{n+l-i}^{n+l}(t), L_1(0, \tau(1 - \varepsilon)) \right\| = I_1 + I_2.$$

В силу определения (2.4) функций  $\hat{\psi}_k^n$  и оценки (3.9) имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \left\| \frac{e^{-\theta t}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{n-i-1}} S_{n-i}^n(t), L_1(0, \tau(1 - \varepsilon)) \right\| \\ &\leq \left\| 2\varepsilon^{-1} \frac{e^{-\theta t}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{n-i-1}} e^{-\omega_n t} \frac{(\omega_n t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}, L_1(0, \tau(1 - \varepsilon)) \right\|. \end{aligned}$$

Тогда, поскольку  $\omega_n = \frac{n-1}{\tau} - \theta$ , получаем

$$I_1 \leq 2\varepsilon^{-1} \left\| e^{-\frac{n-1}{\tau} t} \frac{\left(\frac{n-1}{\tau} t\right)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}, L_1(0, \tau(1 - \varepsilon)) \right\|.$$

Следовательно, учитывая формулу

$$\int_0^\infty e^{-at} \frac{(at)^{k-1}}{(k-1)!} dt = \frac{1}{a} \quad \text{при } a > 0, \quad (3.14)$$

будем иметь неравенство

$$I_1 \leq \frac{2\tau}{\varepsilon(n-1)}.$$

Для  $I_2$  справедлива точно такая же оценка. Таким образом, для первого слагаемого в (3.13) получаем

$$N_1 \leq I_1 + I_2 \leq \frac{4\tau}{\varepsilon(n-1)}. \quad (3.15)$$

Для второго слагаемого в (3.13) в силу леммы 3, очевидно, имеем

$$N_2 = \left\| \hat{\psi}_{n-i}^n(t) - \hat{\psi}_{n+l-i}^{n+l}(t), L_1(\tau(1-\varepsilon), \tau(1+\varepsilon)) \right\| \leq 8e^{\theta\tau}\tau\varepsilon. \quad (3.16)$$

Для третьего слагаемого в (3.13) для любого  $\varepsilon > 0$  имеем

$$N_3 \leq \left\| \hat{\psi}_{n-i}^n(t) - e^{-\theta(t-\tau)}, L_1(\tau(1+\varepsilon), T) \right\| + \left\| \hat{\psi}_{n+l-i}^{n+l}(t) - e^{-\theta(t-\tau)}, L_1(\tau(1+\varepsilon), T) \right\| = J_1 + J_2. \quad (3.17)$$

По аналогии с рассуждениями при выводе оценки (3.5) для первого слагаемого получаем

$$J_1 \leq A_{n,i} \|e^{-\theta t}, L_1(\tau(1+\varepsilon), T)\| + \left\| \frac{e^{-\theta t}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{n-i-1}} (1 - S_{n-i}^n(t)), L_1(\tau(1+\varepsilon), T) \right\|.$$

Из оценки (3.11) следует

$$0 < 1 - S_{n-i}^n(t) \leq 2\varepsilon^{-1} e^{-\omega_n t} \frac{(\omega_n t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!},$$

поэтому, используя формулу (3.14), для второго слагаемого в последнем неравенстве имеем

$$\left\| \frac{e^{-\theta t}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{n-i-1}} (1 - S_{n-i}^n(t)), L_1(\tau(1+\varepsilon), T) \right\| \leq 2\varepsilon^{-1} \left\| e^{-\frac{n-1}{\tau}t} \frac{\left(\frac{n-1}{\tau}t\right)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}, L_1(\tau(1+\varepsilon), T) \right\| \leq \frac{2\tau}{\varepsilon(n-1)}.$$

Таким образом

$$J_1 \leq A_{n,i} \|e^{-\theta t}, L_1(\tau, T)\| + \frac{2\tau}{\varepsilon(n-1)}.$$

Точно такая же оценка справедлива и для второго слагаемого  $J_2$  в (3.17). Следовательно,

$$N_3 \leq 2A_{n,i} \|e^{-\theta t}, L_1(\tau, T)\| + \frac{4\tau}{\varepsilon(n-1)}. \quad (3.18)$$

Учитывая оценки (3.15), (3.16), (3.18), из (3.13) получаем

$$\left\| \hat{\psi}_{n-i}^n(t) - \hat{\psi}_{n+l-i}^{n+l}(t), L_1(0, T) \right\| \leq 2A_{n,i} \|e^{-\theta t}, L_1(\tau, T)\| + \frac{8\tau}{\varepsilon(n-1)} + 8e^{\theta\tau}\tau\varepsilon.$$



Отсюда вытекает неравенство (3.6).

Лемма доказана.

**Замечание.** Из доказательства неравенства (3.6) следует, что константы  $c_1, c_2$  не зависят от  $T$ . Поэтому, переходя в (3.6) к пределу при  $T \rightarrow \infty$ , имеем оценку

$$\left\| \hat{\psi}_{n-i}^n(t) - \hat{\psi}_{n+l-i}^{n+l}(t), L_1(0, \infty) \right\| \leq c_1 \varepsilon + \frac{c_2}{\varepsilon(n-1)}. \quad (3.19)$$

**Лемма 9.** Пусть  $m \in N$  — фиксировано, тогда для любого сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  при  $l_1, l_2 \in N$  таких, что

$$ml_1 > 2\theta\tau(1 + \varepsilon^{-1}), \quad l_2 > l_1,$$

справедливы оценки

$$\left| \hat{\psi}_{l_1+1}^{ml_1+1}(t) - \hat{\psi}_{l_2+1}^{ml_2+1}(t) \right| \leq \frac{2e^{-\theta(t-\frac{\tau}{m})}}{\varepsilon\sqrt{l_1}}, \quad t \in \left[0, \frac{\tau}{m}(1-\varepsilon)\right], \quad (3.20)$$

$$\left| \hat{\psi}_{l_1+1}^{ml_1+1}(t) - \hat{\psi}_{l_2+1}^{ml_2+1}(t) \right| \leq 2e^{-\theta t} A_{l_1} + \frac{2e^{-\theta(t-\frac{\tau}{m})}}{\varepsilon\sqrt{l_1}}, \quad t \in \left[\frac{\tau}{m}(1+\varepsilon), T\right], \quad (3.21)$$

где

$$A_l = \left| \frac{1}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{ml}\right)^l} - e^{\theta\tau/m} \right| \rightarrow 0, \quad l \rightarrow \infty,$$

при этом

$$\left\| \hat{\psi}_{l_1+1}^{ml_1+1}(t) - \hat{\psi}_{l_2+1}^{ml_2+1}(t), L_1(0, T) \right\| \leq c_3 \varepsilon + \frac{c_4}{\varepsilon ml_1}, \quad (3.22)$$

для некоторых констант  $c_3, c_4 > 0$ , не зависящих от  $T, \varepsilon$  и  $n$ .

**Доказательство.** По определению (2.4) имеем

$$\hat{\psi}_{l+1}^{ml+1}(t) = \frac{e^{-\theta t}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{ml}\right)^l} S_{l+1}^{ml+1}(t),$$

где

$$S_{l+1}^{ml+1}(t) = \left( 1 - e^{-\omega_{ml+1}t} \sum_{j=0}^{l-1} \frac{(\omega_{ml+1}t)^j}{j!} \right), \quad \omega_{ml+1} = \frac{ml}{\tau} - \theta.$$

Отметим, что

$$\left( 1 - \frac{\theta\tau}{ml} \right)^l \rightarrow e^{-\frac{\theta\tau}{m}}, \quad l \rightarrow \infty.$$

Оценим  $S_{l+1}^{ml+1}(t)$  при  $t < \frac{\tau}{m}$ . Имеем

$$S_{l+1}^{ml+1}(t) = 1 - e^{-\omega_{ml+1}t} \sum_{j=0}^{l-1} \frac{(\omega_{ml+1}t)^j}{j!}$$

$$= e^{-\omega_{ml+1}t} \sum_{j=l}^{\infty} \frac{(\omega_{ml+1}t)^j}{j!} = e^{-\omega_{ml+1}t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega_{ml+1}t)^{l+k}}{(l+k)!}.$$

Очевидно, при  $ml > \theta\tau$  имеет место оценка

$$\frac{(\omega_{ml+1}t)^{l+k}}{(l+k)!} \leq \frac{(\omega_{ml+1}t)^{l+k}}{l!l^k}.$$

Тогда

$$S_{l+1}^{ml+1}(t) \leq e^{-\omega_{ml+1}t} \frac{(\omega_{ml+1}t)^l}{l!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\omega_{ml+1}t}{l}\right)^k.$$

При  $0 \leq t < \frac{\tau}{m}$  имеем  $l(\tau - mt) > 0 \geq -\theta\tau t$ . Поэтому  $l\tau > (ml - \theta\tau)t$ , т. е.  $1 > \frac{(ml/\tau - \theta)t}{l} = \frac{\omega_{ml+1}t}{l}$ . Отсюда получаем оценку

$$S_{l+1}^{ml+1}(t) < e^{-\omega_{ml+1}t} \frac{(\omega_{ml+1}t)^l}{l!} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega_{ml+1}t}{l}\right)}.$$

В силу неравенства Стирлинга (3.3) имеем

$$S_{l+1}^{ml+1}(t) < e^{-\omega_{ml+1}t} (\omega_{ml+1}t)^l \left(\frac{e}{l}\right)^l \frac{1}{\sqrt{2\pi l}} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega_{ml+1}t}{l}\right)}. \quad (3.23)$$

Отметим, что в силу неравенства  $(xe^{1-x}) \leq 1$  для всех  $t$  выполнено

$$e^{-\omega_{ml+1}t} (\omega_{ml+1}t)^l \left(\frac{e}{l}\right)^l \leq 1.$$

А поскольку при  $t \in [0, \frac{\tau}{m}(1 - \varepsilon)]$  имеем  $1 - \frac{\omega_{ml+1}t}{l} > \varepsilon$ , то оценка (3.20) вытекает из (3.23).

Доказательство оценки (3.21) проводится по схеме доказательства оценки (3.5).

Пусть  $t > \frac{\tau}{m}$  и  $l > \frac{t\theta\tau}{(mt - \tau)}$ . Оценим разность  $1 - S_{l+1}^{ml+1}(t)$ . Вначале заметим, что

$$\begin{aligned} 0 < 1 - S_{l+1}^{ml+1}(t) &= e^{-\omega_{ml+1}t} \sum_{j=0}^{l-1} \frac{(\omega_{ml+1}t)^j}{j!} < e^{-\omega_{ml+1}t} \sum_{j=0}^{l-1} \frac{(\omega_{ml+1}t)^j l^{l-1-j}}{j!(j+1) \dots (l-1)} \\ &= e^{-\omega_{ml+1}t} \frac{(\omega_{ml+1}t)^{l-1}}{(l-1)!} \sum_{j=0}^{l-1} \left(\frac{l}{\omega_{ml+1}t}\right)^{l-1-j}. \end{aligned}$$

Поскольку  $l$  выбрано так, что  $\frac{\omega_{ml+1}t}{l} > 1$ , то получаем

$$\sum_{j=0}^{l-1} \left(\frac{l}{\omega_{ml+1}t}\right)^{l-1-j} < \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{l}{\omega_{ml+1}t}\right)^j = \frac{1}{1 - \frac{l}{\omega_{ml+1}t}} < \infty.$$

Используя эту оценку, имеем

$$\begin{aligned} 0 < 1 - S_{l+1}^{ml+1}(t) &< e^{-\omega_{ml+1}t} \frac{(\omega_{ml+1}t)^{l-1}}{(l-1)!} \frac{1}{\left(1 - \frac{l}{\omega_{ml+1}t}\right)} \\ &= e^{-\omega_{ml+1}t} \frac{(\omega_{ml+1}t)^l}{l!} \frac{1}{\left(\frac{\omega_{ml+1}t}{l} - 1\right)}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Применяя неравенство Стирлинга (3.3), получаем

$$0 < 1 - S_{l+1}^{ml+1}(t) < \frac{1}{\sqrt{2\pi l} \left(\frac{\omega_{ml+1}t}{l} - 1\right)} e^{-\omega_{ml+1}t} (\omega_{ml+1}t)^l \left(\frac{e}{l}\right)^l.$$

Следовательно, из неравенства

$$\frac{\omega_{ml+1}t}{l} - 1 > \varepsilon/2 \quad \text{при} \quad ml > \frac{2\theta\tau(1+\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad t \in \left[\frac{\tau}{m}(1+\varepsilon), T\right]$$

получаем

$$0 < 1 - S_{l+1}^{ml+1}(t) < \frac{2}{\varepsilon\sqrt{2\pi l}}. \quad (3.25)$$

Для доказательства оценки (3.21) добавим и отнимем  $e^{-\theta(t-\tau/m)}$  и применим неравенство треугольника. Затем для каждого из слагаемых, очевидно, будем иметь неравенство следующего вида

$$\begin{aligned} &\left| \hat{\psi}_{l+1}^{ml+1}(t) - e^{-\theta(t-\tau/m)} \right| \\ &\leq e^{-\theta t} \left( \left| \frac{1}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{ml}\right)^l} - e^{\theta\tau/m} \right| S_{l+1}^{ml+1}(t) + e^{\theta\tau/m} (1 - S_{l+1}^{ml+1}(t)) \right), \end{aligned}$$

а используя оценку (3.25), получим

$$\left| \hat{\psi}_{l+1}^{ml+1}(t) - e^{-\theta(t-\tau/m)} \right| \leq e^{-\theta t} \left( \left| \frac{1}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{ml}\right)^l} - e^{\theta\tau/m} \right| + \frac{e^{\theta\tau/m}}{\varepsilon\sqrt{l}} \right).$$

Отсюда при  $l_2 > l_1$  вытекает неравенство (3.21).

Доказательство оценки (3.22) проводится по схеме доказательства оценки (3.6). Оценим сначала  $L_1$ -норму разности из (3.22) на каждом из интервалов  $(0, \tau/m(1-\varepsilon))$ ,  $(\tau/m(1-\varepsilon), \tau/m(1+\varepsilon))$ ,  $(\tau/m(1+\varepsilon), T)$ .

На первом интервале, очевидно,

$$\begin{aligned} \tilde{N}_1 &= \left\| \hat{\psi}_{l_1+1}^{ml_1+1}(t) - \hat{\psi}_{l_2+1}^{ml_2+1}(t), L_1(0, \tau/m(1-\varepsilon)) \right\| \\ &\leq \left\| \hat{\psi}_{l_1+1}^{ml_1+1}(t), L_1(0, \tau/m(1-\varepsilon)) \right\| + \left\| \hat{\psi}_{l_2+1}^{ml_2+1}(t), L_1(0, \tau/m(1-\varepsilon)) \right\|. \end{aligned}$$

Поэтому, как и при получении неравенства (3.15), имеем

$$\tilde{N}_1 \leq \frac{4\tau}{\varepsilon ml_1}, \quad l_2 > l_1.$$

На интервале  $(\tau/m(1 + \varepsilon), T)$  имеем

$$\begin{aligned} \tilde{N}_3 &= \left\| \hat{\psi}_{l_1+1}^{ml_1+1}(t) - \hat{\psi}_{l_2+1}^{ml_2+1}(t), L_1(\tau/m(1 + \varepsilon), T) \right\| \leq \\ &\leq \left\| \hat{\psi}_{l_1+1}^{ml_1+1}(t) - e^{-\theta(t-\tau/m)}, L_1(\tau/m(1 + \varepsilon), T) \right\| + \\ &+ \left\| \hat{\psi}_{l_2+1}^{ml_2+1}(t) - e^{-\theta(t-\tau/m)}, L_1(\tau/m(1 + \varepsilon), T) \right\| = J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Рассмотрим первое слагаемое  $J_1$ . Добавим и отнимем функцию  $e^{-\theta(t-\tau/m)} S_{l_1+1}^{ml_1+1}(t)$ . Из неравенства треугольника и (3.24) следует

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \left\| e^{-\theta t} \left( \left( 1 - \frac{\theta\tau}{ml_1} \right)^{-l_1} - e^{\theta\tau/m} \right) S_{l_1+1}^{ml_1+1}(t), L_1(\tau/m(1 + \varepsilon), T) \right\| + \\ &+ \left\| e^{-\theta(t-\tau/m)} (1 - S_{l_1+1}^{ml_1+1}(t)), L_1(\tau/m(1 + \varepsilon), T) \right\| \leq \\ &\leq \left\| 2\varepsilon^{-1} e^{-\frac{ml_1}{\tau}t} \left( \frac{ml_1}{\tau} t \right)^{l_1} (l_1!)^{-1}, L_1(\tau/m(1 + \varepsilon), T) \right\| + A_{l_1} \|e^{-\theta t}, L_1(\tau/m, T)\|. \end{aligned}$$

Используя теперь формулу (3.14), получаем

$$J_1 \leq \frac{2\tau}{\varepsilon ml_1} + A_{l_1} \|e^{-\theta t}, L_1(\tau/m, T)\|.$$

Для второго слагаемого  $J_2$  в (3.26) справедлива точно такая же оценка. Таким образом, имеем

$$\tilde{N}_3 \leq \frac{4\tau}{\varepsilon ml_1} + 2A_{l_1} \|e^{-\theta t}, L_1(\tau/m, T)\|.$$

Для центрального интервала  $(\tau/m(1 - \varepsilon), \tau/m(1 + \varepsilon))$ , учитывая неравенство (3.1), получаем

$$\tilde{N}_2 = \left\| \hat{\psi}_{l_1+1}^{ml_1+1}(t) - \hat{\psi}_{l_2+1}^{ml_2+1}(t), L_1(\tau/m(1 - \varepsilon), \tau/m(1 + \varepsilon)) \right\| \leq 8e^{\theta\tau} \varepsilon\tau/m.$$

Суммируя оценки на каждом из интервалов, получаем

$$\begin{aligned} \left\| \hat{\psi}_{l_1+1}^{ml_1+1}(t) - \hat{\psi}_{l_2+1}^{ml_2+1}(t), L_1(0, T) \right\| &\leq \tilde{N}_1 + \tilde{N}_2 + \tilde{N}_3 \\ &\leq \frac{c}{\varepsilon ml_1} + 2A_{l_1} \|e^{-\theta t}, L_1(\tau/m, T)\| + 8e^{\theta\tau} \varepsilon\tau/m. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает оценка (3.22).

Лемма доказана.

**Замечание.** Из доказательства неравенства (3.22) следует, что константы  $c_3, c_4 > 0$  не зависят от  $T$ . Поэтому, переходя в (3.22) к пределу  $T \rightarrow \infty$ , имеем оценку

$$\left\| \hat{\psi}_{l_1+1}^{ml_1+1}(t) - \hat{\psi}_{l_2+1}^{ml_2+1}(t), L_1(0, \infty) \right\| \leq c_3 \varepsilon + \frac{c_4}{\varepsilon m l_1}, \quad l_2 > l_1. \quad (3.27)$$

#### 4. Предельные теоремы на полуоси

Увеличивая неограниченно число уравнений в (1.1) и рассматривая только последнюю компоненту решения каждой из задач Коши, получаем последовательность функций  $\{x_n^n(t)\}$ . В этом параграфе мы изучим предельные свойства этой последовательности при некоторых наборах начальных данных  $x^{n,0}$ .

Вначале рассмотрим последовательность задач Коши вида (1.1), предполагая, что векторы начальных данных имеют последнюю компоненту, отличную от нуля, а все остальные компоненты — нулевые. То есть векторы начальных данных в (1.1) имеют вид

$$x^{n,0} = (0, \dots, 0, a)^T. \quad (4.1)$$

**Теорема 2.** Пусть  $g(t, 0) \equiv 0$ , выполнены условия (1.5),  $0 < L < \theta$  и начальные данные имеют вид (4.1). Тогда последовательность  $\{x_n^n(t)\}$  равномерно сходится на любом отрезке  $[0, T]$ :

$$x_n^n(t) \rightarrow y(t), \quad n \rightarrow \infty.$$

Предельная функция  $y(t)$  является решением следующей начальной задачи

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), & t > \tau, \\ y(t) = a e^{-\theta t}, & t \in [0, \tau], \\ y(\tau + 0) = a e^{-\theta \tau}, \end{cases} \quad (4.2)$$

при этом существует  $n_0 = n_0(\theta, \tau, L)$  такое, что при  $n > n_0$  имеет место оценка

$$\sup_{t \in [0, \infty)} |x_n^n(t) - y(t)| \leq \frac{c|a|}{\sqrt{n}}, \quad (4.3)$$

где константа  $c > 0$  не зависит от  $n$ .

**Доказательство.** В силу леммы 1 для последней компоненты  $x_n^n(t)$  решения задачи Коши (1.1) выполнены соотношения

$$x_n^n(t) = a e^{-\theta t} + \int_0^t \hat{\psi}_n^n(t-s) g(s, x_n^n(s)) ds. \quad (4.4)$$

Тогда для любых  $n, l$  имеем

$$\begin{aligned}
 x_{n+l}^{n+l}(t) - x_n^n(t) &= \int_0^t \left( \hat{\psi}_{n+l}^{n+l}(t-s) - \hat{\psi}_n^n(t-s) \right) g(s, x_{n+l}^{n+l}(s)) ds \\
 &+ \int_0^t \hat{\psi}_n^n(t-s) (g(s, x_{n+l}^{n+l}(s)) - g(s, x_n^n(s))) ds = I_{n,l}^1(t) + I_{n,l}^2(t). \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

Оценим первое слагаемое  $I_{n,l}^1(t)$  в правой части (4.5). Учитывая условия на функцию  $g(t, z)$ , имеем

$$|g(s, x_{n+l}^{n+l}(s))| = |g(s, x_{n+l}^{n+l}(s)) - g(s, 0)| \leq L|x_{n+l}^{n+l}(s)|.$$

Тогда в силу этого неравенства и теоремы 1 получаем

$$|I_{n,l}^1(t)| \leq cL|a| \int_0^t \left| \hat{\psi}_{n+l}^{n+l}(t-s) - \hat{\psi}_n^n(t-s) \right| ds.$$

А в силу леммы 8 и оценки (3.19) при  $n > 2\theta\tau(1 + (n - 1)^{1/2}) + 1$  справедливо неравенство

$$\int_0^t \left| \hat{\psi}_{n+l}^{n+l}(s) - \hat{\psi}_n^n(s) \right| ds \leq \frac{c_1}{\sqrt{n}},$$

где константа  $c_1 > 0$  не зависит от  $n$  и  $t$  и может быть явно вычислена. Таким образом, получаем следующую оценку

$$|I_{n,l}^1(t)| \leq \frac{\hat{c}|a|}{\sqrt{n}}, \quad n > 2\theta\tau(1 + (n - 1)^{1/2}) + 1, \quad t \geq 0. \tag{4.6}$$

Для второго интеграла  $I_{n,l}^2(t)$  в силу условия Липшица имеет место оценка

$$\begin{aligned}
 |I_{n,l}^2(t)| &\leq L \int_0^t |\hat{\psi}_n^n(t-s)| |x_{n+l}^{n+l}(s) - x_n^n(s)| ds \leq \\
 &\leq L \max_{s \in [0, T]} |x_{n+l}^{n+l}(s) - x_n^n(s)| \int_0^t |\hat{\psi}_n^n(t-s)| ds. \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

Как отмечалось выше, для последовательности  $\{\hat{\psi}_n^n(t)\}$  при любых  $\varepsilon > 0$  и  $T > \tau$  имеет место равномерная сходимость (2.13) и выполнена оценка (2.5). Тогда в силу теоремы Лебега имеем

$$\int_0^t |\hat{\psi}_n^n(s)| ds \rightarrow \frac{1 - e^{-\theta(t-\tau)}}{\theta}, \quad t > \tau.$$

Следовательно, найдется число  $n_1 = n_1(\theta, L)$ , такое, что для всех  $n > n_1$  будет выполнено неравенство

$$\int_0^t |\hat{\psi}_n^n(s)| ds < \frac{L + \theta}{2L\theta}, \quad t \geq 0. \quad (4.8)$$

Учитывая эту оценку, (4.6) и (4.7), из представления (4.5) получаем

$$|x_{n+l}^{n+l}(t) - x_n^n(t)| \leq \frac{\hat{c}|a|}{\sqrt{n}} + \frac{L + \theta}{2\theta} \max_{s \in [0, T]} |x_{n+l}^{n+l}(s) - x_n^n(s)|, \quad n > n_0(\theta, \tau, L).$$

Следовательно,

$$\max_{t \in [0, T]} |x_{n+l}^{n+l}(t) - x_n^n(t)| \leq \frac{2\hat{c}|a|\theta}{(\theta - L)\sqrt{n}}.$$

Отсюда вытекает равномерная сходимость последовательности  $\{x_n^n(t)\}$  на любом отрезке  $[0, T]$ . Переходя в этом неравенстве к пределу при  $l \rightarrow \infty$ , для предельной функции  $y(t)$  получаем оценку

$$\max_{t \in [0, T]} |y(t) - x_n^n(t)| \leq \frac{2\hat{c}|a|\theta}{(\theta - L)\sqrt{n}}. \quad (4.9)$$

Переходя теперь в (4.4) к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получаем тождества

$$y(t) \equiv ae^{-\theta t}, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

$$y(t) = ae^{-\theta t} + \int_0^{t-\tau} e^{-\theta(t-s-\tau)} g(s, y(s)) ds, \quad t > \tau.$$

Следовательно,  $y(t)$  является решением начальной задачи (4.2). А в силу того, что правая часть неравенства (4.9) не зависит от  $T$ , то на всей полуоси  $\{t \geq 0\}$  имеет место равномерная оценка (4.3).

Теорема доказана.

Рассмотрим последовательность задач Коши вида (1.1), предполагая, что  $n = 2l + 1$  и вектор начальных данных имеет вид

$$x^{n,0} = (x_1^{n,0}, \dots, x_n^{n,0})^T, \quad x_{l+1}^{n,0} = a, \quad x_j^{n,0} = 0 \quad \text{при } j \neq l + 1. \quad (4.10)$$

В работе [6] доказано, что для произвольных  $g(t, z)$  при таких начальных условиях на любом конечном интервале  $(0, T)$  последовательность  $\{x_n^n(t)\}$  также сходится, однако в этом случае сходимость уже не является равномерной, а только в  $L_p(0, T)$ ,  $1 \leq p < \infty$ :

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_p(0, T)\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

при этом предельная функция  $y(t)$  принадлежит соболевскому пространству  $W_p^1(\tau, T)$  и является обобщенным решением начальной задачи:

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), & t > \tau, \\ y(t) = 0, & t \in [0, \tau/2), \\ y(t) = ae^{-\theta(t-\tau/2)}, & t \in (\tau/2, \tau], \\ y(\tau + 0) = ae^{-\theta\tau/2}. \end{cases} \quad (4.11)$$

Сейчас мы докажем аналог этого утверждения на всей полуоси  $(0, \infty)$ .

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 2 и начальный вектор в (1.1) имеет вид (4.10). Тогда обобщенное решение  $y(t)$  начальной задачи (4.11) принадлежит соболевскому пространству  $W_1^1(\tau, \infty)$ , и выполняется оценка

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_1(0, \infty)\| \leq \frac{c|a|}{\sqrt{n}}, \quad n = 2l + 1 \geq n_0(\theta, \tau, L), \quad (4.12)$$

где константа  $c > 0$  не зависит от  $n$  и  $a$ .

**Доказательство.** В силу леммы 1 при  $n = 2l + 1$  для последней компоненты решения задачи Коши справедливо интегральное равенство

$$x_{2l+1}^{2l+1}(t) = a\hat{\psi}_{l+1}^{2l+1}(t) + \int_0^t \hat{\psi}_{2l+1}^{2l+1}(t-s)g(s, x_{2l+1}^{2l+1}(s)) ds.$$

Тогда для любых  $m$  и  $l$ ,  $m > l$  имеем

$$\begin{aligned} x_{2m+1}^{2m+1}(t) - x_{2l+1}^{2l+1}(t) &= a \left( \hat{\psi}_{m+1}^{2m+1}(t) - \hat{\psi}_{l+1}^{2l+1}(t) \right) \\ &+ \int_0^t \left( \hat{\psi}_{2m+1}^{2m+1}(t-s) - \hat{\psi}_{2l+1}^{2l+1}(t-s) \right) g(s, x_{2m+1}^{2m+1}(s)) ds \\ &+ \int_0^t \hat{\psi}_{2l+1}^{2l+1}(t-s) (g(s, x_{2m+1}^{2m+1}(s)) - g(s, x_{2l+1}^{2l+1}(s))) ds. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|x_{2m+1}^{2m+1}(t) - x_{2l+1}^{2l+1}(t), L_1(0, \infty)\| &\leq |a| \left\| \hat{\psi}_{m+1}^{2m+1}(t) - \hat{\psi}_{l+1}^{2l+1}(t), L_1(0, \infty) \right\| \\ &+ \left\| \int_0^t \left| \hat{\psi}_{2m+1}^{2m+1}(t-s) - \hat{\psi}_{2l+1}^{2l+1}(t-s) \right| |g(s, x_{2m+1}^{2m+1}(s))| ds, L_1(0, \infty) \right\| \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \left\| \int_0^t |\hat{\psi}_{2l+1}^{2l+1}(t-s)| |g(s, x_{2m+1}^{2m+1}(s)) - g(s, x_{2l+1}^{2l+1}(s))| ds, L_1(0, \infty) \right\| \\
& = I_{l,m}^1 + I_{l,m}^2 + I_{l,m}^3.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

В силу леммы 9 и неравенства (3.27) имеем оценку

$$I_{l,m}^1 \leq \frac{c_1 |a|}{\sqrt{2l}}, \quad l > \theta\tau(1 + \sqrt{2l}), \tag{4.14}$$

где константа  $c_1 > 0$  не зависит от  $n$ .

Рассмотрим второе слагаемое в (4.13). Используя обобщенное неравенство Минковского и условие Липшица, имеем

$$I_{l,m}^2 \leq L \left\| \hat{\psi}_{2m+1}^{2m+1}(t) - \hat{\psi}_{2l+1}^{2l+1}(t), L_1(0, \infty) \right\| \left\| x_{2m+1}^{2m+1}(s), L_1(0, \infty) \right\|.$$

А поскольку в силу теоремы 1

$$\left\| x_{2m+1}^{2m+1}(s), L_1(0, \infty) \right\| \leq \frac{c|a|}{\delta},$$

то, как и ранее, учитывая лемму 9 и неравенство (3.27), получим

$$I_{l,m}^2 \leq \frac{c_2 |a|}{\sqrt{2l}}, \quad l > \theta\tau(1 + \sqrt{2l}). \tag{4.15}$$

Для того, чтобы оценить третье слагаемое в (4.13), вначале также применим обобщенное неравенство Минковского

$$I_{l,m}^3 \leq \left\| \hat{\psi}_{2l+1}^{2l+1}(t), L_1(0, \infty) \right\| \left\| g(s, x_{2m+1}^{2m+1}(s)) - g(s, x_{2l+1}^{2l+1}(s)), L_1(0, \infty) \right\|.$$

Принимая теперь во внимание условие Липшица (1.5) и оценку (4.8), получаем

$$I_{l,m}^3 \leq \frac{L + \theta}{2\theta} \left\| x_{2m+1}^{2m+1}(t) - x_{2l+1}^{2l+1}(t), L_1(0, \infty) \right\|, \quad n > n_1. \tag{4.16}$$

Подставляя оценки (4.14)-(4.16) в неравенство (4.13), получим, что существует  $n_0 = n_0(\theta, \tau, L)$  такое, что при  $n > n_0$  будет выполняться оценка

$$\left\| x_{2m+1}^{2m+1}(t) - x_{2l+1}^{2l+1}(t), L_1(0, \infty) \right\| \leq \frac{(c_1 + c_2)|a|}{\sqrt{2l}} + \frac{L + \theta}{2\theta} \left\| x_{2m+1}^{2m+1}(t) - x_{2l+1}^{2l+1}(t), L_1(0, \infty) \right\|.$$

Отсюда, учитывая, что  $0 < L < \theta$ , имеем

$$\left\| x_{2m+1}^{2m+1}(t) - x_{2l+1}^{2l+1}(t), L_1(0, \infty) \right\| \leq \frac{2\theta}{\theta - L} \frac{(c_1 + c_2)|a|}{\sqrt{2l}}.$$

Таким образом, последовательность  $\{x_{2l+1}^{2l+1}(t)\}$  является фундаментальной и, следовательно, сходящейся в  $L_1(0, \infty)$ . Переходя в этом неравенстве к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , получаем (4.12).

Поскольку  $y(t) \in L_1(0, \infty)$  и  $|g(t, y(t))| \leq L|y(t)|$ , то из уравнения (4.11) вытекает, что  $\frac{dy(t)}{dt} \in L_1(\tau, \infty)$ . Следовательно,  $y(t) \in W_1^1(\tau, \infty)$ .

Теорема доказана.

Повторяя схему доказательства теорем 2 и 3, мы можем доказать ряд аналогичных предельных теорем для различных наборов начальных данных в задаче (1.1). Приведем некоторые из них.

**Теорема 4.** Пусть выполнены условия теоремы 2,  $n = ml + 1$  и начальные условия в (1.1) имеют вид

$$x^{n,0} = (x_1^{n,0}, \dots, x_n^{n,0})^T, \quad x_{l+1}^{n,0} = a, \quad x_j^{n,0} = 0 \text{ при } j \neq l + 1.$$

Тогда последовательность  $\{x_n^n(t)\}$  сходится в  $L_1(0, \infty)$ . Предельная функция  $y(t)$  принадлежит соболевскому пространству  $W_1^1(\tau, \infty)$  и является обобщенным решением следующей начальной задачи

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), & t > \tau, \\ y(t) = 0, & t \in [0, \frac{m-1}{m}\tau), \\ y(t) = ae^{-\theta(t - \frac{m-1}{m}\tau)}, & t \in (\frac{m-1}{m}\tau, \tau], \\ y(\tau + 0) = ae^{-\theta\tau/m}. \end{cases}$$

**Теорема 5.** Пусть выполнены условия теоремы 2,  $n = ml + 1$ ,  $0 \leq s < m$  — целое и начальные условия в (1.1) имеют вид

$$x^{n,0} = (x_1^{n,0}, \dots, x_n^{n,0})^T, \quad x_{sl+1}^{n,0} = a, \quad x_j^{n,0} = 0 \text{ при } j \neq sl + 1.$$

Тогда последовательность  $\{x_n^n(t)\}$  сходится в  $L_1(0, \infty)$ . Предельная функция  $y(t)$  принадлежит соболевскому пространству  $W_1^1(\tau, \infty)$  и является обобщенным решением следующей начальной задачи

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), & t > \tau, \\ y(t) = 0, & t \in [0, \frac{m-s}{m}\tau), \\ y(t) = ae^{-\theta(t - \frac{m-s}{m}\tau)}, & t \in (\frac{m-s}{m}\tau, \tau], \\ y(\tau + 0) = ae^{-\theta\frac{s}{m}\tau}. \end{cases}$$

**Теорема 6.** Пусть выполнены условия теоремы 2,  $i \in \mathbb{N}$  — фиксировано и начальные данные в задаче Коши (1.1) имеют вид

$$x^{n,0} = (a_1, \dots, a_i, 0, \dots, 0)^T.$$

Тогда последовательность  $\{x_n^n(t)\}$  сходится в  $L_1(0, \infty)$ . Предельная функция  $y(t)$  принадлежит соболевскому пространству  $W_1^1(\tau, \infty)$  и является обобщенным решением следующей начальной задачи

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), & t > \tau, \\ y(t) = 0, & t \in [0, \tau), \\ y(\tau + 0) = a_1 + \dots + a_i. \end{cases}$$

Можно привести аналогичные предельные теоремы на полуоси  $(0, \infty)$  в случае, когда предельная функция  $y(t)$  будет обобщенным решением начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), & t > \tau, \\ y(t) = \varphi(t), & t \in [0, \tau), \\ y(\tau + 0) = a, \end{cases} \quad (4.17)$$

с некоторой кусочно-непрерывной функцией  $\varphi(t)$ , имеющей конечное число разрывов первого рода. Приведем важный пример (см. [6]), когда

$$\varphi(t) = e^{-\theta t} \varphi_{m,k}(t/\tau),$$

где  $\varphi_{m,k}(s)$  — функции Хаара

$$\varphi_{m,k}(s) = \begin{cases} 2^{m/2}, & s \in [(k-1)2^{-m}, (k-1/2)2^{-m}), \\ -2^{m/2}, & s \in [(k-1/2)2^{-m}, k2^{-m}), \\ 0, & s \notin [(k-1)2^{-m}, k2^{-m}), \end{cases}$$

$$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k = 1, 2, \dots, 2^m.$$

Сформулируем соответствующую теорему, положив для определенности  $m = 1$ ,  $k = 1$ .

**Теорема 7.** Пусть выполнены условия теоремы 2,  $n = 4l + 1$ , компоненты начального вектора  $x^{n,0} = (x_1^{n,0}, \dots, x_n^{n,0})^T$  в задаче Коши (1.1) имеют вид

$$\begin{aligned} x_1^{n,0} &= ae^{-\theta\tau}, & x_{2l+1}^{n,0} &= \sqrt{2}e^{-\theta\tau/2}, \\ x_{3l+1}^{n,0} &= -2\sqrt{2}e^{-\theta\tau/4}, & x_{4l+1}^{n,0} &= \sqrt{2}, \end{aligned}$$

остальные компоненты равны нулю. Тогда последовательность  $\{x_n^n(t)\}$  сходится в  $L_1(0, \infty)$ , предельная функция  $y(t)$  принадлежит пространству  $W_1^1(\tau, \infty)$  и является обобщенным решением начальной задачи (4.17) с

$$\varphi(t) = e^{-\theta t} \varphi_{1,1}(t/\tau).$$

Приведем теперь формулировку предельной теоремы с указанием скорости сходимости.

**Теорема 8.** Пусть выполнены условия теоремы 2, и последовательность начальных векторов  $\{x^{n,0}\}$  в задаче (1.1) такая, что последовательность  $\{x_n^n(t)\}$ , составленная из последних компонент решений задач Коши вида (1.1), сходится в  $L_1(0, \infty)$  к решению начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом (4.17) с некоторой кусочно-непрерывной функцией  $\varphi(t)$ , имеющей разрывы первого рода. Тогда существует  $n_0 = n_0(\theta, \tau, L)$  такое, что при  $n > n_0(\theta, \tau, L)$  справедлива оценка

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_1(0, \infty)\| \leq \frac{c \sum_{k=1}^n |x_k^{n,0}|}{\sqrt{n}},$$

где константа  $c > 0$  не зависит от  $n$  и начального вектора  $x^{n,0}$ . При этом

$$\|x_n^n(t) - y(t), W_1^1(\tau, \infty)\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

## 5. Заключение

В работе рассмотрена задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности, возникающей в биологических задачах при моделировании многостадийного синтеза вещества. Число стадий определяет число уравнений в системе. Компоненты  $x_i(t)$  искомой вектор-функции определяют концентрацию вещества на  $i$ -й стадии процесса. Наибольший интерес для биологов представляет концентрация конечного продукта, т. е. значения последней компоненты решения  $x_n(t)$ . Но поскольку число стадий синтеза может быть очень большим и достигать фантастической величины (например,  $10^{20}$  или  $10^{30}$ ), то при решении систем вида (1.1) возникает “проблема большой размерности”.

На малом временном интервале  $(0, T)$  эта проблема была решена в работе [9] на основе некоторых предельных теорем, которые устанавливали связи между решениями системы уравнений (1.1) и уравнения с запаздывающим аргументом (1.2). Эти связи позволили обосновать метод построения приближенного вычисления последней компоненты  $x_n(t)$  решения системы (1.1). Затем было получено обобщение этого метода на другие классы систем дифференциальных уравнений высокой размерности и на произвольный конечный интервал  $(0, T)$ .

В настоящей работе мы изучаем указанную “проблему большой размерности” на всей полуоси  $(0, \infty)$ . При некоторых условиях на нелинейные члены в (1.1) нами получены оценки решений системы, характеризующие экспоненциальное убывание при  $t \rightarrow \infty$  независимо от размерности  $n$  и доказаны предельные теоремы, в которых, как и на конечном интервале, установлены связи между решениями системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнений с запаздывающим аргументом. На основе этих результатов мы получаем метод для

приближенного построения последней компоненты решения системы высокой размерности на всей полуоси  $(0, \infty)$  и устанавливаем глобальные оценки аппроксимации при  $n \gg 1$ .

### Список цитируемых источников

1. *Демиденко Г. В.* О классах систем дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнениях с запаздывающим аргументом // Итоги науки. Юг России. Сер. Математический форум. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. — Т.5. — С. 45–56.  
Demidenko G. V. On classes of systems of differential equations of a higher dimension and delay equations. Itogi Nauki. Yug Rossii. Ser. Mat. Forum. Vladikavkaz: YuMI VNTs RAN i RSO-A 5, 45–56 (2011). (in Russian)
2. *Демиденко Г. В.* Системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. — 2012. — Т.53, №6. — С. 1274–1282.  
Demidenko G. V. Systems of differential equations of higher dimension and delay equations. Sib. Math. J. 53, No.6, 1021–1028 (2012).
3. *Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И.* Математическое моделирование регуляторных контуров генных сетей // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2004. — Т.44, №12. — С. 2276–2295.  
Demidenko G. V., Kolchanov N. A., Likhoshvai' V. A., Matushkin Yu. G., Fadeev S. I. Mathematical modeling of regular contours of gene networks. Comput. Math. Math. Phys. 44, No.12, 2166–2183 (2004).
4. *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е.* Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. — 2006. — Т. 47, № 1. — С. 58–68.  
Demidenko G. V., Likhoshvai' V. A., Kotova T. V., Khropova Yu. E. On one class of systems of differential equations and on retarded equations. Sib. Math. J. 47, No.1, 45–54 (2006).
5. *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Мудров А. В.* О связи между решениями дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и бесконечномерных систем дифференциальных уравнений // Дифф. уравн. — 2009. — Т.45, №1. — С. 34–46.  
Demidenko G. V., Likhoshvai' V. A., Mudrov A. V. On the relationship between solutions of delay differential equations and infinite-dimensional systems of differential equations. Diff. Eq. 45, No.1, 33–45 (2009).
6. *Демиденко Г. В., Мельник (Уварова) И. А.* Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. — 2010. — Т.51, №3. — С. 528–546.  
Demidenko G. V., Mel'nik (Uvarova) I. A. On a method of approximation of solutions to delay differential equations. Sib. Math. J. 51, No.3, 419–434 (2010).
7. *Демиденко Г. В., Уварова И. А.* Класс систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности // Сиб. журн. индустр. мат. — 2016. — Т.19, №2. — С. 47–60.

- Demidenko G. V., Uvarova I. A. A class of systems of ordinary differential equations of large dimension. *J. Appl. Ind. Math.* 10, No.2, 179–191 (2016).
8. *Красовский Н. Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. мат. и мех. — 1964. — Т. 28, вып. 4. — С. 716–724.
- Krasovskii N. N.* The approximation of a problem of analytic design of controls in a system with time-lag. *J. Appl. Math. Mech.* 28, No.4, 876–885 (1964).
9. *Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г.* Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // Сиб. журн. индустр. мат. — 2004. — Т.7, №1. — С. 73–94.
- Likhoshvai' V. A., Fadeev S. I., Demidenko G. V., Matushkin Yu. G.* Modeling multistage synthesis without branching by a delay equation. *Sibirsk. Zh. Industr. Mat.* 7, No.1, 73–94 (2004). (in Russian)
10. *Мурри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. — М.: Мир, 1983.
- Murray J. D.* Lectures on nonlinear-differential-equation models in biology. Oxford: Clarendon Press, 1977.
11. *Матвеева И. И., Мельник (Уварова) И. А.* О свойствах решений одного класса нелинейных систем дифференциальных уравнений большой размерности // Сиб. мат. журн. — 2012. — Т.53, №2. — С. 312–324.
- Matveeva I. I., Mel'nik I. A.* On the properties of solutions to a class of nonlinear systems of differential equations of large dimension. *Sib. Math. J.* 53, No.2, 248–258 (2012).
12. *Матвеева И. И., Попов А. М.* О свойствах решений одной системы, возникающей при моделировании многостадийного синтеза вещества // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. — 2009. — Т.9, вып.3. — С. 86–94.
- Matveeva I. I., Popov A. M.* On properties of solutions to a system modeling a multistage synthesis of a substance. *Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform.* 9, No.3, 86–94 (2009). (in Russian)
13. *Мудров А. В.* О связи систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. — 2007. — Т.7, вып.2. — С. 52–64.
- Mudrov A. V.* On the relationship between systems of ordinary differential equations and equations with a retarded argument. *Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform.* 7, No.2, 52–64 (2007). (in Russian)
14. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972.
- Myshkis A. D.* Linear differential equations with retarded argument. Moscow: Nauka, 1972. (in Russian)
15. *Персидский К. П.* Счетные системы дифференциальных уравнений и устойчивость их решений // Известия АН КазССР. Серия: Математика и механика. — 1959. — Вып.7. — С. 52–71.
- Persidskij K. P.* Countable systems of differential equations and stability of their solutions. *Izv. Akad. Nauk Kaz. SSR, Ser. Mat. Mekh.* 7, 52–71 (1959). (in Russian)

16. *Репин Ю. М.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами // Прикл. мат. и мех. — 1965. — Т.29, вып.2. — С. 226–235.  
Repin Yu. M. On the approximate replacement of systems with lag by ordinary dynamical systems. J. Appl. Math. Mech. 29, No.2, 254–264 (1965).
17. *Салуквадзе М. Е.* К задаче синтеза оптимального регулятора в линейных системах с запаздыванием, подверженных постоянно действующим возмущениям // Автоматика и телемеханика. — 1962. — Т.23, №12. — С. 1595–1601.  
Salukvadze M. E. Concerning the synthesis of an optimal controller in linear delay systems subjected to constantly acting perturbations. Autom. Remote Control 23, No.12, 1495–1501 (1962).
18. *Demidenko G. V., Kotova T. V.* Limit properties of solutions to one class of systems of differential equations with parameters // J. Anal. Appl. — 2010. — Vol.8, No.2. — P. 63–74
19. *Gyori I.* Two approximation techniques for functional differential equations // Comput. Math. Appl. — 1988. — Vol.16, No.3. — P. 195–214.
20. *Matveeva I. I.* On properties of solutions to one class of systems of nonlinear differential equations with parameters // Динамические системы. — 2015. — Т.5(33), №1–2. — С. 13–24.

Получена 28.10.2018

УДК 517.938

# Хирургическая операция для эндоморфизма Аносова двумерного тора не дает растягивающийся аттрактор<sup>1</sup>

В. З. Гринес, Е. В. Жужома, Е. Д. Куренков

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики  
Нижний Новгород 603005. E-mail: [vgrines@hse.ru](mailto:vgrines@hse.ru), [nzhuzhoma@hse.ru](mailto:nzhuzhoma@hse.ru), [ekurenkov@hse.ru](mailto:ekurenkov@hse.ru)

**Аннотация.** В 1967 году С. Смейл предложил способ построения гиперболических аттракторов и репеллеров коразмерности один диффеоморфизмов, заданных на  $n$ -мерном торе, отталкиваясь от алгебраического автоморфизма Аносова. Фактически, С. Смейл схематично описал локальное изменение такого автоморфизма, называемое хирургической операцией, в результате которого получается так называемый ДА-диффеоморфизм. Неблуждающее множество ДА-диффеоморфизма состоит в точности из одного растягивающегося аттрактора коразмерности один и одной источниковой неподвижной точки, или в точности одного сжимающегося репеллера коразмерности один и одной стоковой неподвижной точки. В настоящей работе устанавливается, что применение хирургической операции С. Смейла к алгебраическому эндоморфизму Аносова, являющимся конечно-листным накрытием степени не меньшей двух, не приводит к построению  $A$ -эндоморфизма, неблуждающее множество которого содержит одномерный растягивающийся аттрактор.

**Ключевые слова:** гиперболический аттрактор, репеллер, эндоморфизмы Аносова, аксиома  $A$ .

## Surgery operation for Anosov endomorphism gives no expanding attractor

V. Z. Grines, E. V Zhuzhoma, E. D. Kurenkov

National Research University Higher School of Economics  
Nizhny Novgorod 603005..

**Abstract.** In 1967 S. Smale proposed a method how to construct hyperbolic codimension one attractors and repellers of diffeomorphisms given on  $n$ -torus. The construction was based on Anosov toral algebraic diffeomorphism. In essence, he described local modification of such automorphism that leads to so-called derived from Anosov diffeomorphism. The nonwandering set of DA-diffeomorphism consists either of an expanding codimension one attractor and a trivial source or of codimension one contracting repeller and a trivial sink. In the present paper we show that Smale's surgery operation applied to Anosov endomorphism that is  $k$ -fold covering map of degree not less than two does not lead to an  $A$ -endomorphism with one-dimensional expanding attractor.

**Keywords:** hyperbolic attractor, repeller, Anosov endomorphism, axiom  $A$ .

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ, грант 17-11-01041), кроме доказательства предложения 2 и следствия из него. Это доказательство было поддержано ЦФИ НИУ ВШЭ и получено в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ, проект ТЗ-95, в 2018 году.



MSC 2010: 47N10, 49J20, 49J35, 93C20, 70E99

## 1. Введение

В 1967 году Смейл [13] предложил способ построения нетривиальных базисных множеств, отталкиваясь от диффеоморфизма Аносова (основные понятия и факты теории динамических систем см. в книгах [3, 6] и обзорах [1, 13]). Фактически, Смейл схематично описал *хирургическую операцию* над диффеоморфизмом Аносова, в результате которой получается ДА-диффеоморфизм (аббревиатура ДА получается из первых букв словосочетания *Derived from Anosov*) с базисными множествами, имеющими топологическую размерность на единицу меньшую, чем размерность несущего многообразия. Аккуратное описание хирургической операции для автоморфизма Аносова  $F_0: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  двумерного тора, заданного формулой (1.1), имеется в монографиях [8, 11].

$$\begin{cases} \bar{x} = 2x + y \\ \bar{y} = x + y \end{cases} \pmod{1} \quad (1.1)$$

Идея хирургической операции состоит в том, что вместо неподвижной седловой точки  $O = (0; 0)$  в ее малой окрестности определенным образом образуется одна узловая (стоковая или источниковая) и две седловые неподвижные точки. При этом одинаково возможны следующие два сценария: 1) узловая неподвижная точка является источником; 2) узловая неподвижная точка является стоком, см. рис. 1.

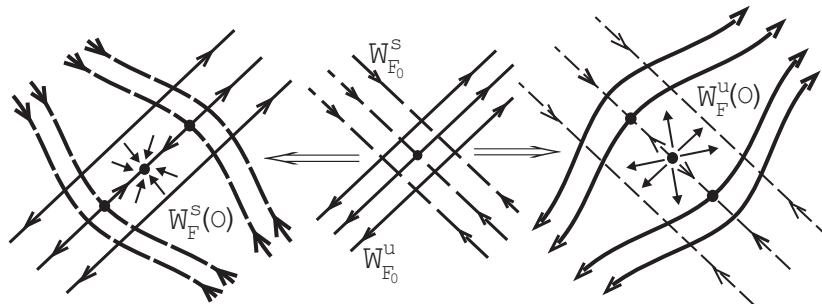


Рис. 1. Возможные сценарии хирургической операции.

В первом случае неблуждающее множество полученного ДА-диффеоморфизма состоит из источниковой неподвижной точки одномерного растягивающегося аттрактора. Во втором случае (см. левую часть рис. 1) неблуждающее множество полученного ДА-диффеоморфизма состоит из стоковой неподвижной точки и одномерного сжимающегося репеллера. Поскольку хирургическая операция сконцентрирована вблизи малой окрестности седловой неподвижной точки, то ДА-диффеоморфизм гомотопен (даже, изотопен) исходному автоморфизму Аносова.

Для первого сценария (см. правую часть рис. 1) в результате хирургической бифуркации получается ДА-дiffeоморфизм  $F: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  со следующими свойствами:

- 1)  $F$  является  $\Lambda$ -дiffeоморфизмом, то есть его неблуждающее множество является гиперболическим и множество периодических точек плотно в неблуждающе множестве;
- 2) неблуждающее множество  $F$  состоит в точности из двух базисных множеств: неподвижной источниковой точки  $O$  и одномерного растягивающегося аттрактора  $\Lambda$  (то есть  $F(\Lambda) = \Lambda = F^{-1}(\Lambda)$  и  $\bigcup_{x \in \Lambda} W^u(x) = \Lambda$ );
- 3) каждое неустойчивое многообразие  $W^u(x)$ ,  $x \in \Lambda$ , является одномерной незамкнутой кривой, причем множество  $\bigcup_{x \in \Lambda} W^u(x)$  образует одномерную ламинацию, локально гомеоморфную произведению отрезка на канторово множество (о ламинациях см., например, [2]);
- 4) дополнение  $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$  к  $\Lambda$  является областью, гомеоморфной открытому диску, которая содержит неподвижную точку  $O$ , и достижимая изнутри граница области  $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$  состоит из двух слоев ламинации  $\Lambda$ .

Второй сценарий аналогичен первому, но неблуждающее множество полученного ДА-дiffeоморфизма состоит из стоковой неподвижной точки и единственного сжимающегося одномерного репеллера. При этом свойства полученного диффеоморфизма аналогичны свойствам 1)-4) диффеоморфизма в первом случае (с очевидными изменениями). В силу [5] любой диффеоморфизм Аносова двумерного тора сопряжен алгебраическому гиперболическому автоморфизму (то есть автоморфизму, заданному целочисленной унимодулярной матрицей, собственные значения которой не равны по модулю единице). Поэтому в понятном смысле можно считать, что хирургическая операция строится для любого диффеоморфизма Аносова на двумерном торе.

Существенно более широкий класс динамических систем Аносова на двумерном торе образуют эндоморфизмы Аносова, не являющиеся, вообще говоря, взаимно-однозначными отображениями. Известно, что имеется массивное множество неалгебраических эндоморфизмов Аносова, не сопряженных ни с каким алгебраическим эндоморфизмом [14]. Принципиальное отличие эндоморфизмов Аносова от диффеоморфизмов Аносова состоит в возможной зависимости неустойчивых многообразий точек от отрицательных полуорбит. Этим фактом обусловлена структурная неустойчивость эндоморфизмов Аносова, не являющихся диффеоморфизмами или растягивающимися эндоморфизмами [10]. Непосредственно проверяется, что для алгебраических эндоморфизмов Аносова, заданных на двумерном торе, неустойчивые многообразия точек не зависят от отрицательных полуорбит. Поэтому представляется вполне естественным шагом сперва рассмотреть хирургическую операцию именно для алгебраических эндоморфизмов, например, для

эндоморфизма Аносова  $f_0: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , заданного формулой (1.2).

$$\begin{cases} \bar{x} = 3x + y, \\ \bar{y} = x + y. \end{cases} \quad \text{mod } 1 \quad (1.2)$$

Поскольку  $f_0$  является локальным диффеоморфизмом и локально топологически сопряжен с диффеоморфизмом  $F_0$  в окрестности седловой неподвижной точки  $O = (0; 0)$ , то оба сценария хирургической операции формально возможны.

В работе [4] реализован второй сценарий хирургической операции Смейла для алгебраического эндоморфизма Аносова вида (1.2). В результате был построен  $A$ -эндоморфизм  $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  двумерного тора, неблуждающее множество которого состоит из гиперболического сжимающегося репеллера  $\Lambda$ , неустойчивые многообразия которого не зависят от выбора отрицательной полуорбиты, и одной стоковой неподвижной точки  $O$ . При этом множество  $\Lambda$  обладает следующими свойствами:

- 1)  $\Lambda$  является строго инвариантным (то есть,  $f^{-1}(\Lambda) = \Lambda$ );
- 2)  $\Lambda$  образует ламинацию, не содержащую слоев, гомеоморфных окружности;
- 3) достижимая изнутри граница любой компоненты связности множества  $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$  состоит ровно из двух слоев ламинации  $\Lambda$ .

Однако, как будет следовать из основного результата данной работы, первый сценарий для эндоморфизма Аносова (1.2) не приводит к  $A$ -эндоморфизму с нетривиальным одномерным растягивающимся аттрактором, обладающим аналогичными свойствами.

**Теорема 1.** Пусть  $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  —  $A$ -эндоморфизм, являющийся  $k$ -накрытием,  $k \geq 2$ . Тогда  $f$  не имеет одномерных аттракторов  $\Lambda$ , удовлетворяющих следующим условиям:

- $\Lambda$  является строго инвариантным;
- неустойчивое многообразие  $W^u(x)$  каждой точки  $x \in \Lambda$  не зависит от ее отрицательной полуорбиты и является одномерной незамкнутой кривой;
- имеет место равенство  $\bigcup_{x \in \Lambda} W^u(x) = \Lambda$  и  $\Lambda$  образует ламинацию локально гомеоморфную произведению отрезка на канторовское множество;
- любая достижимая изнутри граница компоненты связности множества  $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$  состоит из конечного числа слоев ламинации  $\Lambda$ .

Этот результат согласуется с результатами Шуба [12] и Нитецки [9], относящимся к неособым эндоморфизмам окружности. Напомним, что ещё в 1969 году

Шуб [12] описал хирургическую операцию линейного растягивающего отображения окружности<sup>2</sup>, в результате которой получается неособый эндоморфизм с изолированным источником и репеллером канторовского типа. Через год Нитецки [9] доказал, что нетривиальные базисные множества неособого  $A$ -эндоморфизма окружности являются репеллерами.

## 2. Предварительные сведения

Пусть  $M^n$  —  $n$ -мерное ( $n \geq 1$ ) замкнутое многообразие. Будем называть  $C^r$ -гладкое ( $r \geq 1$ ) сюръективное отображение  $f: M^n \rightarrow M^n$   $C^r$ -эндоморфизмом или  $C^r$ -гладким эндоморфизмом.

Орбитой или  $f$ -орбитой точки  $x_0 \in M = M^n$  называется множество  $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty} = O(x_0)$  такое, что  $f(x_i) = x_{i+1}$  для любого  $i \in \mathbb{Z}$ . Множество  $\{x_i\}_{i=0}^{\infty} = O^+(x_0) \subset O(x_0)$  называется *положительной полуорбитой* точки  $x_0$ . Положительная полуорбита определена однозначно, в то время как множество орбит, проходящих через фиксированную точку, в общем случае может быть континуальным. Для фиксированной орбиты  $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty} = O(x_0)$  множество  $\{x_i\}_{i=-\infty}^0 = O^-(x_0)$  называется *отрицательной полуорбитой* орбиты  $O(x_0)$ .

Точка  $x \in M$  эндоморфизма  $f: M \rightarrow M$  называется *неблуждающей*, если для любой окрестности  $U$  точки  $x$  и любого  $i_0 \in \mathbb{N}$  найдется  $i \geq i_0$  такое, что  $f^i(U) \cap U \neq \emptyset$ . Множество неблуждающих точек образует *неблуждающее множество* эндоморфизма  $f$ , и обозначается через  $NW(f)$ . Известно, что неблуждающее множество является инвариантным относительно действия эндоморфизма  $f$ , то есть  $f(NW(f)) \subset NW(f)$ .

**Определение 1.** Орбита  $O(x_0)$  называется *гиперболической*, если существует непрерывное расслоение касательного подрасслоения

$$\mathbb{T}_{O(x_0)}M = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{T}_{x_i}M = \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}_{x_i}^s \oplus \mathbb{E}_{x_i}^u,$$

инвариантное относительно  $Df$ , и такое, что

$$0 < \|Df^m(v)\| \leq c\mu^m\|v\|, \quad \|Df^m(w)\| \geq c^{-1}\mu^{-m}\|w\| \quad \text{для } v \in \mathbb{E}^s, w \in \mathbb{E}^u, \forall m \in \mathbb{N}$$

для некоторых постоянных  $c > 0$ ,  $0 < \mu < 1$  и римановой метрики на  $TM$ .

Отметим, что неустойчивое подрасслоение  $\mathbb{E}^u(x_0)$  зависит, вообще говоря, от отрицательной полуорбиты  $\{x_i\}_{i=-\infty}^0$ . Может оказаться  $\mathbb{E}^u(x_0) \neq \mathbb{E}^u(y_0)$  для  $x_0 = y_0$  с  $O(x_0) \neq O(y_0)$ . Такой эффект невозможен для устойчивого подрасслоения  $\mathbb{E}^s(x_0)$ , зависящего только от начальной точки  $x_0$ . Множество  $\Lambda$  называется *гиперболическим*, если  $f(\Lambda) = \Lambda$ , и любая орбита, лежащая в  $\Lambda$  гиперболическая, причем постоянные  $c > 0$ ,  $0 < \mu < 1$  в вышеприведенных оценках не зависят от выбора орбиты (поэтому иногда говорят о *равномерной гиперболичности*).

<sup>2</sup>Это отображение, в силу свойств устойчивости и транзитивности, можно рассматривать как некоторый аналог автоморфизма Аносова

**Определение 2.** Эндоморфизм  $f: M \rightarrow M$ , называется эндоморфизмом Аносова, если все объемлющее многообразие  $M^n$  является гиперболическим множеством эндоморфизма  $f$ .

Хорошо изученными эндоморфизмами Аносова являются растягивающие эндоморфизмы, то есть такие эндоморфизмы, для которых разложение  $\mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u$  тривиально,  $\mathbb{E}^s$  — нульмерно, а размерность  $\mathbb{E}^u$  совпадает с размерностью объемлющего многообразия. В частности, в работе [12] доказано, что если  $M$  компактно, то периодические точки растягивающего эндоморфизма  $f$  плотны в  $M$ . Таким образом, любой растягивающий эндоморфизм компактного многообразия автоматически удовлетворяет аксиоме  $A$ , а его неблуждающее множество совпадает со всем объемлющим многообразием. В той же работе было показано, что любое гладкое компактное многообразие, допускающее растягивающий эндоморфизм, имеет эйлерову характеристику равную нулю, а его универсальное накрывающее пространство диффеоморфно  $\mathbb{R}^n$ . Если компактное многообразие  $M$  является плоским<sup>3</sup>, то, как следует из работы [7], на нем существует растягивающий эндоморфизм.

В работе [12] было показано, что если многообразие  $M^n$  диффеоморфно  $n$ -мерному тору  $\mathbb{T}^n$ , то растягивающий эндоморфизм  $f$  топологически сопряжен с алгебраическим растягивающим автоморфизмом этого тора.

**Определение 3.**  $C^r$ -гладкий ( $r \geq 1$ ) эндоморфизм  $f: M \rightarrow M$  называется  $A$ -эндоморфизмом, если его неблуждающее множество  $NW(f)$  гиперболическое, и в  $NW(f)$  всюду плотны периодические точки.

Напомним, что отображение  $f: N \rightarrow N$  называется *транзитивным*, если существует точка  $x \in N$ , положительная полуорбита которой плотна в  $N$ . Приведем формулировку следующей так называемой Спектральной Теоремы для  $A$ -эндоморфизмов, доказанной в [10], и являющейся обобщением теоремы о спектральном разложении С. Смейла для диффеоморфизмов [13].

**Предложение 1.** *Неблуждающее множество  $NW(f)$   $A$ -эндоморфизма  $f: M \rightarrow M$  единственным образом с точностью до нумерации представляется в виде объединения замкнутых и попарно непересекающихся множеств*

$$NW(f) = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_l, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \text{ при } i \neq j,$$

таких, что

- $f(\Omega_j) = \Omega_j$  для всех  $1 \leq j \leq l$ .
- $f|_{\Omega_j}: \Omega_j \rightarrow \Omega_j$  транзитивен для всех  $1 \leq j \leq l$ .

Множества  $\Omega_1, \dots, \Omega_l$ , удовлетворяющие теореме 1, называются *базисными множествами*.

Заметим, что из условия  $f(\Omega_j) = \Omega_j$  вообще говоря не следует, что  $f^{-1}(\Omega_j) = \Omega_j$ . В связи с этим дадим следующее определение.

<sup>3</sup>То есть таким, у которого кривизна всюду равна нулю.

**Определение 4.** Базисное множество  $\Lambda$   $A$ -эндоморфизма  $f: M \rightarrow M$  называется *строго инвариантным*, если имеет место равенство  $f^{-1}(\Lambda) = \Lambda$ .

Для доказательства основного результата нам понадобится следующее топологическое утверждение.

**Предложение 2.** Пусть  $X$  — топологическое пространство, обладающее базой  $\mathcal{B}$ , состоящей из связных множеств, и пусть  $N \subset X$  — замкнутое подмножество. Тогда каждая компонента связности дополнения  $X \setminus N$  является открытым множеством.

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную точку  $x \in X \setminus N$ . Так как  $X \setminus N$  — открытое множество, то найдется связное открытое множество  $U \in \mathcal{B}$  такое, что  $x \in U$ . Пусть  $K$  — компонента связности  $X \setminus N$ , содержащая точку  $x$ . Так как  $K$  есть наибольшее связное подмножество  $X \setminus N$ , содержащее точку  $x$ , а  $U$  связна, имеет место включение  $U \subset K$ . Доказываемое утверждение теперь немедленно следует из произвольности выбора точки  $x$ .  $\square$

**Следствие.** Пусть  $M$  — замкнутое многообразие, а  $N \subset M$  — его замкнутое подмножество. Тогда каждая компонента связности  $M \setminus N$  является открытым множеством.

*Доказательство.* В качестве базы  $\mathcal{B}$ , состоящей из связных множеств, достаточно взять объединение всех множеств вида  $\varphi(B_r(p))$ , где  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow M$  — координатное отображение атласа многообразия  $M$ , а  $B_r(p)$  — открытый шар радиуса  $r$ .  $\square$

### 3. Доказательство теоремы 1

Предположим противное, то есть, что существует  $A$ -эндоморфизм  $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , обладающий аттрактором  $\Lambda$  с указанными в формулировке теоремы свойствами.

Так как неустойчивое многообразие  $W^u(x)$  любой точки  $x \in \Lambda$  является незамкнутой кривой без самопересечений, и  $f(W^u(x)) = W^u(f(x))$ , то ограничение  $f|_{W^u(x)}$  является инъективным отображением.

Покажем теперь, что в дополнении  $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$  имеется компонента связности  $K$ , содержащая некоторую периодическую точку  $O$  эндоморфизма  $f$ . Так как  $\Lambda$  является аттрактором, то найдется его замкнутая окрестность  $U \supset \Lambda$  такая, что  $f(U) \subset \text{int}(U)$ , и  $\bigcap_{l=0}^{\infty} f^l(U) = \Lambda$ . Рассмотрим произвольную точку  $y_0 \in \mathbb{T}^2 \setminus U$  и ее произвольную отрицательную полуорбиту  $O^-(y_0)$ . Из включения  $f(U) \subset U$  непосредственно вытекает, что пересечение  $O^-(y_0) \cap U$  пусто. Так как  $\alpha$ -предельное множество любой точки  $x \in \mathbb{T}^2$  содержится в неблуждающем множестве  $NW(f)$ , то замыкание  $cl(O^-(y_0))$  содержит точку  $w \in NW(f) \setminus \Lambda$ . Тогда в силу предложения 1 существует базисное множество  $\Lambda_1 \subset \mathbb{T}^2 \setminus U$ , отличное от  $\Lambda$ , содержащее точку  $w$ . В базисном множестве  $\Lambda_1$  выберем произвольную периодическую точку

$O$  некоторого наименьшего периода  $k$ . Если  $k > 1$ , то можно провести дальнейшие рассуждения для отображения  $f^k$ . Таким образом, можно без ограничения общности считать точку  $O$  неподвижной точкой отображения  $f$ .

Пусть  $K$  — компонента связности дополнения  $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$ , содержащая неподвижную точку  $O$ . Обозначим через  $\delta(K)$  достижимую изнутри  $K$  границу компоненты  $K$ , и возьмем слой  $l \subset \Lambda$  ламинации  $\Lambda$  из  $\delta(K)$ . По условию,  $l$  является неустойчивым многообразием некоторой точки из  $\Lambda$ . Покажем, что  $f^r(l) = l$  для некоторого  $r \in \mathbb{N}$ . Действительно, достижимость изнутри  $K$  означает, что для любой точки  $z \in l$  существует дуга  $d$  с концевыми точками  $O$  и  $z$  такая, что  $d \setminus \{z\} \subset K$ . Поскольку  $f$  является локальным диффеоморфизмом, а  $\Lambda$  и  $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$  инвариантны относительно  $f$ , то аналогичная дуга  $f(d)$  существует для точки  $f(z)$ . Следовательно,  $f(z)$  принадлежит достижимому из  $K$  слою  $f(l)$  ламинации  $\Lambda$ . Это означает инвариантность множества  $\delta(K)$ . Поскольку  $\delta(K)$  состоит из конечного числа слоев, то  $f^r(l) = l$  для некоторого  $r \in \mathbb{N}$ . Перейдя к итерации  $f^{nr}$ , если необходимо, будем далее считать, что теперь все слои ламинации  $\Lambda$  из  $\delta(K)$  инвариантны относительно  $f$ .

Рассмотрим произвольную точку  $p \in l$ . Так как  $f$  является  $k$ -накрытием,  $k \geq 2$ , то полный прообраз  $f^{-1}(p)$  содержит точку  $p_1 \neq p$ . Так как  $f(\Lambda) = \Lambda = f^{-1}(\Lambda)$ , то  $p_1 \in \Lambda$ . В силу инъективности ограничения  $f|_{W^u(x)}$  имеем  $p_1 \notin l$ . Ясно, что  $p_1$  не принадлежит достижимой из  $K$  границе  $\delta(K)$ . Действительно, если  $p_1 \in l_*$ , где  $l_*$  — достижимый из  $K$  слой ламинации  $\Lambda$ , инвариантный относительно  $f$ , отличный от  $l$ , то  $f(l_*) = l_*$ . С другой стороны,  $f(l_*) = l$ , чего не может быть.

Так как  $f$  является накрытием, а множества  $\Lambda$  и  $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$  инвариантны относительно  $f$ , то из рассмотрения поднятия пути соединяющего точки  $p$  и  $O$  с началом в точке  $p_1$  следует, что точка  $p_1$  принадлежит достижимой изнутри границе некоторой компоненты связности  $K_1$  множества  $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$ . Более того,  $p_1$  принадлежит слою, скажем  $l_1$ , ламинации  $\Lambda$  такому, что  $f(l_1) = l$ . Из предыдущего вытекает, что  $l_1 \notin \delta(K)$ . Поэтому  $K \neq K_1$ . Более того, в  $K_1$  имеется точка  $O_1$  такая, что  $f(O_1) = O$ . Аналогично показывается, что полный прообраз  $f^{-1}(p_1)$  содержит точку  $p_2 \notin \{p, p_1\}$ , принадлежащую компоненте  $K_2$  дополнения  $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$  к  $\Lambda$  такой, что  $K_2 \notin \{K, K_1\}$ , и существует точка  $O_2 \in K_2$  такая, что  $f(O_2) = O_1$ . Продолжая этот процесс, получим отрицательную полуорбиту  $O^-(p) = \{p = p_0, p_1, p_2, \dots\}$ ,  $f(p_{j+1}) = p_j$ , точки  $p$ , и последовательность  $\{K = K_0, K_1, K_2, \dots\}$ ,  $f(K_{j+1}) = K_j$ , со следующими свойствами

- 1) точка  $p_i \in K_i$  принадлежит достижимой из  $K_i$  границе области  $K_i$  для всех  $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ;
- 2)  $K_i$  суть попарно различные компоненты связности дополнения  $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$  к  $\Lambda$ ;
- 3) существует отрицательная полуорбита  $O^-(O) = \{O, O_1, O_2, \dots\}$ ,  $f(O_{j+1}) = O_j$ , точки  $O$  такая, что  $O_i \in K_i$  для всех  $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Так как  $O \in \mathbb{T}^2 \setminus U$ , и  $f(U) \subset U$ , то имеет место включение  $O^-(O) \subset \mathbb{T}^2 \setminus \text{int}(U)$ . Из включения  $O^-(O) \subset \mathbb{T}^2 \setminus \text{int}(U)$  и компактности множества  $\mathbb{T}^2 \setminus \text{int}(U)$ , следует, что последовательность  $O^-(O)$  имеет предельную точку  $O^* \in \mathbb{T}^2 \setminus \text{int}(U)$ . Пусть  $K^*$  — компонента связности множества  $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$ , содержащая точку  $O^*$ . В

силу следствия из предложения 2 компонента связности  $K^*$  является открытым множеством. Тогда найдутся два различных числа  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  таких, что  $O_{n_1} \in K^*$  и  $O_{n_2} \in K^*$ , что противоречит тому, что  $K_{n_1}$  и  $K_{n_2}$  — различные компоненты связности дополнения  $\mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$ .  $\square$

### Список цитируемых источников

1. *Аносов, Д. В.* Исходные понятия. Элементарная теория. // “Современные проблемы математики” Фундаментальные направления (Итоги науки и техники), Дин. системы - 1. / Под ред. Д. В. Аносова. — 1985. — С. 156–178, С. 178–204.  
Anosov, D. V. Basic Concepts. Elementary Theory. Dynamical systems 1, 156-178 (1985).
2. *Аносов, Д. В., Жуžoма, Е. В.* Нелокальное асимптотическое поведение кривых и слоев ламинаций на универсальных накрывающих. — Москва: Наука (Труды МИАН, 249), 2005. — 239 с.  
Anosov, D. V., Zhuzhoma, E. V. Asymptotic behavior of covering curves on the universal coverings of surfaces. Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova 238, 5-54 (2002).
3. *Гринес, В. З., Починка, О. В.* Введение в топологическую классификацию диффеоморфизмов на многообразиях размерности два и три. — Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. — 424 с.  
Grines, V. Z., Medvedev, T. V., Pochinka, O. V. Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. Switzerland Springer International Publishing, 295, 2016.
4. *Куренков, Е. Д.* О существовании эндоморфизма двумерного тора со строго инвариантным сжимающимся репеллером // Журнал Средневолжского математического общества. — 2017. — Т.19, №1. — С. 60–66.  
Kurenkov, E. D. On existence of endomorphism of 2-torus with strictly invariant contracting repeller. Zhurnal Srednevozhskogo matematicheskogo obshetva 19(1), 60-66 (2017).
5. *Синай, Я. Г.* Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы // Функциональный анализ и его приложения. — 1968. — Т.2, №1. — С. 64–89.  
Sinai, Ya. G. Markov partitions and C-diffeomorphisms. Functional Analysis and its applications 2, No.1, 61-82 (1968).
6. *Aranson, S., Belitsky, G., Zhuzhoma, E.* Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces. // Translations of Math. Monographs, Amer. Math. Soc., Vol.153, 1996.
7. *Epstein, D., Shub, M.* Expanding endomorphisms of flat manifolds // Topology. — 1968. — Vol.7, No.2. — P. 139–141.
8. *Katok, A., Hasselblatt, B.* Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. — Cambridge University Press, 1995.
9. *Nitecki, Z.* Nonsingular endomorphisms of the circle // Proc. Symp. Pure Math. — 1970. — Vol.14. — P. 203–220.
10. *Przytycki, F.* Anosov endomorphisms // Studia Math. — 1977. — Vol.58, No.3. — P. 249–285.



11. *Robinson, C.* Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. Studies in Adv. Math., Sec. edition. — CRC Press, 1999.
12. *Shub, M.* Endomorphisms of compact differentiable manifolds // Amer. J. Math. — 1969. — Vol.91. — P. 175–199.
13. *Smale S.* Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. — 1967. — Vol.73. — P. 747–817.
14. *Zhang, M.* On the topologically conjugate classes of Anosov endomorphisms on tori. // Chinese Annals of Math., ser. B. — 1989. — Vol.10. — P. 416–425.

Получена 20.09.2018

УДК 517.9

# Устойчивость решений уравнений параболического типа с медленно меняющимися коэффициентами<sup>1</sup>

С. А. Кащенко<sup>\*,\*\*</sup>, Д. О. Логинов<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup>Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,  
Ярославль 150003,

<sup>\*\*</sup>Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”,  
Москва 115409.

*E-mail: kasch@uniyar.ac.ru, dimonl@inbox.ru*

**Аннотация.** Рассматривается вопрос об устойчивости решений линейных систем уравнений параболического типа. Основное внимание уделено изучению устойчивости решений с медленно меняющимися почти периодическими коэффициентами и с переменной областью определения. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости и разработан эффективный алгоритм исследования задач устойчивости решений. Кроме этого рассмотрены подобные задачи для систем параболических уравнений с большими коэффициентами диффузии и для систем с быстро осциллирующими по пространственной переменной коэффициентами.

**Ключевые слова:** параболические системы, устойчивость, критические случаи, асимптотика.

## Stability of solutions of parabolic equations with slowly varying coefficients

S. A. Kaschenko, D. O. Loginov

P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl 150003

National Research Nuclear University MEPhI, Moscow 115409.

**Abstract.** The question of the stability of solutions of linear systems of parabolic equations is considered. The main attention is paid to the study of the stability of solutions with slowly varying almost periodic coefficients and with a variable domain of definition. Critical cases in the problem of stability are identified and an effective algorithm for studying problems of solution stability is developed. In addition, similar problems for systems of parabolic equations with large diffusion coefficients and for systems with coefficients rapidly oscillating in spatial variable are considered.

**Keywords:** parabolic systems, stability, critical cases, asymptotics.

**MSC 2010:** 47D99

---

<sup>1</sup>Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №18-29-10043

## 1. Критерий равномерной регулярности

На отрезке  $0 \leq x \leq 1$  рассмотрим краевую задачу

$$H(\varepsilon)u \equiv \dot{u} - D(\varepsilon t, x)u'' - A_1(\varepsilon t, x)u' - A_2(\varepsilon t, x)u = 0, \quad (1)$$

$$(u' + B_1(\varepsilon t)u)|_{x=0} = (u' + B_2(\varepsilon t)u)|_{x=1} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ , элементами матриц  $D(\tau, x)$ ,  $A_j(\tau, x)$ ,  $B_j(\tau, x)$  ( $j = 1, 2$ ) являются тригонометрические по  $\tau$  многочлены с частотами, не зависящими от  $x$ , матрица  $D(\tau, x)$  имеет собственные значения с положительными (равномерно по  $\tau \in (-\infty, \infty)$ ,  $x \in [0, 1]$ ) вещественными частями, зависимость от  $x$  достаточно гладкая. При достаточно малых  $\varepsilon$  изучим вопрос об устойчивости в  $C_{(0,1)}$  решений краевой задачи (1), (2). Для обыкновенных дифференциальных уравнений поставленная задача изучалась в [1]–[5], а для уравнений с запаздыванием — в [3]. В периодическом по  $\tau = \varepsilon t$  случае развернутые исследования изложены в монографиях [6, 7, 8] и в статье [9]. Для параболических уравнений некоторые результаты приведены в [10].

Для формулировки основного результата понадобится определение равномерной регулярности и некоторые обозначения. Напомним, что оператор  $H(\varepsilon)$  называется *регулярным*, если при каждой  $f(t, x) \in C$  ( $C$  — банахово пространство непрерывных и ограниченных при  $t \in (-\infty, \infty)$ ,  $x \in [0, 1]$  функций со стандартной нормой) неоднородная краевая задача

$$H(\varepsilon)u = f(t, x) \quad (3)$$

имеет решение  $u_f(t, x) \in C$ . При этом (см. [11]) выполнена оценка

$$|u_f(t, x)|_C \leq N|f(t, x)|_C \quad \left( |f(t, x)|_C = \sup_{t,x} |f(t, x)|_{\mathbb{R}^m} \right), \quad (4)$$

где  $N > 0$  не зависит от  $f(t, x) \in C$ . Оператор  $H(\varepsilon)$  называют *равномерно регулярным*, если найдется такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  он регулярен и выполнена оценка (4), в которой постоянная  $N > 0$  не зависит от  $\varepsilon$ .

Введем в рассмотрение семейство эллиптических операторов  $L(\tau)$ , зависящих от параметра  $\tau \in (-\infty, \infty)$ :

$$L(\tau)v \equiv D(\tau)v'' + A_1(\tau, x)v' + A_2(\tau, x)v,$$

$$(v' + B_1(\tau)v)|_{x=0} = (v' + B_2(\tau)v)|_{x=1} = 0.$$

Будем говорить, что спектр операторов  $L(\tau)$  *отделен от мнимой оси*, если при всех  $\tau \in (-\infty, \infty)$  собственные значения этого оператора лежат в части комплексной плоскости, выделяемой неравенством

$$|\operatorname{Re}\lambda| \geq \lambda_0 > 0. \quad (5)$$

Как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений имеет место следующий результат.

**Теорема 1.** Для того, чтобы оператор  $H(\varepsilon)$  был равномерно регулярным необходимо и достаточно, чтобы спектр операторов  $L(\tau)$  был отделен от мнимой оси.

Для параболических краевых задач вида (1), (2) справедливы общие утверждения работы [11] (с помощью простых замен, не меняющих вида уравнения (1), удастся сделать автономными краевые условия). Поэтому при условии отделенности от мнимой оси спектров операторов  $L(\tau)$  и при достаточно малых  $\varepsilon$  для краевой задачи (1), (2) имеет место экспоненциальная дихотомия решений. Пространство  $C_{(0,1)}$  начальных условий в произвольный момент времени  $\tau$  расщепляется в прямую сумму таких подпространств  $E_+(\tau, \varepsilon)$  и  $E_-(\tau, \varepsilon)$ , что решения  $u_+(t, \tau, x, \varepsilon)$  с начальными условиями при  $t = \tau$  из  $E_+(\tau, \varepsilon)$  определены при  $t \geq \tau$ , принадлежат подпространству  $E_+(t, \varepsilon)$  и экспоненциально затухают (по норме  $C_{(0,1)}$ ) при  $t \rightarrow \infty$ , а решения  $u_-(t, \tau, x, \varepsilon)$  с начальными условиями (при  $t = \tau$ ) из  $E_-(\tau, \varepsilon)$  определены при  $t \in (-\infty, \infty)$ , принадлежат  $E_-(t, \varepsilon)$  и экспоненциально растут при  $t \rightarrow \infty$ . Показатели экспоненциального роста и убывания норм решений  $u_{\pm}(t, \tau, x, \varepsilon)$  отделены от нуля при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Подпространство  $E_-(t, \varepsilon)$  конечномерно и размерность его совпадает с количеством собственных значений операторов  $L(\tau)$ , имеющих положительные вещественные части. Проекторы  $P_{\pm}(\tau, \varepsilon)$ , осуществляющие расщепление  $C_{(0,1)}$  на  $E_{\pm}(\tau, \varepsilon)$ , почти периодичны по  $\tau$ . Как и для случая обыкновенных дифференциальных уравнений можно показать, что на каждом элементе  $\varphi(x) \in C_{(0,1)}$  выполнено равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\tau} \|(P_{\pm}(\tau, \varepsilon) - P_{\pm}(\tau))\varphi(x)\|_{C_{(0,1)}} = 0, \quad (6)$$

где  $P_+(\tau)$  ( $P_-(\tau)$ ) — проектор на корневое подпространство оператора  $L(\tau)$ , отвечающее собственным значениям с отрицательными (положительными) вещественными частями. Отсюда, в частности, вытекает, что при условии отделенности от мнимой оси спектров операторов  $L(\tau)$  необходимым и достаточным условием устойчивости решений (1), (2) является требование, чтобы все собственные значения  $L(\tau)$  имели отрицательные вещественные части.

Доказательство теоремы 1 и равенства (6) проходит по использованной в [3] схеме, основанной на теории экспоненциальной дихотомии [11] и на результате работы [12]. Подробнее на обосновании не останавливаемся.

## 2. Устойчивость решений в критический случаях “простых чисто мнимых собственных значений”

Предполагаем здесь, что операторы  $L(\tau)$  имеют  $m_0$  ( $0 < m_0 < \infty$ ) простых (равномерно относительно  $\tau$ ) собственных значений, лежащих на мнимой оси, а все остальные собственные значения удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re} \lambda(\tau) \leq -\lambda_0 < 0. \quad (7)$$

При сделанных предложениях исследуем вопрос об устойчивости решений краевой задачи (1), (2). Отметим, что для случая обыкновенных дифференциальных уравнений поставленная задача решена в работе [13]. Как оказывается, результаты из [13] допускают обобщение на рассматриваемый здесь класс задач.

Сначала изложим алгоритмическую часть. Пусть  $i\omega_j(\tau)$  ( $j = 1, \dots, m^0$ ,  $m^0 = \frac{m_0}{2}$ , если нет нулевого собственного значения, и  $m^0 = \frac{m_0 - 1}{2}$  — в противном случае) — все те чисто мнимые собственные значения оператора  $L(\tau)$ , для которых  $\omega_j(\tau) > 0$ . Ясно, что все функции  $\omega_j(\tau)$  почти периодичны вместе со своими производными и каждой из них отвечают собственные функции  $a_j(\tau, x)$  и  $b_j(\tau, x)$  операторов  $L(\tau)$  и  $-L^*(\tau)$ , соответственно. Здесь

$$\begin{aligned} L^*(\tau)v &\equiv D^*(\tau, x)v'' + [2D^*(\tau, x)' - A_1^*(\tau, x)]v' + (A_2^*(\tau, x) - A_1^*(\tau, x)' + D^*(\tau, x)'')v, \\ (D^*(\tau, x)v' + (B_1^*(\tau)D^*(\tau, x) - A_1^*(\tau, x)) - D^*(\tau, x)')v|_{x=0} &= 0, \\ (D^*(\tau, x)v' + (B_2^*(\tau)D^*(\tau, x) - A_1^*(\tau, x)) - D^*(\tau, x)')v|_{x=1} &= 0. \end{aligned}$$

Без потери общности можно считать, что  $\max_x \|a_j(\tau, x)\|_{R^m} \geq v_0 > 0$  и  $\langle a_j(\tau, x), b_j(\tau, x) \rangle \equiv 1$ ,  $\langle a_j(\tau, x), \bar{b}_j(\tau, x) \rangle \equiv 0$  ( $j = 1, \dots, m^0$ ), где

$$\langle a(\tau, x), b(\tau, x) \rangle = \int_0^1 (a(\tau, x), b(\tau, x)) dx.$$

Кроме этого, будем считать, что функции  $\int_0^t [\omega_j(s) - M(\omega_j(t))] ds$  почти периодичны. Здесь принято стандартное обозначение

$$M(\varphi(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(s) ds.$$

Приступим непосредственно к описанию алгоритма. Введем в рассмотрение формальные ряды

$$\alpha_j(\varepsilon) = \varepsilon \alpha_{j1} + \varepsilon^2 \alpha_{j2} + \dots, \quad (8)$$

$$v_j(\tau, x, \varepsilon) = \gamma_j(\tau) a_j(\tau, x) + \varepsilon a_{j1}(\tau, x) + \varepsilon^2 a_{j2}(\tau, x) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (9)$$

где  $\alpha_{jk}$  — некоторые постоянные,  $\gamma_j(t)$  — скалярные, а  $a_{jk}(t)$  — векторные почти периодические функции, производные которых почти периодичны по  $\tau$ . Коэффициенты рядов (8), (9) будем последовательно определять из формальных тождеств

$$\frac{\partial v_j(\tau, x, \varepsilon)}{\partial t} = L(\tau)v_j(\tau, x, \varepsilon) - [\alpha_j(\varepsilon) + i\omega_j(\tau)]v_j(\tau, x, \varepsilon), \quad (10)$$

$$v_j'(\tau, 0, \varepsilon) + B_1(\tau)v_j(\tau, 0, \varepsilon) = 0, \quad v_j'(\tau, 1, \varepsilon) + B_2(\tau)v_j(\tau, 1, \varepsilon) = 0. \quad (11)$$

Учитывая в (10) выражения (8) и (9), будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon = 0$  краевая задача (10), (11) обращается в тождество, собирая коэффициенты при первой степени  $\varepsilon$ , приходим к выражениям

$$(L(\tau) - i\omega_j(\tau)I)a_{j1}(\tau, x) = \dot{\gamma}_j(\tau)a_j(\tau) + \gamma_j(\tau)[\dot{a}_j(\tau, x) + \alpha_{j1}a_j(\tau, x)], \quad (12)$$

$$a'_{j1}(\tau, 0) + B_1(\tau)a_{j1}(\tau, 0) = a'_{j1}(\tau, 1) + B_2(\tau)a_{j1}(\tau, 1) = 0. \quad (13)$$

Условием разрешимости краевой задачи (12), (13) относительно  $a_{j1}(\tau, x)$  является ортогональность правой части (13) функции  $b_j(\tau, x)$ . Отсюда получаем, что

$$\dot{\gamma}_j(\tau) + [\langle \dot{a}_j(\tau, x), b_j(\tau, x) \rangle + \alpha_{j1}] \gamma_j(\tau) = 0. \quad (14)$$

Для существования почти периодического решения (14) необходимо, чтобы

$$\alpha_{j1} = -M(\operatorname{Re}\langle \dot{a}_j(t, x), b_j(t, x) \rangle).$$

Это условие будет и достаточным, если функция

$$\int_0^\tau [\langle \dot{a}_j(\tau, x), b_j(\tau, x) \rangle - M(\langle \dot{a}_j(t, x), b_j(t, x) \rangle)] dx$$

тоже будет почти периодической. Ниже считаем, что это и другие подобного рода условия выполнены.

После того, как функция  $\gamma_j(\tau)$  определена, находим из краевой задачи (12), (13) функцию  $a_{j1}(\tau, x)$ . Ее можно представить в виде

$$a_{j1}(\tau, x) = a_{j1}^0(\tau, x) + \gamma_{j1}(\tau)a_j(\tau, x),$$

где  $a_{j1}^0(\tau, x)$  — какое-либо фиксированное почти периодическое решение задачи (12), (13), а  $\gamma_{j1}(\tau)$  — произвольная почти периодическая (вместе со своей производной) скалярная функция.

Собирая на втором шаге коэффициенты в (10), (11) при  $\varepsilon^2$ , получим краевую задачу для определения  $a_{j2}(\tau, x)$ . Условие ее разрешимости приводит к уравнению относительно  $\gamma_{j1}(\tau)$ :

$$\dot{\gamma}_{j1}(\tau) + [\langle \dot{a}_j(\tau, x), b_j(\tau, x) \rangle + \alpha_{j1}] \gamma_{j1}(\tau) + \langle \dot{a}_{j1}^0(\tau, x), b_j(\tau, x) \rangle + \alpha_{j2} \gamma_j(\tau) = 0.$$

Из условия существования почти периодического решения этого уравнения находим

$$\alpha_{j2} = M(\langle \dot{a}_{j1}^0(\tau, x), b_j(\tau, x) \rangle) \exp \int_0^\tau [\langle \dot{a}_j(s, x), b_j(s, x) \rangle + \alpha_{j1}] ds.$$

Зная  $\alpha_{j2}$ , находим сначала  $\gamma_{j1}(\tau)$ , потом  $a_{j2}(\tau, x) = a_{j2}^0(\tau, x) + \gamma_{j2}(\tau)a_j(\tau)$  и т. д. Таким образом, все элементы рядов (8), (9) последовательно определяются. Те же построения проходят и для случая тождественно нулевого по  $\tau$  собственного значения  $L(\tau)$ , поэтому отдельно этот случай не выделяем. Будем считать, что при наличии нулевого собственного значения  $L(\tau)$  соответствующим рядам (8), (9) отвечает индекс  $j = 0$ .

**Теорема 2.** *Предположим, что первые отличные от нуля коэффициенты всех рядов*

$$\varepsilon\alpha_{j1} + \varepsilon^2 \operatorname{Re}\alpha_{j2} + \varepsilon^3 \operatorname{Re}\alpha_{j3} + \dots \quad (15)$$

*отрицательные.*

*Тогда существует  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  решения краевой задачи (1), (2) экспоненциально устойчивы. Если же первый ненулевой коэффициент хотя бы одного из рядов положителен, то найдется такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  решения (1), (2) неустойчивы.*

### 3. Обоснование теоремы 2

Сформулируем сначала в виде лемм два результата, из которых и будет следовать утверждение теоремы. Положим

$$\alpha_{jk}(\varepsilon) = \varepsilon\alpha_{j1} + \dots + \varepsilon^k \alpha_{jk},$$

$$v_{jk}(\tau, x, \varepsilon) = \gamma_j(\tau) a_j(\tau, x) + \dots + \varepsilon^k a_{jk}(\tau, x).$$

**Лемма 1.** *Для каждого номера  $k$  найдется такой линейный относительно  $u(\tau, x)$  почти периодический по  $\tau$  и ограниченный равномерно относительно  $\tau, x, \varepsilon$  оператор  $B_k(\tau, x, \varepsilon): C_{(0,1)} \rightarrow C_{(0,1)}$ , что функции*

$$u_{jk}(\tau, x, \varepsilon) = v_{jk}(\tau, x, \varepsilon) \exp\left[\frac{i}{\varepsilon} \int_0^\tau \omega_j(s) ds + \alpha_{jk}(\varepsilon)t\right]$$

*( $\bar{u}_{jk}(\tau, x, \varepsilon)$ ) являются решениями краевой задачи*

$$K(\varepsilon)u \equiv \dot{u} - (L(\tau)u + \varepsilon^k B_k(\tau, x, \varepsilon, u)) = 0, \quad (16)$$

$$(u' + B_1(\tau)u)|_{x=0} = (u' + B_2(\tau)u)|_{x=1} = 0. \quad (17)$$

Предположим затем, что ни один из рядов (15) не состоит из одних нулей. Пусть  $\operatorname{Re}\alpha_{jk_j}$  — первый отличный от нуля коэффициент этого ряда. Положим  $k_0 = \max k_j$ . Имеет место следующее утверждение.

**Лемма 2.** *Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  оператор  $K(\varepsilon)$  регулярен и для решения  $u_f(t, x) \in C$  краевой задачи  $K(\varepsilon)u = f(t, x)$  и (17) ( $f(t, x) \in C$ ) имеет место оценка*

$$|u_f(t, x)|_C \leq N\varepsilon^{-k_0} |f(t, x)|_C, \quad (18)$$

*где  $N > 0$  не зависит от  $f(t, x) \in C$  и от  $\varepsilon$ .*

Покажем теперь, как с помощью лемм 1 и 2 завершить обоснование теоремы, а затем докажем эти леммы.

Предположим сначала, что не все коэффициенты каждого из рядов (15) нулевые. Положим  $k = k_0 + 1$  и с краевыми условиями (17) рассмотрим выражение

$$H_k(\varepsilon, \mu)u \equiv \dot{u} - [L(\tau)u + \varepsilon^k B_k(\tau, x, \varepsilon, u) - \mu \varepsilon^k B_k(\tau, x, \varepsilon, u)],$$

где  $\mu \in [0, 1]$ . Из оценки (18) сразу получаем, что при всех  $\mu \in [0, 1]$  оператор  $H_k(\varepsilon, \mu)$  регулярен при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , где  $\varepsilon_0 > 0$  и не зависит от  $\mu$ . Так как свойства устойчивости при всех  $\mu \in [0, 1]$  одинаковы, то отсюда получаем обоснование первой части теоремы 2.

Осталось разобрать тот случай, когда среди рядов (9) есть такие, которые могут состоять из одних нулей, а первый отличный от нуля коэффициент хотя бы одного из рассматриваемых рядов положителен. Обозначим его порядковый номер в соответствующем ряду через  $k^0$ . Выполним в (1), (2) замену

$$u = v \exp[\alpha \varepsilon^{k^0+1} t],$$

где  $\alpha > 0$ . Очевидно, что выражения, аналогичные (15) для получающейся краевой задачи отличаются от рядов (15) на слагаемое  $-\alpha \varepsilon^{k^0+1}$ . За счет подходящего выбора  $\alpha$  можно сделать так, чтобы  $(k^0 + 1)$ -ые члены всех этих рядов будут ненулевые. Остается лишь положить  $k_0 = k^0 + 2$  и воспользоваться предыдущими рассуждениями. Отметим, наконец, что из неустойчивости решений краевой задачи

$$\dot{u} = (L(\tau) - \alpha \varepsilon^{k^0+1})u, (u' + B_1(\tau)u)|_{x=0} = (u' + B_2(\tau)u)|_{x=1} = 0$$

тем более следует неустойчивость решений (1), (2). Теорема 2 доказана.

Осталось обосновать леммы 1 и 2. Для доказательства леммы 1 рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=-m_0}^{m_0} \xi_j \langle v_{jk}(\tau, x, \varepsilon), b_r(\tau, x) \rangle = \langle u(t, x), b_r(\tau, x) \rangle. \tag{19}$$

Здесь штрих у знака суммы означает, что при четком  $m_0$  отсутствует слагаемое, отвечающее  $j = 0$  (т. е. — нулевому собственному значению). Индекс  $r$  принимает те же значения, что и  $j$ . Кроме того,  $v_{jk}(\tau, x, \varepsilon) = \bar{v}_{jk}(\tau, x, \varepsilon)$ ,  $b_j(\tau, x) = \bar{b}_j(\tau, x)$ . Из определения  $v_{jk}(\tau, x, \varepsilon)$  и  $b_j(\tau, x)$  сразу заключаем, что решения  $\xi_{jk}(\tau, x, \varepsilon)$  системы (19) — линейные почти периодические (по  $\tau$ ) функционалы, ограниченные и непрерывные по  $\varepsilon$  равномерно относительно  $\tau$ , причем

$$\xi_{jk}(\tau, v_{rk}(\tau, x, \varepsilon), \varepsilon) = \delta_{jr}. \tag{20}$$

Положим, наконец,

$$B_{k+1}(\tau, x, \varepsilon, u) = \sum_{j=-m_0}^{m_0} \xi_{jk}(\tau, u, \varepsilon) \dot{a}_{jk}(\tau, x) \quad (\dot{a}_{-jk}(\tau, x) = \bar{a}_{jk}(\tau, x)).$$



Учитывая в этой формуле равенства (19), заключаем, что  $B_{k+1}(\tau, x, \varepsilon, u)$  удовлетворяет всем сформулированным в лемме 1 требованиям.

Перейдем к доказательству леммы 2. Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{u} = L(\tau)u + \varepsilon^k B_k(\tau, x, \varepsilon, u), \quad (21)$$

$$(u' + B_1(\tau)u)|_{x=0} = (u' + B_2(\tau)u)|_{x=1} = 0. \quad (22)$$

Из результатов, приведенных в предыдущем пункте, вытекает, что пространство начальных условий этой краевой задачи расщепляется при каждом  $t$  и достаточно малых  $\varepsilon$  в прямую сумму двух инвариантных относительно решений (21), (22) подпространств  $E_+(t, \varepsilon)$  и  $E_-(t, \varepsilon)$ , причем  $E_-(t, \varepsilon) - m_0$ -мерно, а для решений  $u(t, x)$  с начальными условиями из  $E_+(s, \varepsilon)$  справедливо неравенство

$$\|u(t, x, \varepsilon)\|_{C_{(0,1)}} \leq M_+ \exp[-\gamma_+(t-s)] \|u(s, x)\|_{C_{(0,1)}} \quad -\infty < s \leq t < \infty. \quad (23)$$

Проекторы  $P_+(t, \varepsilon)$  и  $P_-(t, \varepsilon)$ , осуществляющие расщепление, почти периодичны по  $t$ . Ясно, что решения  $\operatorname{Re} u_{jk}(\tau, x, \varepsilon)$  и  $\operatorname{Im} u_{jk}(\tau, x, \varepsilon)$  при каждом  $\tau$  принадлежат подпространству  $E_-(\varepsilon t, \varepsilon)$ . Используя затем явный вид таких решений, приходим к выводу, что  $E_-(t, \varepsilon)$  расщепляется в прямую сумму двух подпространств  $E_1(t, \varepsilon)$  и  $E_2(t, \varepsilon)$ , обладающих следующими свойствами: во-первых, проекторы  $P_1(t, \varepsilon)$  и  $P_2(t, \varepsilon)$ , осуществляющие это расщепление, почти периодичны по  $t$  и равномерно ограничены при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; во-вторых  $E_j(t, \varepsilon)$  ( $j = 1, 2$ ) инвариантны относительно решений краевой задачи (21), (22); в-третьих, найдутся такие универсальные постоянные  $M_1, M_2, \gamma_1, \gamma_2 > 0$ , что

$$\|P_1(t, \varepsilon)u(t, x)\|_{C_{(0,1)}} \leq \|P_1(s, \varepsilon)u(s, \varepsilon)\|_{C_{(0,1)}} M_1 \exp[-\gamma_1 \varepsilon^{k_0}(t-s)], \quad (24)$$

$$-\infty < s \leq t < \infty,$$

$$\|P_2(t, \varepsilon)u(t, x)\|_{C_{(0,1)}} \leq \|P_2(s, \varepsilon)u(s, \varepsilon)\|_{C_{(0,1)}} M_2 \exp[-\gamma_2 \varepsilon^{k_0}(t-s)], \quad (25)$$

$$-\infty < s \leq t < \infty.$$

Определим затем функцию Грина  $G(t, s, \varepsilon)$ , положив

$$G(t, s, \varepsilon) = \begin{cases} (P_+(t, \varepsilon) + P_1(t, \varepsilon))U(t, x, \varepsilon), & \text{при } t > s \\ -U(t, s, \varepsilon)P_2(s, \varepsilon), & \text{при } t < s \end{cases}$$

где  $U(t, s, \varepsilon)$  разрешающий оператор краевой задачи (21), (22), обращающийся в тождественный при  $t = s$ . Регулярность оператора  $K(\varepsilon)$  (при малых  $\varepsilon$ ) и оценка (18) вытекают из оценок (23)-(25) и из формулы

$$u_f(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s, \varepsilon) f(s, x) ds \quad (f(s, x) \in C).$$

#### 4. Об устойчивости в более сложных критических случаях

Предположим сначала, что операторы  $L(\tau)$  имеют равномерно (по  $\tau$ ) двукратное нулевое собственное значение, которому отвечает однопараметрическая группа решений. В этом случае найдутся такие гладкие почти периодические по  $\tau$  вектор-функции  $a_0(\tau, x)$ ,  $b_0(\tau, x)$ ,  $c_0(\tau, x)$ ,  $d_0(\tau, x)$ , что

$$\begin{aligned} L(\tau)a_0(\tau, x) &\equiv 0, & L(\tau)b_0(\tau, x) &\equiv a_0(\tau, x), \\ L^*(\tau)c_0(\tau, x) &\equiv 0, & L^*(\tau)d_0(\tau, x) &\equiv c_0(\tau, x), \\ 1 &\equiv \langle a_0(\tau, x), d_0(\tau, x) \rangle \equiv \langle b_0(\tau, x), c_0(\tau, x) \rangle, \\ 0 &\equiv \langle d_0(\tau, x), c_0(\tau, x) \rangle \equiv \langle b_0(\tau, x), d_0(\tau, x) \rangle \equiv \langle a_0(\tau, x), c_0(\tau, x) \rangle. \end{aligned}$$

Считаем, что все остальные собственные значения  $L(\tau)$  удовлетворяют неравенству (7). Вместо краевой задачи (1), (2) рассмотрим более общую

$$\dot{u} = L(\tau)u + \varepsilon D_1(\tau, x)u'' + \varepsilon A_{11}(\tau, x)u' + \varepsilon A_{21}(\tau, x)u, \quad (26)$$

$$(u' + [B_1(\tau) + \varepsilon B_{11}(\tau)]u)|_{x=0} = (u' + [B_2(\tau) + \varepsilon B_{21}(\tau)]u)|_{x=1} = 0, \quad (27)$$

где элементы всех матриц являются тригонометрическими по  $\tau$  многочленами, частоты которых не зависят от  $x$ , а зависимость коэффициентов от  $x$  — гладкая.

При исследовании устойчивости решений краевой задачи (26), (27) воспользуемся сначала выводами, сформулированными в первом пункте этого параграфа. Из них вытекает, что фазовое пространство рассматриваемой краевой задачи расщепляется в прямую сумму двух подпространств  $E_+(t, \varepsilon)$  и  $E_-(t, \varepsilon)$ , второе из которых двумерно, а решения из  $E_+(t, \varepsilon)$  экспоненциально убывают по норме при  $t \rightarrow \infty$ . Таким образом задача сводится к изучению устойчивости решений из двумерного подпространства  $E_-(t, \varepsilon)$ . Далее, проекторы  $P_{\pm}(t, \varepsilon)$ , осуществляющие указанное расщепление, имеют (сильный) предел при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В двумерной области значений проектора  $P_-(t, 0)$  имеется почти периодический базис  $a_0(\tau, x)$ ,  $b_0(\tau, x)$ . Тем самым получаем, что в  $E_-(t, \varepsilon)$  существует гладкий по  $\varepsilon$  почти периодический вместе с производной по  $t$  базис (“близкий” при  $\varepsilon \rightarrow 0$  к  $a_0(\tau, x)$ ,  $b_0(\tau, x)$ ). Теперь уже легко выписать систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений для решений в  $E_-(t, \varepsilon)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= \varepsilon[a_{11}(\tau) + \varepsilon Q_1(t, \varepsilon)]\alpha_1 + \alpha_2[1 + \varepsilon Q_2(t, \varepsilon)], \\ \frac{d\alpha_2}{dt} &= \varepsilon[a_{21}(\tau) + \varepsilon Q_3(t, \varepsilon)]\alpha_1 + \varepsilon[a_{22}(\tau) + \varepsilon Q_4(t, \varepsilon)]\alpha_2. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь через  $Q_j(t, \varepsilon)$  обозначены почти периодические по  $t$  и ограниченные вместе с производными по  $t$  функции, а для функций  $a_{jk}(\tau)$  имеют место формулы

$$a_{11}(\tau) = -\langle \dot{a}_0(\tau, x), d_0(\tau, x) \rangle + \langle a_0(\tau, x), L_1(\tau)d_0(\tau, x) \rangle + ((D_1(\tau, 0)B_1(\tau) +$$

$$\begin{aligned}
& +D(\tau, 0)B_{11}(\tau) + D'_1(\tau, 0) - C_1D_1(\tau, 0) - A_1(\tau, 0)a_0(\tau, 0), d_0(\tau, 0)) - ((D_1(\tau, 1)B_2(\tau) + \\
& \quad + D(\tau, 1)B_{21}(\tau) + D'_1(\tau, 1) - C_2D_1(\tau, 1) + A_1(\tau, 1))a_0(\tau, 1), d_0(\tau, 1)), \\
& \quad a_{21}(\tau) = -\langle \dot{a}_0(\tau, x), c_0(\tau, x) \rangle + \langle a_0(\tau, x), L_1(\tau)c_0(\tau, x) \rangle + ((D_1(\tau, 0)B_1(\tau) + \\
& \quad + D(\tau, 0)B_{11}(\tau) + D'_1(\tau, 0) - C_1D_1(\tau, 0) - A_1(\tau, 0))a_0(\tau, 0), c_0(\tau, 0)) - \\
& - ((D_1(\tau, 1)B_2(\tau) + D(\tau, 1)B_{21}(\tau) + D'_1(\tau, 1) - C_2D_1(\tau, 1) + A_1(\tau, 1))a_0(\tau, 1), c_0(\tau, 1)), \\
& \quad a_{22}(\tau) = -\langle \dot{b}_0(\tau, x), c_0(\tau, x) \rangle + \langle b_0(\tau, x), L_1(\tau)c_0(\tau, x) \rangle + ((D_1(\tau, 0)B_1(\tau) + \\
& \quad + D(\tau, 0)B_{11}(\tau) + D'_1(\tau, 0) - C_1D_1(\tau, 0) - A_1(\tau, 0))b_0(\tau, 0), c_0(\tau, 0)) - \\
& - ((D_1(\tau, 1)B_2(\tau) + D(\tau, 1)B_{21}(\tau) + D'_1(\tau, 1) - C_2D_1(\tau, 1) + A_1(\tau, 1))b_0(\tau, 1), c_0(\tau, 1)),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
L_1(\tau)u &= D_1^*(\tau, x)u'' + (2\varepsilon D_1^{*'}(\tau, x) - A_{11}^*(\tau, x))u' + (A_{21}^*(\tau, x) - A_{11}^{*'}(\tau, x) + D_1^{*''}(\tau, x))u, \\
C_1 &= (D(\tau, 0)B_1(\tau) - A_1(\tau, 0))D^{-1}(\tau, 0), \\
C_2 &= (D(\tau, 1)B_2(\tau) - A_1(\tau, 1))D^{-1}(\tau, 1).
\end{aligned}$$

Сформулируем результаты.

**Теорема 3.** Пусть для произвольного  $\delta > 0$  выполнены условия  $\alpha = M(a_{11}(\tau) + a_{22}(\tau)) < 0$  и  $a_{21}(\tau) \leq -\delta$  ( $\tau \in (-\infty, \infty)$ ). Тогда найдется такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  решения краевой задачи (26), (27) устойчивы. Если же  $\alpha > 0$  или  $a_{21}(\tau) \geq \delta$ , то найдется такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  решения (26), (27) неустойчивы.

В следующем утверждении предполагается, что коэффициенты краевой задачи (26), (27) периодические.

**Теорема 4.** Пусть  $\alpha < 0$ , а функция  $a_{21}(\tau)$  — знакопеременная. Тогда при  $\varepsilon \rightarrow 0$  устойчивость и неустойчивость решений краевой задачи (26), (27) бесконечно чередуются.

Эти две теоремы следуют из анализа устойчивости решений системы уравнений (28). Доказательство последней теоремы основано на результатах из [14].

Пусть теперь нулевое собственное значение  $L(\tau)$  имеет кратность  $k \geq 3$  и ему отвечает однопараметрическая группа собственных векторов. В этом случае (в предположении типа общности положения) при малых  $\varepsilon$  решения (1), (2) неустойчивы. Этот же вывод справедлив и тогда, когда  $L(\tau)$  имеет чисто мнимое собственное значение кратности больше 1 с однопараметрической группой решений.

## 5. Устойчивость решений краевых задач с “большим” коэффициентом диффузии

Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{u} = \lambda D(t)u'' + A_1(t, x)u' + A_2(t, x)u, \quad (29)$$

$$u'|_{x=0} = u'|_{x=1} = 0, \quad (30)$$

где  $u \in R^m$ ,  $D(t)$  — положительно определенная равномерно относительно  $t \in (-\infty, \infty)$  матрица, элементы матриц  $D(t)$  и  $A_j(t, x)$ ,  $j = 1, 2$ , являются тригонометрическими по  $t$  многочленами с частотами, не зависящими от  $x$ . Элементы матриц  $A_j(t, x)$  достаточно гладкие относительно  $x$ . Исследуем вопрос об устойчивости решений краевой задачи (29), (30) при больших  $\lambda \gg 1$ .

Введем в рассмотрение обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{v} = A_{20}(t)v, \quad \text{где } A_{20}(t) = \int_0^1 A_2(t, x)dx. \quad (31)$$

**Теорема 5.** Пусть для уравнения (31) имеет место экспоненциальная дихотомия решений. Тогда найдется такое  $\lambda_0$ , что при  $\lambda \geq \lambda_0$  для краевой задачи (29), (30) имеет место экспоненциальная дихотомия решений, причем размерности подпространств экспоненциально растущих (по соответствующим нормам  $R^m$  и  $C_{(0,1)}(R^m)$ ) при  $t \rightarrow \infty$  решений уравнения (31) и краевой задачи (29), (30) совпадают.

Для обоснования этой теоремы достаточно воспользоваться приведенной в разделе 6 схемой, считая при этом фигурирующий там номер равным 1. Отметим, что теорема 5 остается верной и в том случае, когда вместо матрицы  $D(t)$  стоит более сложная матрица  $\gamma(t, x)D(t)$  с теми же, что и выше свойствами, а почти периодическая по  $t$  и гладкая по  $t$  и  $x$  скалярная функция  $\gamma(t, x)$  положительна и отделена от нуля. Для случая еще более общей матрицы  $D(t, x)$  теорема 5 перестает, вообще говоря, быть верной.

### 5.1. Изучение критического случая

При исследовании устойчивости в ситуации, когда для уравнения (31) не имеет место экспоненциальная дихотомия, применимы построения из §§1 – 5. В качестве модельного рассмотрим здесь случай, когда матрица  $A_{20}(t)$  автономна, т.е.  $A_{20}(t) \equiv A_{20}$ , и  $A_{20}$  имеет пару чисто мнимых собственных значений  $\pm i\delta_0$  ( $\delta_0 > 0$ ), а все остальные ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части. Обозначим через  $a_0$  и  $b_0$  собственные векторы  $A_{20}$  и  $-A_{20}^*$  соответственно, отвечающие собственному значению  $i\delta_0$ , причем

$$(a_0, b_0) = 1, \quad (a_0, \bar{b}_0) = 0.$$

Введем в рассмотрение формальный ряд

$$u_0(t, x, \varepsilon) = a(t, x, \varepsilon) \exp(i\delta_0 + \alpha(\varepsilon))t, \quad (32)$$

где

$$\alpha(\varepsilon) = \lambda^{-1}\alpha_1 + \lambda^{-2}\alpha_2 + \dots, \quad (33)$$

$$a(t, x, \varepsilon) = a_0 + \lambda^{-1}a_1(t, x) + \lambda^{-2}a_2(t, x) + \dots. \quad (34)$$

Здесь  $\alpha_j$  – скалярные величины, а  $a_j(t, x)$  – векторные тригонометрические по  $t$  многочлены. Покажем, что все элементы из (33), (34) определяются из формального тождества

$$\dot{u}_0(t, x, \varepsilon) = \lambda D(t)u_0''(t, x, \varepsilon) + A_1(t, x)u_0'(t, x, \varepsilon) + A_2(t, x)u_0(t, x, \varepsilon), \quad (35)$$

$$u_0'(t, 0, \varepsilon) = u_0'(t, 1, \varepsilon) = 0. \quad (36)$$

Коэффициент при первой степени  $\lambda$  в (35) нулевой. Собирая слагаемые, стоящие множителем при  $\lambda^0$ , приходим к равенствам

$$D(t)a_1'' = -A_2(t, x)a_0 + i\delta_0 a, a_1'(t, 0) = a_1'(t, 1) = 0. \quad (37)$$

Отсюда вытекает, что  $a_1(t, x) = \tilde{a}_1(t, x) + a_{10}(t)$ , где

$$\tilde{a}_1(t, x) = D^{-1}(t) \int_0^x (x-s)(i\delta_0 I - A_2(t, s))a_0 ds,$$

а  $a_{10}(t)$  – произвольный почти периодический тригонометрический многочлен. На следующем шаге, собирая коэффициенты при  $\lambda^{-1}$ , получим равенства

$$D(t)a_2'' = \dot{\tilde{a}}_1(t, x) + \dot{a}_{10}(t) + i\delta_0(\tilde{a}_1(t, x) + a_{10}(t)) + \alpha_1 a_0 - \\ - A_1(t, x)\tilde{a}_1'(t, x) - A_2(t, x)\tilde{a}_1(t, x) - A_2(t, x)a_{10}(t), \quad (38)$$

$$a_2'(t, 0) = a_2'(t, 1) = 0. \quad (39)$$

Из условия разрешимости краевой задачи (38), (39) получаем соотношение

$$\dot{a}_{10}(t) + (i\delta_0 I - A_{20})a_{10}(t) = -\alpha_1 a_0 + f(t), \quad (40)$$

в котором

$$f(t) = \int_0^1 [A_1(t, x)\tilde{a}_1'(t, x)\tilde{a}_1(t, x) - \dot{a}_1(t, x) - i\delta_0 \tilde{a}_1(t, x)] dx.$$

Значение  $\alpha_1$  определяется из условия разрешимости (40) в классе тригонометрических многочленов:

$$\alpha_1 = M((f(t), b_0)).$$

После того, как  $\alpha_1$  найдено, из (40) определяем  $a_{10}(t)$ , а из (8.10), (8.11) –  $a_2(t, x) (\equiv \tilde{a}_2(t, x) + a_{20}(t))$  и т.д.

**Теорема 6.** *Предположим, что формальный ряд*

$$\lambda^{-1} \operatorname{Re} \alpha_1 + \lambda^{-2} \operatorname{Re} \alpha_2 + \dots$$

*не состоит из одних нулей. Обозначим через  $\operatorname{Re} \alpha_k$  первый ненулевой коэффициент этого ряда. Найдется такое  $\lambda_0$ , что при  $\lambda \geq \lambda_0$  решения краевой задачи (29), (30) экспоненциально устойчивы (неустойчивы), если  $\operatorname{Re} \alpha_k < 0$  ( $\operatorname{Re} \alpha_k > 0$ ).*

Схема обоснования этого результата полностью повторяет схему доказательства теоремы 2 (и 1).

## 6. Исследование устойчивости параболических краевых задач с быстро осциллирующими по пространственной переменной коэффициентами

Результаты этого раздела тесно примыкают к утверждениям, сформулированным в предыдущем параграфе.

Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{u} = D(t)u'' + A_1(t, \omega x)u' + A_2(t, \omega x)u, \quad (41)$$

$$u'|_{x=0} = u'|_{x=1} = 0, \quad (42)$$

где  $u \in R^m$ , матрица  $D(t)$  та же, что и в разделе 4,

$$A_j(t, \xi) = \sum_{k=-m}^m A_{jk}(t) \exp i\sigma_k \xi$$

$$(j = 1, 2, \sigma_0 = 0, \sigma_{-k} = -\sigma_k, A_{-jk}(t) = \overline{A_{jk}(t)}),$$

элементами матриц  $A_{jk}(t)$  ( $j = 1, 2, k = -n, \dots, n$ ) являются тригонометрические по  $t$  многочлены. Поставим вопрос об устойчивости решений краевой задачи (41), (42) при условии, когда коэффициенты быстро осциллируют по пространственной переменной, т.е.  $\omega \gg 1$ .

Введем в рассмотрение усредненную краевую задачу

$$\dot{v} = D(t)v'' + A_{10}(t)v' + A_{20}(t)v, \quad (43)$$

$$v'|_{x=0} = v'|_{x=1} = 0. \quad (44)$$

Сформулируем основной результат, простое обоснование которого получается на том же пути, что и обоснование теоремы 5.

**Теорема 7.** *Пусть для решения краевой задачи (43), (44) имеет место экспоненциальная дихотомия решений. Тогда найдется такое  $\omega_0$ , что при всех  $\omega \geq \omega_0$  имеет место экспоненциальная дихотомия решений краевой задачи (41), (42), и размерности подпространств экспоненциально растущих при  $t \rightarrow \infty$  решений обеих краевых задач совпадают.*

### 6.1. Устойчивость в критическом случае

Пусть коэффициенты (43) от  $t$  не зависят, т.е.  $D(t) \equiv D$ ,  $A_{10}(t) \equiv A_{10}$ ,  $A_{20}(t) \equiv A_{20}$  и пусть оператор

$$Hv \equiv Dv'' + A_{10}v' + A_{20}v, v'(0) = v'(1) = 0$$

имеет пару чисто мнимых значений  $\pm i\delta_0$ ,  $\delta_0 > 0$ , а все остальные его собственные значения имеют отрицательные вещественные части. Через  $a_0(x)$  и  $b_0(x)$  обозначим собственные функции оператора  $H$  и сопряженного к нему оператора  $H^*$ , отвечающие собственным значениям  $i\delta_0$  и  $-i\delta_0$ , соответственно. Удобно считать, что

$$\langle a_0(x), b_0(x) \rangle = 1, \quad \langle a_0(x), \bar{b}_0(x) \rangle = 0 \quad \left( \langle a(x, t), b(x, t) \rangle = \int_0^1 (a(x, t), b(x, t)) dt \right).$$

Подобно формулам (32)-(34) составим формальный ряд

$$u(t, x, \omega) = a(t, x, \omega) \exp(i\delta_0 + \alpha(\omega))t, \quad (45)$$

где

$$a(t, x, \omega) = a_0(x) + \omega^{-1}a_1(t, x) + \omega^{-2}a_2(t, x, \xi) + \dots, \quad \xi = \omega x, \quad (46)$$

$$\alpha(\omega) = \omega^{-1}\alpha_1(\omega) + \omega^{-2}\alpha_2(\omega) + \dots. \quad (47)$$

Вектор-функция  $a_j(t, x, \xi)$  является тригонометрическим многочленом по  $t$  и  $\xi$ , а скалярная функция  $\alpha_j(\omega)$  почти периодически зависит от параметра  $\omega$ . Для определения всех фигурирующих в (46), (47) величин подставим выражение (45) в (41), (42) и в получившемся формальное тождество будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях  $\omega^{-1}$ . На первом шаге, собирая коэффициенты при  $\omega^0$ , получим выражения

$$D\left(\frac{\partial^2 a_2}{\partial \xi^2} + a_0''(x)\right) + A_1(t, \xi)a_0'(x) + A_2(t, \xi)a_0(x) = i\delta_0 a_0(x), \quad (48)$$

$$a_0'(0) = a_0'(1) = 0, \quad \left. \frac{\partial a_2}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{\partial a_2}{\partial \xi} \right|_{\xi=\omega} = 0. \quad (49)$$

Усредняя в (48) по  $\xi$ , для определения  $a_0(x)$  получим равенства  $Ha_0(x) = i\delta_0 a_0(x)$ ,  $a_0'(0) = a_0'(1)$ , которые выполняются в силу выбора  $a_0(x)$ . После этого для нахождения  $a_2 = a_2(t, x, \xi)$  из (48), (49) получим краевую задачу

$$D\frac{\partial^2 a_2}{\partial \xi^2} = f_1(t, x, \xi), \quad \left. \frac{\partial a_2}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{\partial a_2}{\partial \xi} \right|_{\xi=\omega} = 0, \quad (50)$$

в которой

$$f_1(t, x, \xi) = (A_{10} - A_1(t, \xi))a_0'(x) + (A_{20} - A_2(t, \xi))a_0(x).$$

Эта краевая задача, вообще говоря, не имеет решения, поэтому рассмотрим другую краевую задачу

$$D \frac{\partial^2 a_2}{\partial \xi^2} = f_1(t, x, \xi) - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f_1(t, x, \eta) d\eta, \quad \frac{\partial a_2}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}^{\xi=\omega} = 0, \tag{51}$$

которая отличается от (50) слагаемым порядка  $\omega^{-1}$ . Из (51) сразу получаем, что  $a_2(t, x, \xi) = \tilde{a}_2(t, x, \xi) + a_{20}(t, x)$ , где

$$\tilde{a}_2(t, x, \xi) = \int_0^\xi (f_1(t, x, \eta) - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f_1(t, x, s) ds) (\xi - \eta) d\eta,$$

а тригонометрический по  $t$  многочлен  $a_{20}(t, x)$  — произволен. Собирая на втором шаге коэффициенты при  $\omega^{-1}$  в введенном выше формальном тождестве, получим соотношения

$$\begin{aligned} \dot{a}_1(t, x) + i\delta_0 a_1(t, x) + \alpha_1(\omega) a_0(x) &= D \left( \frac{\partial^2 a_3}{\partial \xi^2} + a_1''(t, x) \right) + \\ &+ A_1(t, \xi) \left( a_1'(t, x) + \frac{\partial \tilde{a}_2(t, x, \xi)}{\partial \xi} \right) + A_2(t, \xi) a_1(t, x) + \int_0^\omega f_1(t, x, \eta) d\eta, \end{aligned} \tag{52}$$

$$a_1'(t, 0) = a_1'(t, 1) = 0, \quad \frac{\partial a_3}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}^{\xi=\omega} = 0. \tag{53}$$

Усредняя в (52) по  $\xi$ , приходим к краевой задаче относительно

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 + i\delta_0 a_1 - H a_1 &= -\alpha_1(\omega) a_0(x) + \int_0^\omega f_1(t, x, \eta) d\eta + \\ &+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A_1(t, \eta) \frac{\partial \tilde{a}_2(t, x, \eta)}{\partial \eta} d\eta, \quad a_1|_{x=0} = a_1|_{x=1} = 0. \end{aligned} \tag{54}$$

Осталось воспользоваться условием разрешимости (54) в классе тригонометрических многочленов. Отсюда сразу получаем выражение для почти периодической функции  $\alpha_1(\omega)$ :

$$\alpha_1(\omega) = \left\langle \int_0^\omega f_1(t, x, \eta) d\eta + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A_1(t, \eta) \frac{\partial \tilde{a}_2(t, x, \eta)}{\partial \eta} d\eta, a_0(x) \right\rangle.$$

После этого из (54) определяем  $a_1(t, x)$ , потом из (52), (53) находим  $a_3(t, x, \xi) = \tilde{a}_3(t, x, \xi) + a_{30}(t, x)$  и т. д.

Обозначим через  $\gamma(\omega)$  наибольший характеристический показатель (экспоненциального роста) решений краевой задачи (41), (42).



**Теорема 8.** Для каждого номера  $k$  имеет место асимптотическое равенство

$$\gamma(\omega) - (\omega^{-1} \operatorname{Re} \alpha_1(\omega) + \dots + \omega^{-k} \operatorname{Re} \alpha_k(\omega)) = o(\omega^{-k}).$$

Отличие рассмотренного здесь случая от соответствующих результатов предыдущего параграфа (теорема 7) состоит в том, что при  $\omega \rightarrow \infty$  здесь возможен (даже в предположениях типа общности положения) неограниченный процесс смены устойчивости решений краевой задачи (41), (42). Путь обоснования теоремы 8 тот же, что и теоремы 7.

## Выводы

Рассмотрены вопросы устойчивости важных для приложений решений линейных сингулярно возмущенных систем параболического типа. В первой части изучается система с медленно меняющимися почти периодическими коэффициентами. Сформулирован ответ на вопрос об устойчивости решений в так называемом регулярном случае. При рассмотрении критических случаев разработан эффективный алгоритм исследования устойчивости. Особо отметим, что рассмотрены критические случаи для изолированных и для кратных корней характеристического уравнения.

Во втором разделе рассматриваются параболические системы с большим коэффициентом диффузии. Показано, что ответ на вопрос об устойчивости решений сводится к исследованию специальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В третьем разделе исследованы системы с быстро осциллирующими по пространственной переменной коэффициентами. Выделены критические случаи и разработан алгоритм последовательного вычисления показателей, отвечающих за устойчивость решений.

## Список цитируемых источников

1. *Климусhev А. И., Красовский И. Н.* Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // Прикл. матем. и мех. — 1961. — Т.25, №4. — С. 680-690.  
Klimushev A. I., Krasovsky I. N. Uniform asymptotic stability of systems of differential equations with a small parameter for derivatives. Appl. math, and mech. 25:4, 680-690 (1961). (in Russian)
2. *Разумихин Б. С.* Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с малым множителем при производных // Сиб. матем. журн. — 1963. — Т.4, №1. — С. 206-211.  
Razumihin B. S. On the stability of solutions of systems of differential equations with a small multiplier for derivatives. Sib. Matemat. Zhurnal 4:1, 206-211 (1963). (in Russian)
3. *Чаплыгин В. Ф.* Общие свойства равномерно регулярных пп-операторов с малым множителем при производных // Вестник Яросл. ун-та. — 1973. — Вып.5. — С. 152-163.

- Chapligin V. F. General properties of uniformly regular pp-operators with a small multiplier for derivatives. Vestnik YSU, issue 5, 152–163 (1973). (in Russian)
4. *Chang K. W.* Almost periodic solutions of singularly perturbed systems of differential equations // J. Differential Eqs. — 1968. — Vol.4. — P. 300–307.
  5. *Coppel W. A.* Dichotomies and reducibility. In: Dichotomies in Stability Theory. Lecture Notes in Mathematics, vol 629, (1978) Springer, Berlin, Heidelberg, 38–46
  6. *Далецкий Д. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Москва: Наука, 1970. — 534 с.  
Daleckiy D. L., Kreyn M. G. Stability of solutions of differential equations in Banach spaces. Moscow: Nauka, 1970. (in Russian)
  7. *Крейн М. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Москва: Наука, 1967. — 464 с.  
Kreyn M. G. Linear differential equations in Banach space. Moscow: Nauka, 1967. (in Russian)
  8. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. Киев: Наукова думка, 1966. — 249 с.  
Feshchenko, S. F.; Shkil', N. I.; Nikolenko, L. D. Asymptotic methods in the theory of linear differential equations. Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics. 10. New York: American Elsevier Publishing Company, Inc., 1967.
  9. *L. Flatto, N. Levinson,* Periodic solutions of singularly perturbed systems, Matematika, 2:2 (1958), 61–68; J. Rat. Mech. and Analysis, 4 (1955), 943–950.
  10. *Левитан В. М., Жиков В. В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. Москва: МГУ, 1978. — 204 с.  
Levitan, V. M.; Zhikov, V. V. Almost periodic functions and differential equations. Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1982.
  11. *Колесов Ю. С.* Об устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений параболического типа с почти-периодическими коэффициентами // Труды ММО. — 1978. — Т.36. — С. 3–27.  
Kolesov, Yu. S. On the stability of solutions of linear differential equations of parabolic type with almost periodic coefficients. Trans. Mosc. Math. Soc. 36, 1-25 (1979).
  12. *Мухамадиев Э. М.* Об обратимости дифференциальных операторов в пространстве непрерывных и ограниченных на всей оси функций // ДАН СССР. — 1971. — Т.196, №1. — С. 47–49.  
Mukhamadiev, Eh. On invertibility of differential operators in the space of continuous functions bounded on the real axis. Sov. Math. Dokl. 12, 49-52 (1971).
  13. *Кащенко С. А.* Об устойчивости решений линейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с почтипериодическими коэффициентами в случае резонансов // Исследования по устойчивости и теории колебаний / Под ред. Колесова Ю. С. — Ярославль: 1980. — С. 25-34.  
Kaschenko S. A. On the stability of solutions of linear singularly perturbed differential equations with almost periodic coefficients in the case of resonances. In Kolesov Yu.S. (Eds.) Issledovaniya po ustoichivosti i teorii kolebanii (pp. 25-34). Yaroslavl: Izdat. Yaroslavl Univ., 1980. (in Russian)

14. *Кащенко С. А.* Асимптотические законы распределения собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка с точками поворота // Исследования по устойчивости и теории колебаний / Под ред. Колесова Ю. С. — Ярославль: 1976. — С. 95-113.

Kaschenko S. A. Asymptotic laws of distribution of eigenvalues periodic and antiperiodic boundary value problems for second-order differential equations with turning points. In Kolesov Yu.S. (Eds.) Issledovaniya po ustoichivosti i teorii kolebaniy (pp. 95-113). Yaroslavl: Izdat. Yaroslavl Univ., 1976. (in Russian)

*Получена 20.09.2018*

MSC 2010: 37B05

# How to check if one-dimensional solenoid in the sense of Williams can be realized as hyperbolic attractor of surface diffeomorphism

A. Yu. Zhiron

Moscow Aviation Institute (National Research University)  
Moscow 125993. E-mail: alexei\_zhiron@mail.ru

**Abstract.** In the paper, an algorithm is presented that allows for a given one-dimensional solenoid in the sense of Williams to answer the question: does a surface diffeomorphism with a one-dimensional hyperbolic attractor exist such that the restriction of the diffeomorphism to this attractor is topologically conjugate to the shift automorphism of the given solenoid.

**Keywords:** solenoid, hyperbolic attractor, branched manifold.

## 1. Introduction

In 1967 R. Williams [1] proposed the concept of generalized solenoid for modeling the dynamics generated by a diffeomorphism of a smooth manifold with a hyperbolic expanding attractor. The initial results of his theory are the following theorems. The conditions (S1–S4) specified in them will be formulated below.

**Theorem 1** (Williams [2]). *Let  $M$  be a smooth manifold,  $U \subseteq M$  be an open set,  $f : U \rightarrow M$  be a smooth embedding,  $\Lambda \subset U$  be a one-dimensional hyperbolic attractor for  $f$ . Then there exist a branched 1-manifold  $K$  and a smooth map  $\varphi : K \rightarrow K$  satisfying the conditions (S1–S4) such that the solenoid defined by the pair  $(K, \varphi)$  is homeomorphic  $\Lambda$ , and its shift automorphism is topologically conjugate to the restriction  $f|_{\Lambda}$ .*

**Theorem 2** (Williams [2]). *Let  $K$  be a branched 1-manifold and  $\varphi : K \rightarrow K$  be a smooth map satisfying the conditions (S1–S4). Then there exist a smooth manifold  $M$ , an open set  $U \subseteq M$ , a smooth embedding  $f : U \rightarrow M$ , and a one-dimensional hyperbolic attractor  $\Lambda \subset U$  for  $f$  such that the solenoid defined by the pair  $(K, \varphi)$  is homeomorphic to  $\Lambda$ , and its shift automorphism is topologically conjugate to  $f|_{\Lambda}$ .*

For brevity, the statement of the theorem 2 will be said that the given *solenoid can be realizable as an attractor on the manifold  $M$ .*

**Question.** *Under what conditions additional to those of the theorem 2 it can be confirmed that  $\dim M = 2$ ?*

In the proposed paper, an algorithm will be presented with which the following questions can be answered for given solenoid.

1. Whether the given solenoid is realizable as an attractor on an orientable surface and, if so, what is the minimal genus of a such surface? In this case the algorithm defines whether or not the embedding  $f$  generating the attractor preserves the orientation of the surface.

If the answer to the first question is negative, then

2. Whether the given solenoid is realizable as an attractor on a non-orientable surface and, if so, what is the minimal genus of a such surface?

## 2. Definitions and combinatorial description of solenoid

Let  $K$  be finite graph (one-dimensional CW-complex) and  $a$  its edge (open 1-cell), *semi-edge* is component of the set  $a \setminus \{x\}$ , where  $x \in a$ . Two semi-edges are said to be equivalent if their intersection is semi-edge also. The equivalence class of semi-edges contained in a given edge is called its *end*. The end  $e$  of any edge is called to be *incident* to the vertex  $O$  if it is incident to semi-edge, which is a representative of the given end. The number of ends incident to a given vertex is called its *valence*.

**Definition 1.** Graph  $K$  is called *branched* (one-dimensional) *manifold* if the following conditions hold

(BM1) There are no vertexes of valency 1.

(BM2) For each vertex the partition of the set of ends of incident edges onto two nonempty disjoint subsets is fixed.

The ends belonging to one of these subsets will be called *outgoing* from a given vertex, and the ends belonging to the other one will be called *incoming* into it.

Vertices of the graph will be called *branch points* of branched manifold  $K$ .

The smoothness of branched manifold will be understood in the sense of the following definition of the smoothness of the arcs lying in it. By an arc in  $K$  we mean an image by the action of a continuous mapping  $\gamma$  of a segment of a real line into  $K$ , which is a local homeomorphism onto image.

**Definition 2.** The arc  $\gamma \subset K$  is called to be *smooth* if for each  $t_0$  such that  $\gamma(t_0)$  is branch point there exists  $\varepsilon > 0$  such that

- 1) arcs  $\gamma|_{(t_0-\varepsilon, t_0)}$  and  $\gamma|_{(t_0, t_0+\varepsilon)}$  are semi-edges belonging to ends of some edges incident to this vertex  $\gamma(t_0)$ ;
- 2) these ends belong to distinct subsets onto which the set of all edges incident to  $\gamma(t_0)$  is parted according to condition (BM2), i.e. one of this ends is incoming while the other is outgoing.

A continuous map of a branched manifold  $K$  into a branched manifold  $K'$  (into a smooth manifold  $M$ ) is called *smooth* if the image of every smooth arc in  $K$  is a smooth arc in  $K'$  in the sense of previous definition (smooth arc in  $M$  in the usual sense).

**Definition 3.** Let  $K$  be branched manifold and  $\varphi : K \rightarrow K$  be smooth map such that the following conditions hold

- (S1) the set of all branch points of  $K$  is invariant under  $\varphi$ ;
- (S2) the non-wandering set of  $\varphi$  coincides with  $K$ ;
- (S3)  $\varphi$  is expanding in some metric;
- (S4) for each branch point there exists a neighborhood  $U$  and an integer  $m \geq 0$  such that  $\varphi^m U$  is a smooth arc.

*Solenoid* in the sense of Williams is the limit of the inverse spectrum

$$K \xleftarrow{\varphi} K \xleftarrow{\varphi} K \xleftarrow{\varphi} \dots,$$

and the homeomorphism  $\varphi_\infty : K_\infty \rightarrow K_\infty$  defined by

$$\varphi_\infty : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (\varphi x_1, x_1, x_2, \dots).$$

is called its *shift automorphism*.

**Combinatorial description of the branched manifold** 1) Let  $n$  be the number of edges of  $K$ . We enumerate in some way their ends by subscripts from the segment  $\overline{1, 2n}$  of the natural series and define the map  $\sigma : \overline{1, 2n} \rightarrow \overline{1, 2n}$ , assuming that  $j = \sigma(i)$  if  $i, j$  are the numbers of the ends of the same edge. It is clear that  $\sigma$  is a permutation on the set  $\overline{1, 2n}$ , decomposing into a product of cycles of period 2.

2) Let  $m$  be the number of vertices of the graph  $K$ . We enumerate them in some way by indices from the segment  $\overline{1, m}$  of the natural series and denote by  $t_k^+$  and  $t_k^-$ , respectively, the number of outgoing and the number of incoming ends of the edges for the vertex number  $k$ . Denote by  $\mathcal{T} = (t_1^+, \dots, t_m^+; t_1^-, \dots, t_m^-)$  the sequence of  $2m$  numbers thus defined.

Thus the branched manifold defines a pair  $(\sigma, \mathbf{t})$ . Conversely, each pair of  $(\sigma, \mathbf{t})$ , where  $\sigma$  is a permutation of the set  $\overline{1, 2n}$ , all cycles of which have a period 2, and  $\mathcal{T} = (t_1^+, \dots, t_m^+; t_1^-, \dots, t_m^-)$  is a sequence of  $2m$  natural numbers with the condition  $\sum_{k=1}^m (t_k^+ + t_k^-) = 2n$  defines a branched 1-manifold. Therefore, we call the pair  $(\sigma, \mathcal{T})$  associated with the branched manifold in the manner described above *configuration* of the branched 1-manifold. Of course, the configuration is ambiguous: it depends on the choice of the numbering of the ends of the edges, the numbering of the vertices, and which of the subsets of the ends in (BM2) are declared incoming and which are outgoing. Nevertheless, it is clear that knowing one of the configurations of a given branched manifold, one can write out all the others using a formal algorithm.

**Combinatorial description of the map of branched manifold defining the solenoid.** We enumerate the edges of the graph  $K$  with the index  $i \in \overline{1, n}$ , endow

each of them with orientation, and denote the oriented edge number  $i$  by  $a_i$ . Through  $\bar{a}_i$  we denote geometrically the same edge with opposite orientation. Let  $\varphi : K \rightarrow K$  be a smooth map satisfying condition (S1). Then each edge  $a_i$  is partitioned by preimages of branch points into arcs such that the restriction of  $\varphi$  to each of them is one to one map onto some edge that can be overpassed in either a positive or negative direction. Therefore, with each edge  $a_i$  the word  $w_i = \varphi(a_i)$  in the alphabet  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n; \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$  can be associated. From the smoothness condition it follows that this word is irreducible, i.e. does not contain subwords of the form  $a_i \bar{a}_i$  and  $\bar{a}_i a_i$ . Thus, with the map  $\varphi$  an ordered set of words  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$  be associated.

Conversely, a set of irreducible words  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$  defines a unique, up to homotopy, map  $\varphi$  of the graph  $K$  continuous on each edge and which is a local homeomorphism onto image in a neighborhood of each point that is not a branch point.

Now we establish the conditions under which this map is continuous at the branch points and satisfies the conditions (S1–S4) of the definition of solenoid.

Let's start with agreeing on the numbering of the vertices of the graph and its edges.

1. We number the vertices  $O_k$  with the index  $k \in \overline{1, m}$ .
2. Enumerate the ends of the edges, satisfying the condition: the outgoing ends for the vertex  $O_1$  get numbers from 1 to  $t_1^+$ , outgoing ends for  $O_2$  — from  $t_1^+ + 1$  to  $t_1^+ + t_2^+$  end so on; incoming ends for the vertex  $O_1$  get numbers from  $t + 1$  to  $t + t_1^-$ , incoming numbers ends to  $O_2$  — from  $t + t_1^- + 1$  to  $t + t_1^- + t_2^-$  and so on, where  $t = \sum_{k=1}^m t_k^+$ .
3. We enumerate the edges  $a_i$  with the index  $i \in \overline{1, n}$  lexicographically with respect to the numbering of their ends: the smaller is the minimal number of two ends of the edge, the smaller is the number of the edge.
4. Orient the edges considering the positive direction from the end with the smaller number to the end with the larger one.

The end of the edge  $a_i$ , which has a smaller number in the numbering of the ends (2), will be called *first* end, and the other end call the *second* one. These ends will be denoted by  $a_i$  and  $\bar{a}_i$  respectively. (The fact that the same symbol denotes different things will not lead to misunderstandings, but it will be convenient.) The number of the first end of the edge  $a_i$  in the "continuous" numbering of the ends will be denoted  $\beta_-(i)$ , and the number the second denote  $\beta_+(i)$ . The number of the edge that has one of its ends the end number  $j$  in continuous numbering will be denoted  $\alpha(j)$ . Thus, we obtain three maps of the sets of indices  $\alpha : \overline{1, 2n} \rightarrow \overline{1, n}$ ;  $\beta_-, \beta_+ : \overline{1, n} \rightarrow \overline{1, 2n}$ . It is easy to see that these functions are determined by the conditions

$$\alpha(1) = 1, \quad \alpha(i) = \alpha(\sigma(i)), \quad \alpha(i) < \alpha(j) \Leftrightarrow \min\{i, \sigma(i)\} < \min\{j, \sigma(j)\};$$

$$\beta_-(j) := \min\{i : \alpha(i) = j\}; \quad \beta_+(j) := \max\{i : \alpha(i) = j\};$$

The *passage* at the vertex  $O_k$  will be called an ordered pair of characters (two-letter word) in the alphabet  $\mathcal{A} = \{a_i, \bar{a}_i : i \in \overline{1, n}\}$  denoting ends of edges in this vertex, such that one of them belongs to the upper partition and the other to the lower one.

We will call *pass*  $\ell_i \ell_j$  *image* (where  $\ell_i$  is  $a_i$  or  $\bar{a}_i$ , and  $\ell_j$  is  $a_j$  or  $\bar{a}_j$ ) to be two-letter word, the first letter of which is the last letter of the word  $\varphi(\ell_i)$  and the second is the first letter of  $\varphi(\ell_j)$ .

Then the condition of continuity of the map  $\varphi$  be

(SC0) Each two-letter subword of each word  $w_i = \varphi(a_i)$  is a passage at some vertex.

And the condition of smoothness of the map  $\varphi$  be

(SC1) For each vertex, all its passes images are the passages at the same vertex.

Thus, calculating the images of passes, we can check the continuity condition  $\varphi$ , and at the same time to find the map of the vertices  $\varpi$  defined in the first part of the following

**Definition 4.** 1. *The map of the vertices  $\varpi$  is such permutation that*

$$\varphi(O_k) = O_{\varpi(k)}.$$

2. *The intersection matrix  $G = (g_{ij})$  of the map  $\varphi$  is defined by*

$$g_{ij} := \#\{a_i, \bar{a}_i \in w_j\},$$

where  $\#$  denotes the number of elements in finite set.

3. *The intersection vector  $\mathbf{g} = (g_i)$  of the map  $\varphi$  is defined by*

$$g_i := \sum_j g_{ij}.$$

4. *The sequence  $\mathcal{E} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$  of signs  $\varepsilon_k = \pm$ , depending of the way by which the map  $\varphi$  turns the directions of passages on the vertex  $O_k$  into directions of passages in  $O_{\varpi(k)}$ :*

$$\varepsilon_k = \begin{cases} +, & \text{if "ingoing} \rightarrow \text{outgoing"} \mapsto \text{"ingoing} \rightarrow \text{outgoing"}; \\ -, & \text{if "ingoing} \rightarrow \text{outgoing"} \mapsto \text{"outgoing} \rightarrow \text{ingoing"}. \end{cases}$$

**Lemma.**

1. *Conditions (S2) and (S3) together are equivalent to*

(SC2) *The intersection matrix  $G$  is primitive i.e. some power of it is a positive matrix.*

2. *Condition (S4) is equivalent to*

(SC3) *for each vertex, some iteration of all its passes is the same pass, up to the reverse.*

*Proof.* According to the Perron-Frobenius theorem primitiveness and integerness of the matrix  $G$  imply that it has eigenvalue which is greater than one (Perron eigenvalue), which corresponds to positive eigenvector (Perron eigenvector). Therefore, it is possible to define on  $K$  a Lebesgue measure such that the length of each edge be equal to the



corresponding component of the left Perron eigenvector, and the map will be a uniform expanding with a coefficient equal to Perron eigenvalue. Since  $\varphi$  is expanding and the matrix  $G$  is primitive, it does not have open invariant sets and the periodic points of  $\varphi$  are dense in  $K$ . So primitiveness of the matrix implies conditions (S2,S3). The converse, as well as the second statement of the lemma, is obvious.  $\square$

All the above means that each one-dimensional solenoid define the set of data  $\langle \sigma, \mathcal{T}; \mathbf{w} \rangle$  by which it is possible to find the matrix  $G$  and the permutation  $\varpi$ . This makes the following definition natural.

**Definition 5.** The collection of data  $\langle \sigma, \mathcal{T}; \mathbf{w} \rangle$ , where  $\sigma$  is permutation on  $\overline{1, n}$  with all cycles of the length 2;  $\mathcal{T} = (t_1^+, \dots, t_m^+; t_1^-, \dots, t_m^-)$  is the sequence of  $2m$  positive integers ( $m \geq 1$ ) with the sum equal to  $2n$ ;  $\mathbf{w}$  is the ordered set of irreducible words in alphabet  $\mathcal{A} = \{a_i, \bar{a}_i : i \in \overline{1, n}\}$  is called *solenoidal code* if the condition (SC0–SC3) holds.

Of course, the code is determined by the solenoid ambiguously because of the following elements of arbitrariness

1. The choice of the numbering of vertexes.
2. The choice of which of the two possible subsets of the set of the ends of the edges incident to each vertex is considered to be the outgoing (ingoing).
3. The numbering of each of the sets of outgoing and ingoing edges of the edges.

In what follows, considering the solenoid given by any of its codes, we will save the first two choices while we will have to consider all the codes obtaining while changing the choice of edge ends.

This means that the sequence will not change while the  $\sigma$  permutation changes. The latter implies a change in the sequence of words  $\mathbf{w}$  occurring due to a corresponding change in the numbering of the edges of the graph and a possible change in their orientations. The change in the numbering of the ends of the edges is determined by the permutation  $\tau : \overline{1, 2n} \leftrightarrow$ , which leaves invariant each of the subsets of the set  $\overline{1, 2n}$  of indices of the form

$$\overline{t_{k-1}^+ + 1, t_k^+} \quad (k \in \overline{1, m}, t_0^+ = 0)$$

and

$$\overline{t + t_{k-1}^- + 1, t + t_k^-} \quad (k \in \overline{1, m}, t_0^- = 0, t = \sum_{k=1}^m t_k^+).$$

**Definition 6.** We will call the permutation  $\tau$  of  $\overline{1, 2n}$  which leaves invariant the above subsets to be *admissible*.

If the admissible permutation is given we can to calculate the changed code  $\langle \sigma^\tau, \mathcal{T}; \mathbf{w}^\tau \rangle$  ( $\mathcal{T}$  is the same) as follows.

The permutation of  $\sigma$  is transformed into a permutation of  $\sigma^\tau$ , the cycles of which are obtained from the cycles of  $\sigma$  follows. Let  $(i, j)$  be a cycle  $\sigma$ . Then it corresponds to the cycle  $(\tau(i), \tau(j))$  of  $\sigma^\tau$ . Of course it means that  $\sigma^\tau = \tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau$ .

To calculate the sequence of words  $\mathbf{w}^\tau$ , we note that the letters of the words  $w_j$  correspond to the cycles  $\sigma$ . Namely, if  $(i, \sigma(i))$ , where  $i < \sigma(i)$ , then this cycle determines some letter  $a_j$ . We will write  $a_j \simeq (i, \sigma(i))$ , and the index of this letter can be defined as follows. We write the permutation  $\sigma$  in the form of a product of such cycles, order the factors by the first index and enumerate them according to this ordering. Then  $j$  is the number of the cycle  $(i, \sigma(i))$  in this numbering. Keeping this ordering of cycles, replace each of them with the cycle  $(\tau(i), \tau(\sigma(i)))$ , keeping a sequence of characters in each cycle. The words  $w_k^\tau$  which define the map  $\varphi a'_k \mapsto w_k^\tau$  must be written in the alphabet  $\mathcal{A}' = \{a'_i, \overline{a'_i} : i \in \overline{1, n}\}$  the letters of which denote the same edges of the graph, renumbered and, possibly, with a changed orientation. The letter  $a'_{j'}$ , denoting the same edge of the graph as the corresponding letter  $a_j$ , is defined by the cycle  $(\tau(i), \tau(\sigma(i)))$  and its number  $j'$  is the number of this cycle in their numbering in ascending smaller the indices of the permutation cycles of  $\sigma^\tau$ . The orientation of this edge coincides with its initial orientation i.e.  $a'_{j'} = a_j$ , if  $\tau(i) < \tau(\sigma(i))$ , and opposite to it otherwise, i.e.  $a'_{j'} = a_j^{-1}$ .

Thus, to find the words  $w_{j'}^\tau$  that define the map of  $\varphi$  in new numbering of the ends is necessary in the correspondences  $a_j \mapsto w_j$  to make the appropriate replacement of letters  $a_j$  and  $a_j^{-1}$  on  $a'_{j'}$  and  $a_{j'}^{-1}$ .

**Definition 7.** We will say that the solenoid code obtained from given code by means of the described procedure using the admissible permutation  $\tau$  is  $\tau$ -equivalent to the initial one.

### 3. Band surfaces and codes of attractors

The solenoidal representation of an expanding one-dimensional hyperbolic attractor  $\Lambda$  of a diffeomorphism  $f : U \rightarrow M$  in Williams Theorem 1 is obtained as follows. A tubular neighborhood  $N$  of the set  $\Lambda$  which is fibered onto  $(\dim M - 1)$ -disks lying in the stable manifolds of the points of  $\Lambda$  is constructed. The partition of  $N$  onto these disks as leaves is semi-invariant with respect to  $f$  so that corresponding factorization of  $N$  defines branched manifold and its expanding map which define the solenoid.

In the case  $\dim M = 2$  the tubular neighborhood may be constructed in the form of *band surface* [3] i.e the surface  $\Pi$  with boundary arranged as follows.

1. There is a finite collection of simple disjoint arcs (called base segments of  $\Pi$ )  $I_1, \dots, I_m$  of stable manifolds of some periodic points of  $f$  each of them containing corresponding periodic point. This collection is semi-invariant i.e.  $f(I_k) \subseteq I_{\varpi(k)}$ , where  $\varpi$  is some permutation on  $\overline{1, m}$ .

2. There are two partitions  $\mathcal{D}_k^+$  (upper partition) and  $\mathcal{D}_k^-$  (lower partition) of each base segment  $I_k$  onto  $t_k^+$  and  $t_k^-$  segments ( $t_k^+, t_k^- \geq 1$ ). Along some pairs  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{D} := \bigcup_k \mathcal{D}_k^+ \cup \mathcal{D}_k^-$  of these segments a *band*  $\Pi_{\Delta, \Delta'}$  is glued to the base  $I := \bigcup_k I_k$ . The band surface is union of this bands. What is more, if  $x \in \Lambda \cap \Pi_{\Delta, \Delta'}$  then the connected component of unstable manifold intersection  $W^u(x) \cap \Pi_{\Delta, \Delta'}$  containing  $x$  is the arc with endpoints on segments  $\Delta, \Delta'$  (called *ends* of the band) and the connected component

of stable manifold intersection  $W^s(x) \cap \Pi_{\Delta, \Delta'}$  containing  $x$  is the arc with endpoints on two other opposite edges of  $\Pi_{\Delta, \Delta'}$  (called *margins* of band). The collection of all such arcs of stable manifolds defines partition of  $\Pi$  onto 1-discs which is semi-invariant and define via factorization the branched 1-manifold  $K$  and its map  $\varphi$  satisfying to the conditions of definition of a solenoid.

We will also need a combinatorial description of the map  $f|_{\Pi}$  introduced in [3] to be a collection of data  $\langle \sigma, \mathcal{T}, \mathbf{o}; \varpi, \mathcal{E}^s, \mathcal{E}^u, \mathbf{g}, \mathcal{L} \rangle$  called *the code of the attractor*  $\Lambda$  with respect to band surface  $\Pi$ . These data formally are

1.  $\sigma$  is permutation on  $\overline{1, n}$  ( $n$  the number of bands) all whose cycles are of period 2;
2.  $\mathcal{T} = (t_1^+, \dots, t_m^+; t_1^-, \dots, t_m^-)$  is a sequence of  $2m$  natural numbers ( $m$  is the number of base segments);
3.  $\mathbf{o} = \{o_1, \dots, o_n\}$  — sequence of signs  $\pm$ ;
4.  $\varpi$  — permutations on  $\overline{1, m}$ ;
5.  $\mathcal{E}^s = \{\varepsilon_1^s, \dots, \varepsilon_n^s\}$ ,  $\mathcal{E}^u = \{\varepsilon_1^u, \dots, \varepsilon_n^u\}$  — sequences of signs  $\pm$ ;
6.  $\mathbf{g}$  — integer  $n$ -vector of natural entries;
7.  $\mathcal{L} = \{l_1, \dots, l_n\}$  finite integer sequence.

**Definition 8.** The data set listed above is called a *formal code*.

To define the geometric meaning of these data let us we introduce the following agreements.

Let us fix a positive direction (say "from the left to right") on each base segment; positive transverse direction (say "from bottom to top") to each of them. In the case of orientable surface suppose that each pair of these direction define the same orientation of the surface.

Now we assign the numbers to the ends  $\Delta \in \mathcal{D}$  of the bands so that for  $\Delta_i \in \mathcal{D}_j^{\varkappa}$  and  $\Delta_{i'} \in \mathcal{D}_{j'}^{\varkappa'}$  ( $\varkappa, \varkappa' = \pm$ )  $i < i'$  if and only if either  $\varkappa = +, \varkappa' = -$  or  $\varkappa = \varkappa'$  and  $j < j'$  or  $\varkappa = \varkappa', j = j'$  and  $\Delta_i$  lies on  $I_j$  to the left of  $\Delta_{i'}$ .

So the permutation  $\sigma$  be well defined and it means that the bands are glued to the base segments along the pairs of ends of the form  $(\Delta_i, \Delta_{\sigma(i)})$ . The bands are numbered in such a way that the band  $\Pi_j$  is glued to segments  $\Delta_{\beta_-(j)}, \Delta_{\beta_+(j)}$  ( $\beta_-(j) < \beta_+(j)$ ,  $\alpha(\beta_-(j)) = \alpha(\beta_+(j)) = j$ ).

The numbers  $t_k^+, t_k^-$  of the sequence  $\mathcal{T}$  denote the numbers of ends of bands which are glued to the base segment  $I_k$  to the top and bottom, respectively.

The signs  $o_i = -$  of the sequence  $\mathbf{o}$  means that the band  $\Pi_i$  is twisted when gluing and  $o_i = +$  in other case. In the case of an orientable surface, there are no twisted tapes, while for non-orientable ones they should be.

The triple  $(\sigma, \mathcal{T}, \mathbf{o})$  is called *the configuration* of the band surface.

The remaining data of the code characterize the action of the map  $f_{\Pi}$  on the base segments and bands.

Permutation  $\varpi$  shows that  $f_{\Pi}I_k = I_{\varpi(k)}$ .

Signs  $\varepsilon_k^s$  are "+" or "-" depending of whether  $f_{\Pi}$  move positive direction of  $I_k$  into positive or negative direction of  $I_{\varpi(k)}$ . Signs  $\varepsilon_k^u$  means the same with respect transverse directions.

Component  $g_i$  of the vector  $\mathbf{g}$  is the common number of component of intersection of the band  $\Pi_i$  with images of other bands.

Element  $l_k$  of the sequence  $\mathcal{L}$  is she number of components of intersection of images of all bands with that component of  $I_k \setminus f(I_{\varpi^{-1}(k)})$ , which is to the left of  $f(I_{\varpi^{-1}(k)})$  ( $l_k = 0$  if left end of  $f(I_{\varpi^{-1}(k)})$  coincides with that one of  $I_k$ ).

In [3], it is shown (Lemma 2.4.1) that the code of the attractor satisfies some conditions that need to be formulated here. This requires the following notation. By formal configuration  $(\sigma, \mathcal{T}, \mathbf{o})$  define integral vectors  $\mathbf{V}_+^j$  ( $j \in \overline{0, t}$ ) and  $\mathbf{V}_-^j$  ( $j \in \overline{t, t+u}$ ,  $t = \sum t_j^+$ ,  $u = \sum t_j^-$ )

$$\mathbf{V}_+^0 = \mathbf{V}_-^0 := \mathbf{0}; \quad \mathbf{V}_{\pm}^j := \mathbf{V}_{\pm}^{j-1} + \mathbf{e}^{\alpha(j)}.$$

Here  $\mathbf{e}^i$  is the vector with all entries 0 except for  $i$ -th which is 1.

$$\mathbf{v}_+^k := \mathbf{V}_+^{T_k} - \mathbf{V}_+^{T_k-1}; \quad \mathbf{v}_-^k := \mathbf{V}_+^{T_{m+k}} - \mathbf{V}_+^{T_{m+k}-1}, \quad k \in \overline{1, m}$$

Here  $T_k = \sum_{j=1}^k t_j^+$  for  $k \leq m$  and  $T_{m+k} = t + \sum_{j=1}^k t_j^-$ .

In these terms, the conditions mentioned are

- (FC1)  $\langle \mathbf{V}_+^{\varpi(k)} + \mathbf{V}_-^{\varpi(k)}, \mathbf{g} \rangle \geq t_k^+ + t_k^-$ ;
- (FC2)  $\langle \mathbf{V}_+^{\varpi(k)} - \mathbf{V}_-^{\varpi(k)}, \mathbf{g} \rangle = \varepsilon_k^u (t_k^+ - t_k^-)$ ;
- (FC3)  $0 \leq l_{\varpi(k)} \leq \frac{1}{2} (\langle \mathbf{V}_+^{\varpi(k)} + \mathbf{V}_-^{\varpi(k)}, \mathbf{g} \rangle - (t_k^+ + t_k^-))$ .

Here  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denotes the usual scalar product.

**Definition 9.** The formal code is said to be *admissible* if it satisfies to conditions (FC1–FC3).

In [3] the conditions (FC1–FC2) immediately included in the definition of a formal code.

We note that condition (FC3) is especially important now, since it implies the finiteness of the set of formal codes with given  $n$  and  $m$ , and an estimate of their number can be easily obtained.

Solenoidal representation of attractor  $\Lambda$  is obtained from band surface  $\Pi$  and the map  $f|_{\Pi}$  as follows. Branch points (vertexes) of branch manifold  $K$  are images under factorization of base intervals  $I_k$  and them are numbered by the same indexes. So, the permutation  $\varpi$  is the same as permutation of branch points. Partitions of ends edges of  $K$  onto ingoing and outgoing ones corresponds to partitions of segments  $I_k$  onto upper and lower ends of bands  $\mathcal{D}_k^+$  and  $\mathcal{D}_k^-$ . Edges  $a_i$  of  $K$  are factors of bands  $\Pi_i$

and are enumerated by the same indexes. Orientation of the edge  $a_i$  corresponds to the "vertical" direction on  $\Pi_i$  i.e. direction from its end  $\Delta_{\beta_-(i)}$  to  $\Delta_{\beta_+(i)}$ .

The Theorem 3.1.1 [3] implies that each solenoidal representation of an attractor is obtained by the method described above.

#### 4. Algorithm for checking the realizability of a solenoid on the surface

The data  $\sigma, \mathcal{T}, \mathbf{w}$  which give combinatorial description of solenoid enables to find a part of the data composing the code of the attractor:  $\sigma, \mathcal{T}, \varpi, \mathbf{g}, \mathcal{E}^u = \mathcal{E}$ . Hence, if the solenoid is given, it is possible to enlarge these data to obtain the formal code. This can be done in various ways of specifying missing data  $\mathbf{o}, \mathcal{E}^s, \mathcal{L}$ . What is more, in the source data we can replace  $\sigma$  and  $\mathbf{w}$  by performing a permissible permutation  $\tau$  of the indices. In any case, the number of opportunities to do all this is finite and can be estimated through initial data. Thus, it is possible to consider all the various additions of the solenoidal code to the formal code.

In [3] an algorithm for checking if the formal code is realizable by some attractor via some band representation of it is described. It is based on the some ancillary algorithms (subroutines in terms of computer sciences) i.e. so called Algorithms A, B and D. We will not give a description of these algorithms here because it requires too much space, but it is necessary to specify their input and output data along with a brief comments.

##### Algorithm A.

**Input.** Formal  $(n, m)$ -configuration  $(\sigma, \mathcal{T}, \mathbf{o})$ .

**Output.** 1. The sequence  $\mathcal{B} = \{b_0, b_1, \dots\}$  of nonnegative integers such that almost all (but not all) of them are equal to zero.

2. The finite set of nonempty words  $\mathcal{R} = \{\rho^1, \dots, \rho^b\}$  in alphabet  $\mathcal{A} = \{a_i, \bar{a}_i : i \in \overline{1, n}\}$ .

COMMENT. In the case when the configuration on input is indeed that one of some band surface of the attractor we have  $b_0 = 0$  (it is essential for our goals), while other elements of  $\mathcal{B}$  define so called boundary type of the attractor (see [3] for definition, we need not for it now). The set of words  $\mathcal{R}$  defines some co-representation  $\langle a_1, \dots, a_n | \rho^1, \dots, \rho^b \rangle$  of fundamental group of the band surface.

##### Algorithm B.

**Input.** Formal  $(n, m)$ -code  $\langle \sigma, \mathcal{T}, \mathbf{o}; \varpi, \mathcal{E}^s, \mathcal{E}^u, \mathbf{g}, \mathcal{L} \rangle$

**Output.**

1. Formal configuration  $(\hat{\sigma}, \hat{\mathcal{T}}, \hat{\mathbf{o}})$ .

2. Ordered set  $\hat{\mathbf{w}} = \{\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_n\}$  in alphabet  $\mathcal{A} = \{a_i, \bar{a}_i : i \in \overline{1, n}\}$ .

3. Sequence  $\hat{\mathcal{L}} = \{\hat{l}_1, \dots, \hat{l}_m\}$  of non-negative integers.

COMMENT. If the formal code on input is indeed a code of some attractor then the data on output  $(\hat{\sigma}, \hat{\mathcal{T}}, \hat{\mathbf{o}})$  and  $\hat{\mathcal{L}}$  are the same as on input, while the sequence of words  $\hat{\mathbf{w}}$  is that one which define the map  $\varphi : K \rightarrow K$  which defines solenoid. In any case  $\hat{\mathbf{w}}$

defines in the same way as  $\mathbf{w}$  some integer matrix  $\widehat{G}$  and the corresponding vector  $\widehat{\mathbf{g}}$ . We will need of them to check the condition of realizability.

**Algorithm D.**

**Input.** Formal  $(n, m)$ -code  $\langle \sigma, \mathcal{T}, \mathbf{o}; \varpi, \mathcal{E}^s, \mathcal{E}^u, \mathbf{g}, \mathcal{L} \rangle$ ; integer  $N > 1$ .

**Output.** Formal  $(n, m)$ -code  $\langle \sigma, \mathcal{T}, \mathbf{o}; \varpi^{(N)}, \mathcal{E}^{s(N)}, \mathcal{E}^{u(N)}, \mathbf{g}^{(N)}, \mathcal{L}^{(N)} \rangle$

COMMENT. If the formal code on input is indeed a code of some attractor of  $f$  then the code on output is the code of the same attractor considered as that one with respect to  $N$ -th iteration of  $f$ .

This algorithm of checking realizability of solenoid as an attractor on surface is based on the following criteria.

**Theorem 3** ([3], Theorems 3.8.1, 3.8.2). *The following conditions are necessary and sufficient for the realizability of the formal code  $\langle \sigma, \mathbf{t}, \mathbf{o}; \varpi, \mathcal{E}^s, \mathcal{E}^u, \mathbf{g}, \mathcal{L} \rangle$ .*

**(RC0)** *The number  $b_0$  calculated by algorithm A is zero and the formal configuration  $(\widehat{\sigma}, \widehat{\mathcal{T}}, \widehat{\mathbf{o}})$  calculated by algorithm B coincides with the initial one.*

**(RC0)** *The vector composed of the sum of rows of the matrix  $\widehat{G}$  calculated by Algorithm B coincides with  $\mathbf{g}$ .*

**(RC2)** *None of the words in the set  $\{\widehat{\varphi}(\rho) : \rho \in \mathcal{R}\}$  is cyclically trivial. Here  $\widehat{\varphi}$  is the map  $a_i \mapsto \widehat{w}_i$ .*

**(RC3)** *The matrix  $\widehat{G}$  is primitive.*

**(RC4)** *For minimal  $N \in \mathbb{N}$  such that  $\varpi^{(N)} = \text{id}$ ,  $\mathcal{E}^{s(N)} = \mathcal{E}^{u(N)} = +$  and for each  $k \in \overline{1, m}$  the following conditions hold*

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_+^{T_{k-1}+i} - \mathbf{V}_+^{T_{k-1}})\mathbf{g}^{(N)} &\neq l_k^{(N)} + i && \text{for all } i \in \overline{1, t_k^+ - 1} \\ (\mathbf{V}_-^{T_{m+k-1}+i} - \mathbf{V}_-^{T_{m+k-1}})\mathbf{g}^{(N)} &\neq l_k^{(N)} + i && \text{for all } i \in \overline{1, t_k^- - 1} \end{aligned}$$

Now we are ready to formulate the desired algorithm.

**Main algorithm**

**Input.** An abstract 1-solenoid defined by a branched manifold with  $m$  branch points and  $n$  edges given by its solenoidal code  $\langle \sigma, \mathcal{T}; \mathbf{w} \rangle$ . (The code must satisfy the conditions (SC0–SC3)).

Move 0. By the sequence of words  $\mathbf{w}$  define the permutation  $\varpi$  and the sequence of signs  $\mathcal{E}$  (Definition 4).

Move 1. Enumerate all admissible permutations of  $\tau$  and for each (including the identity) calculate the transformed code  $\langle \sigma^\tau, \mathcal{T}; \mathbf{w}^\tau \rangle$ .

Move 2. For each of them (we omit the index  $\tau$  below) define a vector  $\mathbf{g}$  by a sequence of words  $\mathbf{w}$  and write down all formal codes  $\langle \sigma, \mathbf{t}, \mathbf{o}; \varpi, \mathcal{E}^s, \mathcal{E}^u, \mathbf{g}, \mathcal{L} \rangle$  with  $\mathbf{o} = (+, \dots, +)$ ,  $\mathcal{E}^u = \mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}^s = \mathcal{E}^u$  or  $\mathcal{E}^s = -\mathcal{E}^u$  and  $\mathcal{L}$  satisfying to the condition (FC3).

Move 3. For each of these formal codes check the conditions of Theorem C and, if they are not satisfied for any of them, to conclude that this solenoid is *not realizable on any oriented surface*. Go to move 6.

Move 4. For each code that satisfies the conditions of Theorem C, check equality  $\widehat{\mathbf{w}} = \mathbf{w}$ , where  $\widehat{\mathbf{w}}$  is the sequence of words which is calculated for using Algorithm B and  $\mathbf{w}$  is that one from initial solenoidal code. If it is not satisfied for any of them, make the same conclusion.

Move 5. If we find a code that satisfies all these conditions then the solenoid is *realizable on orientable surface*. And calculating for these codes (using the Algorithm A) a set of words  $\mathcal{R}$  we define via corresponding co-representation of fundamental group topological types of these surfaces. So we obtain minimal genus of such surface. What is more, if  $\mathcal{E}^s = \mathcal{E}^u$  then generating the attractor diffeomorphism preserves orientation and it reverses it in the case  $\mathcal{E}^s = -\mathcal{E}^u$ . *The end of the procedure of the Algorithm.*

Move 6. For each of transformed solenoidal codes calculated on the Move 1 write down all formal codes with all sequences  $\mathbf{o}$  with at least one entry "–",  $\mathcal{E}^u = \mathcal{E}$ , all possible sequences  $\mathcal{E}^s$  and all sequences  $\mathcal{L}$  satisfying to the condition (FC3).

Moves 7 and 8. For each of these codes check the same conditions as on the Moves 4 and 5. And if these are not valid for each of them than the solenoid is *not realizable on any surface*.

Move 9. If we find a code that satisfies all these conditions then the solenoid is *realizable on non-orientable surface* and we can define minimal genus of such one in the same way as in orientable case using Algorithm A. *The end of the procedure of the Algorithm.*

## References

1. *Williams, R. F.* One-dimensional non-wandering sets // Topology. — 1967. — T.6, №4. — С. 473–487.
2. *Williams, R. F.* Expanding attractors // Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci. — 1973. — T.43. — С. 161–203.
3. *Zhirov, A. Yu.* Combinatorics of one-dimensional hyperbolic attractors of diffeomorphisms of surfaces // Proceeding of the Steclov Insitute of Mathematics. — 2004. — T.244. — С. 132–200.

Получена 05.10.2018

УДК 517.957

## Теорема о существовании и устойчивости решения одного параболического уравнения

Ю. А. Хазова, О. В. Шиян

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,  
Симферополь, 295007 *E-mail: hazova.yuliya@hotmail.com*

**Аннотация.** Рассматривается смешанная краевая задача для нелинейного параболического уравнения с преобразованием отражения пространственной переменной в круге. Доказывается теорема о существовании, форме и устойчивости пространственно неоднородного стационарного решения поставленной задачи.

**Ключевые слова:** параболическая задача, теорема существования, бифуркация, устойчивость.

## The theorem on the existence and stability of a parabolic equation solutions

Yu. A. Khazova, O. V. Shiyan

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, 295007.

**Abstract.** The paper considers a mixed boundary value problem for a nonlinear parabolic equation with a transformation of the spatial variable on a sphere. It seems the proof of the existence, shape and stability of spatially inhomogeneous stationary solution of the problem.

**Keywords:** parabolic problem, existence theorem, bifurcation, stability.

**MSC 2010:** 35K10, 35K55

## Введение

В данной работе продолжается исследование функционально-дифференциального параболического уравнения с преобразованием пространственной переменной. Ранее были изучены случаи возникновения и дальнейшая динамика решений параболической задачи с преобразованием отражения пространственной переменной на окружности [1, 3, 4, 8] и на прямой [2, 7], а также с преобразованием поворота пространственной переменной на окружности [5, 6].

Исследование выполнено при поддержке Программы развития федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского» на 2015-2024 годы по проекту «Сеть академической мобильности «Академическая мобильность молодых ученых России»» в 2017 году на базе ФГБУН Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН, лаборатория дифференциальных и разностных уравнений.



## 1. Постановка задачи

Рассматривается параболическое уравнение в круге

$$\begin{aligned} v_t + Lv &= -K\gamma \frac{\cos w}{2!} Qv^2 + K\gamma \frac{\sin w}{3!} Qv^3, \\ Lv &= v - D\Delta v + K\gamma \sin w Qv. \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $v = v(r, \varphi, t)$  — искомая функция,  $0 < r < r_1$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $t > 0$ ,  $\Delta v = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}$  — оператор Лапласа в полярной системе координат.

На уравнение (1.1) накладываются следующие условия: условие Неймана на границе при  $r = r_1$

$$\frac{\partial v(r_1, \varphi, t)}{\partial r} = 0; \quad (1.2)$$

условие периодичности

$$v(r, \varphi, t) = v(r, \varphi + 2\pi, t); \quad (1.3)$$

условие ограниченности в начале координат

$$|v(0, \varphi, t)| \leq c < \infty \quad (1.4)$$

и начальное условие

$$v(r, \varphi, 0) = q_0(r, \varphi) - w = v_0. \quad (1.5)$$

**Лемма.** *Линейный оператор  $L$  уравнения (1.1) имеет собственные функции вида*

$$\{J_k(\lambda_{km}^c r) \cos k\varphi, J_k(\lambda_{km}^s r) \sin k\varphi\},$$

которым соответствуют собственные значения

$$\begin{aligned} \lambda_{km}^c &= D \left( \frac{\mu_{km}}{r_1} \right)^2 + (-1)^k K\gamma \sin \omega + 1, \\ \lambda_{km}^s &= D \left( \frac{\mu_{km}}{r_1} \right)^2 + (-1)^{k+1} K\gamma \sin \omega + 1, \\ k &= 0, 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $J_k(x)$  — функция Бесселя,  $\mu_{km}$  — корни уравнения

$$J'_k(\mu_{km}) = 0, k = 0, 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

Доказательство проводится методом разделения переменных.

## 2. Формулировка и доказательство теоремы

**Теорема.** Существует  $\delta_0 > 0$  такое, что если  $0 < D - D_1 < \delta_0$ , где  $D_1 = \frac{K\gamma \sin w - 1}{(\mu_{1m}^c/r_1)^2}$  — первое бифуркационное значение параметра  $D$ , то уравнение (1.1) имеет два асимптотически устойчивых решения вида

$$\begin{aligned} v^\pm(r, \varphi, D) \approx & \pm \left( \frac{D - D_1}{c_1(D_1)} \right)^{1/2} J_1(\lambda_{11}^c r) \cos \varphi + \\ & + \frac{1}{2!} \left( \frac{D - D_1}{c_1(D_1)} \right) \frac{\Lambda}{2} \operatorname{ctg} \omega ((\lambda_{10}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1} + (\lambda_{12}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1} \cos 2\varphi) J_1^2(\lambda_{11}^c r) \pm \\ & \pm \frac{1}{3!} \left( \frac{D - D_1}{c_1(D_1)} \right)^{3/2} (\lambda_{13}^c - 3\lambda_{11}^c)^{-1} \left( \frac{\Lambda}{4} - \frac{3}{4} \Lambda^2 \operatorname{ctg}^2 \omega (\lambda_{12}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1} \right) \times \\ & \times J_1^2(\lambda_{11}^c r) J_3(\lambda_{11}^c r) \cos 3\varphi, \end{aligned}$$

здесь  $\Lambda = -K\gamma \sin w$ ,

$$c_1(D) = \left[ \frac{\Lambda}{8} - \frac{1}{4} (\Lambda \operatorname{ctg} \omega)^2 \left( (\lambda_{10}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1} + \frac{1}{2} (\lambda_{12}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1} \right) \right] J_1^2(\lambda_{11}^c r) < 0.$$

*Доказательство.* Будем искать решения уравнения (1.1) при помощи метода центральных многообразий. В рассматриваемом случае центральное многообразие представимо в виде

$$v = z J_1(\lambda_{11}^c r) \cos \varphi + \frac{1}{2!} \Omega_2(z, r, \varphi, D) + \frac{1}{3!} \Omega_3(z, r, \varphi, D), \quad (2.1)$$

где  $\Omega_2(z, r, \varphi, D)$ ,  $\Omega_3(z, r, \varphi, D), \dots$  формы второй, третьей степени относительно  $z = z(t)$ .

На центральном многообразии исходное уравнение принимает вид

$$\dot{z} = -\lambda_{11}^c(D)z + c_1(D)z^3 + \dots \quad (2.2)$$

Найдем коэффициенты разложений (2.1), (2.2). С этой целью подставим (2.1), (2.2) в уравнение (1.1) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $z$ . Положим  $\Omega_2 = q_2(r, \varphi)z^2$ . Тогда уравнение для определения  $q_2(r, \varphi)$  примет вид

$$(L - 2!\lambda_{11}^c)q_2 = \Lambda \operatorname{ctg} \omega J_1^2(\lambda_{11}^c r) \cos^2 \varphi.$$

Опираясь на лемму однозначно находим выражение для  $q_2(r, \varphi)$

$$q_2(r, \varphi) = \frac{\Lambda}{2} \operatorname{ctg} \omega J_1^2(\lambda_{11}^c r) [(\lambda_{10}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1} + (\lambda_{12}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1} \cos 2\varphi]. \quad (2.3)$$

Полагая  $\Omega_3 = q_3(r, \varphi)z^3$ , приходим к заключению, что  $q_3$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{3!}(L - 3\lambda_{11}^c)q_3 + c_1(D)J_1(\lambda_{11}^c r) \cos \varphi = -\frac{\Lambda}{2} \operatorname{ctg} \omega J_1(\lambda_{11}^c r) \cos \varphi Qq_2 + \\ + J_1^3(\lambda_{11}^c r) \left[ \frac{\Lambda}{8} \cos \varphi + \frac{\Lambda}{24} \cos 3\varphi \right], \quad (2.4)$$

где  $q_2(r, \varphi)$  определен выше.

Для разрешимости уравнения (2.4) необходима и достаточна ортогональность правой части уравнения (2.4) решениям соответствующей однородной задачи. Условие разрешимости этого уравнения приводит к однозначному определению коэффициента  $c_1(D)$

$$c_1(D) = \left[ \frac{\Lambda}{8} - \frac{1}{4}(\Lambda \operatorname{ctg} \omega)^2 \left( (\lambda_{10}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1} + \frac{1}{2}(\lambda_{12}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1} \right) \right] J_1^2(\lambda_{11}^c r) < 0. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.4), при указанном выборе  $c_1(D)$ , имеет решение того же вида, что и его неоднородность

$$q_3(r, \varphi) = (\lambda_{13}^c - 3\lambda_{11}^c)^{-1} \left( \frac{\Lambda}{4} - \frac{3}{4}\Lambda^2 \operatorname{ctg}^2 \omega (\lambda_{12}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1} \right) J_1^2(\lambda_{11}^c r) J_3(\lambda_{11}^c r) \cos 3\varphi. \quad (2.6)$$

Решая уравнение (2.2) с точностью до кубического слагаемого, получаем

$$z \approx \pm \sqrt{\frac{\lambda_{11}^c(D)}{c_1(D) + \exp(2\lambda_{11}^c(D)(t - c))}}.$$

Разложим  $\lambda_{11}^c$  в окрестности точки  $D_1$ :  $\lambda_{11}^c(D) \approx (D - D_1)$ .

Из условий  $c_1(D_1) < 0$ ,  $\lambda_{11}^c(D_1) = 0$  следует, что имеет место суперкритическая бифуркация типа «вилка» и из нулевого решения уравнения ответвляются два асимптотически устойчивых решения

$$z^\pm = \pm \left( \frac{D - D_1}{c_1(D_1)} \right)^{1/2} + O((D - D_1)^{1/2}). \quad (2.7)$$

Следовательно, имеет место суперкритическая бифуркация рождения асимптотически устойчивых неоднородных стационарных решений. В силу (2.3), (2.6), (2.7) получаем

$$v^\pm(r, \varphi, D) \approx \pm \left( \frac{D - D_1}{c_1(D_1)} \right)^{1/2} J_1(\lambda_{11}^c r) \cos \varphi + \\ + \frac{1}{2!} \left( \frac{D - D_1}{c_1(D_1)} \right) \frac{\Lambda}{2} \operatorname{ctg} \omega \left( (\lambda_{10}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1} + (\lambda_{12}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1} \cos 2\varphi \right) J_1^2(\lambda_{11}^c r) \pm \\ \pm \frac{1}{3!} \left( \frac{D - D_1}{c_1(D_1)} \right)^{3/2} (\lambda_{13}^c - 3\lambda_{11}^c)^{-1} \left( \frac{\Lambda}{4} - \right.$$

$$-\frac{3}{4}\Lambda^2 \operatorname{ctg}^2 \omega (\lambda_{12}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1} \left. \vphantom{-\frac{3}{4}\Lambda^2 \operatorname{ctg}^2 \omega} \right) J_1^2(\lambda_{11}^c r) J_3(\lambda_{11}^c r) \cos 3\varphi, \quad (2.8)$$

где  $\Lambda = -K\gamma \sin w$ ,

$$c_1(D) = \left[ \frac{\Lambda}{8} - \frac{1}{4}(\Lambda \operatorname{ctg} \omega)^2 \left( (\lambda_{10}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1} + \frac{1}{2}(\lambda_{12}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1} \right) \right] J_1^2(\lambda_{11}^c r) < 0.$$

□

## Заключение

Авторами была доказана теорема о существовании, форме и устойчивости пространственно неоднородного стационарного решения смешанной краевой параболической задачи с преобразованием отражения пространственной переменной с условиями на круге. Доказательство опирается на метод центральных многообразий. Показан принцип построения асимптотической формы рождающихся пространственно неоднородных стационарных решений и определена устойчивость рожденных решений. Теорема носит локальный характер, поэтому для дальнейшего исследования динамики неоднородных решений необходимо использовать другие методы, например метод Галеркина.

### Список цитируемых источников

1. *Белан Е. П., Хазова Ю. А.* Динамика стационарных структур в параболической задаче на окружности с преобразованием отражения пространственной переменной // *Динамические системы.* — 2014. — Т.4(32), No.1-2. — С. 43–57.  
Belan, E. P.; Khazova, Yu. A. Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of a circle. *Dinamicheskie sistemy* 4(32), No.1-2, 43-57 (2014). (in Russian)
2. *Хазова Ю. А.* Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке с отражением пространственной переменной // *Динамические системы.* — 2014. — Т.4(32), No.3-4. — С. 245–257.  
Khazova, Yu. A. Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of segment. *Dinamicheskie Sistemy* 4(32), No.3-4, 245–257 (2014). (in Russian)
3. *Хазова Ю. А.* Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной // *Таврический вестник информатики и математики.* — 2015.— No.3(28). — С. 82–95.  
Khazova, Yu. A. Stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable. *Tavrisheskiy vestnik informatiki i matematiki* No 3(28), 82–95 (2015). (in Russian)
4. *Хазова Ю. А.* Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной // *Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика.* — 2015. — Т.3, No.8-4 (19-4). — С. 314–317.

Khazova, Yu. A. Stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable. Aktualniye napravleniya nauchnih issledovaniy XXI veka: teoriya i praktika 3, 3–16 (2015). (in Russian)

5. Хазова Ю. А. Бегущие волны в параболической задаче с преобразованием поворота на окружности // Компьютерные исследования и моделирование. — 2017. — Т.9, No.5. — С. 705–716.

Khazova, Yu. A. Traveling waves in a parabolic problem with a rotation on the circle. Computer research and modeling 9(5), 705–716 (2017). (in Russian)

6. Хазова Ю. А. Решение типа «бегущие волны» в параболической задаче с преобразованием поворота // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2017. — Т.25, No.6. — С. 57–69.

Khazova, Yu. A. Traveling waves solution in parabolic problem with a rotation. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Prikladnaya Nelineynaya Dinamika 25(6), 57–69 (2017). (in Russian)

7. Хазова Ю. А. Метаустойчивые структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной на отрезке // Динамические системы. — 2017. — Т.7(35), No.2. — С. 121–131.

Khazova, Yu. A. Metastable structures in a parabolic problem with reflection of a spatial variable on a segment. Dinamicheskie Sistemy 7(35), No.2, 121–131 (2017). (in Russian)

8. Шиян, О. В. О динамике бегущих волн в системе Ван-дер-Поля с малой диффузией // Труды ИПММ НАН Украины. — 2008. — Т.16. — С. 208–222.

Shiyan, O. V. Dynamics of traveling waves in a Van der Pol system with low diffusion. Trudy IPMM NAN Ukrainy 16, 208–222 (2008). (in Russian)

Получена 25.09.2018

УДК 517.957

# Метаустойчивые структуры уравнения Кана-Хилларда

С. П. Плышевская

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,  
Симферополь 295007. E-mail: *splyshevskaya@mail.ru*

**Аннотация.** На отрезке рассматривается уравнение Кана-Хилларда с краевыми условиями. Для исследования задачи о метаустойчивых структурах рассматриваемого уравнения используется метод Галеркина. Стационарным точкам систем обыкновенных дифференциальных уравнений отвечают приближённые стационарные решения исходной задачи. В этих системах реализуется богатый набор седло-узловых бифуркаций. Непрерывным ветвям неподвижных точек, которые рождаются в результате этих седло-узловых бифуркаций, отвечают непрерывные ветви приближённых стационарных решений исходной задачи. В работе показано, что приближённые стационарные решения, взятые в качестве начальных функций исходной задачи, порождают медленно меняющиеся решения (метаустойчивые структуры).

**Ключевые слова:** метаустойчивые структуры, метод Галеркина, градиентная система, бифуркация, внутренний переходный слой.

## Metastable structure of the Cahn-Hilliard equation

S. P. Plyshevskaya

V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

**Abstract.** The Cahn-Hilliard equation at a segment with the boundary condition is considered. For the construction and analysis of stationary solutions of slowly varying solutions we use the Galerkin approximations of the average dimensions (30 – 40). It is found that in two-parameter families of differential equations there are realized saddle-node bifurcations, to the continuous branches of stationary solutions of which, the continuous branches of approximate stationary solutions of the transition layer type with two and three transition points correspond. These solutions generate metastable structures (slowly varying solutions). The analysis conducted suggests that the use of the Galerkin method in the problem of metastable structures leads to qualitatively and quantitatively correct results.

**Keywords:** metastable structure, stability, Galerkin's method, gradient system, bifurcation, internal shock layer.

**MSC 2010:** 35B32, 35B35, 35K35, 35K55

### 1. Постановка задачи

Данная работа посвящена исследованию медленно меняющихся решений уравнения

$$\begin{aligned} u_t &= (-\varepsilon^2 u_{xx} - u + u^3)_{xx}, & 0 < x < \pi, & \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(\pi, t) = 0, & u_{xxx}(0, t) &= 0, \quad u_{xxx}(\pi, t) = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\varepsilon > 0$  - постоянная.

Параметр  $\varepsilon^2$  является коэффициентом при градиентной энергии в функционале Гинзбурга-Ландау и пропорционален величине поверхностной энергии на межфазной границе, возникающей при расслоении концентрации при  $T \rightarrow T_c$ , где  $T_c$  – критическая температура. Поскольку единственным механизмом переноса атомов является диффузионный механизм (см., например, [6]), то  $\varepsilon^2 \propto D$ , где  $D$  – коэффициент диффузии [1].

Краевая задача (1.1) допускает существование аттрактора: т.е. при  $t \rightarrow \infty$  её решения сходятся к решениям стационарной задачи

$$(-\varepsilon^2 u_{xx} - u + u^3)_{xx} = 0, \quad u_x(0) = u_x(\pi) = 0, \quad u_{xxx}(0) = u_{xxx}(\pi) = 0. \quad (1.2)$$

Это утверждение доказано в [4].

Исследование кинетики расслоения в бинарных смесях с заданной концентрацией компонентов является одной из актуальных задач физики конденсированного состояния [1].

Уравнение Кана-Хилларда (1.1) - это одна из самых знаменитых моделей, которая описывает процесс изотермического разделения фаз концентрации [3], где неизвестная функция является концентрацией одной из компонент бинарной смеси.

Уравнение Кана-Хилларда (1.1) рассматривалось в работах многих авторов. В частности, в [1] рассматривается бинарная смесь, которая граничит с подложкой и вакуумом и образует плёнку. Распределение одной из компонент смеси описывается уравнением Кана-Хилларда с несимметричными граничными условиями, учитывающим процессы (смачивания), происходящие на границе и приповерхностных слоях плёнки и, возможно, влияние внешнего постоянного магнитного поля.

При спиnodальном распаде можно наблюдать спонтанные коррелированные поверхностные и(или) объёмные структуры, состоящие из кластеров повышенной (пониженной) концентрации. В работах [5, 6] уравнение Кана-Хилларда моделирует распределение концентрации.

В работе [3] N. Alikakos, P. W. Bates, G. Fusco (1991) доказано существование метаустойчивых структур (медленно меняющихся решений) уравнения (1.1) при малых значениях параметра  $\varepsilon^2$ .

В данной работе рассматривается следующая задача: показать с помощью численных расчётов сценарий возникновения при уменьшении параметра  $\varepsilon^2$  метаустойчивых структур (медленно меняющихся решений) уравнения (1.1). Для решения этой задачи строится и проводится анализ иерархии упрощенных моделей уравнения (1.1) – галеркинских аппроксимаций (1.1).

## 2. Аппроксимации уравнения (1.1)

Рассмотрим галеркинскую аппроксимацию уравнения (1.1) в виде

$$u = z_0 + \sum_{k=1}^N z_k \cos kx. \quad (2.1)$$

Подставим (2.1) в (1.1) и приравняем затем коэффициенты при  $\cos kx$ ,  $k = 0, \dots, N$ . В результате приходим к градиентной системе уравнений:

$$\dot{z}_0 = 0, \quad \dot{z}_k = -\frac{\partial G_N(z, \varepsilon)}{\partial z_k}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

где  $z = (z_0, \dots, z_N)$ , а  $G_N(z, \varepsilon)$  – потенциальная функция, представление которой опустим.

Из первого уравнения системы следует, что  $z_0 = \text{const} = a$  является постоянным параметром.

В системе (2.2) семейство решений  $\pm(a, 0, \dots, 0)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , устойчиво при  $\varepsilon^2 > 0$ , если  $|a| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Если  $|a| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ , то семейство решений устойчиво при  $\varepsilon^2 > 1 - 3a^2$ . Решения  $\pm(1, 0, \dots, 0)$  устойчивы для  $\varepsilon^2 > 0$ . При переходе параметра  $\varepsilon^2$  через значение  $\varepsilon^2 = 1 - 3a^2$  семейство решений  $\pm(a, 0, \dots, 0)$  становится неустойчивым с индексом неустойчивости 1. В результате этой бифуркации от семейства решений ответвляются две ветви неподвижных точек  $\pm z^1(\varepsilon, N, a)$ , определённые по  $\varepsilon$  на  $[0, 1 - 3a^2]$ . Все компоненты  $z_{2k}^1(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , находятся вблизи 0, причём  $z_1^1 > -z_3^1 > z_5^1 > \dots$ . Следовательно, справедливо следующее приближённое равенство:

$$\varphi_1(x, \varepsilon, a) \approx a + \sum_{k=1}^N z_k^1(\varepsilon, N, a) \cos kx. \quad (2.3)$$

Согласно [3] при достаточно малых  $\varepsilon^2$  и фиксированном  $a$  функции  $\varphi_1(x, \varepsilon, a)$  близки к ступенчатым функциям со значениями 1,  $-1$  и одной точкой перехода.

Анализ непрерывной ветви  $z^1(\varepsilon, N, a)$  неподвижных точек (2.2), выполненный для  $N$  от 30 до 40, равенство (2.3) даёт основание для следующих заключений. Если  $1 - 3a^2 - \varepsilon^2 > 0$  мало, то функция  $\varphi_1(x, \varepsilon, a)$  имеет квазигармоническую форму с малой амплитудой. Решение  $\varphi_1(x, \varepsilon, a)$  монотонно убывает на промежутке  $[0, \pi]$ , причём при  $a = 0$   $\varphi_1(\frac{\pi}{2}, \varepsilon, a) = 0$ ,  $\varphi_1(\pi - x, \varepsilon, a) = -\varphi_1(x, \varepsilon, a)$ . Для каждого фиксированного  $x$ , например, при  $a = 0$   $x \in [0, \pi/2]$ ,  $\varphi_1(x, \varepsilon, a)$  монотонно возрастает при уменьшении параметра  $\varepsilon$ ,  $\varphi_1(x, \varepsilon, a) \rightarrow 1$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Причём с увеличением  $a$  промежутков, на котором функция  $\varphi_1(x, \varepsilon, a) \rightarrow 1$  возрастает. Следует отметить, что правая часть равенства (2.3) при малых  $\varepsilon^2$  в силу явления Гиббса колеблется. Таким образом, указанное выше поведение функции  $\varphi_1(\cdot, \varepsilon, a)$  согласно (2.3) при малых  $\varepsilon^2$  справедливо по модулю явления Гиббса.



Следуя [2], с помощью принципа подобия можно построить, опираясь на  $\varphi_1(x, \varepsilon, a)$ , решения  $\varphi_k(x, \varepsilon, a)$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , краевой задачи (1.2). Пусть  $\varphi(x, \varepsilon, a)$  - отличное от нуля решение (1.2), определенное для всех  $0 < \varepsilon < a$ . Продолжим функцию  $\varphi(x, \varepsilon, a)$  на промежуток  $[-\pi, 0)$  чётным образом, а затем на всю ось  $x$  по периодичности с периодом  $2\pi$ . Тогда при любом натуральном  $k$  функция  $\varphi(kx, k\varepsilon, a)$  будет удовлетворять краевой задаче (1.2) для всех  $0 < \varepsilon^2 < \frac{a}{k}$ . Отсюда вытекает, что на промежутке  $0 < \varepsilon^2 < \frac{1}{k}$  справедливо равенство:

$$\varphi_k(x, \varepsilon, a) = \varphi_1(kx, k\varepsilon, a), \quad k = 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

Динамика  $\varphi_2(x, \varepsilon, a)$  при уменьшении  $\varepsilon^2$  от критического значения  $\frac{1}{4} - 3a^2$  следует из равенства (2.4). Подчеркнём, что при малых  $\varepsilon^2$   $\varphi_2(x, \varepsilon, a)$  является решением (1.1) типа внутреннего переходного слоя с двумя точками перехода.

Перейдём теперь к вопросу об устойчивости  $\pm\varphi_1$ . Эта пара решений (1.1) рождается устойчивой. Характер устойчивости  $\pm\varphi_1$  сохраняется на промежутке  $[0, 1 - 3a^2)$  изменения параметра  $\varepsilon^2$ . Точки спектра неподвижной точки  $z^1(\varepsilon, N, a)$  для всех  $0 < \varepsilon^2 < 1 - 3a^2$  лежат на отрицательной полуоси и при убывании  $\varepsilon^2$  сближаются: максимальная точка убывает, минимальная возрастает.

Перейдём теперь к вопросу об устойчивости стационарных решений  $\pm\varphi_2(x, \varepsilon, a)$ . Эта пара решений (1.1) рождается при  $\varepsilon^2 = \frac{1}{4} - 3a^2$  неустойчивой с индексом неустойчивости равным 1. Характер устойчивости решений  $\pm\varphi_2(x, \varepsilon, a)$  сохраняется, а единственное положительное собственное значение спектра экспоненциально мало,  $O(e^{-\frac{\varepsilon}{\varepsilon}})$ .

Для анализа поведения спектра решения (1.1)  $\varphi_2(x, \varepsilon, a)$  при средних значениях параметра  $\varepsilon^2$  обратимся вновь к системе (2.2). Для каждого  $N$  в системе (2.2) при уменьшении параметра  $\varepsilon^2$  и его переходе через значение  $\frac{1}{4} - 3a^2$  индекс неустойчивости семейства решений увеличивается на 1. В результате этой бифуркации от семейства решений ответвляются две непрерывные ветви неподвижных точек  $\pm z^2(\varepsilon, N, a)$ , определённые на  $[0, 2^{-2} - 3a^2)$ . Все нечётные компоненты  $z^2(\varepsilon, N, a)$  равны 0. Чётные компоненты  $z_{2k}^2(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , отличны от нуля, причём  $z_{6k+2}^2 > 0$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Следовательно, справедливо следующее приближённое равенство:

$$\varphi_2(x, \varepsilon, a) \approx a + \sum_{k=1}^m z_{2k}^2(\varepsilon, N, a) \cos 2kx, \quad (2.5)$$

$m + 1 = N$ , если  $N$  — нечётно,  $m = N$ , если  $N$  — чётно.

Рассмотрим здесь задачу о поведении максимального собственного значения решения  $\varphi_2(x, \varepsilon, a)$  при средних значениях параметра  $\varepsilon^2$ . Обратимся в этой связи к вопросу о динамике по параметру  $\varepsilon^2$  максимального собственного значения  $\lambda_1(\varepsilon, N, a)$  неподвижных точек  $z^2(\varepsilon, N, a)$  системы (2.2). Спектр устойчивости  $z^2(\varepsilon, N, a)$  лежит на вещественной оси, а его максимальная точка  $\lambda_1 = \lambda_1(\varepsilon, N, a)$

при малых  $\frac{1}{4} - 3a^2 - \varepsilon^2 > 0$  принадлежит положительной полуоси. Остальные точки спектра неподвижной точки  $z^2(\varepsilon, N, a)$  для всех  $0 < \varepsilon^2 < \frac{1}{4} - 3a^2$  лежат на отрицательной полуоси и при убывании  $\varepsilon^2$  сближаются: максимальная точка убывает, минимальная возрастает. Согласно численному анализу для  $30 < N < 40$  поведение  $\lambda_1$  зависит от  $N$ . Если  $N$  — чётно, то  $\lambda_1$  убывает при убывании  $\varepsilon^2$ . При приближении  $\lambda_1$  к нулю скорость изменения  $\lambda_1$  уменьшается. При этом выделяется интервал  $(\varepsilon_1^2(N), \varepsilon_2^2(N))$  изменения  $\varepsilon^2$ , на которых  $\lambda_1(\varepsilon, N, a)$  медленно меняется вблизи нуля. При убывании  $\varepsilon^2$  от значения  $\varepsilon_1^2(N)$   $\lambda_1$  принимает отрицательные значения и медленно, монотонно убывает. Пусть  $N$  — нечётно. Тогда  $\lambda_1(\varepsilon, N, a)$  не принимает отрицательных значений. Процесс медленной эволюции  $\lambda_1$  на интервале  $(\varepsilon_1^2(N), \varepsilon_2^2(N))$ , на котором  $\lambda_1$  принимает малые положительные значения, переходит в стадию медленного монотонного возрастания при уменьшении  $\varepsilon^2$  от  $\varepsilon_1^2(N)$ . Отметим, что возрастание  $N$  приводит к возрастанию  $\varepsilon_2^2(N) - \varepsilon_1^2(N)$  и убыванию  $\varepsilon_2^2(N)$ .

Пусть  $a = 0.3$ . Приведём иллюстрирующие примеры:  $\varepsilon_1^2(29) \approx 0.02$ ,  $\varepsilon_2^2(29) \approx 0.04$ ;  $\lambda_1(0.04, 29, 0.3) = 0.00007$ ,  $\lambda_1(0.02, 29, 0.3) = 0.00002$ ,  $\lambda_1(0.01, 29, 0.3) = 0.001$ ;  $\varepsilon_1^2(30) \approx 0.03$ ,  $\varepsilon_2^2(30) \approx 0.04$ ;  $\lambda_1(0.04, 30, 0.3) = 0.00007$ ,  $\lambda_1(0.03, 30, 0.3) = 0.000076$ ,  $\lambda_1(0.02, 30, 0.3) = -0.00004$ .

Динамика  $\varphi_3(x, \varepsilon, a)$  при уменьшении  $\varepsilon^2$  от критического значения  $\frac{1}{9} - 3a^2$  следует из равенства (2.4). Подчеркнём, что при малых  $\varepsilon$   $\varphi_3(x, \varepsilon, a)$  является решением (1.1) типа внутреннего переходного слоя с тремя точками перехода.

Перейдём теперь к вопросу об устойчивости стационарных решений  $\pm\varphi_3(x, \varepsilon, a)$ . Эта пара решений (1.1) рождается при  $\varepsilon^2 = \frac{1}{9} - 3a^2$  неустойчивой с индексом неустойчивости равным 2.

Для анализа поведения спектра решения (1.1)  $\varphi_3(x, \varepsilon, a)$  при средних значениях параметра  $\varepsilon^2$  обратимся вновь к системе (2.2). Для каждого  $N$  в системе (2.2) при уменьшении параметра  $\varepsilon^2$  и его переходе через значение  $\frac{1}{9} - 3a^2$  индекс неустойчивости семейства решений увеличивается на 1.

В результате этой бифуркации от семейства решений ответвляются две непрерывные ветви неподвижных точек  $\pm z^3(\varepsilon, N, a)$ , определённые на  $[0, \frac{1}{9} - 3a^2]$ . Компоненты  $z_{3k}^3(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , отличны от нуля. Следовательно, справедливо следующее приближённое равенство:

$$\varphi_3(x, \varepsilon, a) \approx a + \sum_{k=1}^m z_{3k}^3(\varepsilon, N, a) \cos 3kx, \tag{2.6}$$

$m = N$ , если  $N = 3l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ ;  $m = N - 2$ , если  $N = 3l + 2$ ,  $l = 1, 2, \dots$ ;  $m = N - 1$ , если  $N = 3l - 2$ ,  $l = 2, 3, \dots$ .

Переходим к анализу спектра неподвижных точек  $\pm z^3(\varepsilon, N, a)$ . Точки  $\pm z^3(\varepsilon, N, a)$  рождаются неустойчивыми с индексом неустойчивости 2: две точки

спектра  $\lambda_1(\varepsilon, N, a) > \lambda_2(\varepsilon, N, a) > 0$ , а остальные точки принадлежат отрицательной полуоси. При уменьшении параметра  $\varepsilon^2$  отрицательные точки спектра сближаются: максимальная точка убывает, а минимальная возрастает. Значительный интерес представляет вопрос о поведении  $\lambda_k(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2$ . Приведем здесь результаты анализа о поведении  $\lambda_k(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2$  для  $30 < N < 40$ . При уменьшении параметра  $\varepsilon^2$  функции  $\lambda_k(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2$ , монотонно убывают и приближаются к нулю. При подходе этих функций к нулю скорость их изменения становится малой. При этом наблюдались интервалы изменения  $\varepsilon^2$ , на которых  $\lambda_k(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2$ , медленно меняются вблизи нуля. Указанные интервалы зависят от  $N$ . При условии уменьшения  $\varepsilon^2$  и выхода из соответствующего интервала медленной эволюции имеет место монотонное убывание или возрастание  $\lambda_k(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2$ . Функции  $\lambda_k(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2$ , монотонно убывают, если  $N = 6l + 6$ ,  $N = 6l + 7$ ,  $l = 0, 1, \dots$ , и переходят с положительной на отрицательную полуоси. Подчеркнём, что значения параметра  $\varepsilon^2$ , при которых реализуется этот переход, являются достаточно близкими. Для  $N = 30$ ,  $a = 0.1$  в качестве иллюстрации указанного поведения спектра  $\pm z^3(\varepsilon, N, a)$  приводятся его четыре наибольшие точки:

$$\varepsilon^2 = 0.016, \quad \{-17.497, -14.593, 0.00011, 0.00344\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.015, \quad \{-17.541, -14.758, -0.0002, 0.00230\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.014, \quad \{-17.579, -14.923, -0.0006, 0.00135\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.013, \quad \{-17.610, -15.088, -0.0013, 0.00057\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.012, \quad \{-17.633, -15.251, -0.0025, -0.00005\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.010, \quad \{-17.648, -15.567, -0.0072, -0.00144\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.001, \quad \{-17.487, -16.568, -1.2095, -0.34948\}.$$

Пусть теперь  $N = 6l - 1$ ,  $l = 1, 2, \dots$ . Тогда имеет место медленное увеличение  $\lambda_k(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2$ , при уменьшении параметра  $\varepsilon^2$ . Переход этих функций через 0 не наблюдается. В качестве иллюстрации указанного поведения спектра приведём примеры для  $N = 35$ ,  $a = 0.1$ . При этом, как и выше, укажем четыре наибольшие точки спектра:

$$\varepsilon^2 = 0.014, \quad \{-17.576, -14.923, 0.0020, 0.00029\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.013, \quad \{-17.606, -15.088, 0.0015, 0.00028\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.012, \quad \{-17.627, -15.250, 0.0012, 0.00032\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.011, \quad \{-17.637, -15.411, 0.0012, 0.00042\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.010, \quad \{-17.634, -15.566, 0.0017, 0.00058\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.001, \quad \{-15.440, -15.149, 0.9990, 0.30013\}.$$

Пусть теперь  $N = 6l + 2$ ,  $N = 6l + 3$ ,  $N = 6l + 4$ ,  $l = 1, 2, \dots$ . Функции  $\lambda_k(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2$ , монотонно убывают и  $\lambda_2(\varepsilon, N, a)$  переходит с положительной на отрицательную полуоси. Тогда как  $\lambda_1(\varepsilon, N, a)$  не принимает отрицательных значений. Процесс медленной эволюции  $\lambda_1$  на интервале, на котором  $\lambda_1$  принимает малые положительные значения, переходит в стадию медленного монотонного возрастания при уменьшении  $\varepsilon^2$ . Для  $N = 34$ ,  $a = 0.1$  в качестве иллюстрации указанного поведения спектра  $\pm z^3(\varepsilon, N, a)$  приводятся его четыре наибольшие точки:

$$\varepsilon^2 = 0.012, \quad \{-17.627, -15.250, 0.00013, 0.0008\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.011, \quad \{-17.637, -15.411, 0.00009, 0.0005\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.010, \quad \{-17.634, -15.566, -0.00002, 0.0006\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.001, \quad \{-15.473, -15.149, -0.00983, 0.3107\}.$$

### 3. Метаустойчивые структуры с двумя точками перехода

В градиентных системах (2.2) размерности  $N$  согласно проведенному бифуркационному анализу для значений  $N$  от 30 до 40 реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций при малых значениях параметра  $\varepsilon^2$ . В результате бифуркации седло-узел в двухпараметрической системе (2.2) появляются две непрерывные по  $\varepsilon^2$  ветви стационарных точек, индексы неустойчивости которых отличаются на 1. Эти ветви стационарных точек определены для всех положительных значений параметра  $\varepsilon$ , которые меньше соответствующего бифуркационного. Рассматриваемым двум ветвям стационарных точек (2.2) отвечают в силу (2.1) две непрерывные ветви приближенных решений краевой задачи (1.2) типа внутреннего переходного слоя. Будем говорить, что приближенные решения (1.2) указанного типа порождаются седло-узловыми бифуркациями в системе (2.2). Некоторые из седло-узловых бифуркаций в (2.2) порождают непрерывные по  $\varepsilon^2$  ветви приближенных решений краевой задачи (1.2) типа внутреннего переходного слоя с двумя точками перехода. Седло-узловые бифуркации в этом случае обладают следующими свойствами. Характер устойчивости соответствующих ветвей стационарных точек (2.2) не меняется, а максимальные точки их спектров медленно отходят от нуля с уменьшением параметра  $\varepsilon^2$ . Этими свойствами бифуркации седло-узел указанного выше типа вполне определяются.

Рассмотрим один из сценариев эволюции метаустойчивых структур с двумя точками перехода. Он характеризуется переходом метаустойчивой структуры после сравнительно малого по сравнению с этапом медленного изменения переходного процесса в класс метаустойчивых структур с одной точкой перехода.

Этот вариант эволюции характерен медленным движением при увеличении  $t$  правой точки перехода рассматриваемой структуры к  $\pi$  и медленным же движением левой точки перехода к одной из точек промежутка  $(0, \pi)$ . Ввиду инвариантности (1.1) относительно преобразований  $x \mapsto \pi - x$  уравнение (1.1) имеет сопряженную структуру с очевидной эволюцией точек перехода.

Как выше отмечалось, в градиентных системах (2.2) размерности  $N$  реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций. Рассмотрим порожденные седло-узловыми бифуркациями непрерывные ветви неподвижных точек (2.2), которым в силу (2.1) отвечают две непрерывные ветви приближенных решений краевой задачи (1.2) типа внутреннего переходного слоя с двумя точками перехода. Каждая пара непрерывных ветвей неподвижных точек (2.2) указанного выше типа медленно меняется при уменьшении параметра  $\varepsilon^2$ . Следовательно, медленно меняются при этом и соответствующие им ветви приближенных решений (1.2). Отметим, что найти бифуркационные значения параметра  $\varepsilon^2$ , как правило, не удаётся. В этой связи далее приводятся их приближенные значения  $\varepsilon^2$  и для каждого из них соответствующие стационарные точки (2.2), индексы неустойчивости которых отличаются на 1. Реализуются следующие два случая:

1) одна из неподвижных точек — устойчива, две ее близкие нулю точки спектра принадлежат отрицательной полуоси, у второй же две близкие нулю точки спектра лежат по разные стороны от нуля;

2) две близкие нулю точки спектра одной из неподвижных точек лежат по разные стороны от нуля, у второй же две ее близкие нулю точки спектра принадлежат положительной полуоси. Подчеркнем, что индекс неустойчивости неподвижных точек на каждой ее непрерывной ветви сохраняется. При этом с уменьшением параметра  $\varepsilon^2$  две максимальные точки спектра неподвижных точек медленно уходят от нуля. Остальные точки спектра принадлежат отрицательной полуоси.

Перейдем к иллюстрации каскадов седло-узловых бифуркаций в (2.2), где  $N = 30$ ,  $a = 0.1$ , и приближенных решений краевой задачи (1.2), отвечающих этим каскадам. Далее приводятся 8 приближённых бифуркационных значения параметра  $\varepsilon^2$  каскада. Каждому значению  $\varepsilon^2$  отвечают две близкие неподвижные точки (2.2). Мы приводим их 3 наибольшие точки спектров:

$$\varepsilon^2 = 0.0149, \{-8.101, -7.099, -0.0000002\}, \{-8.345, -6.111, 0.0000002\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.0141, \{-8.9560, -6.377, -0.000007\}, \{-9.6120, -5.881, 0.000011\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.0137, \{-10.538, -5.149, -0.000012\}, \{-10.724, -4.977, 0.000014\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.0114, \{-11.285, -4.273, -0.000089\}, \{-11.399, -4.043, 0.000121\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.0098, \{-11.528, -3.535, -0.000219\}, \{-11.550, -3.427, 0.000273\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.0078, \{-11.521, -2.969, -0.000756\}, \{-11.518, -2.907, 0.000909\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.0057, \{-11.393, -2.519, -0.002546\}, \{-11.371, -2.489, 0.002904\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.0034, \{-11.279, -2.167, -0.031504\}, \{-11.038, -2.123, 0.042570\}.$$

Изменение первых пяти координат  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$  первой устойчивой ветви при уменьшении бифуркационного значения параметра  $\varepsilon^2$  от 0.0149, где  $N = 30$ ,  $z_0 = a = 0.1$ , показано на рис. 1. Подчеркнем, что бифуркационные значения параметра  $\varepsilon^2$  зависят от порядка  $N$  системы (2.2). С увеличением  $N$  бифуркационные значения параметра  $\varepsilon^2$  соответствующих седло-узловых бифуркаций убывают. Так

приближенному бифуркационному значению параметра  $\varepsilon^2 = 0.0149$  системы (2.2) порядка  $N = 30$  отвечает приближенное значение  $\varepsilon^2 = 0.0147$  системы (2.2) порядка  $N = 31$ . С увеличением же  $a$  увеличивается число приближённых бифуркационных значения параметра  $\varepsilon^2$ . Так при  $N = 30$ ,  $a = 0.3$  это число равно 10. Неподвижным первым 4 парам точек (2.2), где  $\varepsilon^2 = 0.01$ ,  $a = 0.1$ , порождённым указанными выше седло-узловыми бифуркациями, отвечают 4 пары приближённых решений краевой задачи (1.2) на рис. 2.

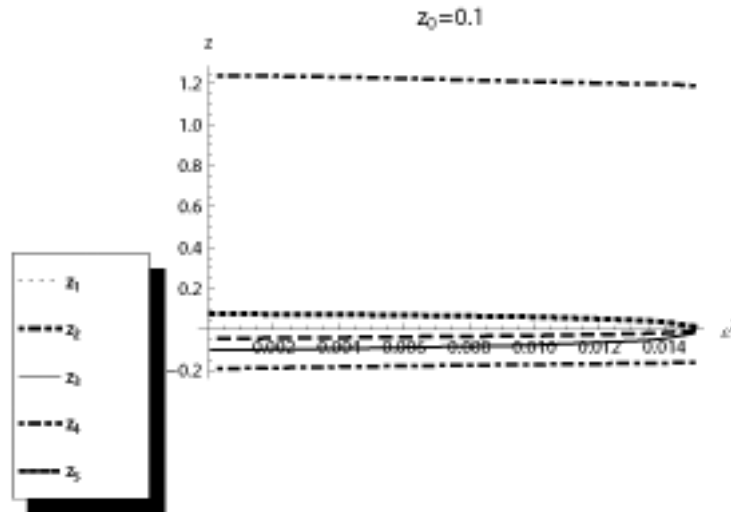


Рис. 1.

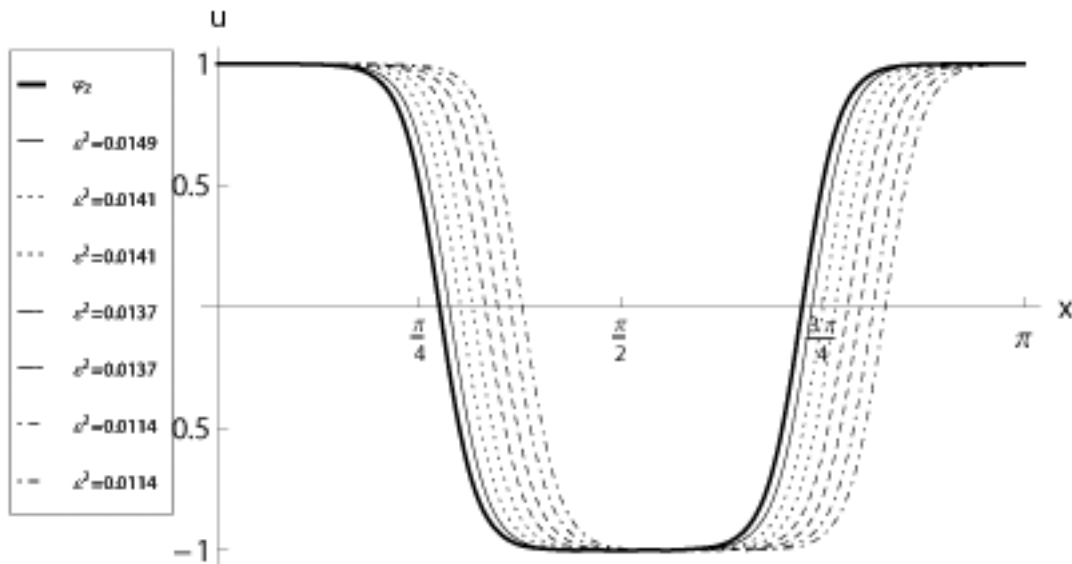


Рис. 2. Приближённые решения (1.2),  $\varepsilon^2 = 0.01$ ,  $a = 0.1$

Приближенные решения (1.2) типа внутреннего переходного слоя с двумя точ-

ками перехода, принятые в качестве начальных функций уравнения (1.1), приводят к метаустойчивым структурам. Иллюстрацией этого предложения является рис. 3, где представлено решение (1.1) с  $\varepsilon^2 = 0.01$ ,  $a = 0.1$ .

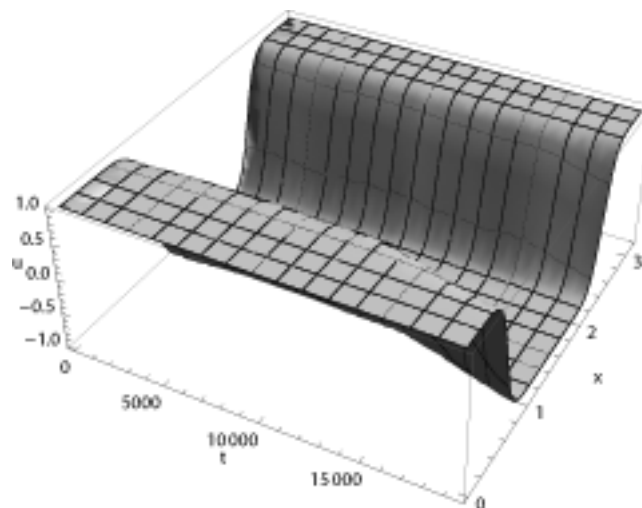


Рис. 3. Приближённые решения (1.2),  $\varepsilon^2 = 0.01$ ,  $a = 0.1$

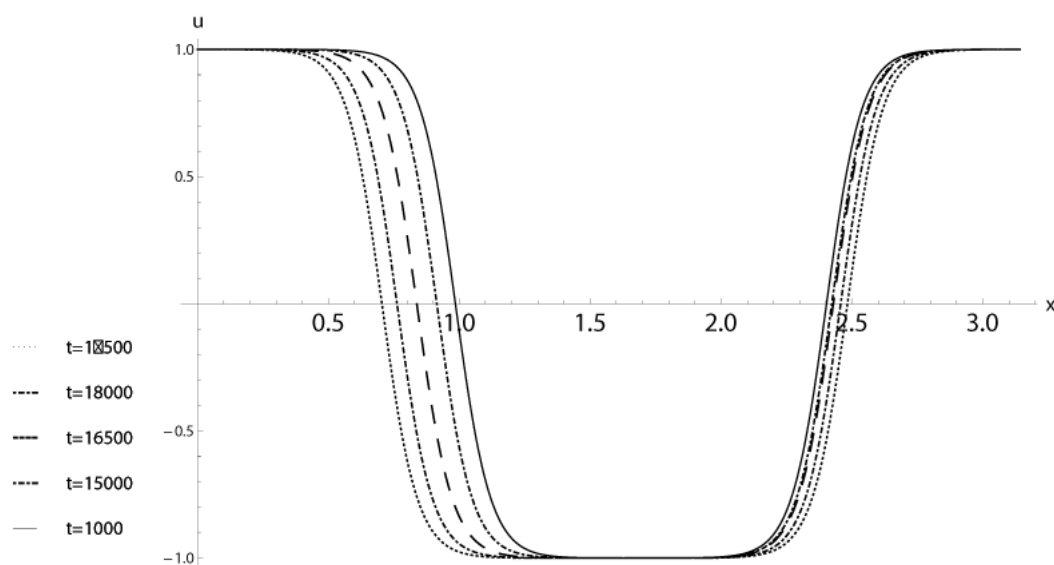


Рис. 4. Профили решения (1.1),  $\varepsilon^2 = 0.01$ ,  $a = 0.1$

Здесь в качестве начальной функции принято приближённое решение (1.2), представленное функцией, которая на рис. 2 имеет четвёртую точку перехода. График этого решения, полученный применением пакета "Mathematica", представлен на рис. 3. Как видно, решение медленно меняется в течение времени  $\approx 19500$ .

Затем за достаточно короткий по сравнению с этапом медленной эволюции промежуток времени оказывается вблизи метаустойчивых структур с одной точкой перехода. Профили решения (1.1), проиллюстрированного на рис. 3, представлены на рис. 4 при различных  $t$ .

#### 4. Метаустойчивые структуры с тремя точками перехода

Некоторые из седло-узловых бифуркаций в (2.2) порождают непрерывные по  $\varepsilon^2$  ветви приближенных решений краевой задачи (1.2) типа внутреннего переходного слоя с тремя точками перехода.

Задача исследования метаустойчивых структур (1.1) с тремя точками перехода, разумеется, сложнее, чем соответствующая задача для метаустойчивых структур с двумя точками перехода.

Рассмотрим сценарий эволюции метаустойчивых структур с тремя точками перехода. Он характеризуется переходом метаустойчивой структуры после сравнительно малого по сравнению с этапом медленного изменения переходного процесса в класс метаустойчивых структур с одной точкой перехода.

Сразу перейдем к иллюстрации каскадов седло-узловых бифуркаций в (2.2), где  $N = 30$ ,  $a = 0.1$ , и приближенных решений краевой задачи (1.2), отвечающих этим каскадам. Далее приводятся 4 приближённых бифуркационных значения параметра  $\varepsilon^2$  каскада. Каждому значению  $\varepsilon^2$  отвечают две близкие неподвижные точки (2.2). Мы приводим их 3 наибольшие точки спектров:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 = 0.00394, & \{-9.103, -0.084, -0.0011\}, \{-9.148, -0.077, 0.0011\}; \\ \varepsilon^2 = 0.00374, & \{-5.700, -0.120, -0.0019\}, \{-5.753, -0.096, 0.0022\}; \\ \varepsilon^2 = 0.00354, & \{-3.895, -0.130, -0.0029\}, \{-3.917, -0.104, 0.0040\}; \\ \varepsilon^2 = 0.00325, & \{-2.694, -0.736, -0.0040\}, \{-2.674, -0.952, 0.0046\}. \end{aligned}$$

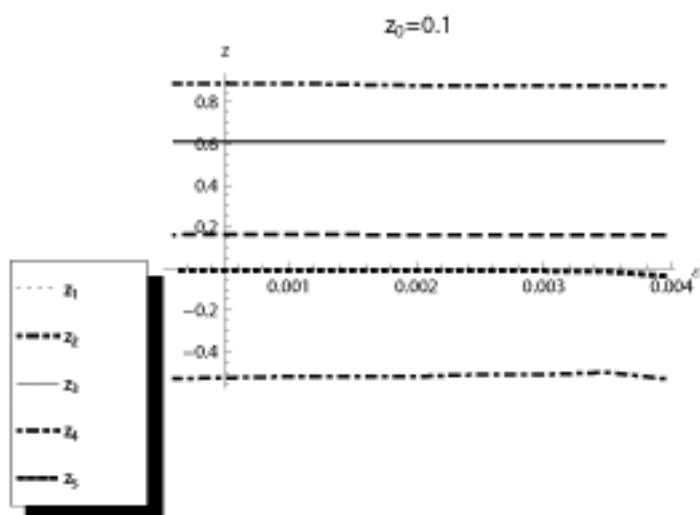


Рис. 5.



Изменение первых пяти координат  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$  первой устойчивой ветви при уменьшении бифуркационного значения параметра  $\varepsilon^2$  от 0.00394, где  $N = 30, z_0 = a = 0.1$ , показано на рис. 5.

Неподвижным 4 парам точек (2.2), где  $\varepsilon^2 = 0.001, a = 0.1$ , порождённым указанными выше седло-узловыми бифуркациями, отвечают 4 пары приближенных решений краевой задачи (1.2) на рис. 6.

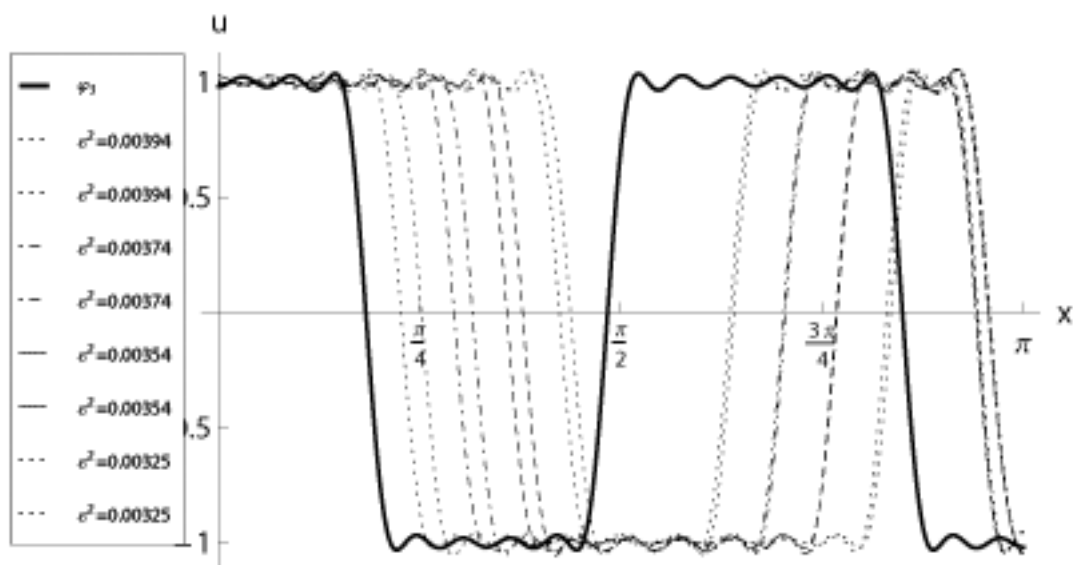


Рис. 6. Приближённые решения (1.2),  $\varepsilon^2 = 0.001, a = 0.1$

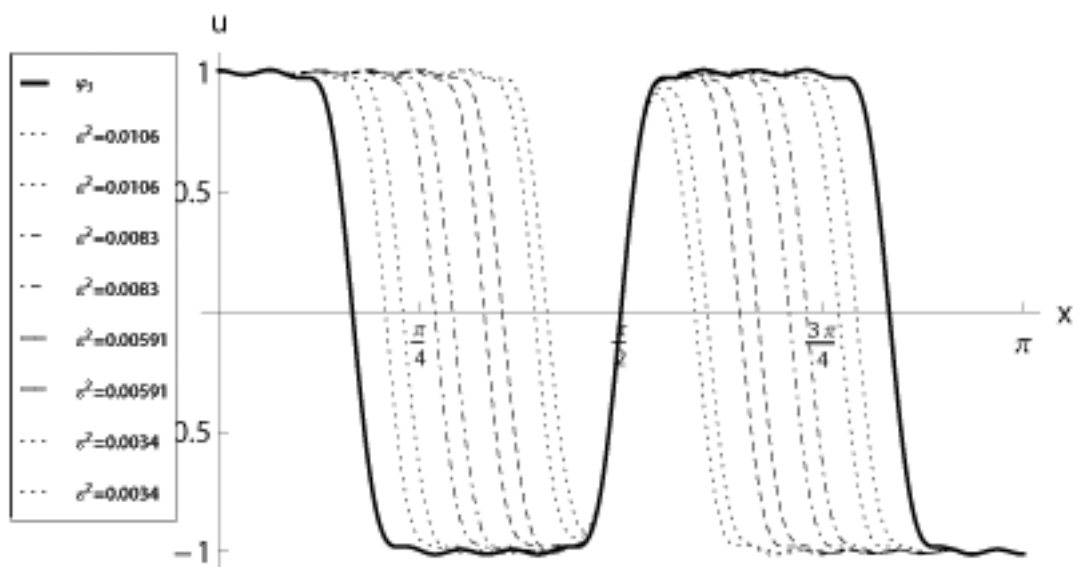


Рис. 7. Приближённые решения (1.2),  $\varepsilon^2 = 0.003, a = 0$

Перейдем к иллюстрации каскадов седло-узловых бифуркаций в (2.2), где  $N = 31$ ,  $a = 0$ , и приближенных решений краевой задачи (1.2), отвечающих этим каскадам. Далее приводятся 4 приближённых бифуркационных значения параметра  $\varepsilon^2$  каскада. Каждому значению  $\varepsilon^2$  отвечают две близкие неподвижные точки (2.2). Мы приводим их 3 наибольшие точки спектров:

$$\varepsilon^2 = 0.010600, \{-12.74, -0.005, -0.0005\}, \{-12.17, -0.004, 0.0006\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.008300, \{-7.578, -0.019, -0.0004\}, \{-7.520, -0.019, 0.0004\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.005910, \{-4.915, -0.096, -0.0062\}, \{-4.837, -0.095, 0.0068\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.003497, \{-3.386, -0.481, -0.0164\}, \{-3.357, -0.468, 0.0170\}.$$

Неподвижным 4 парам точек (2.2), где  $\varepsilon^2 = 0.003$ ,  $a = 0$ , порождённым указанными выше седло-узловыми бифуркациями, отвечают 4 пары приближенных решений краевой задачи (1.2) на рис. 7.

Приближенные решения (1.2) типа внутреннего переходного слоя с тремя точками перехода, принятые в качестве начальных функций уравнения (1.1), приводят к метаустойчивым структурам. Иллюстрацией этого предложения является рис. 8, где представлено решение (1.1) с  $\varepsilon^2 = 0.01$ ,  $a = 0$ .

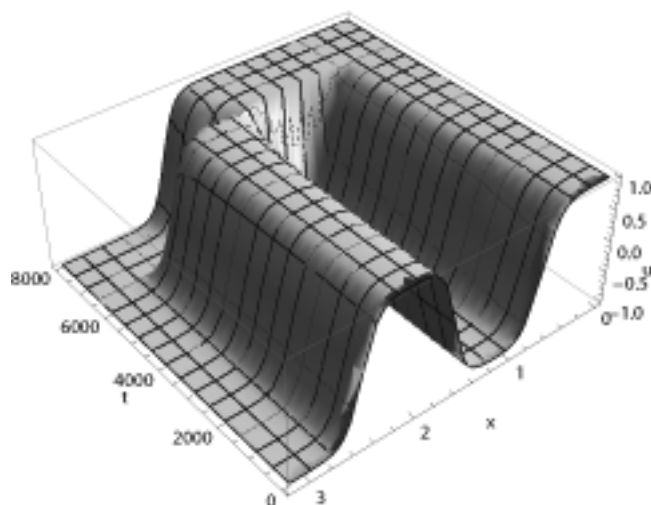


Рис. 8. Приближённые решения (1.2),  $\varepsilon^2 = 0.01$ ,  $a = 0$

Здесь начальной функцией является приближённое решение (1.2), представленное функцией, которая на рис. 7 имеет вторую точку перехода. Согласно рис. 8 решение медленно меняется в течение времени  $\approx 6550$ . Затем за достаточно короткий по сравнению с этапом медленной эволюции промежуток времени оказывается вблизи метаустойчивых структур с одной точкой перехода.

Профили решения (1.1), проиллюстрированного на рис. 8, представлены на рис. 9 при различных  $t$ .

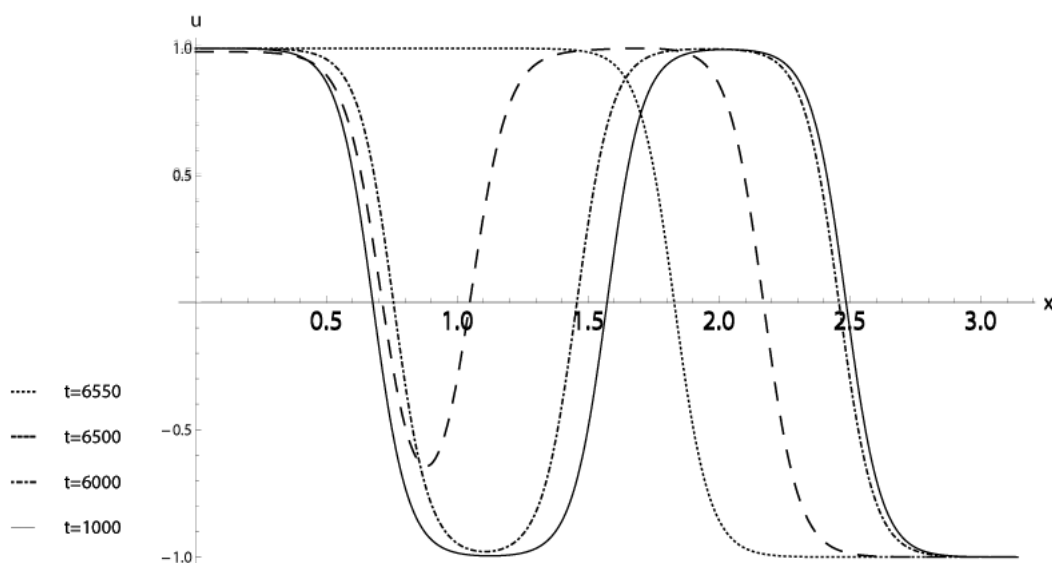


Рис. 9. Профили решения (1.1),  $\varepsilon^2 = 0.01$ ,  $a = 0$

## 5. Заключение

В градиентной системе седло-узловые бифуркации порождают приближённые решения краевой задачи типа внутреннего переходного слоя. В свою очередь, приближённые решения типа внутреннего переходного слоя с двумя и тремя точками перехода приводят к метаустойчивым структурам. Экспериментально показан один из сценариев возникновения метаустойчивых структур. Для этого строился и проводился анализ иерархии упрощенных моделей уравнения (1.1) — галеркинских аппроксимаций (1.1) средних размерностей.

### Список цитируемых источников

1. Краснюк, И. Б., Стефанович, Л. И., Юрченко, В. М. Колебания концентрации в ограниченных бинарных смесях с учётом поверхностных эффектов // Журнал технической физики. — 2007. — Т.77, №11. — С. 55–62.  
Krasnyuk, I. B., Stefanovic, L. I., Yurchenko, V. M. Concentration oscillations in bounded binary mixtures with allowance for surface effects. Journal of Technical Physics 77, No.11, 55–62 (2007). (in Russian)
2. Мищенко, Е. Ф., Садовничий, В. А., Колесов, А. Ю., Розов, Н. Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. — Москва: Физматлит, 2005. — 430 с.  
Mischenko, Ye. F., Sadovnichiy, V. A., Kolesov, A. Yu., Rozov, N. Kh. Processes in nonlinear media with diffusion. Moskva: Fizmatlit, 2005. (in Russian)
3. Alikakos, N., Bates, P. W., Fusco, G. Slow motion for the Cahn-Hilliard equation in one space dimension. Journal of Differential Equations 90, 81–135 (1991).
4. Chafee, N., Infante, E. A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type. Appl. Anal. 4, 17–37 (1974).

5. *Puri, S., Binder, K.* Surface-directed spinodal decomposition in a thin-film geometry: a computer simulation. *Journal of Statistical Physics* 77, No.1,2, 145–172 (1994).
6. *Taylor, J. E., Cahn, J. W.* Linking anisotropic sharp and diffuse surface motion laws via gradient flows. *Journal of Statistical Physics* 77, No.1,2, 183–197 (1994).

*Получена 19.04.2018*

## РЕФЕРАТЫ

УДК 517.925.5 + 517.929

Г. В. ДЕМИДЕНКО, И. А. УВАРОВА. **Предельные теоремы для одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом** (русский) // *Динамические системы*, 2018. — Том 8(36), №3. — С. 205–234.

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности, возникающая в биологических задачах при моделировании многостадийного синтеза вещества. При некоторых условиях на нелинейные члены получены оценки решений системы, характеризующие экспоненциальное убывание при  $t \rightarrow \infty$  независимо от размерности  $n$  и установлены связи между решениями системы дифференциальных уравнений и уравнений с запаздывающим аргументом. На основе этих результатов получаем метод для приближенного построения последней компоненты решения системы высокой размерности на всей полуоси  $(0, \infty)$ . Установлены глобальные оценки аппроксимации при  $n \gg 1$ .

**Ключевые слова:** система обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности, уравнение с запаздывающим аргументом, проблема большой размерности, глобальные оценки аппроксимации, предельные теоремы.

Библиогр. 20 назв.

УДК 517.938

В. З. ГРИНЕС, Е. В. ЖУЖОМА, Е. Д. КУРЕНКОВ. **Хирургическая операция для эндоморфизма Аносова двумерного тора не дает растягивающийся аттрактор** (русский) // *Динамические системы*, 2018. — Том 8(36), №3. — С. 235–244.

В 1967 году С. Смейл предложил способ построения гиперболических аттракторов и репеллеров коразмерности один диффеоморфизмов, заданных на  $n$ -мерном торе, отталкиваясь от алгебраического автоморфизма Аносова. Фактически, С. Смейл схематично описал локальное изменение такого автоморфизма, называемое хирургической операцией, в результате которого получается так называемый ДА-диффеоморфизм. Неблуждающее множество ДА-диффеоморфизма состоит в точности из одного растягивающегося аттрактора коразмерности один и одной источниковой неподвижной точки, или в точности одного сжимающегося репеллера коразмерности один и одной стоковой неподвижной точки. В настоящей работе устанавливается, что применение хирургической операции С. Смейла к алгебраическому эндоморфизму Аносова, являющимся конечно-листным накрытием степени не меньшей двух, не приводит к построению  $A$ -эндоморфизма, неблуждающее множество которого содержит одномерный растягивающийся аттрактор.

**Ключевые слова:** гиперболический аттрактор, репеллер, эндоморфизмы Аносова, аксиома  $A$ .

Ил. 1. Библиогр. 14 назв.

УДК 517.9

С. А. КАЩЕНКО, Д. О. ЛОГИНОВ. **Устойчивость решений уравнений параболического типа с медленно меняющимися коэффициентами** (русский) // *Динамические системы*, 2018. — Том 8(36), №3. — С. 245–262.

Рассматривается вопрос об устойчивости решений линейных систем уравнений параболического типа. Основное внимание уделено изучению устойчивости решений с медленно меняющимися почти периодическими коэффициентами и с переменной областью определения. Выделены

критические случаи в задаче об устойчивости и разработан эффективный алгоритм исследования задач устойчивости решений. Кроме этого рассмотрены подобные задачи для систем параболических уравнений с большими коэффициентами диффузии и для систем с быстро осциллирующими по пространственной переменной коэффициентами.

**Ключевые слова:** параболические системы, устойчивость, критические случаи, асимптотика.

Библиогр. 14 назв.

УДК 517.938

А. Ю. ЖИРОВ. **Как проверить, может ли одномерный соленоид в смысле Williams быть реализован как гиперболический аттрактор поверхностного диффеоморфизма (английский)** // Динамические системы, 2018. — Том 8(36), №3. — С. 263–274.

В статье представлен алгоритм, который позволяет заданному одномерному соленоиду в смысле Уильямса ответить на вопрос: существует ли поверхностный диффеоморфизм с одномерным гиперболическим аттрактором такой, что ограничение диффеоморфизма на этот аттрактор топологически сопряжено со сдвиговым автоморфизмом данного соленоида.

**Ключевые слова:** solenoid, hyperbolic attractor, branched manifold.

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.957

Ю. А. ХАЗОВА, О. В. ШИЯН. **Теорема о существовании и устойчивости решения одного параболического уравнения (русский)** // Динамические системы, 2018. — Том 8(36), №3. — С. 275–280.

Рассматривается смешанная краевая задача для нелинейного параболического уравнения с преобразованием отражения пространственной переменной в круге. Доказывается теорема о существовании, форме и устойчивости пространственно неоднородного стационарного решения поставленной задачи.

**Ключевые слова:** параболическая задача, теорема существования, бифуркация, устойчивость.

Библиогр. 8 назв.

УДК 517.957

С. П. ПЛЫШЕВСКАЯ. **Метаустойчивые структуры уравнения Кана-Хилларда (русский)** // Динамические системы, 2018. — Том 8(36), №3. — С. 281–295.

На отрезке рассматривается уравнение Кана-Хилларда с краевыми условиями. Для исследования задачи о метаустойчивых структурах рассматриваемого уравнения используется метод Галеркина. Стационарным точкам систем обыкновенных дифференциальных уравнений отвечают приближённые стационарные решения исходной задачи. В этих системах реализуется богатый набор седло-узловых бифуркаций. Непрерывным ветвям неподвижных точек, которые рождаются в результате этих седло-узловых бифуркаций, отвечают непрерывные ветви приближённых стационарных решений исходной задачи. В работе показано, что приближённые стационарные решения, взятые в качестве начальных функций исходной задачи, порождают медленно меняющиеся решения (метаустойчивые структуры).

**Ключевые слова:** метаустойчивые структуры, метод Галеркина, градиентная система, бифуркация, внутренний переходный слой.

Ил. 9. Библиогр. 6 назв.

## ABSTRACTS

MSC 2010: 34K05, 34A12, 34A34

G. V. DEMIDENKO, I. A. UVAROVA. **Limit theorems for one system of ordinary differential equations of high dimension and delay differential equations** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **8(36)**, no.3, 205–234 (2018).

We consider a system of ordinary differential equations of high dimension arising in biological problems when modeling multi-stage substance synthesis. Under some conditions on nonlinear terms we obtain estimates of solutions to the system characterizing the exponential decay as  $t \rightarrow \infty$  regardless of dimension  $n$  and establish connections between solutions to the system of differential equations and delay equations. Based on these results we obtain a method for approximate construction of the last component of the solution to the system of high dimension on the entire semi-axis  $(0, \infty)$ . Global estimates of approximation are established for  $n \gg 1$ .

**Keywords:** system of ordinary differential equations of high dimension, delay differential equation, problem of high dimension, global estimates of approximation, limit theorems.

Ref. 20.

MSC 2010: 47N10, 49J20, 49J35, 93C20, 70E99

V. Z. GRINES, E. V. ZHUZHOMA, E. D. KURENKOV. **Surgery operation for Anosov endomorphism gives no expanding attractor** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **8(36)**, no.3, 235–244 (2018).

In 1967 S. Smale proposed a method how to construct hyperbolic codimension one attractors and repellers of diffeomorphisms given on  $n$ -torus. The construction was based on Anosov toral algebraic diffeomorphism. In essence, he described local modification of such automorphism that leads to so-called derived from Anosov diffeomorphism. The nonwandering set of DA-diffeomorphism consists either of an expanding codimension one attractor and a trivial source or of codimension one contracting repeller and a trivial sink. In the present paper we show that Smale's surgery operation applied to Anosov endomorphism that is  $k$ -fold covering map of degree not less than two does not lead to an  $A$ -endomorphism with one-dimensional expanding attractor.

**Keywords:** hyperbolic attractor, repeller, Anosov endomorphism, axiom  $A$ .

Fig. 1. Ref. 14.

MSC 2010: 47D99

S. A. KASCHENKO, D. O. LOGINOV. **Stability of solutions of parabolic equations with slowly varying coefficients** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **8(36)**, no.3, 245–262 (2018).

The question of the stability of solutions of linear systems of parabolic equations is considered. The main attention is paid to the study of the stability of solutions with slowly varying almost periodic coefficients and with a variable domain of definition. Critical cases in the problem of stability are identified and an effective algorithm for studying problems of solution stability is developed. In addition, similar problems for systems of parabolic equations with large diffusion coefficients and for systems with coefficients rapidly oscillating in spatial variable are considered.

**Keywords:** parabolic systems, stability, critical cases, asymptotics.

Ref. 14.

MSC 2010: 37B05

A. YU. ZHIROV. **How to check if one-dimensional solenoid in the sense of Williams can be realized as hyperbolic attractor of surface diffeomorphism** (English). *Dinamicheskie Sistemy* **8(36)**, no.3, 263–274 (2018).

In the paper, an algorithm is presented that allows for a given one-dimensional solenoid in the sense of Williams to answer the question: does a surface diffeomorphism with a one-dimensional hyperbolic attractor exist such that the restriction of the diffeomorphism to this attractor is topologically conjugate to the shift automorphism of the given solenoid.

**Keywords:** solenoid, hyperbolic attractor, branched manifold.

Ref. 3.

MSC 2010: 35K10, 35K55

YU. A. KHAZOVA, O. V. SHIYAN. **The theorem on the existence and stability of a parabolic equation solutions** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **8(36)**, no.3, 275–280 (2018).

The paper considers a mixed boundary value problem for a nonlinear parabolic equation with a transformation of the spatial variable on a sphere. It seems the proof of the existence, shape and stability of spatially inhomogeneous stationary solution of the problem.

**Keywords:** parabolic problem, existence theorem, bifurcation, stability.

Ref. 8.

MSC 2010: 35B32, 35B35, 35K35, 35K55

S. P. PLYSHEVSKAYA. **Metastable structure of the Cahn-Hilliard equation** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **8(36)**, no.3, 281–295 (2018).

The Cahn-Hilliard equation at a segment with the boundary condition is considered. For the construction and analysis of stationary solutions of slowly varying solutions we use the Galerkin approximations of the average dimensions (30 – 40). It is found that in two-parameter families of differential equations there are realized saddle-node bifurcations, to the continuous branches of stationary solutions of which, the continuous branches of approximate stationary solutions of the transition layer type with two and three transition points correspond. These solutions generate metastable structures (slowly varying solutions). The analysis conducted suggests that the use of the Galerkin method in the problem of metastable structures leads to qualitatively and quantitatively correct results.

**Keywords:** metastable structure, stability, Galerkin's method, gradient system, bifurcation, internal shock layer.

Fig. 9. Ref. 6.



Подписано в печать 07.12.2018. Формат 60x84/8.  
Усл. печ. л. 10,93. Тираж 50 экз. Заказ № НП/249.  
Подписной индекс объединенного каталога «Пресса России»  
64971. Цена 400 руб. Дата выхода в свет 13.03.2019.  
Отпечатано в управлении редакционно-издательской  
деятельности КФУ имени В. И. Вернадского  
295051, г. Симферополь, б. Ленина, 5/7.