Динамические системы, 2018, том 8(36), №1, 63–72

УДК 531.36

Построение уравнений динамических систем со связями[1]

Р. Г. Мухарлямов
Российский университет дружбы народов,
Москва 117198. *E-mail: robgar@mail.ru*

Аннотация. Составление уравнений динамики систем со связями приводит к необходимости определения выражений множителей Лагранжа, для чего непосредственно используются производные от уравнений связей. При этом подразумевается, что уравнения связей составляют первые интегралы уравнений динамики, что приводит к нарушению уравнений связей, вызванных погрешностями численного решения и задания начальных условий. Для обеспечения стабилизации связей используются методы построения дифференциальных уравнений с заданными частными интегралами. Составление уравнений возмущений связей с асимптотически устойчивым тривиальным решением позволяет обеспечить стабилизацию связей при численном решении уравнений динамики.

Ключевые слова: динамика, система, устойчивость, уравнения, связи, стабилизация.

Constructing equations of constrained dynamical systems

R. G. Mukharlyamov
RUDN University, Moscow 117198.

Abstract. Constructing dynamical equations of constrained systems can lead to the determining of the Lagrange multipliers. Derivatives of the constraints have to be used to determine their values. But, it is assumed that the constraint equations are first integrals of the dynamical equations. This fact can lead to the multiple deviations from the constraint equations caused by some errors of a numerical method of integration and setting initial conditions. To provide a constraint stabilization the methods of constructing differential equations with given set of partial integrals are applied. Constructing equations of perturbed constraints with an asymptotically stable trivial solution can provide a constraint stabilization during the numerical solution of dynamical equations.

Keywords: dynamics, system, stability,equations, constraints, stabilization.
MSC 2010: 70F20, 70H14

1. Введение

Дифференциальные уравнения динамических систем следуют из принципов динамики с учетом ограничений, вызванных действием связей. Если уравнения связей позволяют представить состояние системы через обобщенные координаты и скорости, то точность определения решений уравнений динамики зависит

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-08-00558).

только от выбора численного метода. В случае, когда не удается ввести обобщенные координаты и скорости, для учета влияния связей используются множители Лагранжа. При этом связи составляют цели управления, а соответствующие реакции являются управляющими силами.

Задача определения дополнительных управляющих сил, обеспечивающих необходимые свойства решений уравнений динамики, относится к обратным задачам динамики [1], первые постановки которых состояли в определении сил, под действием которых механическая система совершает известные движения или решения уравнений динамики обладают известными свойствами. Так Исааком Ньютоном по законам Кеплера была определена сила притяжения [3], далее было установлено [19], что движение материальной точки по коническому сечению обеспечивается центральной силой, зависящей от положения точки [2],[20]. В [16] исследована задача определения силовой функции, соответствующей голономной системе с заданными интегралами, в [5],[6] предложен метод определения силовой функции по данному семейству траекторий точки на криволинейной поверхности и получено решение задачи о прочности движения изображающей точки по траектории. Общая теория устойчивости движения А. М. Ляпунова [8] позволила сформулировать критерии устойчивости множества траекторий и разработать методы построения систем дифференциальных уравнений, имеющих заданное устойчивое интегральное многообразие [7].

Для обеспечения стабилизации связей в [12] предлагается использовать линейную комбинацию уравнений связей и их производных. Различные модификации метода стабилизации связей, предложенные в [18]-[4], сводятся к анализу и подбору коэффициентов линейной комбинации. В общей постановке проблема стабилизации связей приводит к построению системы дифференциальных уравнений движения, допускающих уравнения связей в качестве частных интегралов [11], задающих асимптотически устойчивое инвариантное множество [13] или интегральное многообразие [14] этой системы. Используя общий подход к решению обратных задач динамики, удается построить дифференциальные уравнения динамических систем, численное решение которых удовлетворяют уравнениям связей с требуемой точностью [17]. Современные динамические аналогии позволяют использовать методы и уравнения классической механики для решения задач моделирования и управления динамикой систем различной природы [15].

2. Постановка задачи

Рассматривается динамическая система, состояние которой определяется набором обобщенных координат $\mathbf{q} = (q^1, \ldots, q^n)$, $dq^i/dt = v^i$, $\mathbf{v} = (v^1, \ldots, v^n)$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $L = L(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t)$ — лагранжиан системы, непотенциальные обобщенные силы, действующие на нее, обозначим вектором $\mathbf{Q} = (Q_1, \ldots, Q_n)$. Будем считать, что на систему наложены связи, заданные уравнениями

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, t) = 0, \mathbf{f} = \left(f^1, \ldots, f^m\right), \tag{2.1}$$

$$\mathbf{f}'(\mathbf{q},\mathbf{v},t)=0, \mathbf{f}'=\left(f^{m+1},\dots,f^{s}\right), s\le n \tag{2.2}$$

Требуется построить систему уравнений динамики, которые обеспечивали бы при численном решении выполнение уравнений связей (2.1), (2.2) с заданной точностью.

3. Уравнения динамики расширенной системы

Для оценки отклонений от уравнений связей введем новые переменные $\breve{\mathbf{q}}=(q^{n+1},\dots,q^{n+m})$, $\hat{\mathbf{q}}=(q^{n+m+1},\dots,q^{n+s})$, $\breve{\mathbf{v}}=(v^{n+1},\dots,v^{n+m})$, $\hat{\mathbf{v}}=(v^{n+m+1},\dots,v^{n+s})$, $\tilde{\mathbf{v}}=(v^{n+1},\dots,v^{n+s})$, определив их равенствами:

$$\breve{\mathbf{q}}-\mathbf{f}(\mathbf{q},t)=0, \tag{3.1}$$

$$\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{g}(\mathbf{q},\mathbf{v},t)=0, \tag{3.2}$$

$$\mathbf{g}=(\breve{\mathbf{g}},\hat{\mathbf{g}}),\ \breve{\mathbf{g}}=\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{q}}\mathbf{v}+\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial t},\ \hat{\mathbf{g}}=\mathbf{f}'.$$

С учетом выражений (3.2) составим систему уравнений для определения виртуальных скоростей системы

$$\mathbf{G}\delta\mathbf{v}=\delta\tilde{\mathbf{v}},\ \mathbf{G}=\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{v}}. \tag{3.3}$$

Полагая вектор $\delta\tilde{\mathbf{v}}$ произвольным, определим множество виртуальных скоростей $\delta\mathbf{v}$ системы решением уравнения (3.3). Если строки матрицы $\mathbf{G}$ линейно независимы, то решение уравнения (3.3) складывается $\delta\mathbf{v}=(\delta\mathbf{v})^{\tau}+(\delta\mathbf{v})^{n}$ из общего решения $(\delta\mathbf{v})^{\tau}=\delta c\,[\mathbf{GC}]$ однородного уравнения и частного решения $(\delta\mathbf{v})^{n}=\mathbf{G}^{+}\delta\tilde{\mathbf{v}}$ неоднородного уравнения:

$$\delta\mathbf{v}=\delta c\,[\mathbf{GC}]+\mathbf{G}^{+}\delta\tilde{\mathbf{v}}. \tag{3.4}$$

Здесь δc — произвольная скалярная величина, $[\mathbf{GC}]$ — векторное произведение векторов $\mathbf{g}^{\sigma}=(g_1^{\sigma},\dots,g_n^{\sigma})$, $\sigma=1,\dots,s$, составляющих строки матрицы $\mathbf{G}$, и произвольных векторов $\mathbf{c}^{\gamma}=(c_1^{\gamma},\dots,c_n^{\gamma})$, $\gamma=s+1,\dots,n-1$, $\mathbf{G}^{+}=\mathbf{G}^{T}\left(\mathbf{G}\mathbf{G}^{T}\right)^{-1}$.

С учетом возможных отклонений от уравнений связей, составим новую функцию Лагранжа $\tilde{L}=\tilde{L}(\mathbf{q},\mathbf{v},\breve{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{v}},t)$, удовлетворяющую условию $\tilde{L}(\mathbf{q},\mathbf{v},0,0,t)=L(\mathbf{q},\mathbf{v},t)$, и построим функцию $\tilde{D}=\tilde{D}(\mathbf{q},\mathbf{v},\breve{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{v}},t)$, обладающую свойствами: $\tilde{D}(\mathbf{q},\mathbf{v},0,0,t)=0$ и $\tilde{D}(\mathbf{q},\mathbf{v},\breve{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{v}},t)>0$, если $\breve{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{v}}$ не обращаются в нуль одновременно. Обозначив $\mathbf{R}=(R_1,\dots,R_n)$, R_i – реакции связей, запишем принцип Даламбера для расширенной системы с функцией Лагранжа $\tilde{L}$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{q},\mathbf{v})-\mathbf{Q}-\mathbf{R}=0, \tag{3.5}$$

$$\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{v}})+\frac{\partial\tilde{D}}{\partial\tilde{\mathbf{v}}}=0, \tag{3.6}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{q},\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \mathbf{q}},\ \tilde{\mathbf{q}} = (\breve{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}})$$

Умножив равенства (3.5), (3.6) скалярно на $\delta\mathbf{v}$ и $\delta\tilde{\mathbf{v}}$, составим сумму элементарных мощностей с учетом выражения (3.4):

$$(\mathbf{E}(\mathbf{q},\mathbf{v}) - \mathbf{Q} - \mathbf{R})^T [\mathbf{GC}]\,\delta c + \\ + \left((\mathbf{E}(\mathbf{q},\mathbf{v}) - \mathbf{Q} - \mathbf{R})^T \mathbf{G}^+ + \left(\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{v}}) + \frac{\partial \tilde{D}}{\partial \tilde{\mathbf{v}}} \right)^T \right) \delta\tilde{\mathbf{v}} = 0. \quad (3.7)$$

Равенство (3.7) возможно только при выполнении условий:

$$(\mathbf{E}(\mathbf{q},\mathbf{v}) - \mathbf{Q} - \mathbf{R})^T [\mathbf{GC}] = 0, \quad (3.8)$$

$$(\mathbf{E}(\mathbf{q},\mathbf{v}) - \mathbf{Q} - \mathbf{R})^T \mathbf{G}^+ + \left(\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{v}}) + \frac{\partial \tilde{D}}{\partial \tilde{\mathbf{v}}} \right)^T = 0. \quad (3.9)$$

Выберем вектор $\mathbf{R}$ так, чтобы выполнялось равенство $\mathbf{R}^T[\mathbf{GC}] = 0$, что соответствует идеальным связям исходной системы $\mathbf{R} = \mathbf{G}^T\lambda$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$. Тогда из равенств (3.8), (3.9) следуют уравнение, описывающее изменение обобщенных координат системы и уравнение возмущений связей. В конечном итоге с учетом кинематических соотношений, равенств (3.1), (3.2) и начальных условий приходим к системе дифференциально-алгебраических уравнений относительно переменных $\mathbf{q}, \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{v}}, \lambda$:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{v},\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^T\lambda, \quad (3.10)$$

$$\frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt} = \tilde{\mathbf{v}},\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{\mathbf{v}}} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{L}}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} = -\frac{\partial \tilde{D}}{\partial \tilde{\mathbf{v}}}, \quad (3.11)$$

$$\breve{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q},t),\ \tilde{\mathbf{q}} = (\breve{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}),\ \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{g}(\mathbf{q},\mathbf{v},t), \quad (3.12)$$

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0,\ \breve{\mathbf{q}}(t_0) = \mathbf{f}(\mathbf{q}_0,t_0), \hat{\mathbf{q}}(t_0) = \hat{\mathbf{q}}_0, \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, \tilde{\mathbf{v}}(t_0) = \mathbf{g}(\mathbf{q}_0,\mathbf{v}_0,t_0), \quad (3.13)$$

Для решения системы уравнений (3.10)-(3.13) необходимо достроить правые части дифференциальных уравнений (3.10), (3.11). Значения сил реакций связей определяются выражением множителя λ, обеспечивающим выполнение равенств (3.12). Если учитывать, что величина отклонения решения системы уравнений (3.10), (3.11) от уравнений связей определяется значениями переменных $\breve{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{v}}$, то решение $\breve{\mathbf{q}} = 0, \tilde{\mathbf{v}} = 0$ этой системы соответствует уравнениям связей, и устойчивость этого решения зависит от выбора функции Лагранжа $\tilde{L}$ и диссипативной функции $\tilde{D}$. Пусть функции $\tilde{L}$, $\tilde{D}$ определены равенствами

$$\tilde{L} = \tilde{T} - \tilde{P},$$

$$2\tilde{T} = \mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{v} + \tilde{\mathbf{v}}^T\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{v}},\ 2\tilde{P} = \tilde{\mathbf{q}}^T\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{q}},\ 2\tilde{D} = \tilde{\mathbf{v}}^T\mathbf{B}\tilde{\mathbf{v}}, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(q)\,,\ \tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}, \breve{\mathbf{q}})\,,\ \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \breve{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{q}, \breve{\mathbf{q}})$$

Тогда из уравнений (3.10)-(3.12) следует выражение $\lambda = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{h}$

$$\mathbf{M} = \mathbf{G}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{G}^T,\ \mathbf{h} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} - \left(\frac{d\tilde{\mathbf{A}}}{dt} + \mathbf{B}\right)\tilde{\mathbf{v}}\right) + \mathbf{G}\mathbf{A}^{-1}\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{v} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \mathbf{q}}\right) - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t},$$

$$\breve{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, t)\,,\ \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t)\,.$$

Соответственно, уравнения динамики (3.10) с учетом выражений $\tilde{L}$, $\breve{q}$, $\tilde{\mathbf{v}}$, λ как функций переменных $\mathbf{q}, \mathbf{v}, t$ приводятся к системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{v},\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A}^{-1}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{v} + \mathbf{Q} + \mathbf{G}^T\lambda\right), \tag{3.15}$$

$$\tilde{L} = \tilde{L}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \mathbf{f}(\mathbf{q}, t), \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t), t)\,,$$

допускающих частные интегралы

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, t) = 0,\ \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) = 0. \tag{3.16}$$

Уравнения возмущений связей (3.11), разрешенные относительно производных, записываются в виде системы

$$\frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt} = \tilde{\mathbf{v}}, \frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} = -\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{q}, \breve{\mathbf{q}})\,\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \breve{\mathbf{q}})\,\tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{q}, \breve{\mathbf{q}})\left(\tilde{\mathbf{v}}^T\frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}, \breve{\mathbf{q}})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}\tilde{\mathbf{v}}\right), \tag{3.17}$$

$$\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{q}, \breve{\mathbf{q}}) = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{q}, \breve{\mathbf{q}})\,\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{q})\,, \qquad \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \breve{\mathbf{q}}) = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{q}, \breve{\mathbf{q}})\left(\frac{d\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}, \breve{\mathbf{q}})}{dt} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \breve{\mathbf{q}})\right).$$

4. Устойчивость интегрального многообразия

Для стабилизации связей (2.1),(2.2) необходимо, чтобы интегральное многообразие системы дифференциальных уравнений (3.15), заданное равенствами (3.16), было устойчиво асимптотически.

Устойчивость интегрального многообразия определяется соответствующей устойчивостью тривиального решения $\breve{\mathbf{q}}(t) = 0$, $\tilde{\mathbf{v}}(t) = 0$ системы уравнений возмущений связей (3.11). Полагая в равенствах (3.14) матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$, $\mathbf{B}$ постоянными, получаем уравнения возмущений связей (3.11) как линейную систему с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{W}\mathbf{y}, \tag{4.1}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \breve{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{pmatrix},\ \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ -\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{H}} & -\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица. Если все корни характеристического уравнения системы (4.1) имеют отрицательные действительные части, то тривиальное решение $\mathbf{y} = 0$ устойчиво асимптотически. В [12] исследуется задача о стабилизации голономных связей, соответствующая случаю $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{E}$, $\tilde{\mathbf{H}} = \omega^2\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \gamma\mathbf{E}$. В [19] предложен алгоритм решения задачи стабилизации в общей постановке. Для определения достаточных условий устойчивости тривиального решения $\check{\mathbf{q}} = 0, \tilde{\mathbf{v}} = 0$ системы (3.17) используется [10] метод функций Ляпунова. Так, если связи являются стационарными

$$(\mathbf{q}) = 0, \mathbf{g}\left(\mathbf{q}, \mathbf{v}\right) = 0,$$

то в качестве функции Ляпунова можно взять определенно положительную квадратичную форму с постоянной матрицей коэффициентов $2V = \mathbf{y}^T\mathbf{U}\mathbf{y}$. Если производная этой функции, вычисленная с учетом уравнений системы (3.17), является определенно отрицательной, то тривиальное решение $\mathbf{y} = 0$ устойчиво асимптотически.

5. Численное решение

Если уравнения возмущений связей имеют асимптотически устойчивое тривиальное решение, то для стабилизации связей можно ограничиться даже простейшими численными методами решения уравнений динамики (3.15). Так, использование разностной схемы

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \tau\mathbf{X}_k,\ \mathbf{x}_k = \mathbf{x}\left(t_k\right),\ \tau = t_{k+1} - t_k,\ \mathbf{x}\left(t_0\right) = \mathbf{x}_0,$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix},\ \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{F}\left(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t\right) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t\right) = \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{q}\right)\left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{A}\left(\mathbf{q}\right)}{dt}\mathbf{v} + \mathbf{Q}\left(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t\right) + \mathbf{G}^T\left(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t\right)\lambda\left(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t\right)\right)$$

с учетом уравнения (4.1) приводит к соотношению

$$\|\mathbf{y}_{k+1}\| \leq \|\mathbf{E} - \tau\mathbf{W}\|\,\|\mathbf{y}_k\| + \Upsilon_k^{(2)}, \tag{5.1}$$

где $\Upsilon_k^{(2)}$ – остаточный член разложения функции $\mathbf{y} = \mathbf{y}\left(\mathbf{x}\left(t\right), t\right)$ в ряд по степеням τ в окрестности значения $t = t_k$. Из неравенства (5.1) следует оценка $\|\mathbf{y}_{k+1}\| \leq \varepsilon$, если при всех значениях $k = 0, 1, 2, \ldots, N$ выполняются условия $\|\mathbf{y}_k\| \leq \varepsilon$, $\|\mathbf{E} - \tau\mathbf{W}\| \leq \alpha \leq 1$, $\left\|\Upsilon_k^{(2)}\right\| \leq 2\varepsilon\left(1 - \alpha\right)$.

Если для решения уравнения (3.15) используется [20] разностная схема

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta\mathbf{x}_k, \qquad \Delta\mathbf{x}_k = \tau\left(1 - \sigma\right)\mathbf{X}_k + \tau\sigma\hat{\mathbf{X}}_k,$$

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \mathbf{X}_k\left(\tilde{\mathbf{x}}_k, t_k + \alpha\tau\right),\ \tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k + \alpha\tau\mathbf{X}_k,\ \sigma > 0,\ \alpha > 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots, N,$$

$\alpha, \sigma - const$, и при всех $k = 0, 1, 2, \ldots, N$ выполняются условия

$$2\alpha\sigma = 1, \|\mathbf{y}_k\| \leq \varepsilon, \left\|\Upsilon_k^{(3)}\right\| \leq 6\varepsilon(1-\beta), \left\|\mathbf{I}_{m+r} + \tau\mathbf{W} + \frac{1}{2}\tau^2\mathbf{W}^2\right\| \leq \beta \leq 1,$$

то будет справедлива оценка $\|\mathbf{y}_{k+1}\| \leq \varepsilon$. Условия стабилизации связей, соответствующие методу Рунге-Кутты получены в [21].

6. Пример

Определить закон изменения силы $\mathbf{F}$, обеспечивающей устойчивое движение ракеты по траектории $f(x, y) = 0$. Ракету будем считать материальной точкой, положение и скорость которой определяются векторами

$$\mathbf{q} = (x, y), \ \mathbf{v} = (v_x, v_y), \ v_x = \frac{dx}{dt}, \ v_y = \frac{dy}{dt}, \tag{6.1}$$

и на которую действует сила тяжести $m\mathbf{g}$, направленная по вертикали. Отклонение точки от траектории и его производную определим величинами

$$\breve{q} = f(x, y), \breve{v} = \frac{\partial f}{\partial x} v_x + \frac{\partial f}{\partial y} v_y. \tag{6.2}$$

Введем функцию Лагранжа и диссипативную функцию:

$$2\tilde{L} = m\mathbf{v}^2 - 2mgy + \breve{\mathbf{v}}^2 - c\breve{q}^2, \ 2D = k\breve{\mathbf{v}}^2,$$

$$\mathbf{v}^2 = v_x^2 + v_y^2, \ c, k, g - const.$$

Из равенств (6.2) следует уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y = \delta\breve{v},$$

из которого определяются виртуальные перемещения точки в зависимости от произвольных величин δs и $\delta\breve{v}$:

$$\delta x = -\frac{\partial f}{\partial y}\delta s + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)^{-1}\delta\breve{v}, \delta y = \frac{\partial f}{\partial x}\delta s + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)^{-1}\delta\breve{v}.$$

Используя принцип Даламбера-Лагранжа

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial v_x} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial v_y} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \breve{v}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \breve{q}} - \frac{\partial D}{\partial \breve{v}}\right)\delta\breve{v} = 0,$$

составим уравнения динамики ракеты

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \ \frac{dy}{dt} = v_y, \ \frac{d}{dt}(mv_x) = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{d}{dt}(mv_y) = -mg + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{6.3}$$

и уравнения возмущений связей

$$\frac{d\breve{q}}{dx} = \breve{v}, \frac{d\breve{v}}{dt} = -c\breve{q} - k\breve{v}. \tag{6.4}$$

Обозначив μ величину скорости отделения частиц относительно ракеты и учитывая равенство

$$\frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt} - \mu\left(\frac{dm}{dt}\right)\frac{v}{|v|},$$

уравнения (6.3) можно представить в виде:

$$\frac{dx}{dt} = v_x,\ m\frac{dv_x}{dt} = T_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{dy}{dt} = v_y,\ m\frac{dv_y}{dt} = T_y - mg + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{6.5}$$

$$T_x = \frac{\mu v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}\frac{dm}{dt}, T_y = \frac{\mu v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}\frac{dm}{dt}.$$

Правые части уравнений (6.5) содержат силу тяги $T = (T_x, T_y)$, направленную вдоль касательной к траектории движения, и реакцию связи $R = \lambda(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)$, направленную по нормали. Эти две силы составляют искомую силу F. Из уравнений (6.2),(6.4),(6.5) определяется выражение множителя Лагранжа

$$\begin{gathered}\lambda = -\tfrac{m}{N^2}\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}v_x^2 + 2\tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}v_x v_y + \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}v_y^2 + cf(x,y) + k\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}v_x + \tfrac{\partial f}{\partial y}v_y\right) + g\tfrac{\partial f}{\partial y}\right) - \\ -\tfrac{1}{N^2}\tfrac{\mu}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}v_x + \tfrac{\partial f}{\partial y}v_y\right)\tfrac{dm}{dt}, \qquad N^2 = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2.\end{gathered} \tag{6.6}$$

Движение по траектории будет устойчиво асимптотически, если корни характеристического уравнения $\kappa^2 + k\kappa + c = 0$ системы (6.4) имеют отрицательные действительные части. Численное решение системы (6.5),(6.6)

$$\begin{aligned}&x(t_k) = x_k,\\ &x_{k+1} = x_k + \tau v_{xk}, \qquad y_{k+1} = y_k + \tau v_{yk},\end{aligned}$$

$$(v_x)_{k+1} = (v_x)_k + \frac{\tau}{m_k}\left(T_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right)_k, (v_y)_{k+1} = (v_y)_k + \frac{\tau}{m_k}\left(T_y - mg + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}\right)_k,$$

будет при всех $k = 0, 1, 2, \ldots, K$ удовлетворять неравенству $\|q_k\| \le \varepsilon$, если будут выполнены условия $\|q_0\| \le \varepsilon$, $\|E - \tau W\| \le \alpha \le 1$, $\left\|\Upsilon_k^{(2)}\right\| \le 2\varepsilon(1-\alpha)$, где W — матрица коэффициентов уравнений системы (6.4), $\Upsilon_k^{(2)}$ — остаточный член разложения в ряд функции $\breve{q} = f(x, y)$.

7. Заключение

Методы решения обратных задач динамики и условия устойчивости множеств траекторий позволяют разработать алгоритмы решения задач динамики и управления динамическими процессами в системах различной природы.

Список цитируемых источников

1. *Галиуллин А. С.* Методы решения обратных задач динамики. — М.: Наука, 1986. — 224 с.

   Galiullin, A. S. Methods for the solution of inverse problems in dynamics. Moscow: Nauka, 1986 (in Russian).

2. *Имшенецкий В. Г.* Определение силы, движущей по коническому сечению материальную точку, в функции ее координат // Сообщ. Харьков. матем. общ. — 1879. — Вып.1. — 11 с.

   Imshenetsky V. G. Determination of the force driving a material point along a conic section as a function of its coordinates // Soobsch. Kharkov. Matem. Obsch., No.1 (1879). (in Russian)

3. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. Перевод с латинского и примечания А. Н. Крылова. — М.: Наука, 1989. — 688 с.

   Newton I. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. London, 1687.

4. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. — Минск: Наука и техника, 1979. — 744 с.

   Erugin, N. P. ‘Reader for a general course in differential equations. 3rd ed. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1979. (in Russian)

5. *Жуковский Н. Е.* Определение силовой функции по данному семейству траекторий / Полн. Собр. Соч. Т.I. — М.-Л.: Гл. ред. авиац. лит-ры, 1937. — С. 293-308.

   Zhukovsky N. E. Definition of the force function from a given family of trajectories. Polnoe sobr. soch., Vol.I, M.-L .: Gl. redakts. aviats. lit., 1937, 293-308. (in Russian)

6. *Жуковский Н. Е.* О прочности движения // Полн. Собр. Соч. Т.I. — М.-Л.: Гл. ред. авиац. лит-ры, 1937. — С. 110-205.

   Zhukovsky N. E. On the strength of motion. Polnoe sobr. soch., Vol.I, M.-L .: Gl. redakts. aviats. lit., 1937, 110-205. (in Russian)

7. *Зубов В.И.* Методы А. М. Ляпунова и их применение. — Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1957. — 241 с.

   Zubov, V. I. Methods of A. M. Lyapunov and their application. Groningen: P. Noordhoff Ltd., 1964.

8. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. — Собрание сочинений. Т.II. — М.: Изд. АН СССР, 1956. — 472 с.

   Lyapunov A. M. General Problem of the Stability Of Motion. Int. J. Control 55, No.3, 521-527 (1992).

9. *Козлов В. В.* Динамика систем с сервосвязями. I // Нелинейная динамика. — 2015. — Т.11, №2. — С. 353-376.

   Kozlov V. V. The dynamics of systems with servoconstraints. I. Regular and Chaotic Dinamics 20:3, 205–224 (2015).

10. *Козлов В. В.* Динамика систем с сервосвязями. II // Нелинейная динамика. — 2015. — Т.11, №3. — С. 579–611.

    Kozlov V. V. The dynamics of systems with servoconstraints. II. Regular and Chaotic Dinamics 20:4, 401–427 (2015).

11. *Леви-Чивита Т., Амальди У.*. Курс теоретической механики. Т.2. Часть вторая. — Москва: ИЛ, 1952. — 544 с.

Levi-Civita T., Amaldi U. Lezioni di meccanica razionale. Vol.2, parte seconda, Bologna, 1927.

12. *Мухарлямов Р. Г.* О построении множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию // Дифференц. уравнения. — 1969. — Т.5, №4. — С. 688-699.

Mukharlyamov, R. G. Über die Konstruktion einer Menge von Differentialgleichungssystemen der stabilen Bewegung auf einer Integralmannigfaltigkeit. Differ. Uravn. 5, 688-699 (1969).

13. *Мухарлямов Р. Г.* О построении дифференциальных уравнений оптимального движения по заданному многообразию // Дифференц. уравнения. — 1971. — Т.7, №10. — С. 1825-1834.

Mukharlyamov, R. G. Construction of differential equations for optimal motion to a given manifold. Differ. Equations 7 (1971), 1384-1390 (1974).

14. *Мухарлямов Р. Г.* Стабилизация движений механических систем на заданных многообразиях фазового пространства // ПММ. — 2006. — Т.70, №2. — С. 236-249.

Mukharlyamov, R. G. Motion stabilization of mechanical systems on given manifolds of phase space. J. Appl. Math. Mech. 70, No. 2, 210-222 (2006).

15. *Мухарлямов, Р. Г.* Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация систем с программными связями. // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2015. — №1. — С. 15-28.

Mukharlyamov, R. G. Simulation of control processes, stability and stabilization of systems with program constraints. J. Comput. Syst. Sci. Int. 54, No. 1, 13-26 (2015).

16. *Суслов Г. К.* О силовой функции, допускающей заданные интегралы. Киев: Изд-во Киевского университета, 1890. — 114 с.

Suslov G. K. On the force function that admits given integrals. Kiev: Izdat. Kiev. Univ., 1890. (in Russian)

17. *Ascher U. M., Hongsheng Chin, Petzold L. R., Reich S.* Stabilization of constrained Mechanical systems with DAEs and invariant manifolds, J. Mechanics of Structures and Machines 23, 135-158 (1995).

18. *Baumgarte J.* Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems // Comp. Math. Appl. Mech. Eng. — 1972. — Vol.1. — P. 1-16.

19. *Bertrand M. G.* Theoreme relatife au mouvement d'un point attire vers un centre fixe // Compte rendus — 1873 — Vol. LXXVII, No.16. — P. 849-853.

20. *Darboux M. G.* Recherche de la loi que dois suivre une force centrale pour que la trajectoire quellle determine soit toujour une conique // Compte rendus. — 1877. — Vol. LXXXIV, No.16. — P. 760-762.

21. *Mukharlyamov, R. G., Beshaw, Assaye Walelgn.* Solving Differential Equation of Motion for Constrained Mechanical Systems // Вестник РУДН. Сер. матем., инф., физ. — 2013. — №3. — С. 81-92.

Получена 23.02.2018