Динамические системы, 2018, том 8(36), №1, 51–61

УДК 532.6,534

О способах аналитического расчета условий развития неустойчивости горизонтальной поверхности вязкой жидкости, совершающей вертикальные колебания

Д. Ф. Белоножко, А. В. Апарнева
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Ярославль 150023. *e-mail: belonozhko@mail.ru*

Аннотация. Проведен сравнительный анализ двух аналитических асимптотических методов расчета условий возникновения неустойчивости, наблюдаемой на поверхности горизонтального слоя вязкой жидкости, совершающего вертикальные колебания: метода сведения задачи к интегро-дифференциальному уравнению относительно амплитуды возмущения и метода, опирающегося на применение теории Флоке к системе с несколькими переменными. Показано, что некоторые известные работы по данному вопросу содержат некорректности, которые существенно усложняют сопоставление и верификацию результатов, полученных разными методами.

Ключевые слова: неустойчивость Фарадея, вязкая жидкость, свободная поверхность, теория Флоке.

On analytical calculation methods of instability conditions of horizontal surface of a viscous liquid committing vertical oscillations

D. F. Belonozhko, A. V. Aparneva
P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl 150003.

Abstract. A comparative analysis has been conducted for two analytical asymptotic methods for calculation of instability conditions of a horizontal surface of a viscous liquid which commits periodic vertical oscillations. The first method leads to integro-differential equation for amplitude of surfaces perturbations. Second one is based on the Floquet's theory applied directly to the system of several variables. It has been shown that some well known publications on the subject contain improprieties which essentially complicate juxtaposition and verification of results obtained by different methods. It has been revealed the second method is more preferable for analysis of the Faraday instability in more complicated cases such as the problem with vertically oscillating two-layer liquid or a liquid with surfactant film on it's surface etc.

Keywords: Faraday instability, viscous liquid, free surafce, Floquet's theory.
MSC 2010: 76E17

Введение

Более полутораста лет назад знаменитый английский физик-экспериментатор Майкл Фарадей описал явление, которое с тех пор носит его имя — «неустойчивость Фарадея» [9]. Речь идет о «ряби Фарадея», которая возникает на изначально спокойной поверхности горизонтального слоя жидкости, начинающего совершать малые вертикальные колебания достаточно высокой частоты. Если действовать в рамках теории идеальной несжимаемой жидкости, моделирование этого явления не вызывает каких-то принципиальных трудностей [5]. Однако, для вязкой жидкости, особенно если требуется учесть дополнительные динамические эффекты [6], [8], вопросы анализа условий реализации неустойчивости Фарадея до сих пор разработаны недостаточно основательно.

Настоящая работа посвящена сравнительному анализу двух подходов к аналитическому асимптотическому расчету влияния вязкости на условия возникновения неустойчивости Фарадея, схематично описанных в часто цитируемой монографии [3]. В первом случае предлагается специальная схема исключения и замены переменных [3], сводящая задачу к интегро-дифференциальному уравнению относительно одной неизвестной — амплитуды волнового возмущения свободной поверхности. Согласно [3], анализ построенного уравнения дает возможность рассчитать условия развития неустойчивости. Во втором случае непосредственно ко всем неизвестным задачи (компонентам поля скоростей, давлению и возмущению свободной поверхности) применяется подстановка, продиктованная теорией Флоке, которая сводит задачу к бесконечной системе линейных алгебраических однородных уравнений относительно вспомогательных констант. Анализ условий разрешимости этой системы тоже позволяет найти условия развития неустойчивости. Именно второй подход используется большинством авторов [7],[10].

Представляется весьма заманчивым иметь надежный метод сведения задач рассматриваемого типа к уравнению относительно одной переменной. Однако, изложение соответствующей методики, представленное в [3] и в цитируемой авторами этой работы литературе, слишком слабо детализировано. Оно изобилует многочисленными описками и некорректностями, значительно затрудняющими воспроизведение ключевых выкладок. Как показано в [1], даже само интегрально-дифференциальное уравнение для амплитуды возмущения (впоследствии цитируемое другими исследователями, см., например, [12]) записано с ошибкой.

В настоящей работе мы постарались дать откорректированное и доступное для воспроизведения изложение методики [3], с помощью которой задача о расчете условий развития неустойчивости Фарадея на горизонтальной поверхности вязкой жидкости сводится к интегро-дифференциальному уравнению относительно одной переменной. Ставилась цель проанализировать целесообразность и эффективность этой методики по сравнению с методом применения теории Флоке к нескольким переменным.

1. Математическая формулировка задачи

Пусть несжимаемая жидкость с плотностью ρ, кинематической вязкостью ν и коэффициентом поверхностного натяжения γ заполняет полупространство $z < 0$ в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ с осью z, направленной вертикально вверх против направления действия поля силы тяжести $\mathbf{g}$. Система совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой a и круговой частотой 2ω. Ставилась задача исследовать устойчивость равновесного состояния системы по отношению к малым возмущениям $z = \xi\,(t, x)$ свободной поверхности жидкости (здесь t — время). Для простоты считалось, что поле скоростей и давлений не зависит от второй горизонтальной координаты y.

Математическая формулировка задачи расчета возмущенного поля скоростей и поля давления состоит из уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости. На свободной поверхности и на глубине задавались стандартные для таких уравнений краевые условия. В первом приближении по амплитуде возмущения задача имеет следующий вид [3],[1]:

$$z > \xi: \quad \partial_t u + \frac{1}{\rho}\partial_x p - \nu\left(\partial_{xx}u + \partial_{zz}u\right) = 0; \quad \partial_t v + \frac{1}{\rho}\partial_x p - \nu\left(\partial_{xx}v + \partial_{zz}v\right) = 0;$$

$$\partial_x u + \partial_z v = 0; \tag{1.1}$$

$$z = \xi: \qquad \partial_t \xi - v = 0;$$

$$-\rho g \xi + 4a\omega^2 \rho \xi \cos(2\omega t) + p - 2\rho\nu\partial_z v + \gamma \partial_{xx}\xi = 0; \quad \partial_z u + \partial_x v = 0;$$

$$z \to -\infty: \qquad u \to 0; \quad v \to 0.$$

Здесь $u \equiv u\,(t, x, z)$ и $v \equiv v\,(t, x, z)$ — горизонтальная и вертикальная компоненты поля скоростей; $p \equiv p\,(t, x, z)$ — возмущение равновесного значения давления. Задача (1.1) приводилась к безразмерным переменным, в которых $\rho = g = \gamma = 1$. По времени t осуществлялся переход к вспомогательному параметру $\tau = \omega t$:

$$z < 0: \quad \omega\partial_\tau u + \partial_x p - \nu\left(\partial_{xx}u + \partial_{zz}u\right) = 0; \tag{1.2}$$

$$\omega\partial_\tau v + \partial_x p - \nu\left(\partial_{xx}v + \partial_{zz}v\right) = 0; \tag{1.3}$$

$$\partial_x u + \partial_z v = 0; \tag{1.4}$$

$$z = 0: \qquad \omega\partial_\tau \xi - v = 0; \tag{1.5}$$

$$-\xi + 4a\omega^2\xi\cos(2\tau) + p - 2\nu\partial_z v + \partial_{xx}\xi = 0; \tag{1.6}$$

$$\partial_z u + \partial_x v = 0; \tag{1.7}$$

$$z \to -\infty: \qquad u \to 0; \quad v \to 0. \tag{1.8}$$

Именно такая формулировка является предметом дальнейшего рассмотрения.

2. Сведение задачи к интегро-дифференциальному уравнению

Согласно [3], решение задачи (1.2)-(1.8) следует искать в следующем виде:

$$\xi = \zeta\left(\tau\right)\exp\left(ikx\right); \quad p = P\left(\tau, z\right)\exp\left(ikx\right); \tag{2.1}$$

$$u = h\left(\tau, z\right)\exp\left(ikx\right); \quad v = w\left(\tau, z\right)\exp\left(ikx\right).$$

Здесь k — волновое число возмущения, амплитуда которого $\zeta(t)$ мала по сравнению с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$. Подставляя (2.1) в (1.2)-(1.8), несложно исключить неизвестную $h\left(t, z\right)$. Задача (1.2)-(1.8) преобразуется к новому виду:

$$z < 0: \quad \omega\partial_\tau w + kP - \nu\left(\partial_{zz}w - k^2 w\right) = 0; \tag{2.2}$$

$$z = 0: \qquad \omega\partial_\tau\zeta - w = 0; \tag{2.3}$$

$$-\zeta\left(1 + k^2\right) + 4a\omega^2\zeta\cos\left(2\tau\right) + P - 2\nu\partial_z w = 0; \tag{2.4}$$

$$\partial_{zz}w + k^2 w = 0; \tag{2.5}$$

$$z \to -\infty: \qquad w \to 0. \tag{2.6}$$

В (2.2) учтено, что давление p удовлетворяет двухмерному уравнению Лапласа $\partial_{xx}p + \partial_{zz}p = 0$. Для доказательства этого факта необходимо продифференцировать уравнения (1.2), (1.3) соответственно по x и по z, сложить их и учесть выполнение соотношения (1.4). Из уравнения Лапласа для p и стремления этой величины к нулю при $z \to -\infty$ (вместе с w) следует, что вспомогательная функция $P \equiv P\left(\tau, z\right)$, введенная в (2.1), является пропорциональной $\exp\left(kz\right)$. Очевидно, что $\partial_z P = kP$.

С помощью граничных условий (2.3)-(2.5) уравнение (2.2) при $z = 0$ преобразуется к соотношению [1]:

$$\omega^2\ddot{\zeta} + 2\nu k^2\omega\dot{\zeta} + \zeta\left(k^3 + k - 4ak\omega^2\cos\left(2\tau\right)\right) = -2\nu k\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=0}. \tag{2.7}$$

Здесь и далее точка над величиной означает дифференцирование по τ. В работе [3] это уравнение приведено с досадными опечатками, которые исправлены в [1].

Для исключения из (2.7) переменной $w \equiv w\left(\tau, z\right)$ авторы [3] предложили использовать вспомогательную функцию:

$$\psi \equiv \psi\left(\tau, z\right) = \partial_{zz}w - k^2 w. \tag{2.8}$$

Если из правой части (2.8) вычесть левую часть граничного условия на касательные натяжения (2.5), то получится, что $\psi\left(\tau, 0\right) = -2k^2 w\left(\tau, 0\right)$. Построенное соотношение с помощью (2.3) преобразуется в граничное условие, которое не зависит явным образом от переменной w:

$$\psi\left(\tau, 0\right) = -2\omega k^2\dot{\zeta}. \tag{2.9}$$

Применяя к обеим частям (2.2) оператор $\partial_{zz} - k^2$ и учитывая, что P пропорционально $\exp(kz)$, несложно построить уравнение для вспомогательной функции $\psi(\tau, z)$:

$$z < 0: \quad \omega\partial_\tau\psi = \nu\left(\partial_{zz}\psi - k^2\psi\right). \tag{2.10}$$

С помощью замены переменной

$$\psi = \Psi \exp\left(-\frac{\nu k^2}{\omega}\tau\right) \tag{2.11}$$

уравнение (2.10) преобразуется к однородному уравнению типа теплопроводности, с граничным условием, не содержащим величину w:

$$\partial_\tau\Psi - \frac{\nu}{\omega}\partial_{zz}\Psi = 0; \tag{2.12}$$

$$\Psi(\tau, 0) = -2\omega k^2\dot{\zeta}\exp\left(\frac{\nu k^2}{\omega}\tau\right). \tag{2.13}$$

Решение краевой задачи (2.12), (2.13) с нулевым начальным условием хорошо известно (см. [1] и цитируемую там литературу). С его помощью легко выписать выражение для ψ:

$$\psi(x, \tau) = -\frac{\omega^{3/2}k^2}{\sqrt{\pi\nu}}\int\limits_0^\tau \frac{z}{\sigma^{3/2}}\exp\left(-\frac{\omega z^2}{4\nu\sigma}\right)\exp\left(-\frac{\nu k^2\sigma}{4\omega}\right)\dot{\zeta}(\tau - \sigma)d\sigma. \tag{2.14}$$

Следует отметить, что авторы [3] получили аналогичное выражение, но без каких-либо пояснений заменили в нем верхний предел интегрирования на бесконечность.

Подставляя (2.14) в соотношение (2.8) и решая получившееся неоднородное уравнение относительно w (важно учесть, что $w \to 0$ при $z \to -\infty$), можно прийти к следующему выражению:

$$w = C(t)\exp(kz) +$$

$$+\frac{\exp(-kz)}{2k}\int\limits_{-\infty}^{z}\psi(\tau, \eta)\exp(k\eta)d\eta - \frac{\exp(kz)}{2k}\int\limits_{-\infty}^{z}\psi(\tau, \eta)\exp(-k\eta)d\eta. \tag{2.15}$$

Функция времени $C(t)$ определяется из граничного условия (2.3):

$$C(t) = \omega\dot{\zeta} + 2\nu k^2\int\limits_0^\tau \dot{\zeta}(\tau - \sigma)d\sigma. \tag{2.16}$$

Соотношения (2.14),(2.15),(2.16) позволяют выразить правую часть уравнения (2.7) через переменную ζ и построить относительной этой неизвестной интегро-дифференциальное уравнение:

$$\ddot{\zeta} + 4\delta\dot{\zeta} + \zeta\left(\Omega^2 - 2q\cos(2\tau)\right) =$$

$$= 4\delta^{3/2}\int\limits_0^\tau \frac{\frac{d}{d\tau}\left(\zeta(\tau-\sigma)\exp(-\delta\sigma)\right)}{\sqrt{\pi\sigma}}d\sigma - 4\delta^2\int\limits_0^\tau \frac{d}{d\tau}\zeta(\tau-\sigma)erfc\left(k\sqrt{\frac{\nu\sigma}{\omega}}\right)d\sigma; \quad (2.17)$$

$$\delta = \frac{\nu k^2}{\omega}; \qquad \Omega^2 = \frac{k^3+k}{\omega^2}; \qquad q = 2ak.$$

Здесь $erfc$ — обозначение для функции, дополнительной к функции ошибок, δ — безразмерная вязкость, q — безразмерная амплитуда вертикальных осцилляций системы, а Ω — отношение частоты капиллярно-гравитационной волны с волновым числом k к частоте вертикальных колебаний системы. При $\delta = 0$ уравнение (2.17) превращается в известное уравнение Матье-Хилла. Для его анализа принято использовать плоскость параметров (Ω^2, q), на которой изображаются языкообразные области неустойчивого поведения решения. С помощью теории Флоке [2] определяются линии границ областей неустойчивости, которые выходят из точек оси Ω^2 с координатами $\Omega^2 = 1, 4, 9, ..., n^2 ... (q = 0)$ [2], [11]. Эти точки соответствуют первому, второму и последующим резонансным состояниям, в которых возмущения даже сколь угодно малой амплитуды являются нарастающими во времени.

В работе [3] уравнение (2.17) записано с ошибкой: авторы потеряли второе интегральное слагаемое, а в первом необоснованно заменили верхний предел интегрирования на бесконечность. По их утверждению, применение теории Флоке к полученному ими интегро-дифференциальному уравнению в асимптотике малых δ позволило получить уравнение границы первой зоны неустойчивости. Согласно [3], при $\delta > 0$ минимум границы этой зоны на плоскости параметров (Ω^2, q) сдвигается из точки $\Omega^2 = 1$, $q = 0$ в новое положение:

$$\Omega_*^2 \approx 1 + 2\sqrt{2}\delta^{3/2}; \qquad q_* \approx 4\delta. \quad (2.18)$$

Несмотря на всю небрежность представленных в [3] выкладок, с физической точки зрения результат получился вполне разумным. Согласно (2.18) для вертикально вибрирующего вязкого слоя жидкости параметрический резонанс возникает, только если амплитуда вибраций превосходит некоторое пороговое значение. Порог определяется вязкостью жидкости: чем больше вязкость, тем больше значение пороговой амплитуды. Интересно отметить, что в недавней работе [1] для анализа уравнения (2.17) была применена методика усреднения по бесконечному промежутку времени, обоснованная для интегро-дифференциальных уравнений подобного рода в работе Ю. А. Митропольского и А. Н. Филатова [4]. Это позволило корректно найти границы первой зоны устойчивости. Согласно [1] приближенные равенства (2.18) оказались действительно справедливы!

В целом, методику сведения задачи (1.2)-(1.8) к интегро-дифференциальному уравнению (2.17) нельзя считать универсальной. Она в существенной степени опирается на возможность выразить правую часть уравнения (2.7) через переменную ζ. Именно для этого вводится вспомогательная функция ψ, удовлетворяющая краевой задаче (2.10), (2.9). Важно подчеркнуть, что правая часть граничного условия (2.9) зависит только от неизвестной ζ и фиксированных параметров задачи, что вытекает из рассуждений, приведенных после соотношения (2.8). Несложно проверить, что эта цепочка рассуждений справедлива только при условии, что правая часть (1.7) обращается в ноль, т. е. когда на поверхности присутствует лишь касательное натяжение, действующее со стороны жидкости. В общем случае это не так. Дополнительные касательные натяжения неизбежны в двухслойной системе; на поверхности жидкости с пленкой поверхностно-активного вещества; на поверхности неравномерно прогретого жидкого слоя и во многих других интересных обобщениях задачи о неустойчивости Фарадея.

3. Непосредственное применение теории Флоке к нескольким переменным

В колебательной системе с периодически изменяющимся внутренним параметром τ реализуется параметрический резонанс. Согласно теории Флоке [2], [11], если параметр изменяется по закону $\propto \cos(2\tau)$, то в состоянии, соответствующем границе устойчивости, переменные величины системы становятся периодическими функциями параметра τ. При этом, их период равен π на одном типе границы зон неустойчивости и 2π — на другом. В случае задачи о неустойчивости Фарадея речь идет о поведении поверхностного волнового возмущения ξ, возмущений поля скоростей и давления. Последние связаны с $\xi \propto \exp(ikx)$ граничными условиями (1.5)-(1.7) и, значит, тоже должны быть пропорциональны $\exp(ikx)$. Периодичность по τ с периодами π и 2π несложно учесть, если искать ξ в виде разложения в ряд Фурье:

$$\xi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\tau - ikx). \tag{3.1}$$

Для переменных u, v, p следует принять во внимание тот факт, что коэффициенты разложения могут зависеть от z:

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(z) \exp(in\tau - ikx); \quad v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(z) \exp(in\tau - ikx); \tag{3.2}$$

$$p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n(z) \exp(in\tau - ikx).$$

Это и есть главная идея решения, не требующая сведения задачи к уравнению относительно одной переменной.

Подставляя (3.1) и (3.2) в уравнения (1.2)-(1.4) и учитывая условия на глубине (1.8), несложно получить выражения для входящих в (3.2) вспомогательных функций:

$$f_n(z) = A_n exp(kz) + B_n exp(Q_n z); \quad F_n(z) = iA_n exp(kz) + \frac{ik}{Q_n} B_n exp(Q_n z); \tag{3.3}$$

$$G_n(z) = \frac{\omega n A_n}{k} exp(kz); \qquad Q_n = \sqrt{k^2 + \frac{in\omega}{\nu}}.$$

Здесь A_n, B_n — константы.

Подстановка (3.1)-(3.3) в граничные условия (1.5)-(1.7) приводит к бесконечной системе линейных однородных уравнений относительно констант, A_n, B_n, c_n. Константы A_n, B_n легко исключаются. Остается бесконечная однородная система линейных алгебраических уравнений относительно c_n:

$$M_n c_n - q(c_{n-2} + c_{n+2}) = 0; \tag{3.4}$$

$$M_n = \left(\Omega^2 - n^2 + 4in\delta + 4\delta^2 - 4\delta^{3/2}\sqrt{\delta + in}\right).$$

Примечательно, что точно такая же система уравнений относительно коэффициентов c_n выписана в монографии [3]. По утверждению авторов, они, следуя теории Флоке, получили ее подставляя соотношение

$$\zeta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\tau) \tag{3.5}$$

в свое интегро-дифференциальное уравнение. Но, как отмечено в предыдущем пункте, авторы [3] записали это уравнение с ошибкой (см. [3], гл.1, соотношение (1.1.36)). Можно проверить, что подстановка (3.5) не приводит такое уравнение к системе (3.4). При этом, метод, которому посвящен настоящий пункт, в работе [3] тоже кратко описан. Складывается впечатление, что уравнения (3.4) на самом деле были получены именно этим методом. Во всяком случае, происхождение квадратного корня, имеющегося в (3.4), можно четко соотнести со вспомогательным параметром Q, который возникает на этапе установления вида вспомогательных функций (3.3). Все эти досадные «нестыковки» вместе с описками и некорректностями по тексту весьма затрудняют использование работы [3] для освоения и дальнейшего использования метода сведения задачи (1.1) к интегро-дифференциальному уравнению относительно амплитуды возмущения.

Система (3.4), как и в случае классического уравнения Матье-Хилла, распадается на две независимые подсистемы [11]. Одну из них образуют уравнения, построенные по формуле (3.4) при всех четных значениях n. В эту же подсистему следует включить уравнение, получающееся при $n = 0$. Все остальные уравнения составляют другую независимую бесконечную подсистему. Первый случай соответствует поведению решения задачи на линии границ областей неустойчивости, которые на плоскости параметров (Ω^2, q) близки по форме к нулевой, второй, четвертой и следующим четным зонам классического уравнения Матье-Хилла. На границах этих зон решения имеют период 2π. Второй случай — система уравнений, соответствующих нечетным n — отвечает решениям, которые имеют период π и реализуются на линиях границ нечетных зон неустойчивости.

С практической точки зрения наиболее важной считается первая зона неустойчивости. Если $\delta = 0$, то линии ее границы начинаются при $\Omega^2 = 1$; $q = 0$. Первая зона неустойчивости, как показывает опыт, наименее подвержена диссипации и особенно четко проявляется в эксперименте [5].

Для обеспечения сходимости ряда (3.1) коэффициенты c_n должны убывать с возрастанием $|n|$. Поэтому условие разрешимости системы (3.4), с учетом ее распада на две независимые подсистемы, реализуется как стремление к нулю двух последовательностей определителей:

$$\begin{vmatrix} M_{-1} & -q \\ -q & M_1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} M_{-3} & -q & 0 & 0 \\ -q & M_{-1} & -q & 0 \\ 0 & -q & M_1 & -q \\ 0 & 0 & -q & M_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} M_{-5} & -q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q & M_{-3} & -q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q & M_{-1} & -q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q & M_1 & -q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q & M_3 & -q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q & M_5 \end{vmatrix}; \ldots \to 0;$$

$$\begin{vmatrix} M_{-2} & -q & 0 \\ -q & M_0 & -q \\ 0 & -q & M_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} M_{-4} & -q & 0 & 0 & 0 \\ -q & M_{-2} & -q & 0 & 0 \\ 0 & -q & M_0 & -q & 0 \\ 0 & 0 & -q & M_2 & -q \\ 0 & 0 & 0 & -q & M_4 \end{vmatrix}; \ldots \to 0.$$

Последовательное вычисление определителей четного порядка и приравнивание получившихся соотношений к нулю приводит к бесконечной последовательности уравнений. Первое из них — приближенное уравнение границы первой зоны неустойчивости на плоскости параметров (Ω^2, q). Второе — тоже приближенное, но более точное по сравнению с первым, уравнение границы первой зоны. К тому же, полное множество решений второго уравнения оказывается шире, чем у первого: помимо уравнения границы первой зоны, оно задает еще и границу третьей зоны неустойчивости. Третье уравнение описывает границы первых трех нечетных зон (первой, третьей и пятой). Причем, первые две оно задает более точно, чем предыдущие уравнения. Смысл следующих уравнений очевиден. Аналогично, последовательность определителей нечетного порядка позволяет последовательно построить приближенные уравнения границ нулевой и всех четных зон неустойчивости.

Например, уравнение границы первой зоны неустойчивости в самом грубом приближении определяется соотношением вида:

$$\begin{vmatrix} \Omega^2 - 1 + 4i\delta + 4\delta^2 - 4\delta^{3/2}\sqrt{\delta + i} & -q \\ -q & \Omega^2 - 1 + 4i\delta + 4\delta^2 - 4\delta^{3/2}\sqrt{\delta + i} \end{vmatrix} = 0.$$

Во втором приближении по δ получается уравнение

$$1 - 2\Omega^2 + \Omega^4 - q^2 - 4\sqrt{2}(\Omega^2 - 1)\delta^{3/2} + 8(\Omega^2 + 1)\delta^2 = 0,$$

легко разрешающееся относительно q. В области $q > 0$ граница первой зоны неустойчивости на плоскости параметров (Ω^2, q) описывается явной функцией $q \equiv q(\Omega^2)$:

$$q = \sqrt{(\Omega^2 - 1)^2 - 4\sqrt{2}(\Omega^2 - 1)\delta^{3/2} + 8(\Omega^2 + 1)\delta^2}.$$

Несложно найти положение минимума этой функции:

$$\Omega_*^2 = 1 + 2\sqrt{2}\delta^{3/2} - 4\delta^2 \approx 1 + 2\sqrt{2}\delta^{3/2}$$

и его значение в главном по δ приближении: $q_* \approx 4\delta$. Результат совпадает с тем, что приведен в работах [3] и [1] (см. выражения (2.18)).

Описанная в настоящем разделе методика решения задачи является достаточно универсальной. В отличии от подхода, разобранного в предыдущем пункте, для нее непринципиально, насколько сильно видоизменяются граничные условия при усложнении задачи. Аналитические вычисления сводятся к работе с линейными дифференциальными и алгебраическими соотношениями, которые, даже будучи достаточно громоздкими, легко поддаются обработке современными средствами символьной компьютерной математики.

4. Заключение

Аналитический асимптотический расчет влияния вязкости на условия реализации неустойчивости Фарадея сводится к анализу интегро-дифференциального уравнения относительно амплитуды волнового возмущения только в рамках относительно несложной модели, когда поверхность жидкости можно считать свободной от действия внешних касательных натяжений. Следует с большой осторожностью относится к представленным в литературе процедурам вывода этого уравнения и к самой форме его записи. В общедоступных источниках нередко встречаются ошибки. Финальное интегро-дифференциальное уравнение содержит два интегральных слагаемых. Для его анализа существует четко обоснованный способ решения, разработанный в 70-е годы прошлого столетия Ю. А. Митропольским и А. Н. Филатовым, — метод усреднения по бесконечному промежутку времени.

Методика сведения задачи о расчете условий неустойчивости Фарадея к интегро-дифференциальному уравнению относительно амплитуды возмущения имеет весьма ограниченную область применения. Условия ее использования нарушаются, если поверхность жидкости не свободная, а испытывает влияние дополнительных касательных натяжений. Такие натяжения появляются, например, на поверхности жидкости, покрытой пленкой поверхностно-активного вещества; на границе раздела двух жидкостей; на поверхности неравномерный прогретого жидкого слоя и т.д. Во всех этих случаях нецелесообразно тратить силы и время на построение уравнения относительно амплитуды возмущения. Аналитическое асимптотическое исследование неустойчивости Фарадея в задачах подобного рода следует проводить, применяя общие принципы теории Флоке сразу ко всему набору переменных (компонентам поля скоростей, давлению; если нужно — к температуре, поверхностной концентрации примеси и т.п.). Такой подход не имеет каких-то принципиальных ограничений на сложность используемых граничных условий. Анализ получающихся соотношений сводится к манипуляциям с линейными дифференциальными и алгебраическими выражениями. С такой задачей эффективно справляются современные системы компьютерных аналитических вычислений.

Список цитируемых источников

1. *Белоножко, Д. Ф., Апарнева, А. В.* Расчет условий дестабилизации горизонтальной поверхности вязкой жидкости в вибрационном поле // Ученые записки физического факультета Московского университета. — 2017, №6. — С. 1760401.

   Belonozhko, D. F., Aparneva A. V. Calculation of instability conditions of a horizontal surface of viscous liquid in a vibration field. Memoirs of the Faculty of Physics, No.6, 1760401 (2017). (In Russian)
2. *Карлов, Н. В., Кириченко, Н. А.* Колебания, волны, структуры. — М: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 496 с.

   Karlov, N. V., Kirichenko, N. A. Oscillations, waves, patterns. Moscow: Physmatlit, 2003. (In Russian)
3. *Любимов, Д. В., Любимова, Т. П., Черепанов, А. А.* Динамика поверхности раздела в вибрационных полях. — М: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 216 с.

   Lyubimov D. V. Lyubimova T. P., Cherepanov, A. A. Dynamics of interfaces in vibrational fields. Moscow: Physmatlit, 2003. (In Russian)
4. *Митропольский, Ю. Ф., Филатов, А. Н.* Усреднение интегро-диффернциальных и интегральных уравнений //Украинский математический журнал. — 1972. —Т.24, №1. — С. 30-48.

   Mitropol'skii, Y. A., Filatov, A. N. Averaging of integro-differential and integral equations. Ukrainian Mathematical Journal, 24, No.1, 22-37 (1972). (In Russian)
5. *Benjamin, T. B.* The stability of the plane free surface of liquid in a vertical periodic motion. Proc. R. Soc. London. A, 225, No.1163, 505–515 (1954).
6. *Pototsky, A., Bestehorn, M.* Faraday instability of a two-layer liquid film with a free surface. Physical Review Fluids, 1, No.2, 023901 (2016).
7. *Bosch, E. G. T.* An experimental investigation of Faraday waves and spatio-temporal chaos. Eindhover: Techniche Universiteit Eindhover, 1995.
8. *Diwakar, S., V., Zoueshtiagh, F., Amiroudine, S.,Narayanan, R.* The Faraday instability in miscible fluid systems Physics of Fluids, 27, No.8, 084111 (2015).
9. *Faraday, M.* On the a peculiar class acoustical figures and on certain forms assumed by a group of particles upon elastic surface. Philosophical transactions of the Royal Society of London, 121, 299–340 (1831).
10. *Kumar, K.* Linear theory of Faraday instability in viscous liquids. Proc. R. Soc. London. A, 452, No.1948, 1113–1126 (1996).
11. *Mathews, J., Walker, R.L.* Mathematical methods of physics. New York. W. A. Bendjamin, 1970.
12. *Yudovich, V. I., Zenkovskaya, S. M., Novossiadily, V. A., Shleykel A. L.* Parametric excitation of waves on a free boundary of horizontal fluid layer. Comptes Rendus Mecanique, 332, 257–262 (2004).

Получена 15.02.2017