

УДК 539.3

Собственные формы прямоугольной ортотропной призмы при различных видах симметрии

А. Д. Ляшко, В. Н. Чехов

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: knightla@yandex.ru*

Аннотация. В статье получены новые аналитические представления решения задачи для установившихся колебаний прямоугольной ортотропной призмы для четырех видов симметрии. По сравнению с другими известными аналитическими представлениями для данных представлений существенным образом упрощен анализ регулярности соответствующих бесконечных систем и применимость метода улучшенной редукции для численных оценок её решения. Для каждого вида симметрии указано счетное множество элементарных собственных частот и собственных форм колебаний, которые соответствуют известным модам Ламе для изотропных призм. Вычислены первые собственные частоты и соответствующие собственные формы колебаний для квадратной ортотропной призмы.

Ключевые слова: установившиеся колебания ортотропной призмы, метод суперпозиции, регулярная бесконечная система линейных алгебраических уравнений, собственные частоты ортотропной прямоугольной призмы, аналитическое представление решения, улучшенный метод редукции.

Eigenforms of rectangular orthotropic prism for the different forms of symmetry

A. D. Lyashko, V. N. Chekhov

V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. In this paper new analytical presentations of the solutions for steady-state oscillations of orthotropic rectangular prism is found for four forms of symmetry. These presentations significantly simplify the regularity analysis and application of the improved reduction method. Countable sets of the elementary eigenforms for rectangular orthotropic prism that correspond to Lamé modes for isotropic prism are found for each type of symmetry. First eigenfrequencies and eigenforms are found numerically for square orthotropic prism.

Keywords: steady-state oscillations of orthotropic rectangular prism, superposition method, regular infinite system of linear algebraic equations, eigenfrequencies of rectangular orthotropic prism, analytical presentation of solution, the improved reduction method.

MSC 2010: 65N25, 74E10, 74H05, 74H10, 74H30, 74H45

Введение

Ортотропные прямоугольные пластинки и призмы являются одними из наиболее распространенных современных элементов конструкций. Результаты и обзоры исследований динамического поведения ортотропных тонких пластин и прямоугольных призм представлены в работах [5, 6, 7, 8, 9, 10]. Наиболее распространенными методами, применяемыми в данной задаче являются вариационный метод Рэлея-Ритца [8], а также различные варианты метода суперпозиции [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 14]. Метод суперпозиции в классическом варианте приводит к оценкам решений бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. В статике для изгиба прямоугольных пластин удачный вариант метода суперпозиции был предложен С.П. Тимошенко в 1936 году [3, 4, 16]. На распространение данного варианта повлияло существование нулевого предела для решения соответствующей бесконечной системы и «практическая» сходимость метода простой редукции. Применение метода суперпозиции к задаче о плоской деформации и плоском напряженном состоянии [1, 2, 9, 10, 12, 13, 14] приводит к системам, решения которых стремятся к ненулевым константам. Теория бесконечных систем позволяет достаточно точно оценить предел решения и аналитически просуммировать все ряды в представлении решения, а также определить собственные частоты и собственные формы колебаний. В статьях [12, 13, 14] представление решения строилось таким образом, чтобы оно при подстановке единичного решения соответствующей бесконечной системы суммировалось элементарным образом, что облегчало исследование и решение получаемых бесконечных систем. В данной статье предлагаются представления решения для задачи о колебании прямоугольной ортотропной призмы для всех видов симметрий, обладающие данным свойством.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача о плоской деформации прямоугольной ортотропной призмы $(x, y) \in [-a, a] \times [-b, b]$. Плоскости упругой симметрии совпадают с плоскостями координат. Дифференциальные уравнения движения призмы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Перемещения и напряжения связаны обобщенным законом Гука согласно [11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1} \sigma_{xx} - \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{E_2} \sigma_{yy}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1} \sigma_{xx} - \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{E_2} \sigma_{yy}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{G_{1,2}} \sigma_{xy}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь E_1, E_2, E_3 — модули Юнга для растяжения-сжатия вдоль главных направлений упругости x, y, z ; G — модуль сдвига, характеризующий изменение углов между направлениями x и y ; ν_{12} — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении y при растяжении в направлениях x ; ν_{21} — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении x при растяжении в направлении y и т.д. Граничные условия зададим в упрощенном виде, чтобы уменьшить громоздкость:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}|_{x=\pm a} &= f(y) \sin \omega t; & \tau_{xy}|_{x=\pm a} &= 0; \\ \sigma_{yy}|_{y=\pm b} &= g(x) \sin \omega t; & \tau_{xy}|_{y=\pm b} &= 0; \end{aligned} \quad (1.3)$$

Поскольку мы рассматриваем установившиеся колебания, введём амплитудные характеристики напряжений и перемещений:

$$u = \tilde{u} \sin(\omega t); \quad v = \tilde{v} \sin(\omega t); \quad (1.4)$$

$$\sigma_{xx} = \tilde{\sigma}_{xx} \sin(\omega t); \quad \sigma_{yy} = \tilde{\sigma}_{yy} \sin(\omega t); \quad \sigma_{xy} = \tilde{\sigma}_{xy} \sin(\omega t). \quad (1.5)$$

Выразим напряжения из (1.2):

$$\begin{aligned} \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}}{E_1} \sigma_{xx} &= (1 - \nu_{23}\nu_{32}) \frac{\partial u}{\partial x} + (\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}) \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}}{E_2} \sigma_{yy} &= (\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}) \frac{\partial u}{\partial x} + (1 - \nu_{13}\nu_{31}) \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{1}{G} \sigma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для уменьшения громоздкости введём вспомогательные величины:

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_1 &= \frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}}{1 - \nu_{13}\nu_{31}}; & \tilde{\nu}_2 &= \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{1 - \nu_{23}\nu_{32}}; \\ \tilde{E}_1 &= \frac{E_1}{1 - \nu_{13}\nu_{31}}; & \tilde{E}_2 &= \frac{E_2}{1 - \nu_{23}\nu_{32}}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Для введённых величин верно, что $\tilde{E}_1 \tilde{\nu}_2 = \tilde{E}_2 \tilde{\nu}_1$. С учётом (1.7) обобщенный закон Гука (1.6) после преобразований примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \tilde{\nu}_1 \tilde{\nu}_2}{\tilde{E}_1} \sigma_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{\nu}_2 \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{1 - \tilde{\nu}_1 \tilde{\nu}_2}{\tilde{E}_2} \sigma_{yy} &= \tilde{\nu}_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{1}{G} \sigma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

Выражения (1.8) совпадают с законом Гука для плоского напряженного состояния ортотропной пластины, использованного в статьях [6], [10] и др., с коэффициентами Пуассона $\tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2$ и модулями Юнга \tilde{E}_1, \tilde{E}_2 вдоль осей Ox и Oy

соответственно, а также модулем сдвига G . В дальнейшем мы будем использовать в выражениях только эти коэффициенты, поэтому опустим знак «тильда» над ними.

Подстановка (1.8) в (1.1) приводит к системе двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(G + \frac{E_1\nu_2}{1 - \nu_1\nu_2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \left(G + \frac{E_2\nu_1}{1 - \nu_1\nu_2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{E_2}{1 - \nu_1\nu_2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Подставив выражения (1.4) в данную систему получим следующую систему уравнений для установившихся колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \left(G + \frac{E_1\nu_2}{1 - \nu_1\nu_2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial y} &= -\rho\omega^2 \tilde{u}, \\ \left(G + \frac{E_2\nu_1}{1 - \nu_1\nu_2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{E_2}{1 - \nu_1\nu_2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} &= -\rho\omega^2 \tilde{v}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Поскольку в статье рассматриваются только амплитудные характеристики перемещений и напряжений, во всех последующих разделах опустим знак «тильда» над ними.

2. Приведение к безразмерному виду

Перейдём из системы координат, в которой призма соответствует множеству точек $(x, y) \in [-a, a] \times [-b, b]$, в систему координат $(\hat{x}, \hat{y}) \in [-1, 1] \times [-\eta, \eta]$, где $\eta = b/a$. Также разделим перемещения на половину ширины призмы a , выполнив замену $\hat{u} = u/a$, $\hat{v} = v/a$. Тогда система (1.10) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + G \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} + \left(G + \frac{E_1\nu_2}{1 - \nu_1\nu_2} \right) \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} &= -\rho\omega^2 a^2 \hat{u}, \\ \left(G + \frac{E_2\nu_1}{1 - \nu_1\nu_2} \right) \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + G \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{E_2}{1 - \nu_1\nu_2} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{y}^2} &= -\rho\omega^2 a^2 \hat{v}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В качестве безразмерной частоты возьмём $\Omega = \sqrt{\frac{\rho}{G}} \frac{2\omega a}{\pi}$. Введём следующие вспомогательные параметры:

$$\Omega_2 = \frac{\Omega\pi}{2}; \Omega_{11} = \Omega_2 \sqrt{\frac{G(1 - \nu_1\nu_2)}{E_1}}; \Omega_{12} = \Omega_2 \sqrt{\frac{G(1 - \nu_1\nu_2)}{E_2}}.$$

Разделим оба уравнения системы на $E_1/(1 - \nu_1\nu_2)$ и перепишем их, введя безразмерные параметры, предложенные в [6]:

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + a_{66} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} + (a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \Omega_{11}^2 \hat{u} &= 0, \\ (a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + a_{66} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} + a'_{11} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{y}^2} + \Omega_{11}^2 \hat{v} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $a_{11} = 1$, $a'_{11} = \nu_2/\nu_1$, $a_{12} = \nu_2$, $a_{66} = G(1 - \nu_1\nu_2)/E_1$. В качестве безразмерных напряжений возьмём следующие величины:

$$\hat{\sigma}_{xx} = \frac{1 - \nu_1\nu_2}{E_1}\sigma_{xx}; \hat{\sigma}_{yy} = \frac{1 - \nu_1\nu_2}{E_2}\sigma_{yy}; \hat{\sigma}_{xy} = \frac{1}{G}\sigma_{xy}. \quad (2.3)$$

Граничные условия (1.3) относительно безразмерных параметров для амплитудных характеристик запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{xx}|_{x=\pm 1} &= \frac{1-\nu_1\nu_2}{E_1}f(a\hat{y}) = \hat{f}(\hat{y}); & \hat{\tau}_{xy}|_{x=\pm 1} &= 0; \\ \hat{\sigma}_{yy}|_{y=\pm \eta} &= \frac{1-\nu_1\nu_2}{E_2}g(a\hat{x}) = \hat{g}(\hat{x}); & \hat{\tau}_{xy}|_{y=\pm \eta} &= 0; \end{aligned} \quad (2.4)$$

Закон Гука относительно безразмерных параметров запишем следующим образом:

$$\hat{\sigma}_{xx} = a_{11}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + a_{12}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}}; \hat{\sigma}_{yy} = \frac{1}{a'_{11}}\left(a_{12}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + a'_{11}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}}\right); \hat{\sigma}_{xy} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}}. \quad (2.5)$$

В дальнейшем будем рассматривать только выражения, содержащие безразмерные параметры, поэтому будем опускать знак «уголка» над ними.

3. Построение представления решения

В силу линейности краевой задачи, перемещения можно представить в виде суммы четырех перемещений для каждого варианта четности и нечетности краевых условий. Подробно остановимся на построении общего решения для случая нечетных относительно двух осей колебаниями. Построение для остальных случаев производится аналогичным образом.

В соответствии с принципом суперпозиции общее решение строится в виде суммы двух решений для периодически нагруженной полосы, каждое из которых позволяет удовлетворить произвольным условиям на паре противоположных граней:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{sh}(p_{1,n}y) + B_n \operatorname{sh}(p_{2,n}y)) \cos(\alpha_n x) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} (C_m M'_{1,m} \operatorname{ch}(q_{1,m}x) + D_m M'_{2,m} \operatorname{ch}(q_{2,m}x)) \sin(\beta_m y), \\ V &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n M_{1,n} \operatorname{ch}(p_{1,n}y) + B_n M_{2,n} \operatorname{ch}(p_{2,n}y)) \sin(\alpha_n x) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} (C_m \operatorname{sh}(q_{1,m}x) + D_m \operatorname{ch}(q_{2,m}x)) \cos(\beta_m y). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Последовательности постоянных коэффициентов $p_{k,n}$, $q_{k,m}$, $M_{k,n}$ и $M'_{k,m}$ определим, потребовав, чтобы каждое слагаемое в перемещении удовлетворяло системе

дифференциальных уравнений (2.2). Для этого рассмотрим по одному из слагаемых суммы (3.1):

$$U = \operatorname{sh}(p_{k,n}y) \cos(\alpha_n x); V = M_{k,n} \operatorname{ch}(p_{k,n}y) \sin(\alpha_n x). \quad (3.2)$$

$$U = M'_{k,m} \operatorname{ch}(q_{k,m}x) \sin(\beta_m y); V = \operatorname{sh}(q_{k,m}x) \cos(\beta_m y). \quad (3.3)$$

Подстановка (3.2) в систему (2.2) позволяет определить последовательности $p_{k,n}$ и $M_{k,n}$, а подстановка (3.3) — $q_{k,m}$ и $M'_{k,m}$:

$$M_{k,n} = \frac{a_{11}\alpha_n^2 - a_{66}p_{k,n}^2 - \Omega_{11}^2}{\alpha_n p_{k,n}(a_{12} + a_{66})}; M'_{k,m} = \frac{a'_{11}\beta_m^2 - a_{66}q_{k,m}^2 - \Omega_{11}^2}{\beta_m q_{k,m}(a_{12} + a_{66})}. \quad (3.4)$$

$p_{1,n}$, $p_{2,n}$, $q_{1,m}$ и $q_{2,m}$ должны быть корнями следующих биквадратных уравнений:

$$\begin{aligned} a'_{11}a_{66}p^4 + (\Omega_{11}^2(a'_{11} + a_{66}) + \alpha_n^2((a_{12} + a_{66})^2 - (a_{11}a'_{11} + a_{66}^2)))p^2 + \\ + (a_{11}\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)(a_{66}\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2) = 0, \\ a_{11}a_{66}q^4 + (\Omega_{11}^2(a_{11} + a_{66}) + \beta_m^2((a_{12} + a_{66})^2 - (a_{11}a'_{11} + a_{66}^2)))q^2 + \\ + (a'_{11}\beta_m^2 - \Omega_{11}^2)(a_{66}\beta_m^2 - \Omega_{11}^2) = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Заметим, что в силу теоремы Виета произведения и суммы квадратов имеют простые выражения:

$$\begin{aligned} p_{1,n}^2 + p_{2,n}^2 &= -\frac{(\Omega_{11}^2(a'_{11} + a_{66}) + \alpha_n^2((a_{12} + a_{66})^2 - (a_{11}a'_{11} + a_{66}^2)))}{a'_{11}a_{66}}, \\ q_{1,m}^2 + q_{2,m}^2 &= -\frac{(\Omega_{11}^2(a_{11} + a_{66}) + \beta_m^2((a_{12} + a_{66})^2 - (a_{11}a'_{11} + a_{66}^2)))}{a_{11}a_{66}}, \\ p_{1,n}^2 p_{2,n}^2 &= \frac{(a_{11}\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)(a_{66}\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)}{a'_{11}a_{66}}, \\ q_{1,m}^2 q_{2,m}^2 &= \frac{(a'_{11}\beta_m^2 - \Omega_{11}^2)(a_{66}\beta_m^2 - \Omega_{11}^2)}{a_{11}a_{66}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Последовательности α_n и β_m выберем таким образом, чтобы входящие в выражения для нормальных напряжений функции $\sin(\alpha_n x)$ и $\sin(\beta_m y)$ были полны на отрезках $[-1, 1]$ и $[-\eta, \eta]$ соответственно, а также, чтобы их производные обращались в нуль на соответствующих сторонах. В случае нечетных относительно двух осей колебаний возьмём следующие последовательности:

$$\alpha_n = \frac{2n-1}{2}\pi; \beta_m = \frac{2m-1}{2\eta}\pi. \quad (3.7)$$

Вычислим касательные напряжения, соответствующие данному решению:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n(p_{1,n} + M_{1,n}\alpha_n) \operatorname{ch}(p_{1,n}y) + B_n(p_{2,n} + M_{2,n}\alpha_n) \operatorname{ch}(p_{2,n}y)) \cos(\alpha_n x) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} (C_m(M'_{1,m}\beta_m + q_{1,m}) \operatorname{ch}(q_{1,m}x) + D_m(M'_{2,m}\beta_m + q_{2,m}) \operatorname{ch}(q_{2,m}x)) \cos(\beta_m y). \end{aligned} \quad (3.8)$$

После подстановки (3.8) в краевые условия (2.4) благодаря выбору последовательностей α_n и β_m получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} (C_m(M'_{1,m}\beta_m + q_{1,m}) \operatorname{ch}(q_{1,m}) + D_m(M'_{2,m}\beta_m + q_{2,m}) \operatorname{ch}(q_{2,m})) \cos(\beta_m y) &= 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (A_n(p_{1,n} + M_{1,n}\alpha_n) \operatorname{ch}(p_{1,n}\eta) + B_n(p_{2,n} + M_{2,n}\alpha_n) \operatorname{ch}(p_{2,n}\eta)) \cos(\alpha_n x) &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из равенства нулю ряда Фурье следует, что коэффициенты ряда Фурье равны нулю. Поэтому получаем, что

$$A_n = -B_n \frac{p_{2,n} + M_{2,n}\alpha_n}{p_{1,n} + M_{1,n}\alpha_n} \cdot \frac{\operatorname{ch}(p_{2,n}\eta)}{\operatorname{ch}(p_{1,n}\eta)}; \quad C_m = -D_m \frac{q_{2,m} + M'_{2,m}\beta_m}{q_{1,m} + M'_{1,m}\beta_m} \cdot \frac{\operatorname{ch}(q_{2,m})}{\operatorname{ch}(q_{1,m})}. \quad (3.10)$$

Для удобства введём следующие обозначения:

$$X_n = -B_n \frac{\operatorname{ch}(p_{2,n}\eta)}{p_{1,n} + M_{1,n}\alpha_n}; \quad Y_m = -D_m \frac{\operatorname{ch}(q_{2,m})}{q_{1,m} + M'_{1,m}\beta_m}. \quad (3.11)$$

С учетом введенных обозначений аналитическое представление решения (3.1) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n \left((p_{2,n} + M_{2,n}\alpha_n) \frac{\operatorname{sh}(p_{1,n}y)}{\operatorname{ch}(p_{1,n}\eta)} - (p_{1,n} + M_{1,n}\alpha_n) \frac{\operatorname{sh}(p_{2,n}y)}{\operatorname{ch}(p_{2,n}\eta)} \right) \cos(\alpha_n x) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \left(M'_{1,m}(q_{2,m} + M'_{2,m}\beta_m) \frac{\operatorname{ch}(q_{1,m}x)}{\operatorname{ch}(q_{1,m})} - M'_{2,m}(q_{1,m} + M'_{1,m}\beta_m) \frac{\operatorname{ch}(q_{2,m}x)}{\operatorname{ch}(q_{2,m})} \right) \times \\ &\times \sin(\beta_m y), \\ V &= \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \left((q_{2,m} + M'_{2,m}\beta_m) \frac{\operatorname{sh}(q_{1,m}x)}{\operatorname{ch}(q_{1,m})} - (q_{1,m} + M'_{1,m}\beta_m) \frac{\operatorname{sh}(q_{2,m}x)}{\operatorname{ch}(q_{2,m})} \right) \cos(\beta_m y) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} X_n \left(M_{1,n}(p_{2,n} + M_{2,n}\alpha_n) \frac{\operatorname{ch}(p_{1,n}y)}{\operatorname{ch}(p_{1,n}\eta)} - M_{2,n}(p_{1,n} + M_{1,n}\alpha_n) \frac{\operatorname{ch}(p_{2,n}y)}{\operatorname{ch}(p_{2,n}\eta)} \right) \sin(\alpha_n x). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Посчитав по данным перемещениям нормальные напряжения и подставив их в граничные условия, после известной процедуры [1] метода суперпозиции можно получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных X_k, Y_k ($k = 1, 2, \dots$). Однако, перед тем как продолжить, преобразуем аналитическое представление решения таким образом, чтобы при подстановке всех неизвестных коэффициентов равными единице, ряды для перемещений и напряжений суммировались к некоторым аналитическим выражениям. В [12] для случая двойной симметрии в этом качестве были выбраны

выражения, являющиеся обобщениями мод Ламе на ортотропный случай. Для колебаний, антисимметричных относительно двух осей, они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\sqrt{a'_{11}}}{\Omega_{11}} \sqrt{\frac{a'_{11} + a_{12}}{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}} \frac{\cos(\Omega_{11}^* x) \sin(\Omega_{12}^* y)}{\cos(\Omega_{11}^*) \cos(\Omega_{12}^* \eta)}; \\ V &= -\frac{\sqrt{a'_{11}}}{\Omega_{11}} \sqrt{\frac{a_{11} + a_{12}}{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}} \frac{\sin(\Omega_{11}^* x) \cos(\Omega_{12}^* y)}{\cos(\Omega_{11}^*) \cos(\Omega_{12}^* \eta)}; \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\sigma_{xx} = -\sqrt{a'_{11}} \frac{\sin(\Omega_{11}^* x) \sin(\Omega_{12}^* y)}{\cos(\Omega_{11}^*) \cos(\Omega_{12}^* \eta)}; \sigma_{yy} = \frac{1}{\sqrt{a'_{11}}} \frac{\sin(\Omega_{11}^* x) \sin(\Omega_{12}^* y)}{\cos(\Omega_{11}^*) \cos(\Omega_{12}^* \eta)}; \sigma_{xy} = 0. \quad (3.14)$$

Здесь

$$\Omega_{11}^* = \Omega_{11} \sqrt{\frac{a'_{11} + a_{12}}{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}}, \Omega_{12}^* = \Omega_{11} \sqrt{\frac{a_{11} + a_{12}}{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}}.$$

Данные перемещения будут являться решением однородной краевой задачи при следующих соотношениях сторон и частотах:

$$\eta = \frac{m}{k} \sqrt{\frac{a'_{11} + a_{12}}{a_{11} + a_{12}}}, \Omega = 2k \sqrt{\frac{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}{a'_{11}a_{66} + a_{12}a_{66}}}, m, k \in \mathbb{N}. \quad (3.15)$$

Рассчитаем по (3.12) и (3.14) нормальные напряжения σ_{xx} . Разложив их в двойные ряды Фурье относительно функций $\sin(\alpha_n x)$ и $\sin(\beta_m y)$ и приравняв коэффициенты этих рядов получим бесконечную систему уравнений относительно X_n, Y_m :

$$\begin{aligned} & \frac{X_n (-1)^m (p_{1,n}^2 - p_{2,n}^2) (a_{11} \alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)}{\eta (a_{12} + a_{66}) p_{1,n} p_{2,n} \alpha_n} \times \\ & \times \frac{(\beta_m^2 a_{66} (a_{12} \Omega_{11}^2 - (a_{11} a'_{11} - a_{12}^2) \alpha_n^2) + a_{12} \Omega_{11}^2 (a_{66} \alpha_n^2 - \Omega_{11}^2))}{a'_{11} a_{66} (\beta_m^2 + p_{1,n}^2) (\beta_m^2 + p_{2,n}^2)} + \\ & + \frac{Y_m (-1)^n (q_{1,m}^2 - q_{2,m}^2) (a'_{11} \beta_m^2 - \Omega_{11}^2)}{(a_{12} + a_{66}) q_{1,m} q_{2,m} \beta_m} \times \\ & \times \frac{(a_{11} a_{66} \alpha_n^2 \Omega_{11}^2 + (a_{66} \beta_m^2 - \Omega_{11}^2) (a_{11} \Omega_{11}^2 - (a_{11} a'_{11} - a_{12}^2) \beta_m^2))}{a_{11} a_{66} (\alpha_n^2 + q_{1,m}^2) (\alpha_n^2 + q_{2,m}^2)} = \\ & = \frac{2 \Omega_{11}^2 \sqrt{a'_{11} (a'_{11} + a_{12}) (a_{11} + a_{12})}}{\eta (a_{11} a'_{11} - a_{12}^2)} \cdot \frac{(-1)^n (-1)^m}{(\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2 \frac{a'_{11} + a_{12}}{a_{11} a'_{11} - a_{12}^2}) (\beta_m^2 - \Omega_{11}^2 \frac{a_{11} + a_{12}}{a_{11} a'_{11} - a_{12}^2})} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$(n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots)$

Решив систему (3.16), получим следующие значения произвольных постоянных

ных:

$$\begin{aligned}\hat{X}_n &= -\frac{2\sqrt{a'_{11}(a'_{11}+a_{12})(a_{11}+a_{12})}(-1)^n}{\left(\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2 \frac{a'_{11}+a_{12}}{a_{11}a'_{11}-a_{12}^2}\right)} \frac{p_{1,n}p_{2,n}}{(a_{11}a'_{11}-a_{12}^2)} \frac{(a_{12}+a_{66})\alpha_n}{a_{11}\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2}, \\ \hat{Y}_m &= \frac{2\sqrt{a'_{11}(a'_{11}+a_{12})(a_{11}+a_{12})}(-1)^m}{\eta \left(\beta_m^2 - \Omega_{11}^2 \frac{a_{11}+a_{12}}{a_{11}a'_{11}-a_{12}^2}\right)} \frac{q_{1,m}q_{2,m}}{(a_{11}a'_{11}-a_{12}^2)} \frac{(a_{12}+a_{66})\beta_m}{a'_{11}\beta_m^2 - \Omega_{11}^2}\end{aligned}\quad (3.17)$$

Таким образом, мы получили последовательности \hat{X}_n, \hat{Y}_m , которые соответствуют перемещениям (3.13) и напряжениям (3.14). После замены $X_k = \hat{X}_k \tilde{X}_k$, $Y_k = \hat{Y}_k \tilde{Y}_k$ ($k = 1, 2, \dots$) им будут соответствовать единичное решение $\tilde{X}_k = \tilde{Y}_k = 1$ ($k = 1, 2, \dots$). Произведя эту замену и опустив знак «тильда» над постоянными, преобразуем перемещения (3.12) к следующему виду:

$$\begin{aligned}U &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} X_n (-1)^n \left(B_{1,n} \frac{\text{sh}(p_{1,n}y)}{\text{ch}(p_{1,n}\eta)} + B_{2,n} \frac{\text{sh}(p_{2,n}y)}{\text{ch}(p_{2,n}\eta)} \right) \cos(\alpha_n x) + \\ &+ \frac{2}{\eta} \sum_{m=1}^{\infty} Y_m (-1)^m \left(M'_{1,m} B'_{1,m} \frac{\text{ch}(q_{1,m}x)}{\text{ch}(q_{1,m})} + M'_{2,m} B'_{2,m} \frac{\text{ch}(q_{2,m}x)}{\text{ch}(q_{2,m})} \right) \sin(\beta_m y),\end{aligned}\quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}V &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} X_n (-1)^n \left(M_{1,n} B_{1,n} \frac{\text{ch}(p_{1,n}y)}{\text{ch}(p_{1,n}\eta)} + M_{2,n} B_{2,n} \frac{\text{ch}(p_{2,n}y)}{\text{ch}(p_{2,n}\eta)} \right) \sin(\alpha_n x) + \\ &+ \frac{2}{\eta} \sum_{m=1}^{\infty} Y_m (-1)^m \left(B'_{1,m} \frac{\text{sh}(q_{1,m}x)}{\text{ch}(q_{1,m})} + B'_{2,m} \frac{\text{sh}(q_{2,m}x)}{\text{ch}(q_{2,m})} \right) \cos(\beta_m y).\end{aligned}\quad (3.19)$$

Здесь

$$\begin{aligned}B_{k,n} &= \frac{\sqrt{a'_{11}(a_{11}+a_{12})(a'_{11}+a_{12})} (a_{12}p_{3-k,n}^2 - \Omega_{11}^2 + a_{11}\alpha_n^2) \alpha_n p_{k,n}}{(p_{k,n}^2 - p_{3-k,n}^2) (a_{11}\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2) ((a_{11}a'_{11} - a_{12}^2)\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2 (a'_{11} + a_{12}))}, \\ B'_{k,m} &= \frac{\sqrt{a'_{11}(a_{11}+a_{12})(a'_{11}+a_{12})} (a_{12}q_{3-k,m}^2 - \Omega_{11}^2 + a'_{11}\beta_m^2) \beta_m q_{k,m}}{(q_{k,m}^2 - q_{3-k,m}^2) (a'_{11}\beta_m^2 - \Omega_{11}^2) ((a_{11}a'_{11} - a_{12}^2)\beta_m^2 - \Omega_{11}^2 (a_{11} + a_{12}))}.\end{aligned}$$

Подстановка единичного решения $\tilde{X}_k = \tilde{Y}_k = 1$ ($k = 1, 2, \dots$) в представление (3.18), (3.19) приводит к следующим тождествам:

$$\begin{aligned}&-2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(B_{1,n} \frac{\text{sh}(p_{1,n}y)}{\text{ch}(p_{1,n}\eta)} + B_{2,n} \frac{\text{sh}(p_{2,n}y)}{\text{ch}(p_{2,n}\eta)} \right) \cos(\alpha_n x) + \\ &+ \frac{2}{\eta} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(M'_{1,m} B'_{1,m} \frac{\text{ch}(q_{1,m}x)}{\text{ch}(q_{1,m})} + M'_{2,m} B'_{2,m} \frac{\text{ch}(q_{2,m}x)}{\text{ch}(q_{2,m})} \right) \sin(\beta_m y) = \\ &= \frac{\sqrt{a'_{11}}}{\Omega_{11}} \sqrt{\frac{a'_{11}+a_{12}}{a_{11}a'_{11}-a_{12}^2}} \frac{\cos(\Omega_{11}^* x) \sin(\Omega_{12}^* y)}{\cos(\Omega_{11}^* \eta) \cos(\Omega_{12}^* \eta)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \sum_{n=1}^{\infty} X_n (-1)^n \left(M_{1,n} B_{1,n} \frac{\operatorname{ch}(p_{1,n}y)}{\operatorname{ch}(p_{1,n}\eta)} + M_{2,n} B_{2,n} \frac{\operatorname{ch}(p_{2,n}y)}{\operatorname{ch}(p_{2,n}\eta)} \right) \sin(\alpha_n x) + \\
& + \frac{2}{\eta} \sum_{m=1}^{\infty} Y_m (-1)^m \left(B'_{1,m} \frac{\operatorname{sh}(q_{1,m}x)}{\operatorname{ch}(q_{1,m})} + B'_{2,m} \frac{\operatorname{sh}(q_{2,m}x)}{\operatorname{ch}(q_{2,m})} \right) \cos(\beta_m y) = \\
& = -\frac{\sqrt{a'_{11}}}{\Omega_{11}} \sqrt{\frac{a_{11} + a_{12}}{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}} \frac{\sin(\Omega_{11}^* x) \cos(\Omega_{12}^* y)}{\cos(\Omega_{11}^* \eta) \cos(\Omega_{12}^* \eta)}.
\end{aligned}$$

Разложим функции в граничных условиях для нормальных напряжений в ряды Фурье:

$$f(y) = \frac{2}{\eta} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m f_m \sin(\beta_m y); \quad g(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n g_n \sin(\alpha_n x). \quad (3.20)$$

Для краевой задачи, соответствующей напряжениям (3.14), получатся следующие коэффициенты граничных условий:

$$\begin{aligned}
f_m &= \sqrt{a_{11}} \frac{\Omega_{12}^*}{\beta_m^2 + \Omega_{12}^{*2}} \operatorname{tg}(\Omega_{11}^*) \quad (m = 1, 2, \dots) \\
g_n &= -\frac{1}{\sqrt{a'_{11}}} \frac{\Omega_{11}^*}{\alpha_n^2 - \Omega_{11}^{*2}} \operatorname{tg}(\Omega_{12}^* \eta) \quad (n = 1, 2, \dots)
\end{aligned} \quad (3.21)$$

Подстановка напряжений, рассчитанных по перемещениям (3.18), (3.19), в граничные условия для нормальных напряжений после известной процедуры [1] метода суперпозиции приводит к парной системе линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов X_k, Y_k ($k = 1, 2, \dots$):

$$\begin{cases} X_n \Delta_n = \frac{1}{a'_{11} \eta} \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \frac{A_{n,m}}{(a_{11}a'_{11} - a_{12}^2) \beta_m^2 - (a_{11} + a_{12}) \Omega_{11}^2} + g_n \\ Y_m \Delta_m^* = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{A_{n,m}}{(a_{11}a'_{11} - a_{12}^2) \alpha_n^2 - (a'_{11} + a_{12}) \Omega_{11}^2} - f_m, \end{cases} \quad (3.22)$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \frac{1}{a'_{11}} (B_{1,n}(\alpha_n a_{12} - M_{1,n} p_{1,n} a'_{11}) \operatorname{th}(p_{1,n} \eta) + B_{2,n}(\alpha_n a_{12} - M_{2,n} p_{2,n} a'_{11}) \operatorname{th}(p_{2,n} \eta)) \\
\Delta_m^* &= (B'_{1,m}(\beta_m a_{12} - M'_{1,m} q_{1,m} a_{11}) \operatorname{th}(q_{1,m}) + B'_{2,m}(\beta_m a_{12} - M'_{2,m} q_{2,m} a_{11}) \operatorname{th}(q_{2,m})) \\
A_{n,m} &= 2 \sqrt{a'_{11} (a_{11} + a_{12}) (a'_{11} + a_{12})} \times \\
&\quad \times \frac{(a_{12} \Omega_{11}^4 - a_{12} a_{66} \Omega_{11}^2 \beta_m^2 + a_{66} \alpha_n^2 ((a_{11} a'_{11} - a_{12}^2) \beta_m^2 - a_{12} \Omega_{11}^2))}{a_{11} a_{66} (\alpha_n^2 + q_{1,m}^2) (\alpha_n^2 + q_{2,m}^2)}.
\end{aligned}$$

Для остальных типов симметрий представления решений строятся аналогичным образом. В случае симметричных по двум осям колебаний в качестве последовательностей α_n и β_m выберем $\alpha_n = n\pi$ и $\beta_m = m\pi/\eta$. Тогда, используя указанные

выше обозначения, получим следующие выражения для перемещений:

$$\begin{aligned}
 U = & 2 \sum_{n=1}^{\infty} X_n (-1)^n \left(B_{1,n} \frac{\text{ch}(p_{1,n}y)}{\text{sh}(p_{1,n}\eta)} + B_{2,n} \frac{\text{ch}(p_{2,n}y)}{\text{sh}(p_{2,n}\eta)} \right) \sin(\alpha_n x) + \\
 & + \frac{2}{\eta} \sum_{m=1}^{\infty} Y_m (-1)^m \left(M'_{1,m} B'_{1,m} \frac{\text{sh}(q_{1,m}x)}{\text{sh}(q_{1,m})} + M'_{2,m} B'_{2,m} \frac{\text{sh}(q_{2,m}x)}{\text{sh}(q_{2,m})} \right) \cos(\beta_m y) + \quad (3.23) \\
 & + Y_0 \sqrt{\frac{a'_{11} + a_{12}}{a_{11} + a_{12}}} \frac{\sqrt{a'_{11}} \sin(\Omega_{11}x/\sqrt{a_{11}})}{\eta \Omega_{11}^2 \sin(\Omega_{11}/\sqrt{a_{11}})}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V = & -2 \sum_{n=1}^{\infty} X_n (-1)^n \left(M_{1,n} B_{1,n} \frac{\text{sh}(p_{1,n}y)}{\text{sh}(p_{1,n}\eta)} + M_{2,n} B_{2,n} \frac{\text{sh}(p_{2,n}y)}{\text{sh}(p_{2,n}\eta)} \right) \cos(\alpha_n x) - \\
 & - \frac{2}{\eta} \sum_{m=1}^{\infty} Y_m (-1)^m \left(B'_{1,m} \frac{\text{ch}(q_{1,m}x)}{\text{sh}(q_{1,m})} + B'_{2,m} \frac{\text{ch}(q_{2,m}x)}{\text{sh}(q_{2,m})} \right) \sin(\beta_m y) - \quad (3.24) \\
 & - X_0 \sqrt{\frac{a_{11} + a_{12}}{a'_{11} + a_{12}}} \frac{\sqrt{a'_{11}} \sin(\Omega_{11}y/\sqrt{a'_{11}})}{\Omega_{11}^2 \sin(\Omega_{11}\eta/\sqrt{a'_{11}})}
 \end{aligned}$$

Единичному решению для перемещений (3.23),(3.24) соответствуют следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{\sqrt{a'_{11}}}{\Omega_{11}} \sqrt{\frac{a'_{11} + a_{12}}{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}} \frac{\sin(\Omega_{11}^*x) \cos(\Omega_{12}^*y)}{\sin(\Omega_{11}^*) \sin(\Omega_{12}^*\eta)}; \quad (3.25) \\
 V = & -\frac{\sqrt{a'_{11}}}{\Omega_{11}} \sqrt{\frac{a_{11} + a_{12}}{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}} \frac{\cos(\Omega_{11}^*x) \sin(\Omega_{12}^*y)}{\sin(\Omega_{11}^*) \sin(\Omega_{12}^*\eta)};
 \end{aligned}$$

Перемещения (3.25) будут собственными модами колебаний при следующих соотношениях сторон и перемещениях:

$$\eta = \frac{2m - 1}{2k - 1} \sqrt{\frac{a'_{11} + a_{12}}{a_{11} + a_{12}}}, \Omega = (2k - 1) \sqrt{\frac{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}{(a'_{11} + a_{12})a_{66}}}, m, k \in \mathbb{N}$$

В случае симметричных относительно оси ОУ и антисимметричных относительно оси ОХ колебаний для того, чтобы последовательности функций $\cos(\alpha_n x)$ и $\sin(\beta_m y)$ были полны, выберем $\alpha_n = n\pi$ и $\beta_m = (2m - 1)\pi/2\eta$. Перемещения в этом случае будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 U = & -2 \sum_{n=1}^{\infty} X_n (-1)^n \left(B_{1,n} \frac{\text{sh}(p_{1,n}y)}{\text{ch}(p_{1,n}\eta)} + B_{2,n} \frac{\text{sh}(p_{2,n}y)}{\text{ch}(p_{2,n}\eta)} \right) \sin(\alpha_n x) + \\
 & + \frac{2}{\eta} \sum_{m=1}^{\infty} Y_m (-1)^m \left(M'_{1,m} B'_{1,m} \frac{\text{sh}(q_{1,m}x)}{\text{sh}(q_{1,m})} + M'_{2,m} B'_{2,m} \frac{\text{sh}(q_{2,m}x)}{\text{sh}(q_{2,m})} \right) \sin(\beta_m y) \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} X_n (-1)^n \left(M_{1,n} B_{1,n} \frac{\operatorname{ch}(p_{1,n}y)}{\operatorname{ch}(p_{1,n}\eta)} + M_{2,n} B_{2,n} \frac{\operatorname{ch}(p_{2,n}y)}{\operatorname{ch}(p_{2,n}\eta)} \right) \cos(\alpha_n x) + \\
&+ \frac{2}{\eta} \sum_{m=1}^{\infty} Y_m (-1)^m \left(B'_{1,m} \frac{\operatorname{ch}(q_{1,m}x)}{\operatorname{sh}(q_{1,m})} + B'_{2,m} \frac{\operatorname{ch}(q_{2,m}x)}{\operatorname{sh}(q_{2,m})} \right) \cos(\beta_m y) + \\
&+ X_0 \sqrt{\frac{a_{11} + a_{12}}{a'_{11} + a_{12}}} \frac{\sqrt{a'_{11}} \cos(\Omega_{11}y/\sqrt{a'_{11}})}{\Omega_{11}^2 \cos(\Omega_{11}\eta/\sqrt{a'_{11}})}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Единичному решению соответствуют перемещения:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{\sqrt{a'_{11}}}{\Omega_{11}} \sqrt{\frac{a'_{11} + a_{12}}{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}} \frac{\sin(\Omega_{11}^*x) \sin(\Omega_{12}^*y)}{\sin(\Omega_{11}^*) \cos(\Omega_{12}^*\eta)}, \\
V &= \frac{\sqrt{a'_{11}}}{\Omega_{11}} \sqrt{\frac{a_{11} + a_{12}}{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}} \frac{\cos(\Omega_{11}^*x) \cos(\Omega_{12}^*y)}{\sin(\Omega_{11}^*) \cos(\Omega_{12}^*\eta)},
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Для данного типа симметрии перемещения (3.28) будут собственными модами колебаний при

$$\eta = \frac{2m}{2k-1} \sqrt{\frac{a'_{11} + a_{12}}{a_{11} + a_{12}}}, \quad \Omega = (2k-1) \sqrt{\frac{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}{(a'_{11} + a_{12})a_{66}}}, \quad m, k \in \mathbb{N}$$

В случае антисимметричных относительно оси ОУ и симметричных относительно оси ОХ напряжений выберем последовательности $\alpha_n = (2n-1)\pi/2$ и $\beta_m = m\pi/\eta$ получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
U &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} X_n (-1)^n \left(B_{1,n} \frac{\operatorname{ch}(p_{1,n}y)}{\operatorname{sh}(p_{1,n}\eta)} + B_{2,n} \frac{\operatorname{ch}(p_{2,n}y)}{\operatorname{sh}(p_{2,n}\eta)} \right) \cos(\alpha_n x) + \\
&+ \frac{2}{\eta} \sum_{m=1}^{\infty} Y_m (-1)^m \left(M'_{1,m} B'_{1,m} \frac{\operatorname{ch}(q_{1,m}x)}{\operatorname{ch}(q_{1,m})} + M'_{2,m} B'_{2,m} \frac{\operatorname{ch}(q_{2,m}x)}{\operatorname{ch}(q_{2,m})} \right) \cos(\beta_m y) \\
&+ Y_0 \sqrt{\frac{a'_{11} + a_{12}}{a_{11} + a_{12}}} \frac{\sqrt{a'_{11}} \cos(\Omega_{11}x/\sqrt{a'_{11}})}{\eta \Omega_{11}^2 \cos(\Omega_{11}/\sqrt{a'_{11}})}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
V &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} X_n (-1)^n \left(M_{1,n} B_{1,n} \frac{\operatorname{sh}(p_{1,n}y)}{\operatorname{sh}(p_{1,n}\eta)} + M_{2,n} B_{2,n} \frac{\operatorname{sh}(p_{2,n}y)}{\operatorname{sh}(p_{2,n}\eta)} \right) \cos(\alpha_n x) + \\
&+ \frac{2}{\eta} \sum_{m=1}^{\infty} Y_m (-1)^m \left(B'_{1,m} \frac{\operatorname{sh}(q_{1,m}x)}{\operatorname{ch}(q_{1,m})} + B'_{2,m} \frac{\operatorname{sh}(q_{2,m}x)}{\operatorname{ch}(q_{2,m})} \right) \sin(\beta_m y)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Единичное решение суммируется к следующим выражениям:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{\sqrt{a'_{11}}}{\Omega_{11}} \sqrt{\frac{a'_{11} + a_{12}}{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}} \frac{\cos(\Omega_{11}^*x) \cos(\Omega_{12}^*y)}{\cos(\Omega_{11}^*) \sin(\Omega_{12}^*\eta)}, \\
V &= -\frac{\sqrt{a'_{11}}}{\Omega_{11}} \sqrt{\frac{a_{11} + a_{12}}{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}} \frac{\sin(\Omega_{11}^*x) \sin(\Omega_{12}^*y)}{\cos(\Omega_{11}^*) \sin(\Omega_{12}^*\eta)},
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Перемещения (3.31) будут собственными модами колебаний при

$$\eta = \frac{2m-1}{2k} \sqrt{\frac{a'_{11} + a_{12}}{a_{11} + a_{12}}}, \Omega = 2k \sqrt{\frac{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}{(a'_{11} + a_{12})a_{66}}}, m, k \in \mathbb{N}.$$

4. Определение собственных частот и форм колебаний

Для исследования регулярности бесконечной системы необходимо найти сумму абсолютных величин коэффициентов для каждого уравнения системы, разделенные на коэффициент в левой части. Для нахождения сумм коэффициентов уравнений будем использовать метод, предложенный в [13]. Применим его к системе (3.22). Система была построена так, чтобы краевой задаче с коэффициентами (3.21) соответствовало единичное решение $X_k = Y_k = 1 (k = 1, 2, \dots)$. Подстановка X_k и Y_k в (3.22) обращает каждое уравнение в тождество, из которого можно элементарным образом получить выражения для сумм:

$$Sx_n = \frac{1}{\Delta_n a'_{11} \eta} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{n,m}}{(a_{11}a'_{11} - a_{12}^2)\beta_m^2 - (a_{11} + a_{12})\Omega_{11}^2} = 1 + \frac{\sqrt{a'_{11}}}{\Delta_n a'_{11}} \operatorname{tg}(\Omega_{12}^* \eta) \frac{\Omega_{11}^*}{\alpha_n^2 - \Omega_{11}^{*2}}$$

$$Sy_m = \frac{1}{\Delta_m^*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{n,m}}{(a_{11}a'_{11} - a_{12}^2)\alpha_n^2 - (a'_{11} + a_{12})\Omega_{11}^2} = 1 + \frac{\sqrt{a'_{11}}}{\Delta_m^*} \operatorname{tg}(\Omega_{11}^*) \frac{\Omega_{12}^*}{\beta_m^2 - \Omega_{12}^{*2}}$$

При достаточно небольших частотах все коэффициенты парной бесконечной системы линейных уравнений (3.22) положительны, поэтому сумма модулей совпадает с суммой коэффициентов. Из полученных формул следует, что система не является регулярной ни при какой частоте, поскольку все суммы больше единицы. Однако её возможно свести к нескольким регулярным системам с одинаковой матрицей с помощью операции исключения переменных, описанной в [15].

Проиллюстрируем данную операцию на бесконечной системе линейных уравнений в каноническом виде. Пусть мы хотим исключить первых N неизвестных x_n бесконечной системы $x_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} x_k + b_n (n=1, 2, \dots)$. Тогда заменой (4.1) она будет сведена к системам (4.2).

$$x_n = x_n^* + \sum_{k=1}^N x_n^{(k)} x_k, \quad (n = N+1, N+2, \dots) \quad (4.1)$$

$$x_k^* = \sum_{n=N+1}^{\infty} c_{k,n} x_n^* + b_k; \quad x_k^{(j)} = \sum_{n=N+1}^{\infty} c_{k,n} x_n^{(j)} + c_{k,j}, \quad (4.2)$$

$$(k = N+1, N+2, \dots; j = 1, 2, \dots, N)$$

Подставив (4.1) и решение систем (4.2) в первые N уравнений бесконечной системы, получим следующую конечную систему уравнений, решив которую получим

значения для первых N неизвестных системы:

$$x_n = \sum_{k=1}^N \left(c_{n,k} + \sum_{m=N+1}^{\infty} c_{n,m} x_m^{(k)} \right) x_k + \left(b_k + \sum_{m=N+1}^{\infty} c_{n,m} x_m^* \right). \quad (4.3)$$

В случае системы (3.22), возможно добиться регулярности систем (4.2), исключив достаточное количество неизвестных. Тогда вопрос о разрешимости системы будет сведен к вопросу о разрешимости конечной системы (4.3).

Наличие у бесконечной системы (3.22) решения, которое стремится к ненулевой константе, позволяет сделать предположение о том, что и в общем случае справедлив асимптотический закон для решения бесконечной системы:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = \lim_{k \rightarrow \infty} Y_k = L. \quad (4.4)$$

С учетом этого предположения, для решения задачи можно применить метод [2] улучшенной редукции. Согласно данному методу, делается предположение, что начиная с некоторого номера P , все неизвестные совпадают с пределом L . Произведём следующую замену:

$$\begin{aligned} X_k &= \tilde{X}_k + \hat{X}_k L, \quad Y_k = \tilde{Y}_k + \hat{Y}_k L \quad (k = 1, 2, \dots, P-1); \\ X_k &= L, \quad Y_k = L \quad (k = P, P+1, \dots) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Данная замена приводит к двум системам линейных алгебраических уравнений с одинаковой матрицей относительно \tilde{X}_k, \tilde{Y}_k и \hat{X}_k, \hat{Y}_k . Для нахождения предела L воспользуемся подходом, аналогичным изложенному в [2]. Приравняв разность нормальных напряжений в угловых точках границы к известному из заданных граничных условий значению, получаем зависимость между решением бесконечной системы, входящем в бесконечные ряды для напряжений:

$$\sigma_{xx}(1, \eta) - \sigma_{yy}(1, \eta) = f(\eta) - g(1). \quad (4.6)$$

Подстановка выражений для напряжений приводит к линейному уравнению относительно L . Ряды в этом уравнении сходятся быстро, поэтому в основном определяются значениями первых неизвестных.

Для определения собственных частот воспользуемся тем фактом, что задача о свободных колебаниях имеет нетривиальное решение. В силу этого собственные частоты будут нулями определителя (4.3), а нетривиальное решение - собственными формами колебаний.

Собственные частоты и формы были численно исследованы для случая квадратной ортотропной призмы с $\nu_1 = 0.3/\sqrt{2}$, $\nu_2 = 0.3\sqrt{2}$, $G/E_1 = \sqrt{2}/2.6$, рассмотренной в статье [10]. Для определения частот исключались первые 8 неизвестных в соответствующих бесконечных системах, после чего находились нули определителя конечной системы (4.3). Были определены первые 7 собственных частот и форм колебаний для каждого из видов симметрий. Полученные частоты приведены в таблицах 1, 2, 3, 4. В данных таблицах для сравнения приведены собственные

частоты, полученные в статье [10]. Поскольку частота вводилась другим образом, они были разделены на $\pi/2$. Собственные формы отображены на рисунках 1, 2, 3, 4.

Таблица 1. Собственные частоты квадратной призмы при $\nu_2 = 0.3\sqrt{2}$, $\nu_2/\nu_1 = 2$, $G/E_1 = \sqrt{2}/2.6$, соответствующие антисимметричным относительно осей ОХ и ОУ колебаниям

k	1	2	3	4	5	6	7
$\Omega^{(k)}$	1,2457	2,2760	2,6380	2,9287	3,5071	4,0102	4,1802
[10]	1,2457	2,2760	2,6380	2,9287	3,5072	4,0102	4,1806

Таблица 2. Собственные частоты квадратной призмы при $\nu_2 = 0.3\sqrt{2}$, $\nu_2/\nu_1 = 2$, $G/E_1 = \sqrt{2}/2.6$, соответствующие антисимметричным относительно оси ОХ и симметричным относительно оси ОУ колебаниям

k	1	2	3	4	5	6	7
$\Omega^{(k)}$	1,1589	1,9748	2,6660	3,4564	3,5911	4,0525	4,3021
[10]	1,1589	1,9748	2,6661	3,4565	3,5911	4,0525	4,3022

Таблица 3. Собственные частоты квадратной призмы при $\nu_2 = 0.3\sqrt{2}$, $\nu_2/\nu_1 = 2$, $G/E_1 = \sqrt{2}/2.6$, соответствующие симметричным относительно оси ОХ и антисимметричным относительно оси ОУ колебаниям

k	1	2	3	4	5	6	7
$\Omega^{(k)}$	1,4834	2,0370	2,6591	2,8526	3,4021	3,6847	4,1912
[10]	1,4835	2,0371	2,6592	2,8526	3,4022	3,6848	4,1912

5. Обсуждение полученных результатов

В данной работе предложено обобщение результатов, полученных в [12] на все другие формы симметрии. Для каждой из форм получены обобщения мод Ламе, построены аналитические представления решения. Методом суперпозиции получена бесконечная система линейных уравнений, которая отличается от известных [6, 9, 10] тем, что имеет точное единичное решение при специальных значениях свободных членов. Подстановка единичного решения и этих специальных свободных членов превращает все уравнения системы в тождества, которые позволяют элементарно записать точные аналитические выражения для сумм коэффициентов каждой строки матрицы бесконечной системы. Произведено исследование

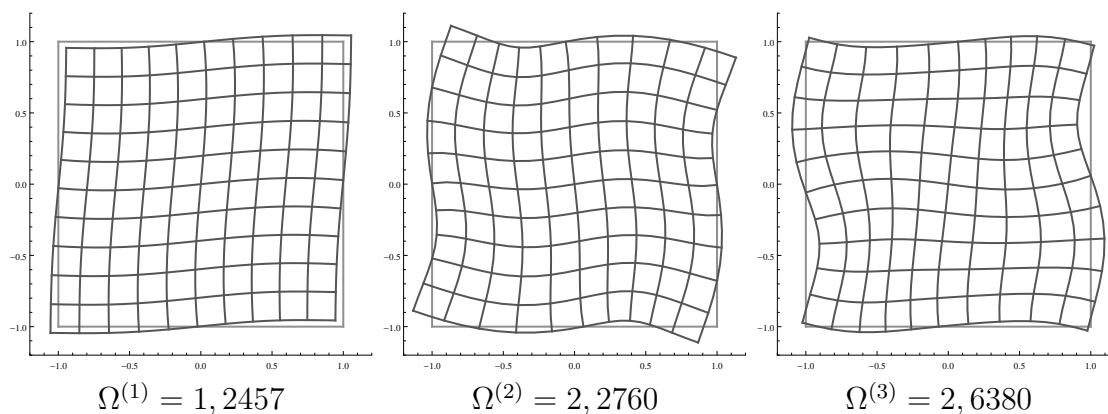


Рис. 1. Собственные формы колебаний квадратной призмы при $\nu_2 = 0.3\sqrt{2}$, $\nu_2/\nu_1 = 2$, $G/E_1 = \sqrt{2}/2.6$, антисимметричные относительно осей OX и OY

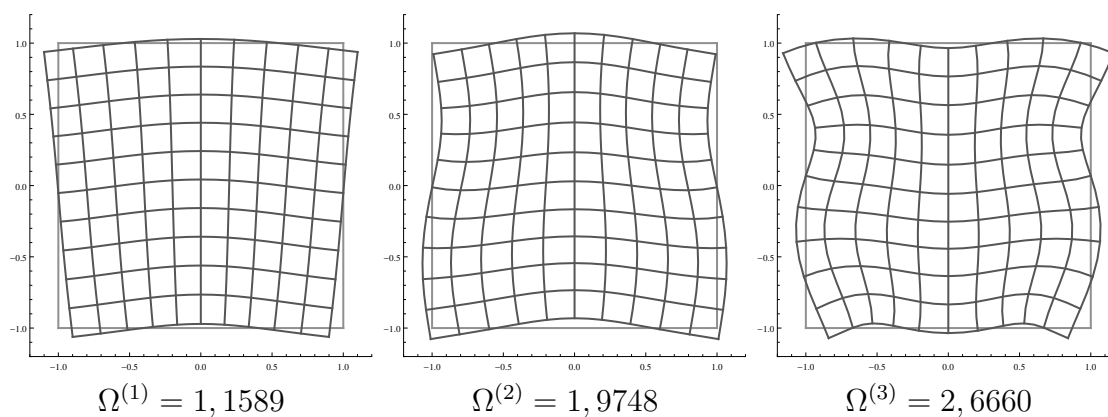


Рис. 2. Собственные формы колебаний квадратной призмы при $\nu_2 = 0.3\sqrt{2}$, $\nu_2/\nu_1 = 2$, $G/E_1 = \sqrt{2}/2.6$, антисимметричные относительно оси OX и симметричные относительно оси OY

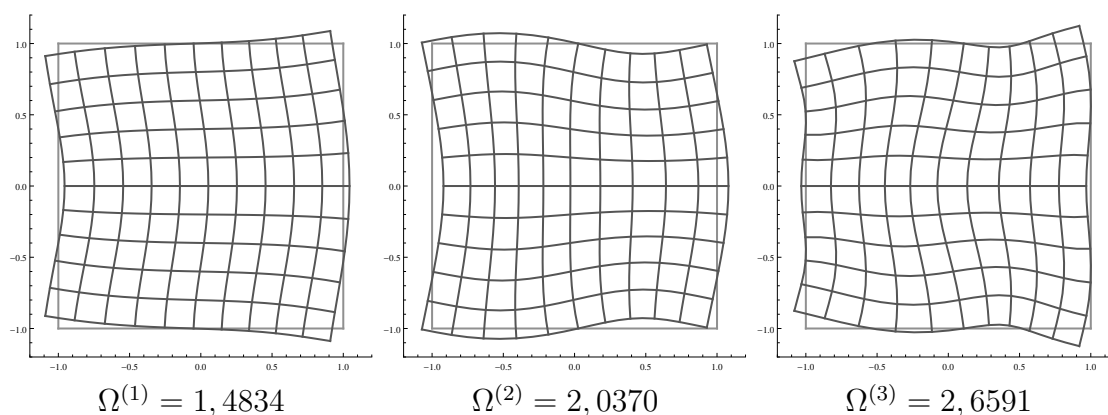


Рис. 3. Собственные формы колебаний квадратной призмы при $\nu_2 = 0.3\sqrt{2}$, $\nu_2/\nu_1 = 2$, $G/E_1 = \sqrt{2}/2.6$, антисимметричные относительно оси OX и симметричные относительно оси OY

Таблица 4. Собственные частоты квадратной призмы при $\nu_2 = 0.3\sqrt{2}$, $\nu_2/\nu_1 = 2$, $G/E_1 = \sqrt{2}/2.6$, соответствующие симметричным относительно осей ОХ и ОУ колебаниям

k	1	2	3	4	5	6	7
$\Omega^{(k)}$	1,3094	1,5939	2,0346	2,7269	3,2399	3,9374	4,0980
[10]	1,3095	1,5939	–	2,7269	3,2401	3,9374	4,0980

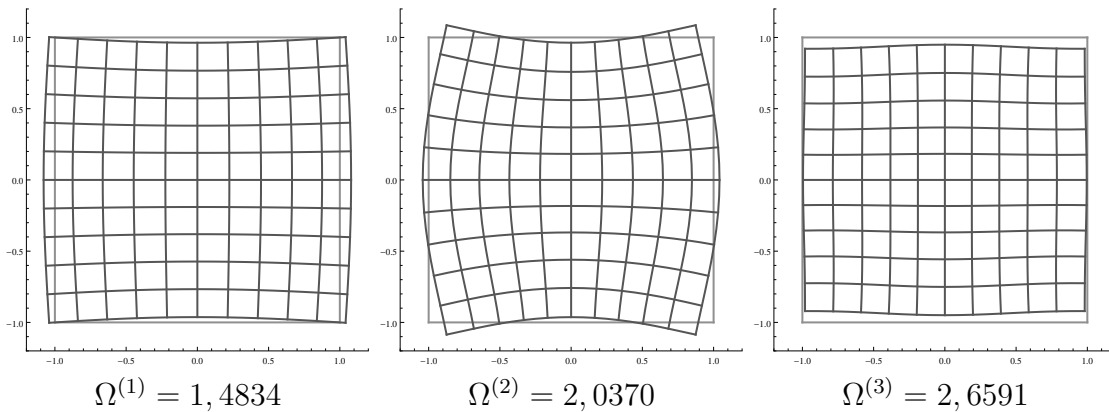


Рис. 4. Собственные формы колебаний квадратной призмы при $\nu_2 = 0.3\sqrt{2}$, $\nu_2/\nu_1 = 2$, $G/E_1 = \sqrt{2}/2.6$, симметричные относительно осей ОХ и ОУ

регулярности полученных систем. Бесконечная система для антисимметричных относительно двух осей колебаний, в отличие от симметричного случая [12], не удовлетворяет условию регулярности ни при какой частоте. Однако регулярности можно добиться при помощи исключения из бесконечной системы неизвестных по способу, предложенному в [15]. Данный подход позволил получить собственные частоты для колебаний всех типов симметрий квадратной призмы при заданных параметрах материала. Первые четыре значащие цифры совпали с результатами, полученными в [10], а для случая колебаний, обладающих двойной симметрией, обнаружена частота, не указанная в [10]. Построены собственные формы колебаний как нетривиальные решения при найденных собственных частотах.

Список цитируемых источников

1. *Гринченко В.Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. — К.: Наук. думка, 1978. — 264 с.
V.T. Grinchenko Equilibrium and steady-state oscillations of elastic bodies of finite dimensions (Russian). Kyev: Naukova Dumka. 264 (1978).
2. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. — К.: Наук. думка, 1981. — 284 с.

- V.T. Grinchenko, V.V. Meleshko* Harmonic vibrations and waves in elastic bodies (Russian). Kyev: Naukova Dumka. 284 (1981).
3. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки — М.: Наука, 1966. — 636 с.
S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger Theory of plates and shells. New York: McGraw-Hill. 580 (1959).
 4. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. — М.: Машиностроение, 1985. — 472 с.
S.P. Timoshenko, D.H. Young, W. Weaver Vibration problems in engineering. 4th ed. New York, Wiley, 521 (1974).
 5. *Gorman D.J.* Free vibration analysis of rectangular plates, Elsevier, North Holland, Inc., New York: 1982, — 324 p.
 6. *Gorman D.J.* Accurate in-plane free vibration analysis of rectangular orthotropic plates // Journal of Sounds and Vibration 323 (2009), — 426–443 pp.
 7. *Gorman D.J., Yu S.D.* A review of the superposition method for computing free vibration eigenvalues of elastic structures // Computers and Structures — 2012, — 104–105, — 27–37 pp.
 8. *Leissa A.W.* Vibration of plates. — NASA SP-160, — 353 pp. 1969, reprint by The Acoustical Society of America, 1993.
 9. *Папков С.О.* Установившиеся вынужденные колебания прямоугольной ортотропной призмы // Мат. методы и физ.-мех. поля. 2012 — 55, № 2. — С. 177–185.
S.O. Papkov Steady-state forced vibrations of a rectangular orthotropic plate // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 173, No. 2, April, 1–12 (2012).
 10. *Papkov S.O.* A new method for analytical solution of inplane free vibration of rectangular orthotropic plates based on the analysis of infinite systems // Journal of Sound and Vibration 339 (2015), — 342–358 pp.
 11. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.; Л.: Гостехиздат, 1957 — 464 с.
Lekhnitskii S.G. Anisotropic Plates — Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., 1962 — 534 pp.
 12. *Ляшко А.Д., Чехов В.Н.* О регулярности бесконечных систем для установившихся вынужденных колебаний ортотропных прямоугольных призм // Динамические системы. — 2015 — Т.5(33), №1-2. — С. 113-124
Lyashko A.D., Chekhov V.N On regularity of infinite systems for steady-state oscillations of orthotropic rectangular prisms. Dinamicheskie Systemy 5(33), No.1-2, 113-124 (2015).
 13. *Пан А.В., Чехов В.Н.* Некоторые тождества для волновых уравнений и приложения их в исследовании вынужденных колебаний прямоугольной призмы // Крымская международная математическая конференция. Судак, Украина — Сб. Тезисов. 2013.— С. 77.
Pan A.V., Chekhov V.N. Some identities for the wave equations and their applications in the study of forced oscillations of a rectangular prism // In Book of Abstr. Crimea International Mathematical Conf. Sudak, Ukraine, 77 (2013).

14. *Чехов В.Н., Пан А.В.* О регулярности бесконечных систем для установившихся колебаний изотропных прямоугольных призм // *Динамические системы.* — 2016 — Т.6(34), №4. — С. 295-310.
Chekhov V.N., Pan A.V. On regularity of infinite systems for steady-state oscillations of isotropic rectangular prisms. *Dinamicheskie sistemy* 6(34), №4, 295-310 (2016).
15. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. — М. — Л.: Физматгиз, 1962. — 708 с.
16. *Timoshenko S.P.* Bending of rectangular plates with clamped edges // In: *Proc. Fifth Intern. Congress for Applied Mechanics.* Wiley, New York — 1939, — 40–43 pp.

Получена 03.03.2018