Динамические системы, 2018, том 8(36), №3, 205–234

УДК 517.925.5 + 517.929

Предельные теоремы для одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом[1]

Г. В. Демиденко*,, И. А. Уварова***
*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
**Новосибирский государственный университет,
Новосибирск 630090.
E-mail: demidenk@math.nsc.ru, sibirochka@ngs.ru

Аннотация. Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности, возникающая в биологических задачах при моделировании многостадийного синтеза вещества. При некоторых условиях на нелинейные члены получены оценки решений системы, характеризующие экспоненциальное убывание при $t \to \infty$ независимо от размерности n и установлены связи между решениями системы дифференциальных уравнений и уравнений с запаздывающим аргументом. На основе этих результатов получаем метод для приближенного построения последней компоненты решения системы высокой размерности на всей полуоси $(0, \infty)$. Установлены глобальные оценки аппроксимации при $n \gg 1$.

Ключевые слова: система обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности, уравнение с запаздывающим аргументом, проблема большой размерности, глобальные оценки аппроксимации, предельные теоремы.

Limit theorems for one system of ordinary differential equations of high dimension and delay differential equations

G. V. Demidenko, I. A. Uvarova
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Novosibirsk State University,
Novosibirsk 630090.

Abstract. We consider a system of ordinary differential equations of high dimension arising in biological problems when modeling multi-stage substance synthesis. Under some conditions on nonlinear terms we obtain estimates of solutions to the system characterizing the exponential decay as $t \to \infty$ regardless of dimension n and establish connections between solutions to the system of differential equations and delay equations. Based on these results we obtain a method for approximate

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 17-41-543365, № 18-29-10086).

construction of the last component of the solution to the system of high dimension on the entire semi-axis $(0,\infty)$. Global estimates of approximation are established for $n \gg 1$.
Keywords: system of ordinary differential equations of high dimension, delay differential equation, problem of high dimension, global estimates of approximation, limit theorems.
MSC 2010: 34K05, 34A12, 34A34

1. Введение

В настоящей работе мы будем рассматривать задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности следующего вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A_n x + F(t,x), \quad t>0, \\ x|_{t=0} = x^0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где

$$A_n = \begin{pmatrix} -\dfrac{n-1}{\tau} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \dfrac{n-1}{\tau} & -\dfrac{n-1}{\tau} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\dfrac{n-1}{\tau} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{n-1}{\tau} & -\theta \end{pmatrix}, \quad \theta>0, \quad \tau>0, \quad n \gg 1,$$

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^{\mathrm{T}}, \quad x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^{\mathrm{T}},$$
$$F(t,x) = (g(t,x_n), 0, \dots, 0)^{\mathrm{T}}.$$

Такие системы возникают при изучении некоторых биологических и химических процессов (см., например, [10, 3] и имеющуюся там литературу). В частности, их используют при моделировании многостадийного синтеза вещества [3, 9]. В этом случае число стадий n определяет число дифференциальных уравнений в (1.1), τ — суммарное время протекания стадий из первого состояния в n-е. Компоненты $x_i(t)$ искомой вектор-функции $x(t)$ определяют концентрацию вещества на i-й стадии процесса. Первое нелинейное уравнение системы (1.1) определяет закон инициации синтеза вещества, последнее уравнение задает закон диссипации вещества, остальные уравнения характеризуют скорость изменения концентрации вещества на промежуточных стадиях (см. [3]).

Отметим, что процесс синтеза вещества может иметь сотни тысяч промежуточных стадий. Следовательно, при изучении модели (1.1) исследователь сталкивается с серьезными трудностями, поскольку ввиду нелинейности функции $g(t,z)$ аналитическое решение системы практически невозможно, а в силу огромного числа уравнений построение приближенного решения задачи Коши с помощью компьютера может представлять очень серьезную проблему.

Следует подчеркнуть, что в задаче синтеза вещества биологов прежде всего интересует концентрация конечного продукта. Поэтому, рассматривая систему (1.1), нужно уметь достаточно точно вычислять последнюю компоненту решения $x_n(t)$ при $n \gg 1$. Но из вида системы вытекает, что ни одним из ее уравнений пренебречь нельзя. Кроме того, эту систему нельзя рассматривать как "укороченную" некоторой счетной системы [15], так как коэффициенты системы (1.1) являются неограниченными при $n \to \infty$. Следовательно, при рассмотрении систем вида (1.1) с очень большим числом уравнений возникает *"проблема большой размерности"*.

Для системы (1.1) эта проблема была решена в 2002 году в результате совместной деятельности биологов и математиков. Метод ее решения основан на установленных связях между решениями системы (1.1) и решениями уравнения с запаздывающим аргументом. Предположение о возможных связях между последней компонентой решения системы (1.1) (при $g(t,z) \equiv g(z)$, $n \gg 1$) и решением уравнения

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(y(t-\tau)) \tag{1.2}$$

было высказано В. А. Лихошваем, исходя из биологических соображений. Численные расчеты, проведенные С. И. Фадеевым для конкретных систем, подтверждали это предположение. Строгое математическое доказательство существования таких связей на малом интервале $(0,T)$ впервые было получено Г. В. Демиденко и опубликовано в совместной работе [9]. В частности, при нулевых данных $x^0 = 0$ в [9] была доказана оценка

$$\max_{t\in[0,T]} |x_n(t) - y(t)| \le \frac{c}{n^{1/4}}, \quad n \ge n_0, \tag{1.3}$$

где $y(t)$ — решение уравнения (1.2), удовлетворяющее условиям

$$y(t) \equiv 0, \quad 0 \le t \le \tau, \quad y(\tau + 0) = 0, \tag{1.4}$$

константа $c > 0$ зависит от функции $g(z)$, величины T и параметров τ, θ.

Из вышесказанного вытекает, что, если число стадий n достаточно велико, то для приближенного нахождения концентрации конечного продукта $x_n(t)$ достаточно найти решение $y(t)$ начальной задачи (1.2), (1.4). А неравенство (1.3) будет характеризовать теоретическую оценку точности полученного результата. Конечно, в виду нелинейности при нахождении решения задачи (1.2), (1.4) нужно будет использовать приближенные методы, которые неизбежно повлекут дополнительные погрешности при вычислениях. Однако при использовании метода шагов (см., например, [14]), эти погрешности будут возникать при построении приближенных решений задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, и их не трудно оценить.

Как отмечено в [1]: "...с математической точки зрения гипотезу о наличии связей между компонентой $x_n(t)$ решения системы (1.1) и решением уравнения

(1.2) можно было высказать, проводя параллель с исследованиями [17, 8, 16, 19]". Напомним, что в этих работах изучался *обратный* вопрос об аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с помощью решений специального класса систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности.

Результаты [9] о связях решений систем (1.1) при $n \gg 1$ и уравнений с запаздывающим аргументом (1.2) были обобщены на некоторые классы систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности и установлены на произвольном конечном интервале $(0, T)$ (см., например, [4, 13, 5, 12, 18, 6, 11, 2, 20, 7]). Однако при получении аналогичных результатов на всей полуоси $(0, \infty)$ возникают принципиальные сложности, связанные с поведением решений на бесконечности при всех достаточно больших $n \gg 1$. В настоящей работе мы указываем условия на нелинейную функцию $g(t, z)$, при которых удается доказать некоторые предельные теоремы (при $n \to \infty$), из которых вытекают аналоги результатов [9] на всей полуоси $(0, \infty)$. Тем самым, как и на конечном интервале $(0, T)$, мы получаем метод для приближенного построения последней компоненты решения системы (1.1) высокой размерности на всей полуоси $(0, \infty)$, при этом устанавливаем глобальные оценки аппроксимации при $n \gg 1$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что функция $g(t, z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$ ограничена, $g(t, 0) \equiv 0$ и удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу

$$|g(t, z)| \le G < \infty, \quad |g(t, z^1) - g(t, z^2)| \le L|z^1 - z^2|, \quad t \ge 0, \quad z^1, z^2 \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

2. Асимптотические свойства решения задачи Коши

В этом параграфе мы получим оценки решения задачи Коши (1.1) для любой размерности системы $n > n_0$. Из этих оценок будет вытекать экспоненциальное убывание решений системы при $t \to \infty$ не зависимо от ее размерности.

Из условий на функцию $g(t, z)$ следует, что задача Коши (1.1) однозначно разрешима, при этом решение существует на всей полуоси $[0, \infty)$. В дальнейшем, чтобы подчеркивать размерность системы n, для ее решения будем использовать обозначение

$$x^n(t) = (x_1^n(t), x_2^n(t), \dots, x_n^n(t))^{\mathrm{T}}.$$

Выпишем некоторые интегральные соотношения для компонент решения $x_j^n(t)$, полученные в работе [6].

Лемма 1. *Для компонент решения задачи Коши (1.1) справедливы интегральные соотношения*

$$x_j^n(t) = \sum_{k=1}^{j} x_k^{n,0}\, e^{-\frac{n-1}{\tau}t} \frac{\left(\frac{n-1}{\tau}t\right)^{j-k}}{(j-k)!}$$
$$+ \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-s)} \frac{\left(\frac{n-1}{\tau}(t-s)\right)^{j-1}}{(j-1)!} g(s, x_n^n(s))ds, \quad j = 1, \dots, n-1, \tag{2.1}$$

$$x_n^n(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k^{n,0} \hat{\psi}_{n-k+1}^n(t) + \int_0^t \hat{\psi}_n^n(t-s) g(s, x_n^n(s)) ds, \tag{2.2}$$

где $x_k^{n,0}$ *— компоненты начального вектора* x^0,

$$\hat{\psi}_1^n(t) = e^{-\theta t}, \tag{2.3}$$

$$\hat{\psi}_k^n(t) = \frac{e^{-\theta t}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{k-1}} \left(1 - e^{-\omega_n t} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\omega_n t)^j}{j!}\right), \quad k = 2, \ldots, n, \tag{2.4}$$

$$\omega_n = \frac{n-1}{\tau} - \theta.$$

Для получения оценок решения задачи (1.1) нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 2. *Найдется* $n_* = n_*(\theta, \tau) > \theta\tau + 1$ *такое, что для всех* $n > n_*$ *выполнены оценки*

$$0 < \hat{\psi}_k^n(t) < 2e^{-\theta(t-\tau)}, \quad k = 1, \ldots, n, \quad t > 0. \tag{2.5}$$

Доказательство. Для $\hat{\psi}_1^n(t) = e^{-\theta t}$ оценка (2.5) очевидна.

Пусть $k \geq 2$. Рассмотрим сначала выражение, стоящее в знаменателе функции $\hat{\psi}_k^n(t)$

$$\beta_{n,k} = \left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{k-1}. \tag{2.6}$$

Вначале заметим, что при всех $n > \theta\tau + 1$ выполняется неравенство

$$\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{k_1} > \left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{k_2}, \quad k_1 < k_2.$$

А поскольку

$$\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{n-1} \to e^{-\theta\tau}, \quad n \to \infty,$$

то найдется $n_* = n_*(\theta, \tau) > \theta\tau + 1$ такое, что для всех $n > n_*$ имеет место неравенство

$$\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{n-1} > e^{-\theta\tau}/2.$$

Таким образом для чисел (2.6) справеливо

$$\beta_{n,k} \geq \beta_{n,n} > e^{-\theta\tau}/2, \quad k = 2, \ldots, n, \quad n > n_*. \tag{2.7}$$

Учитывая теперь, что при $n > \theta\tau + 1$ выполнено

$$0 < e^{-\omega_n t} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\omega_n t)^j}{j!} \leq e^{-\omega_n t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\omega_n t)^j}{j!} \equiv 1, \quad t \geq 0,$$

отсюда получаем

$$0 \le 1 - e^{-\omega_n t} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\omega_n t)^j}{j!} < 1, \quad t \ge 0. \tag{2.8}$$

Из оценок (2.7), (2.8) вытекает неравенство (2.5).

Лемма доказана.

Используя леммы 1 и 2, в следующей теореме мы получим оценки решения задачи Коши (1.1) для любой размерности системы.

Теорема 1. *Пусть $g(t,0) \equiv 0$ и выполнены условия (1.5). Тогда при $0 < L < \theta$ нулевое решение задачи Коши (1.1) асимптотически устойчиво и при всех достаточно больших $n \gg 1$ имеют место следующие оценки*

$$|x_j^n(t)| \le c_j \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k^{n,0}| \right) e^{-\delta t}, \quad j = 1, \dots, n-1, \tag{2.9}$$

$$|x_n^n(t)| \le c \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k^{n,0}| \right) e^{-\delta t}, \quad t > 0, \tag{2.10}$$

где

$$\delta = \min \left\{ \frac{\theta - L}{2}, \frac{1}{\tau} \ln \frac{\theta + L}{2L} \right\}, \tag{2.11}$$

и константы c_j, c не зависят от n.

Доказательство. Рассмотрим соотношение (2.2). Умножим обе его части на $e^{\delta t}$, где параметр $\delta \in (0, \theta)$ определим позже, и при $n > n_*$ воспользуемся оценкой (2.5)

$$e^{\delta t} |x_n^n(t)| \le 2 e^{-(\theta - \delta)t + \theta\tau} \sum_{k=1}^{n} |x_k^{n,0}| + \int_0^t \left| \hat{\psi}_n^n(t-s) \right| e^{\delta t} |g(s, x_n^n(s))| ds.$$

Учитывая условие Липшица (1.5), получаем

$$|g(s, x_n^n(s))| = |g(s, x_n^n(s)) - g(s, 0)| \le L |x_n^n(s)|.$$

Тогда справедлива оценка

$$e^{\delta t} |x_n^n(t)| \le 2 e^{-(\theta - \delta)t + \theta\tau} \sum_{k=1}^{n} |x_k^{n,0}| + L \int_0^t \left| \hat{\psi}_n^n(t-s) \right| e^{\delta(t-s)} e^{\delta s} |x_n^n(s)| ds.$$

Отсюда

$$e^{\delta t} |x_n^n(t)| \le 2 e^{-(\theta - \delta)t + \theta\tau} \sum_{k=1}^{n} |x_k^{n,0}| + L \max_{s \in [0,T]} \{ e^{\delta s} |x_n^n(s)| \} \int_0^t \left| \hat{\psi}_n^n(s) \right| e^{\delta s} ds,$$

а также

$$\max_{s\in[0,T]}\{e^{\delta s}|x_n^n(s)|\} \le 2e^{\theta\tau}\sum_{k=1}^{n}|x_k^{n,0}| + L\max_{s\in[0,T]}\{e^{\delta s}|x_n^n(s)|\}\int\limits_0^T \left|\hat{\psi}_n^n(s)\right| e^{\delta s}ds.$$

Следовательно

$$\left(1 - L\int\limits_0^T \left|\hat{\psi}_n^n(s)\right| e^{\delta s}ds\right)\max_{s\in[0,T]}\{e^{\delta s}|x_n^n(s)|\} \le 2e^{\theta\tau}\sum_{k=1}^{n}|x_k^{n,0}|. \tag{2.12}$$

Напомним, что в работе [9] было доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ имеет место равномерная сходимость

$$\hat{\psi}_n^n(t) \to \begin{cases} 0, & t\in[0,\tau(1-\varepsilon)], \\ e^{-\theta(t-\tau)}, & t\in[\tau(1+\varepsilon),T], \end{cases} \qquad n\to\infty. \tag{2.13}$$

Тогда в силу теоремы Лебега при $n\to\infty$ имеем

$$\int\limits_0^T \left|\hat{\psi}_n^n(s)\right| e^{\delta s}ds \to \int\limits_\tau^T e^{-\theta(s-\tau)}e^{\delta s}ds = \frac{e^{\delta\tau} - e^{-\theta(T-\tau)+\delta T}}{\theta-\delta} \le \frac{e^{\delta\tau}}{\theta-\delta}. \tag{2.14}$$

Зафиксируем теперь параметр $\delta\in(0,\theta)$ так, чтобы

$$1 - \frac{Le^{\delta\tau}}{\theta-\delta} > 0. \tag{2.15}$$

Ясно, что такие δ существуют, поскольку по условию $0 < L < \theta$. Возьмем, например, δ из (2.11). Очевидно, $0 < \delta < \theta$.

Учитывая теперь (2.14), (2.15), получаем, что найдется число $N(\delta)$ такое, что для всех $n \ge N(\delta)$ выполнено неравенство

$$1 - L\int\limits_0^T \left|\hat{\psi}_n^n(s)\right| e^{\delta s}ds \ge \frac{1}{2}\left(1 - \frac{Le^{\delta\tau}}{\theta-\delta}\right) > 0.$$

Тогда из (2.12) при $n \ge N(\delta)$ следует

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{Le^{\delta\tau}}{\theta-\delta}\right)\max_{s\in[0,T]}\{e^{\delta s}|x_n^n(s)|\} \le 2e^{\theta\tau}\sum_{k=1}^{n}|x_k^{n,0}|$$

или

$$\max_{s\in[0,T]}\{e^{\delta s}|x_n^n(s)|\} \le 4e^{\theta\tau}\left(\frac{\theta-\delta}{\theta-\delta-Le^{\delta\tau}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k^{n,0}|\right).$$

А так как правая часть этого неравенства не зависит от T, то получаем

$$|x_n^n(t)| \le 4e^{\theta\tau} \left(\frac{\theta - \delta}{\theta - \delta - Le^{\delta\tau}} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k^{n,0}| \right) e^{-\delta t}, \quad t > 0. \tag{2.16}$$

Отсюда следует оценка (2.10) с константой

$$c = 4e^{\theta\tau} \left(\frac{\theta - \delta}{\theta - \delta - Le^{\delta\tau}} \right),$$

где $\delta \in (0, \theta)$ определяется из неравенства (2.15).

Подчеркнем, что найденная константа c не зависит от n.

Из представления (2.1) для компонент решения задачи Коши $x_j^n(t)$, $j = 1, \dots, n-1$, условия Липшица (1.5) и оценки (2.16) имеем

$$|x_j^n(t)| \le \sum_{k=1}^{j} |x_k^{n,0}|\, e^{-\frac{n-1}{\tau}t} \frac{\left(\frac{n-1}{\tau}t\right)^{j-k}}{(j-k)!}$$

$$+4Le^{\theta\tau} \left(\frac{\theta - \delta}{\theta - \delta - Le^{\delta\tau}} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k^{n,0}| \right) \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-s)} \frac{\left(\frac{n-1}{\tau}(t-s)\right)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\delta s} ds.$$

Вычисляя интеграл в правой части неравенства, нетрудно убедиться, что он совпадает с функцией $\hat{\psi}_{j+1}^n(t)$ из (2.4), если в указанной формуле положить $\theta = \delta$. Оценки для этих функций были получены в работе [7] (лемма 3.3). Используя эти оценки (заменяя в них θ на δ), для компонент $x_j^n(t)$ получаем

$$|x_j^n(t)| \le \sum_{k=1}^{j} |x_k^{n,0}|\, e^{-\frac{n-1}{\tau}t} \frac{\left(\frac{n-1}{\tau}t\right)^{j-k}}{(j-k)!} + 8Le^{\theta\tau+\delta\tau} \left(\frac{\theta - \delta}{\theta - \delta - Le^{\delta\tau}} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k^{n,0}| \right) e^{-\delta t}.$$

Отсюда, очевидно, следует, что найдутся константы $c_j > 0$ такие, что

$$|x_j^n(t)| \le c_j \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k^{n,0}| \right) e^{-\delta t}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad t > 0.$$

Из полученных оценок вытекает асимптотическая устойчивость нулевого решения задачи Коши (1.1).

Теорема доказана.

3. Свойства функций $\hat{\psi}_k^n(t)$

В этом параграфе мы приведем оценки для функций $\hat{\psi}_k^n(t)$, заданных в (2.4), их разностей $\left(\hat{\psi}_{k_1}^{n_1}(t) - \hat{\psi}_{k_2}^{n_2}(t)\right)$, изучим сходимость последовательностей $\{\hat{\psi}_k^n(t)\}$

при различных $k = k(n)$ и укажем оценки скорости этой сходимости. Полученные оценки понадобятся нам при доказательстве предельных теорем.

Будем неограниченно увеличивать размерность системы в (1.1). Как уже отмечалось, при наших предположениях для любого n каждая из задач Коши (1.1) однозначно разрешима на всей полуоси $\{t \geq 0\}$, и ее решение обозначается

$$x^n(t) = (x_1^n(t), x_2^n(t), \dots, x_n^n(t))^{\mathrm{T}}.$$

Верхний индекс указывает на число уравнений в системе, нижний — номер компоненты решения. В частности, рассматривая только последние компоненты решения каждой из задач (1.1), получаем последовательность функций $\{x_n^n(t)\}$.

Вначале напомним оценки на функции $\hat{\psi}_k^n(t)$, полученные в работе [7].

Лемма 3. *Пусть $n_1 > \theta\tau + 1$ такое, что*

$$\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{n-1} > e^{-\theta\tau}/2, \quad n > n_1.$$

Тогда при всех $n > n_1$ выполнены оценки

$$0 < \hat{\psi}_k^n(t) < 2e^{-\theta(t-\tau)}, \quad k = 1, \dots, n, \quad t > 0, \tag{3.1}$$

$$\left\| \hat{\psi}_{k+1}^n(t) - \hat{\psi}_k^n(t), L_1(0,T) \right\| \leq \frac{4\tau e^{\theta\tau}}{n-1}, \quad T > \tau, \quad k = 1, \dots, n-1. \tag{3.2}$$

Теперь рассмотрим предельные свойства последовательностей $\{\hat{\psi}_k^n(t)\}$ при различных $k \leq n$.

Вначале напомним, что для последовательности $\{\hat{\psi}_n^n(t)\}$ при любых $\varepsilon > 0$ и $T > \tau$ имеет место равномерная сходимость (2.13). Этот факт был установлен Г. В. Демиденко в работе [9] и послужил основой для доказательства первых предельных теорем для систем дифференциальных уравнений высокой размерности (см. [9, 4]). Его обобщение было получено в [6] и содержится в следующих четырех леммах.

Лемма 4. *Пусть $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ фиксировано, тогда для любых $T > \tau$ и сколь угодно малых $\varepsilon > 0$ имеет место равномерная сходимость*

$$\hat{\psi}_{n-i}^n(t) \to \begin{cases} 0, & t \in [0, \tau(1-\varepsilon)], \\ e^{-\theta(t-\tau)}, & t \in [\tau(1+\varepsilon), T], \end{cases} \qquad n \to \infty.$$

Лемма 5. *Пусть $n = ml + 1$. Тогда для любых $T > \tau$ и сколь угодно малых $\varepsilon > 0$ имеет место равномерная сходимость*

$$\hat{\psi}_{l+1}^{ml+1}(t) \to \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{\tau}{m}(1-\varepsilon)], \\ e^{-\theta\left(t-\frac{\tau}{m}\right)}, & t \in [\frac{\tau}{m}(1+\varepsilon), T], \end{cases} \qquad l \to \infty.$$

Лемма 6. *Пусть $k \in \mathbb{N}$ фиксировано, тогда для любых $T > \tau$ и сколь угодно малых $\varepsilon > 0$ имеет место равномерная сходимость*

$$\hat{\psi}_k^n(t) \to e^{-\theta t}, \quad t \in [\varepsilon, T], \quad n \to \infty.$$

Лемма 7. *Пусть $n = ml + 1$, $s > 0$ и k — целые, $1 \le sl + k \le ml + 1$, m, s, k — фиксированы. Тогда для любых $\varepsilon > 0$, $T > \tau$ имеет место равномерная сходимость*

$$\hat{\psi}_{sl+k}^{ml+1}(t) \to \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{s\tau}{m}(1-\varepsilon)], \\ e^{-\theta\left(t - \frac{s\tau}{m}\right)}, & t \in [\frac{s\tau}{m}(1+\varepsilon), T], \end{cases} \quad l \to \infty.$$

Отметим, что при доказательстве этих лемм существенно используется неравенство Стирлинга

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} < n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{4n}\right). \tag{3.3}$$

С его помощью удается получить оценки скорости сходимости последовательностей $\{\hat{\psi}_k^n(t)\}$. В дальнейшем эти оценки нам будут полезны, поэтому приведем их в следующей лемме.

Лемма 8. *Пусть $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ фиксировано, тогда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ при*

$$n > 2\theta\tau - i + 1 + 2\varepsilon^{-1}|i - \theta\tau|$$

и $l \ge 1$ справедливы оценки

$$\left|\hat{\psi}_{n-i}^n(t) - \hat{\psi}_{n+l-i}^{n+l}(t)\right| \le \frac{4e^{-\theta(t-\tau)}}{\varepsilon\sqrt{(n-i-1)}}, \quad t \in [0, \tau(1-\varepsilon)], \tag{3.4}$$

$$\left|\hat{\psi}_{n-i}^n(t) - \hat{\psi}_{n+l-i}^{n+l}(t)\right| \le 2e^{-\theta t}A_{n,i} + \frac{2e^{-\theta(t-\tau)}}{\varepsilon\sqrt{n-i-1}}, \quad t \in [\tau(1+\varepsilon), T], \tag{3.5}$$

где

$$A_{n,i} = \left|\frac{1}{(1 - \frac{\theta\tau}{n-1})^{n-i-1}} - e^{\theta\tau}\right| \to 0, \quad n \to \infty,$$

при этом

$$\left\|\hat{\psi}_{n-i}^n(t) - \hat{\psi}_{n+l-i}^{n+l}(t), L_1(0,T)\right\| \le c_1\varepsilon + \frac{c_2}{\varepsilon(n-1)}, \tag{3.6}$$

где c_1, $c_2 > 0$ — константы, не зависящие от T, ε и n.

Доказательство. В силу (2.4) функции $\hat{\psi}_k^n(t)$, $k = 2, \dots, n$, можно записать в виде

$$\hat{\psi}_k^n(t) = \frac{e^{-\theta t}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{k-1}} S_k^n(t), \tag{3.7}$$

где

$$S_k^n(t) = \left(1 - e^{-\omega_n t} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\omega_n t)^j}{j!}\right), \quad \omega_n = \frac{n-1}{\tau} - \theta.$$

Заметим, что в силу определения $0 \le S_k^n(t) \le 1$ при $t \ge 0$ и $n \ge \theta\tau + 1$. В условиях леммы $k = n - i$.

Рассмотрим сначала выражение, стоящее в знаменателе в определении (2.4) функции $\hat{\psi}_{n-i}^n(t)$

$$\beta_{n,n-i} = \left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{n-i-1} = \left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{-i}.$$

Очевидно, $\beta_{n,n-i} \to e^{-\theta\tau}$ при $n \to \infty$.

Оценим $S_{n-i}^n(t)$. Очевидно,

$$S_{n-i}^n(t) = 1 - e^{-\omega_n t} \sum_{j=0}^{n-i-2} \frac{(\omega_n t)^j}{j!} = e^{-\omega_n t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\omega_n t)^j}{j!} - e^{-\omega_n t} \sum_{j=0}^{n-i-2} \frac{(\omega_n t)^j}{j!}$$

$$= e^{-\omega_n t} \sum_{j=n-i-1}^{\infty} \frac{(\omega_n t)^j}{j!} = e^{-\omega_n t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega_n t)^{(n-i-1+k)}}{(n-i-1+k)!}. \tag{3.8}$$

При $n > \theta\tau + 1$ каждое слагаемое в (3.8) можно оценить следующим образом

$$\frac{(\omega_n t)^{(n-i-1+k)}}{(n-i-1+k)!} \le \frac{(\omega_n t)^{(n-i-1+k)}}{(n-i-1)!(n-i-1)^k}.$$

Отсюда

$$S_{n-i}^n(t) \le e^{-\omega_n t} \frac{(\omega_n t)^{(n-i-1)}}{(n-i-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega_n t)^k}{(n-i-1)^k}.$$

Для сходимости степенного ряда $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega_n t)^k}{(n-i-1)^k}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\dfrac{\omega_n t}{n-i-1} < 1$. Это неравенство выполнено при больших n и $0 \le t < \tau$. Действительно, условие $\dfrac{\omega_n t}{n-i-1} < 1$ эквивалентно неравенству

$$t(n - 1 - \theta\tau) < \tau(n - i - 1),$$

которое выполнено при $n > \theta\tau + 1 + \dfrac{\tau}{\tau - t}(i - \theta\tau)$ и $0 \le t < \tau$. Тогда

$$S_{n-i}^n(t) \le e^{-\omega_n t} \frac{(\omega_n t)^{(n-i-1)}}{(n-i-1)!} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega_n t}{n-i-1}\right)}. \tag{3.9}$$

Используя неравенство Стирлинга (3.3), получаем, что при

$$n > \theta\tau + 1 + \frac{\tau}{\tau - t}(i - \theta\tau)$$

выполнена оценка

$$S^n_{n-i}(t) < \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-i-1)}\left(1 - \frac{\omega_n t}{n-i-1}\right)} \left(\frac{\omega_n t}{n-i-1} e^{1-\frac{\omega_n t}{n-i-1}}\right)^{n-i-1}.$$

Отметим, что величина

$$\left(\frac{\omega_n t}{n-i-1} e^{1-\frac{\omega_n t}{n-i-1}}\right)^{n-i-1}$$

ограничена, так как $0 < xe^{1-x} \le 1$ при $x > 0$. Кроме того, для всех $t \in [0, \tau(1-\varepsilon)]$ имеем

$$(1 - \frac{\omega_n t}{n-i-1}) > \varepsilon/2 \quad \text{при} \quad n > 2\theta\tau - i + 1 + 2\varepsilon^{-1}(i - \theta\tau).$$

Следовательно, при $t \in [0, \tau(1-\varepsilon)]$ и $n > 2\theta\tau - i + 1 + 2\varepsilon^{-1}(i - \theta\tau)$ выполнено неравенство

$$S^n_{n-i}(t) < \frac{2}{\varepsilon\sqrt{2\pi(n-i-1)}}. \tag{3.10}$$

Учитывая теперь формулу (3.7), из неравенства (3.10) получаем (3.4).

Рассмотрим отрезок $[\tau(1+\varepsilon), T]$. Имеем

$$0 < 1 - S^n_{n-i}(t) = e^{-\omega_n t} \sum_{j=0}^{n-i-2} \frac{(\omega_n t)^j}{j!} = e^{-\omega_n t} \sum_{j=0}^{n-i-2} \frac{(\omega_n t)^{n-i-2-j}}{(n-i-2-j)!}.$$

Каждое слагаемое в этом выражении можно оценить следующим образом

$$\frac{(\omega_n t)^{n-i-2-j}}{(n-i-2-j)!} = \frac{(\omega_n t)^{n-i-2-j}(n-i-2-j+1)\cdots(n-i-2)}{(n-i-2)!}$$

$$\le \frac{(\omega_n t)^{n-i-2-j}(n-i-1)^j}{(n-i-2)!}.$$

Отсюда

$$1 - S^n_{n-i}(t) \le e^{-\omega_n t} \frac{(\omega_n t)^{n-i-2}}{(n-i-2)!} \sum_{j=0}^{n-i-2} \left(\frac{n-i-1}{\omega_n t}\right)^j$$

$$\le e^{-\omega_n t} \frac{(\omega_n t)^{n-i-2}}{(n-i-2)!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{n-i-1}{\omega_n t}\right)^j.$$

Для сходимости степенного ряда $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\left(\frac{n-i-1}{\omega_n t}\right)^j$ необходимо и достаточно, чтобы $\frac{n-i-1}{\omega_n t} < 1$. Это неравенство выполнено для больших n и $\tau < t \leq T$. Действительно, условие $\frac{n-i-1}{\omega_n t} < 1$ эквивалентно неравенству $\tau(n-i-1) < t(n-1-\theta\tau)$, которое выполнено при $n > \frac{\theta\tau t}{t-\tau} + 1$. Тогда

$$0 < 1 - S^n_{n-i}(t) \leq e^{-\omega_n t}\frac{(\omega_n t)^{n-i-2}}{(n-i-2)!}\frac{1}{\left(1 - \frac{n-i-1}{\omega_n t}\right)}$$

$$= e^{-\omega_n t}\frac{(\omega_n t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\frac{1}{\left(\frac{\omega_n t}{n-i-1} - 1\right)}. \tag{3.11}$$

Применяя неравенство Стирлинга (3.3), получаем, что при $n > \frac{\theta\tau t}{t-\tau}+1$ выполняется неравенство

$$0 < 1 - S^n_{n-i}(t) < \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-i-1)}\left(\frac{\omega_n t}{n-i-1} - 1\right)}\left(\frac{\omega_n t}{n-i-1}e^{1-\frac{\omega_n t}{n-i-1}}\right)^{n-i-1}.$$

Как отмечалось выше, справедлива оценка

$$\left(\frac{\omega_n t}{n-i-1}e^{1-\frac{\omega_n t}{n-i-1}}\right)^{n-i-1} \leq 1,$$

а для всех $t \in [\tau(1+\varepsilon), T]$ имеет место неравенство

$$\frac{\omega_n t}{n-i-1} - 1 > \varepsilon/2 \quad \text{при} \quad n > 2\theta\tau - i + 1 + 2\varepsilon^{-1}(\theta\tau - i).$$

Таким образом, учитывая (3.11), получаем

$$0 < 1 - S^n_{n-i}(t) < \frac{2}{\varepsilon\sqrt{2\pi(n-i-1)}} \tag{3.12}$$

при $t \in [\tau(1+\varepsilon), T]$ и $n > 2\theta\tau - i + 1 + 2\varepsilon^{-1}(\theta\tau - i)$.

Чтобы получить оценку (3.5), добавим и отнимем $e^{-\theta(t-\tau)}$. Тогда, очевидно, получим

$$\left|\hat\psi^n_{n-i}(t) - \hat\psi^{n+l}_{n+l-i}(t)\right| \leq \left|\hat\psi^n_{n-i}(t) - e^{-\theta(t-\tau)}\right| + \left|\hat\psi^{n+l}_{n+l-i}(t) - e^{-\theta(t-\tau)}\right| = I_1(t) + I_2(t).$$

Первое слагаемое $I_1(t)$ допускает следующую оценку

$$I_1(t) \leq e^{-\theta t}\left(\left|\frac{1}{(1-\frac{\theta\tau}{n-1})^{n-i-1}} - e^{\theta\tau}\right| S^n_{n-i}(t) + e^{\theta\tau}(1 - S^n_{n-i}(t))\right).$$

Тогда, учитывая оценку (3.12), на отрезке $[\tau(1+\varepsilon), T]$ имеем

$$I_1(t) = \left|\hat{\psi}^n_{n-i}(t) - e^{-\theta(t-\tau)}\right| \le e^{-\theta t} A_{n,i} + \frac{e^{-\theta(t-\tau)}}{\varepsilon\sqrt{n-i-1}}.$$

Точно такая же оценка справедлива для второго слагаемого $I_2(t)$. Отсюда непосредственно вытекает (3.5).

Для доказательства оценки (3.6) воспользуемся неравенствами (3.4), (3.5), (3.9), (3.10) и леммой 3.

Для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\left\|\hat{\psi}^n_{n-i}(t) - \hat{\psi}^{n+l}_{n+l-i}(t), L_1(0,T)\right\| \le \left\|\hat{\psi}^n_{n-i}(t) - \hat{\psi}^{n+l}_{n+l-i}(t), L_1(0,\tau(1-\varepsilon))\right\|$$

$$+ \left\|\hat{\psi}^n_{n-i}(t) - \hat{\psi}^{n+l}_{n+l-i}(t), L_1(\tau(1-\varepsilon),\tau(1+\varepsilon))\right\|$$

$$+ \left\|\hat{\psi}^n_{n-i}(t) - \hat{\psi}^{n+l}_{n+l-i}(t), L_1(\tau(1+\varepsilon),T)\right\| = N_1 + N_2 + N_3. \tag{3.13}$$

Для первого слагаемого N_1, очевидно,

$$N_1 \le \left\|\hat{\psi}^n_{n-i}(t), L_1(0,\tau(1-\varepsilon))\right\| + \left\|\hat{\psi}^{n+l}_{n+l-i}(t), L_1(0,\tau(1-\varepsilon))\right\| = I_1 + I_2.$$

В силу определения (2.4) функций $\hat{\psi}^n_k$ и оценки (3.9) имеем

$$I_1 = \left\|\frac{e^{-\theta t}}{(1-\frac{\theta\tau}{n-1})^{n-i-1}} S^n_{n-i}(t), L_1(0,\tau(1-\varepsilon))\right\|$$

$$\le \left\|2\varepsilon^{-1}\frac{e^{-\theta t}}{\left(1-\frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{n-i-1}} e^{-\omega_n t}\frac{(\omega_n t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}, L_1(0,\tau(1-\varepsilon))\right\|.$$

Тогда, поскольку $\omega_n = \frac{n-1}{\tau} - \theta$, получаем

$$I_1 \le 2\varepsilon^{-1}\left\|e^{-\frac{n-1}{\tau}t}\frac{\left(\frac{n-1}{\tau}t\right)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}, L_1(0,\tau(1-\varepsilon))\right\|.$$

Следовательно, учитывая формулу

$$\int\limits_0^\infty e^{-at}\frac{(at)^{k-1}}{(k-1)!}dt = \frac{1}{a} \quad \text{при} \quad a > 0, \tag{3.14}$$

будем иметь неравенство

$$I_1 \le \frac{2\tau}{\varepsilon(n-1)}.$$

Для I_2 справедлива точно такая же оценка. Таким образом, для первого слагаемого в (3.13) получаем

$$N_1 \le I_1 + I_2 \le \frac{4\tau}{\varepsilon(n-1)}. \tag{3.15}$$

Для второго слагаемого в (3.13) в силу леммы 3, очевидно, имеем

$$N_2 = \left\| \hat{\psi}^n_{n-i}(t) - \hat{\psi}^{n+l}_{n+l-i}(t), L_1(\tau(1-\varepsilon), \tau(1+\varepsilon)) \right\| \le 8e^{\theta\tau}\tau\varepsilon. \tag{3.16}$$

Для третьего слагаемого в (3.13) для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$N_3 \le \left\| \hat{\psi}^n_{n-i}(t) - e^{-\theta(t-\tau)}, L_1(\tau(1+\varepsilon), T) \right\|$$

$$+ \left\| \hat{\psi}^{n+l}_{n+l-i}(t) - e^{-\theta(t-\tau)}, L_1(\tau(1+\varepsilon), T) \right\| = J_1 + J_2. \tag{3.17}$$

По аналогии с рассуждениями при выводе оценки (3.5) для первого слагаемого получаем

$$J_1 \le A_{n,i} \| e^{-\theta t}, L_1(\tau(1+\varepsilon), T) \| + \left\| \frac{e^{-\theta t}}{(1 - \frac{\theta\tau}{n-1})^{n-i-1}} (1 - S^n_{n-i}(t)), L_1(\tau(1+\varepsilon), T) \right\|.$$

Из оценки (3.11) следует

$$0 < 1 - S^n_{n-i}(t) \le 2\varepsilon^{-1} e^{-\omega_n t} \frac{(\omega_n t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!},$$

поэтому, используя формулу (3.14), для второго слагаемого в последнем неравенстве имеем

$$\left\| \frac{e^{-\theta t}}{(1 - \frac{\theta\tau}{n-1})^{n-i-1}} (1 - S^n_{n-i}(t)), L_1(\tau(1+\varepsilon), T) \right\|$$

$$\le 2\varepsilon^{-1} \left\| e^{-\frac{n-1}{\tau} t} \frac{(\frac{n-1}{\tau} t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}, L_1(\tau(1+\varepsilon), T) \right\| \le \frac{2\tau}{\varepsilon(n-1)}.$$

Таким образом

$$J_1 \le A_{n,i} \| e^{-\theta t}, L_1(\tau, T) \| + \frac{2\tau}{\varepsilon(n-1)}.$$

Точно такая же оценка справедлива и для второго слагаемого J_2 в (3.17). Следовательно,

$$N_3 \le 2A_{n,i} \| e^{-\theta t}, L_1(\tau, T) \| + \frac{4\tau}{\varepsilon(n-1)}. \tag{3.18}$$

Учитывая оценки (3.15), (3.16), (3.18), из (3.13) получаем

$$\left\| \hat{\psi}^n_{n-i}(t) - \hat{\psi}^{n+l}_{n+l-i}(t), L_1(0, T) \right\| \le 2A_{n,i} \| e^{-\theta t}, L_1(\tau, T) \| + \frac{8\tau}{\varepsilon(n-1)} + 8e^{\theta\tau}\tau\varepsilon.$$

Отсюда вытекает неравенство (3.6).

Лемма доказана.

Замечание. Из доказательства неравенства (3.6) следует, что константы c_1, c_2 не зависят от T. Поэтому, переходя в (3.6) к пределу при $T \to \infty$, имеем оценку

$$\left\| \hat{\psi}^{n}_{n-i}(t) - \hat{\psi}^{n+l}_{n+l-i}(t), L_1(0,\infty) \right\| \le c_1\varepsilon + \frac{c_2}{\varepsilon(n-1)}. \tag{3.19}$$

Лемма 9. *Пусть $m \in N$ — фиксировано, тогда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ при l_1, $l_2 \in N$ таких, что*

$$ml_1 > 2\theta\tau(1+\varepsilon^{-1}), \quad l_2 > l_1,$$

справедливы оценки

$$\left| \hat{\psi}^{ml_1+1}_{l_1+1}(t) - \hat{\psi}^{ml_2+1}_{l_2+1}(t) \right| \le \frac{2e^{-\theta\left(t-\frac{\tau}{m}\right)}}{\varepsilon\sqrt{l_1}}, \quad t \in \left[0, \frac{\tau}{m}(1-\varepsilon)\right], \tag{3.20}$$

$$\left| \hat{\psi}^{ml_1+1}_{l_1+1}(t) - \hat{\psi}^{ml_2+1}_{l_2+1}(t) \right| \le 2e^{-\theta t}A_{l_1} + \frac{2e^{-\theta\left(t-\frac{\tau}{m}\right)}}{\varepsilon\sqrt{l_1}}, \quad t \in \left[\frac{\tau}{m}(1+\varepsilon), T\right], \tag{3.21}$$

где

$$A_l = \left| \frac{1}{(1-\frac{\theta\tau}{ml})^l} - e^{\theta\tau/m} \right| \to 0, \quad l \to \infty,$$

при этом

$$\left\| \hat{\psi}^{ml_1+1}_{l_1+1}(t) - \hat{\psi}^{ml_2+1}_{l_2+1}(t), L_1(0,T) \right\| \le c_3\varepsilon + \frac{c_4}{\varepsilon m l_1}, \tag{3.22}$$

для некоторых констант c_3, $c_4 > 0$, не зависящих от T, ε и n.

Доказательство. По определению (2.4) имеем

$$\hat{\psi}^{ml+1}_{l+1}(t) = \frac{e^{-\theta t}}{\left(1-\frac{\theta\tau}{ml}\right)^l} S^{ml+1}_{l+1}(t),$$

где

$$S^{ml+1}_{l+1}(t) = \left(1 - e^{-\omega_{ml+1}t}\sum_{j=0}^{l-1}\frac{(\omega_{ml+1}t)^j}{j!}\right), \quad \omega_{ml+1} = \frac{ml}{\tau} - \theta.$$

Отметим, что

$$\left(1-\frac{\theta\tau}{ml}\right)^l \to e^{-\frac{\theta\tau}{m}}, \quad l \to \infty.$$

Оценим $S^{ml+1}_{l+1}(t)$ при $t < \frac{\tau}{m}$. Имеем

$$S^{ml+1}_{l+1}(t) = 1 - e^{-\omega_{ml+1}t}\sum_{j=0}^{l-1}\frac{(\omega_{ml+1}t)^j}{j!}$$

$$= e^{-\omega_{ml+1}t}\sum_{j=l}^{\infty}\frac{(\omega_{ml+1}t)^j}{j!} = e^{-\omega_{ml+1}t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\omega_{ml+1}t)^{l+k}}{(l+k)!}.$$

Очевидно, при $ml > \theta\tau$ имеет место оценка

$$\frac{(\omega_{ml+1}t)^{l+k}}{(l+k)!} \leq \frac{(\omega_{ml+1}t)^{l+k}}{l!l^k}.$$

Тогда

$$S_{l+1}^{ml+1}(t) \leq e^{-\omega_{ml+1}t}\frac{(\omega_{ml+1}t)^l}{l!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\omega_{ml+1}t}{l}\right)^k.$$

При $0 \leq t < \frac{\tau}{m}$ имеем $l(\tau - mt) > 0 \geq -\theta\tau t$. Поэтому $l\tau > (ml - \theta\tau)t$, т. е. $1 > \frac{(ml/\tau-\theta)t}{l} = \frac{\omega_{ml+1}t}{l}$. Отсюда получаем оценку

$$S_{l+1}^{ml+1}(t) < e^{-\omega_{ml+1}t}\frac{(\omega_{ml+1}t)^l}{l!}\frac{1}{\left(1-\frac{\omega_{ml+1}t}{l}\right)}.$$

В силу неравенства Стирлинга (3.3) имеем

$$S_{l+1}^{ml+1}(t) < e^{-\omega_{ml+1}t}(\omega_{ml+1}t)^l\left(\frac{e}{l}\right)^l\frac{1}{\sqrt{2\pi l}}\frac{1}{\left(1-\frac{\omega_{ml+1}t}{l}\right)}. \tag{3.23}$$

Отметим, что в силу неравенства $(xe^{1-x}) \leq 1$ для всех t выполнено

$$e^{-\omega_{ml+1}t}(\omega_{ml+1}t)^l\left(\frac{e}{l}\right)^l \leq 1.$$

А поскольку при $t \in [0, \frac{\tau}{m}(1-\varepsilon)]$ имеем $1 - \frac{\omega_{ml+1}t}{l} > \varepsilon$, то оценка (3.20) вытекает из (3.23).

Доказательство оценки (3.21) проводится по схеме доказательства оценки (3.5).

Пусть $t > \frac{\tau}{m}$ и $l > \frac{t\theta\tau}{(mt-\tau)}$. Оценим разность $1 - S_{l+1}^{ml+1}(t)$. Вначале заметим, что

$$0 < 1 - S_{l+1}^{ml+1}(t) = e^{-\omega_{ml+1}t}\sum_{j=0}^{l-1}\frac{(\omega_{ml+1}t)^j}{j!} < e^{-\omega_{ml+1}t}\sum_{j=0}^{l-1}\frac{(\omega_{ml+1}t)^j l^{l-1-j}}{j!(j+1)\ldots(l-1)}$$

$$= e^{-\omega_{ml+1}t}\frac{(\omega_{ml+1}t)^{l-1}}{(l-1)!}\sum_{j=0}^{l-1}\left(\frac{l}{\omega_{ml+1}t}\right)^{l-1-j}.$$

Поскольку l выбрано так, что $\frac{\omega_{ml+1}t}{l} > 1$, то получаем

$$\sum_{j=0}^{l-1}\left(\frac{l}{\omega_{ml+1}t}\right)^{l-1-j} < \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{l}{\omega_{ml+1}t}\right)^j = \frac{1}{1-\frac{l}{\omega_{ml+1}t}} < \infty.$$

Используя эту оценку, имеем

$$0 < 1 - S_{l+1}^{ml+1}(t) < e^{-\omega_{ml+1}t}\frac{(\omega_{ml+1}t)^{l-1}}{(l-1)!}\frac{1}{\left(1-\frac{l}{\omega_{ml+1}t}\right)}$$

$$= e^{-\omega_{ml+1}t}\frac{(\omega_{ml+1}t)^{l}}{l!}\frac{1}{\left(\frac{\omega_{ml+1}t}{l}-1\right)}. \tag{3.24}$$

Применяя неравенство Стирлинга (3.3), получаем

$$0 < 1 - S_{l+1}^{ml+1}(t) < \frac{1}{\sqrt{2\pi l}\left(\frac{\omega_{ml+1}t}{l}-1\right)}e^{-\omega_{ml+1}t}(\omega_{ml+1}t)^{l}\left(\frac{e}{l}\right)^{l}.$$

Следовательно, из неравенства

$$\frac{\omega_{ml+1}t}{l}-1 > \varepsilon/2 \quad \text{при} \quad ml > \frac{2\theta\tau(1+\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad t \in \left[\frac{\tau}{m}(1+\varepsilon), T\right]$$

получаем

$$0 < 1 - S_{l+1}^{ml+1}(t) < \frac{2}{\varepsilon\sqrt{2\pi l}}. \tag{3.25}$$

Для доказательства оценки (3.21) добавим и отнимем $e^{-\theta(t-\tau/m)}$ и применим неравенство треугольника. Затем для каждого из слагаемых, очевидно, будем иметь неравенство следующего вида

$$\left|\hat{\psi}_{l+1}^{ml+1}(t) - e^{-\theta(t-\tau/m)}\right|$$

$$\le e^{-\theta t}\left(\left|\frac{1}{(1-\frac{\theta\tau}{ml})^{l}} - e^{\theta\tau/m}\right| S_{l+1}^{ml+1}(t) + e^{\theta\tau/m}(1-S_{l+1}^{ml+1}(t))\right),$$

а используя оценку (3.25), получим

$$\left|\hat{\psi}_{l+1}^{ml+1}(t) - e^{-\theta(t-\tau/m)}\right| \le e^{-\theta t}\left(\left|\frac{1}{(1-\frac{\theta\tau}{ml})^{l}} - e^{\theta\tau/m}\right| + \frac{e^{\theta\tau/m}}{\varepsilon\sqrt{l}}\right).$$

Отсюда при $l_2 > l_1$ вытекает неравенство (3.21).

Доказательство оценки (3.22) проводится по схеме доказательства оценки (3.6). Оценим сначала L_1-норму разности из (3.22) на каждом из интервалов $(0, \tau/m(1-\varepsilon))$, $(\tau/m(1-\varepsilon), \tau/m(1+\varepsilon))$, $(\tau/m(1+\varepsilon), T)$.

На первом интервале, очевидно,

$$\tilde{N}_1 = \left\|\hat{\psi}_{l_1+1}^{ml_1+1}(t) - \hat{\psi}_{l_2+1}^{ml_2+1}(t),\, L_1(0, \tau/m(1-\varepsilon))\right\|$$

$$\le \left\|\hat{\psi}_{l_1+1}^{ml_1+1}(t), L_1(0, \tau/m(1-\varepsilon))\right\| + \left\|\hat{\psi}_{l_2+1}^{ml_2+1}(t), L_1(0, \tau/m(1-\varepsilon))\right\|.$$

Поэтому, как и при получении неравенства (3.15), имеем

$$\tilde{N}_1 \leq \frac{4\tau}{\varepsilon m l_1}, \quad l_2 > l_1.$$

На интервале $(\tau/m(1+\varepsilon), T)$ имеем

$$\tilde{N}_3 = \left\| \hat{\psi}_{l_1+1}^{ml_1+1}(t) - \hat{\psi}_{l_2+1}^{ml_2+1}(t), L_1(\tau/m(1+\varepsilon), T) \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \hat{\psi}_{l_1+1}^{ml_1+1}(t) - e^{-\theta(t-\tau/m)}, L_1(\tau/m(1+\varepsilon), T) \right\| +$$

$$+ \left\| \hat{\psi}_{l_2+1}^{ml_2+1}(t) - e^{-\theta(t-\tau/m)}, L_1(\tau/m(1+\varepsilon), T) \right\| = J_1 + J_2. \tag{3.26}$$

Рассмотрим первое слагаемое J_1. Добавим и отнимем функцию $e^{-\theta(t-\tau/m)} S_{l_1+1}^{ml_1+1}(t)$. Из неравенства треугольника и (3.24) следует

$$J_1 \leq \left\| e^{-\theta t} \left(\left(1 - \frac{\theta\tau}{ml_1}\right)^{-l_1} - e^{\theta\tau/m} \right) S_{l_1+1}^{ml_1+1}(t), L_1(\tau/m(1+\varepsilon), T) \right\| +$$

$$+ \| e^{-\theta(t-\tau/m)} (1 - S_{l_1+1}^{ml_1+1}(t)), L_1(\tau/m(1+\varepsilon), T) \| \leq$$

$$\leq \left\| 2\varepsilon^{-1} e^{-\frac{ml_1}{\tau} t} \left(\frac{ml_1}{\tau} t \right)^{l_1} (l_1!)^{-1}, L_1(\tau/m(1+\varepsilon), T) \right\| + A_{l_1} \| e^{-\theta t}, L_1(\tau/m, T) \|.$$

Используя теперь формулу (3.14), получаем

$$J_1 \leq \frac{2\tau}{\varepsilon m l_1} + A_{l_1} \| e^{-\theta t}, L_1(\tau/m, T) \|.$$

Для второго слагаемого J_2 в (3.26) справедлива точно такая же оценка. Таким образом, имеем

$$\tilde{N}_3 \leq \frac{4\tau}{\varepsilon m l_1} + 2A_{l_1} \| e^{-\theta t}, L_1(\tau/m, T) \|.$$

Для центрального интервала $(\tau/m(1-\varepsilon), \tau/m(1+\varepsilon))$, учитывая неравенство (3.1), получаем

$$\tilde{N}_2 = \left\| \hat{\psi}_{l_1+1}^{ml_1+1}(t) - \hat{\psi}_{l_2+1}^{ml_2+1}(t), L_1(\tau/m(1-\varepsilon), \tau/m(1+\varepsilon)) \right\| \leq 8e^{\theta\tau} \varepsilon\tau/m.$$

Суммируя оценки на каждом из интервалов, получаем

$$\left\| \hat{\psi}_{l_1+1}^{ml_1+1}(t) - \hat{\psi}_{l_2+1}^{ml_2+1}(t), L_1(0, T) \right\| \leq \tilde{N}_1 + \tilde{N}_2 + \tilde{N}_3$$

$$\leq \frac{c}{\varepsilon m l_1} + 2A_{l_1} \| e^{-\theta t}, L_1(\tau/m, T) \| + 8e^{\theta\tau} \varepsilon\tau/m.$$

Отсюда вытекает оценка (3.22).

Лемма доказана.

Замечание. Из доказательства неравенства (3.22) следует, что константы c_3, $c_4 > 0$ не зависят от T. Поэтому, переходя в (3.22) к пределу $T \to \infty$, имеем оценку

$$\left\| \hat{\psi}_{l_1+1}^{ml_1+1}(t) - \hat{\psi}_{l_2+1}^{ml_2+1}(t), L_1(0,\infty) \right\| \le c_3\varepsilon + \frac{c_4}{\varepsilon m l_1}, \quad l_2 > l_1. \tag{3.27}$$

4. Предельные теоремы на полуоси

Увеличивая неограниченно число уравнений в (1.1) и рассматривая только последнюю компоненту решения каждой из задач Коши, получаем последовательность функций $\{x_n^n(t)\}$. В этом параграфе мы изучим предельные свойства этой последовательности при некоторых наборах начальных данных $x^{n,0}$.

Вначале рассмотрим последовательность задач Коши вида (1.1), предполагая, что векторы начальных данных имеют последнюю компоненту, отличную от нуля, а все остальные компоненты — нулевые. То есть векторы начальных данных в (1.1) имеют вид

$$x^{n,0} = (0, \dots, 0, a)^{\mathrm{T}}. \tag{4.1}$$

Теорема 2. *Пусть $g(t,0) \equiv 0$, выполнены условия (1.5), $0 < L < \theta$ и начальные данные имеют вид (4.1). Тогда последовательность $\{x_n^n(t)\}$ равномерно сходится на любом отрезке $[0,T]$:*

$$x_n^n(t) \to y(t), \quad n \to \infty.$$

Предельная функция $y(t)$ является решением следующей начальной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = ae^{-\theta t}, \quad t \in [0,\tau], \\ y(\tau+0) = ae^{-\theta\tau}, \end{cases} \tag{4.2}$$

при этом существует $n_0 = n_0(\theta,\tau,L)$ такое, что при $n > n_0$ имеет место оценка

$$\sup_{t\in[0,\infty)} |x_n^n(t) - y(t)| \le \frac{c|a|}{\sqrt{n}}, \tag{4.3}$$

где константа $c > 0$ не зависит от n.

Доказательство. В силу леммы 1 для последней компоненты $x_n^n(t)$ решения задачи Коши (1.1) выполнены соотношения

$$x_n^n(t) = ae^{-\theta t} + \int\limits_0^t \hat{\psi}_n^n(t-s) g(s, x_n^n(s))\, ds. \tag{4.4}$$

Тогда для любых n, l имеем

$$x_{n+l}^{n+l}(t) - x_n^n(t) = \int\limits_0^t \left(\hat{\psi}_{n+l}^{n+l}(t-s) - \hat{\psi}_n^n(t-s)\right) g(s, x_{n+l}^{n+l}(s))ds$$

$$+ \int\limits_0^t \hat{\psi}_n^n(t-s)(g(s, x_{n+l}^{n+l}(s)) - g(s, x_n^n(s)))ds = I_{n,l}^1(t) + I_{n,l}^2(t). \tag{4.5}$$

Оценим первое слагаемое $I_{n,l}^1(t)$ в правой части (4.5). Учитывая условия на функцию $g(t,z)$, имеем

$$|g(s, x_{n+l}^{n+l}(s))| = |g(s, x_{n+l}^{n+l}(s)) - g(s, 0)| \le L|x_{n+l}^{n+l}(s)|.$$

Тогда в силу этого неравенства и теоремы 1 получаем

$$|I_{n,l}^1(t)| \le cL|a| \int\limits_0^t \left|\hat{\psi}_{n+l}^{n+l}(t-s) - \hat{\psi}_n^n(t-s)\right| ds.$$

А в силу леммы 8 и оценки (3.19) при $n > 2\theta\tau(1 + (n-1)^{1/2}) + 1$ справедливо неравенство

$$\int\limits_0^t \left|\hat{\psi}_{n+l}^{n+l}(s) - \hat{\psi}_n^n(s)\right| ds \le \frac{c_1}{\sqrt{n}},$$

где константа $c_1 > 0$ не зависит от n и t и может быть явно вычислена. Таким образом, получаем следующую оценку

$$|I_{n,l}^1(t)| \le \frac{\hat{c}|a|}{\sqrt{n}}, \quad n > 2\theta\tau(1 + (n-1)^{1/2}) + 1, \quad t \ge 0. \tag{4.6}$$

Для второго интеграла $I_{n,l}^2(t)$ в силу условия Липшица имеет место оценка

$$|I_{n,l}^2(t)| \le L \int\limits_0^t |\hat{\psi}_n^n(t-s)||x_{n+l}^{n+l}(s) - x_n^n(s)|\, ds \le$$

$$\le L \max_{s\in[0,T]} |x_{n+l}^{n+l}(s) - x_n^n(s)| \int\limits_0^t |\hat{\psi}_n^n(t-s)|\, ds. \tag{4.7}$$

Как отмечалось выше, для последовательности $\{\hat{\psi}_n^n(t)\}$ при любых $\varepsilon > 0$ и $T > \tau$ имеет место равномерная сходимость (2.13) и выполнена оценка (2.5). Тогда в силу теоремы Лебега имеем

$$\int\limits_0^t |\hat{\psi}_n^n(s)|ds \to \frac{1 - e^{-\theta(t-\tau)}}{\theta}, \quad t > \tau.$$

Следовательно, найдется число $n_1 = n_1(\theta, L)$, такое, что для всех $n > n_1$ будет выполнено неравенство

$$\int\limits_0^t |\hat{\psi}_n^n(s)|ds < \frac{L+\theta}{2L\theta}, \quad t \geq 0. \tag{4.8}$$

Учитывая эту оценку, (4.6) и (4.7), из представления (4.5) получаем

$$|x_{n+l}^{n+l}(t) - x_n^n(t)| \leq \frac{\hat{c}|a|}{\sqrt{n}} + \frac{L+\theta}{2\theta} \max_{s\in[0,T]} |x_{n+l}^{n+l}(s) - x_n^n(s)|, \quad n > n_0(\theta, \tau, L).$$

Следовательно,

$$\max_{t\in[0,T]} |x_{n+l}^{n+l}(t) - x_n^n(t)| \leq \frac{2\hat{c}|a|\theta}{(\theta - L)\sqrt{n}}.$$

Отсюда вытекает равномерная сходимость последовательности $\{x_n^n(t)\}$ на любом отрезке $[0, T]$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $l \to \infty$, для предельной функции $y(t)$ получаем оценку

$$\max_{t\in[0,T]} |y(t) - x_n^n(t)| \leq \frac{2\hat{c}|a|\theta}{(\theta - L)\sqrt{n}}. \tag{4.9}$$

Переходя теперь в (4.4) к пределу при $n \to \infty$, получаем тождества

$$y(t) \equiv ae^{-\theta t}, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

$$y(t) = ae^{-\theta t} + \int\limits_0^{t-\tau} e^{-\theta(t-s-\tau)} g(s, y(s))\, ds, \quad t > \tau.$$

Следовательно, $y(t)$ является решением начальной задачи (4.2). А в силу того, что правая часть неравенства (4.9) не зависит от T, то на всей полуоси $\{t \geq 0\}$ имеет место равномерная оценка (4.3).

Теорема доказана.

Рассмотрим последовательность задач Коши вида (1.1), предполагая, что $n = 2l + 1$ и вектор начальных данных имеет вид

$$x^{n,0} = (x_1^{n,0}, \dots, x_n^{n,0})^{\mathrm{T}}, \quad x_{l+1}^{n,0} = a, \quad x_j^{n,0} = 0 \ \text{ при } \ j \neq l+1. \tag{4.10}$$

В работе [6] доказано, что для произвольных $g(t, z)$ при таких начальных условиях на любом конечном интервале $(0, T)$ последовательность $\{x_n^n(t)\}$ также сходится, однако в этом случае сходимость уже не является равномерной, а только в $L_p(0, T)$, $1 \leq p < \infty$:

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_p(0, T)\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

при этом предельная функция $y(t)$ принадлежит соболевскому пространству $W_p^1(\tau, T)$ и является обобщенным решением начальной задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = 0, \qquad\qquad\quad t \in [0, \tau/2), \\ y(t) = ae^{-\theta(t-\tau/2)}, \quad t \in (\tau/2, \tau], \\ y(\tau + 0) = ae^{-\theta\tau/2}. \end{cases} \tag{4.11}$$

Сейчас мы докажем аналог этого утверждения на всей полуоси $(0, \infty)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и начальный вектор в (1.1) имеет вид (4.10). Тогда обобщенное решение $y(t)$ начальной задачи (4.11) принадлежит соболевскому пространству $W_1^1(\tau, \infty)$, и выполняется оценка*

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_1(0, \infty)\| \leq \frac{c|a|}{\sqrt{n}}, \quad n = 2l + 1 \geq n_0(\theta, \tau, L), \tag{4.12}$$

где константа $c > 0$ не зависит от n и a.

Доказательство. В силу леммы 1 при $n = 2l + 1$ для последней компоненты решения задачи Коши справедливо интегральное равенство

$$x_{2l+1}^{2l+1}(t) = a\hat{\psi}_{l+1}^{2l+1}(t) + \int\limits_0^t \hat{\psi}_{2l+1}^{2l+1}(t-s) g(s, x_{2l+1}^{2l+1}(s))\, ds.$$

Тогда для любых m и l, $m > l$ имеем

$$x_{2m+1}^{2m+1}(t) - x_{2l+1}^{2l+1}(t) = a\left(\hat{\psi}_{m+1}^{2m+1}(t) - \hat{\psi}_{l+1}^{2l+1}(t)\right)$$

$$+ \int\limits_0^t \left(\hat{\psi}_{2m+1}^{2m+1}(t-s) - \hat{\psi}_{2l+1}^{2l+1}(t-s)\right) g(s, x_{2m+1}^{2m+1}(s))\, ds$$

$$+ \int\limits_0^t \hat{\psi}_{2l+1}^{2l+1}(t-s)(g(s, x_{2m+1}^{2m+1}(s)) - g(s, x_{2l+1}^{2l+1}(s)))\, ds.$$

Отсюда

$$\|x_{2m+1}^{2m+1}(t) - x_{2l+1}^{2l+1}(t), L_1(0, \infty)\| \leq |a| \left\|\hat{\psi}_{m+1}^{2m+1}(t) - \hat{\psi}_{l+1}^{2l+1}(t), L_1(0, \infty)\right\|$$

$$+ \left\| \int\limits_0^t \left|\hat{\psi}_{2m+1}^{2m+1}(t-s) - \hat{\psi}_{2l+1}^{2l+1}(t-s)\right| |g(s, x_{2m+1}^{2m+1}(s))|\, ds, L_1(0, \infty)\right\|$$

$$+\left\|\int_0^t |\hat{\psi}_{2l+1}^{2l+1}(t-s)||g(s,x_{2m+1}^{2m+1}(s))-g(s,x_{2l+1}^{2l+1}(s))|\,ds, L_1(0,\infty)\right\|$$

$$= I_{l,m}^1 + I_{l,m}^2 + I_{l,m}^3. \tag{4.13}$$

В силу леммы 9 и неравенства (3.27) имеем оценку

$$I_{l,m}^1 \le \frac{c_1|a|}{\sqrt{2l}}, \quad l > \theta\tau(1+\sqrt{2}l), \tag{4.14}$$

где константа $c_1 > 0$ не зависит от n.

Рассмотрим второе слагаемое в (4.13). Используя обобщенное неравенство Минковского и условие Липшица, имеем

$$I_{l,m}^2 \le L\left\|\hat{\psi}_{2m+1}^{2m+1}(t)-\hat{\psi}_{2l+1}^{2l+1}(t), L_1(0,\infty)\right\| \|x_{2m+1}^{2m+1}(s), L_1(0,\infty)\|.$$

А поскольку в силу теоремы 1

$$\|x_{2m+1}^{2m+1}(s), L_1(0,\infty)\| \le \frac{c|a|}{\delta},$$

то, как и ранее, учитывая лемму 9 и неравенство (3.27), получим

$$I_{l,m}^2 \le \frac{c_2|a|}{\sqrt{2l}}, \quad l > \theta\tau(1+\sqrt{2}l). \tag{4.15}$$

Для того, чтобы оценить третье слагаемое в (4.13), вначале также применим обобщенное неравенство Минковского

$$I_{l,m}^3 \le \left\|\hat{\psi}_{2l+1}^{2l+1}(t), L_1(0,\infty)\right\| \|g(s,x_{2m+1}^{2m+1}(s))-g(s,x_{2l+1}^{2l+1}(s)), L_1(0,\infty)\|.$$

Принимая теперь во внимание условие Липшица (1.5) и оценку (4.8), получаем

$$I_{l,m}^3 \le \frac{L+\theta}{2\theta}\|x_{2m+1}^{2m+1}(t)-x_{2l+1}^{2l+1}(t), L_1(0,\infty)\|, \quad n > n_1. \tag{4.16}$$

Подставляя оценки (4.14)-(4.16) в неравенство (4.13), получим, что существует $n_0 = n_0(\theta,\tau,L)$ такое, что при $n > n_0$ будет выполняться оценка

$$\|x_{2m+1}^{2m+1}(t)-x_{2l+1}^{2l+1}(t), L_1(0,\infty)\| \le \frac{(c_1+c_2)|a|}{\sqrt{2l}} + \frac{L+\theta}{2\theta}\|x_{2m+1}^{2m+1}(t)-x_{2l+1}^{2l+1}(t), L_1(0,\infty)\|.$$

Отсюда, учитывая, что $0 < L < \theta$, имеем

$$\|x_{2m+1}^{2m+1}(t)-x_{2l+1}^{2l+1}(t), L_1(0,\infty)\| \le \frac{2\theta}{\theta-L}\frac{(c_1+c_2)|a|}{\sqrt{2l}}.$$

Таким образом, последовательность $\{x^{2l+1}_{2l+1}(t)\}$ является фундаментальной и, следовательно, сходящейся в $L_1(0,\infty)$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $m\to\infty$, получаем (4.12).

Поскольку $y(t)\in L_1(0,\infty)$ и $|g(t,y(t))|\le L|y(t)|$, то из уравнения (4.11) вытекает, что $\frac{dy(t)}{dt}\in L_1(\tau,\infty)$. Следовательно, $y(t)\in W^1_1(\tau,\infty)$.

Теорема доказана.

Повторяя схему доказательства теорем 2 и 3, мы можем доказать ряд аналогичных предельных теорем для различных наборов начальных данных в задаче (1.1). Приведем некоторые из них.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 2, $n=ml+1$ и начальные условия в (1.1) имеют вид*

$$x^{n,0}=(x^{n,0}_1,\dots,x^{n,0}_n)^{\mathrm{T}},\quad x^{n,0}_{l+1}=a,\quad x^{n,0}_j=0 \text{ при } j\ne l+1.$$

Тогда последовательность $\{x^n_n(t)\}$ сходится в $L_1(0,\infty)$. Предельная функция $y(t)$ принадлежит соболевскому пространству $W^1_1(\tau,\infty)$ и является обобщенным решением следующей начальной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt}=-\theta y(t)+g(t-\tau,y(t-\tau)),\quad t>\tau,\\ y(t)=0,\quad t\in\left[0,\frac{m-1}{m}\tau\right),\\ y(t)=ae^{-\theta\left(t-\frac{m-1}{m}\tau\right)},\quad t\in\left(\frac{m-1}{m}\tau,\tau\right],\\ y(\tau+0)=ae^{-\theta\tau/m}. \end{cases}$$

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 2, $n=ml+1$, $0\le s<m$ — целое и начальные условия в (1.1) имеют вид*

$$x^{n,0}=(x^{n,0}_1,\dots,x^{n,0}_n)^{\mathrm{T}},\quad x^{n,0}_{sl+1}=a,\quad x^{n,0}_j=0 \text{ при } j\ne sl+1.$$

Тогда последовательность $\{x^n_n(t)\}$ сходится в $L_1(0,\infty)$. Предельная функция $y(t)$ принадлежит соболевскому пространству $W^1_1(\tau,\infty)$ и является обобщенным решением следующей начальной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt}=-\theta y(t)+g(t-\tau,y(t-\tau)),\quad t>\tau,\\ y(t)=0,\quad t\in\left[0,\frac{m-s}{m}\tau\right),\\ y(t)=ae^{-\theta\left(t-\frac{m-s}{m}\tau\right)},\quad t\in\left(\frac{m-s}{m}\tau,\tau\right],\\ y(\tau+0)=ae^{-\theta\frac{s}{m}\tau}. \end{cases}$$

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 2, $i\in\mathbb{N}$ — фиксировано и начальные данные в задаче Коши (1.1) имеют вид*

$$x^{n,0}=(a_1,\dots,a_i,0,\dots,0)^{\mathrm{T}}.$$

Тогда последовательность $\{x_n^n(t)\}$ *сходится в* $L_1(0,\infty)$. *Предельная функция* $y(t)$ *принадлежит соболевскому пространству* $W_1^1(\tau,\infty)$ *и является обобщенным решением следующей начальной задачи*

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = 0, \quad t \in [0,\tau), \\ y(\tau+0) = a_1 + \dots + a_i. \end{cases}$$

Можно привести аналогичные предельные теоремы на полуоси $(0,\infty)$ в случае, когда предельная функция $y(t)$ будет обобщенным решением начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [0,\tau), \\ y(\tau+0) = a, \end{cases} \tag{4.17}$$

с некоторой кусочно-непрерывной функцией $\varphi(t)$, имеющей конечное число разрывов первого рода. Приведем важный пример (см. [6]), когда

$$\varphi(t) = e^{-\theta t}\varphi_{m,k}(t/\tau),$$

где $\varphi_{m,k}(s)$ — функции Хаара

$$\varphi_{m,k}(s) = \begin{cases} 2^{m/2}, & s \in [(k-1)2^{-m}, (k-1/2)2^{-m}), \\ -2^{m/2}, & s \in [(k-1/2)2^{-m}, k2^{-m}), \\ 0, & s \notin [(k-1)2^{-m}, k2^{-m}), \end{cases}$$

$$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k = 1, 2, \dots, 2^m.$$

Сформулируем соответствующую теорему, положив для определенности $m = 1$, $k = 1$.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы 2,* $n = 4l + 1$, *компоненты начального вектора* $x^{n,0} = (x_1^{n,0}, \dots, x_n^{n,0})^{\mathrm{T}}$ *в задаче Коши (1.1) имеют вид*

$$x_1^{n,0} = ae^{-\theta\tau}, \qquad x_{2l+1}^{n,0} = \sqrt{2}e^{-\theta\tau/2},$$

$$x_{3l+1}^{n,0} = -2\sqrt{2}e^{-\theta\tau/4}, \qquad x_{4l+1}^{n,0} = \sqrt{2},$$

остальные компоненты равны нулю. Тогда последовательность $\{x_n^n(t)\}$ *сходится в* $L_1(0,\infty)$, *предельная функция* $y(t)$ *принадлежит пространству* $W_1^1(\tau,\infty)$ *и является обобщенным решением начальной задачи (4.17) с*

$$\varphi(t) = e^{-\theta t}\varphi_{1,1}(t/\tau).$$

Приведем теперь формулировку предельной теоремы с указанием скорости сходимости.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы 2, и последовательность начальных векторов $\{x^{n,0}\}$ в задаче (1.1) такая, что последовательность $\{x_n^n(t)\}$, составленная из последних компонент решений задач Коши вида (1.1), сходится в $L_1(0,\infty)$ к решению начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом (4.17) с некоторой кусочно-непрерывной функцией $\varphi(t)$, имеющей разрывы первого рода. Тогда существует $n_0 = n_0(\theta,\tau,L)$ такое, что при $n > n_0(\theta,\tau,L)$ справедлива оценка*

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_1(0,\infty)\| \le \frac{c\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k^{n,0}|}{\sqrt{n}},$$

где константа $c > 0$ не зависит от n и начального вектора $x^{n,0}$. При этом

$$\|x_n^n(t) - y(t), W_1^1(\tau,\infty)\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

5. Заключение

В работе рассмотрена задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности, возникающей в биологических задачах при моделировании многостадийного синтеза вещества. Число стадий определяет число уравнений в системе. Компоненты $x_i(t)$ искомой вектор-функции определяют концентрацию вещества на i-й стадии процесса. Наибольший интерес для биологов представляет концентрация конечного продукта, т. е. значения последней компоненты решения $x_n(t)$. Но поскольку число стадий синтеза может быть очень большим и достигать фантастической величины (например, 10^{20} или 10^{30}), то при решении систем вида (1.1) возникает *“проблема большой размерности”*.

На малом временном интервале $(0,T)$ эта проблема была решена в работе [9] на основе некоторых предельных теорем, которые устанавливали связи между решениями системы уравнений (1.1) и уравнения с запаздывающим аргументом (1.2). Эти связи позволили обосновать метод построения приближенного вычисления последней компоненты $x_n(t)$ решения системы (1.1). Затем было получено обобщение этого метода на другие классы систем дифференциальных уравнений высокой размерности и на произвольный конечный интервал $(0,T)$.

В настоящей работе мы изучаем указанную “проблему большой размерности” на всей полуоси $(0,\infty)$. При некоторых условиях на нелинейные члены в (1.1) нами получены оценки решений системы, характеризующие экспоненциальное убывание при $t\to\infty$ независимо от размерности n и доказаны предельные теоремы, в которых, как и на конечном интервале, установлены связи между решениями системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнений с запаздывающим аргументом. На основе этих результатов мы получаем метод для приближенного построения последней компоненты решения системы высокой размерности на всей полуоси $(0, \infty)$ и устанавливаем глобальные оценки аппроксимации при $n \gg 1$.

Список цитируемых источников

1. *Демиденко Г. В.* О классах систем дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнениях с запаздывающим аргументом // Итоги науки. Юг России. Сер. Математический форум. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. — Т.5. — С. 45–56.

   Demidenko G. V. On classes of systems of differential equations of a higher dimension and delay equations. Itogi Nauki. Yug Rossii. Ser. Mat. Forum. Vladikavkaz: YuMI VNTs RAN i RSO-A 5, 45–56 (2011). (in Russian)

2. *Демиденко Г. В.* Системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. — 2012. — Т.53, №6. — С. 1274–1282.

   Demidenko G. V. Systems of differential equations of higher dimension and delay equations. Sib. Math. J. 53, No.6, 1021–1028 (2012).

3. *Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И.* Математическое моделирование регуляторных контуров генных сетей // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2004. — Т.44, №12. — С. 2276–2295.

   Demidenko G. V., Kolchanov N. A., Likhoshvai' V. A., Matushkin Yu. G., Fadeev S. I. Mathematical modeling of regular contours of gene networks. Comput. Math. Math. Phys. 44, No.12, 2166–2183 (2004).

4. *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е.* Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. — 2006. — Т. 47, № 1. — С. 58–68.

   Demidenko G. V., Likhoshvai' V. A., Kotova T. V., Khropova Yu. E. On one class of systems of differential equations and on retarded equations. Sib. Math. J. 47, No.1, 45–54 (2006).

5. *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Мудров А. В.* О связи между решениями дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и бесконечномерных систем дифференциальных уравнений // Дифф. уравн. — 2009. — Т.45, №1. — С. 34–46.

   Demidenko G. V., Likhoshvai' V. A., Mudrov A. V. On the relationship between solutions of delay differential equations and infinite-dimensional systems of differential equations. Diff. Eq. 45, No.1, 33–45 (2009).

6. *Демиденко Г. В., Мельник (Уварова) И. А.* Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. — 2010. — Т.51, №3. — С. 528–546.

   Demidenko G. V., Mel'nik (Uvarova) I. A. On a method of approximation of solutions to delay differential equations. Sib. Math. J. 51, No.3, 419–434 (2010).

7. *Демиденко Г. В., Уварова И. А.* Класс систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности // Сиб. журн. индустр. мат. — 2016. — Т.19, №2. — С. 47–60.

Demidenko G. V., Uvarova I. A. A class of systems of ordinary differential equations of large dimension. J. Appl. Ind. Math. 10, No.2, 179–191 (2016).

8. *Красовский Н. Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. мат. и мех. — 1964. — Т. 28, вып. 4. — С. 716–724.

   Krasovskii N. N. The approximation of a problem of analytic design of controls in a system with time-lag. J. Appl. Math. Mech. 28, No.4, 876–885 (1964).

9. *Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г.* Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // Сиб. журн. индустр. мат. — 2004. — Т.7, №1. — С. 73–94.

   Likhoshvai' V. A., Fadeev S. I., Demidenko G. V., Matushkin Yu. G. Modeling multistage synthesis without branching by a delay equation. Sibirsk. Zh. Industr. Mat. 7, No.1, 73–94 (2004). (in Russian)

10. *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. — М.: Мир, 1983.

    Murray J. D. Lectures on nonlinear-differential-equation models in biology. Oxford: Clarendon Press, 1977.

11. *Матвеева И. И., Мельник (Уварова) И. А.* О свойствах решений одного класса нелинейных систем дифференциальных уравнений большой размерности // Сиб. мат. журн. — 2012. — Т.53, №2. — С. 312–324.

    Matveeva I. I., Mel'nik I. A. On the properties of solutions to a class of nonlinear systems of differential equations of large dimension. Sib. Math. J. 53, No.2, 248–258 (2012).

12. *Матвеева И. И., Попов А. М.* О свойствах решений одной системы, возникающей при моделировании многостадийного синтеза вещества // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. — 2009. — Т.9, вып.3. — С. 86–94.

    Matveeva I. I., Popov A. M. On properties of solutions to a system modeling a multistage synthesis of a substance. Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform. 9, No.3, 86–94 (2009). (in Russian)

13. *Мудров А. В.* О связи систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. — 2007. — Т.7, вып.2. — С. 52–64.

    Mudrov A. V. On the relationship between systems of ordinary differential equations and equations with a retarded argument. Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform. 7, No.2, 52–64 (2007). (in Russian)

14. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972.

    Myshkis A. D. Linear differential equations with retarded argument. Moscow: Nauka, 1972. (in Russian)

15. *Персидский К. П.* Счетные системы дифференциальных уравнений и устойчивость их решений // Известия АН КазССР. Серия: Математика и механика. — 1959. — Вып.7. — С. 52–71.

    Persidskij K. P. Countable systems of differential equations and stability of their solutions. Izv. Akad. Nauk Kaz. SSR, Ser. Mat. Mekh. 7, 52–71 (1959). (in Russian)

16. *Репин Ю. М.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами // Прикл. мат. и мех. — 1965. — Т.29, вып.2. — С. 226–235.

Repin Yu. M. On the approximate replacement of systems with lag by ordinary d;2ynamical systems. J. Appl. Math. Mech. 29, No.2, 254–264 (1965).

17. *Салуквадзе М. Е.* К задаче синтеза оптимального регулятора в линейных системах с запаздыванием, подверженных постоянно действующим возмущениям // Автоматика и телемеханика. — 1962. — Т.23, №12. — С. 1595–1601.

Salukvadze M. E. Concerning the synthesis of an optimal controller in linear delay systems subjected to constantly acting perturbations. Autom. Remote Control 23, No.12, 1495–1501 (1962).

18. *Demidenko G. V., Kotova T. V.* Limit properties of solutions to one class of systems of differential equations with parameters // J. Anal. Appl. — 2010. — Vol.8, No.2. — P. 63–74

19. *Gyori I.* Two approximation techniques for functional differential equations // Comput. Math. Appl. — 1988. — Vol.16, No.3. — P. 195–214.

20. *Matveeva I. I.* On properties of solutions to one class of systems of nonlinear differential equations with parameters // Динамические системы. — 2015. — Т.5(33), №1–2. — С. 13–24.

Получена 28.10.2018