Динамические системы, 2018, том 8(36), №1, 3–14

УДК 517.947

Локальные оценки решений второй краевой задачи для уравнения Соболева[1]

Г. В. Демиденко*, Е. А. Ломакина**
*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
Новосибирск 630090. *E-mail: demidenk@math.nsc.ru*
**Новосибирский государственный университет,
Новосибирск 630090. *E-mail: kekropius@gmail.com*

Аннотация. Рассматривается вторая краевая задача в цилиндрической области для двумерного уравнения Соболева. Установлены внутренние оценки решений при больших t.

Ключевые слова: вторая краевая задача, уравнение Соболева, соболевские пространства.

Local estimates of solutions to the second boundary value problem for the Sobolev equation

G. V. Demidenko, E. A. Lomakina
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Novosibirsk State University,
Novosibirsk 630090.

Abstract. We consider the second boundary value problem in a cylindrical domain for the two-dimensional Sobolev equation. We establish internal estimates of solutions for large t.

Keywords: the second boundary value problem, Sobolev equation, Sobolev spaces.
MSC 2010: 35G15

Памяти Сергея Львовича Соболева

Введение

В настоящей работе мы рассматриваем вторую краевую задачу в цилиндрической области $Q = \{(t, x) : t > 0, x \in G \subset \mathbb{R}^2\}$ для двумерного уравнения Соболева

$$\begin{cases} \Delta u_{tt} + u_{x_2 x_2} = 0, \quad (t, x) \in Q, \\ u|_{t=0} = \varphi_1(x), \\ u_t|_{t=0} = \varphi_2(x), \\ (\frac{\partial}{\partial \nu} u_{tt} + u_{x_2} \cos(\nu, x_2))|_{\partial G} = 0, \quad t > 0, \end{cases} \tag{0.1}$$

[1]Работа выполнена при частичной поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект AP05132041).

где G — ограниченная область с кусочно-гладкой границей, ν — внешняя нормаль к ∂G. Целью работы является получение оценок решений краевой задачи (0.1) при $t \gg 1$.

Уравнение вида (0.1) появилось в работе С. Л. Соболева [6] при изучении малых колебаний вращающейся идеальной жидкости. В этой работе была изучена разрешимость краевых задач для системы

$$v_t + [\omega, v] + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} v = 0 \tag{0.2}$$

и уравнения

$$\Delta u_{tt} + u_{x_n x_n} = 0, \tag{0.3}$$

которые в литературе называются системой и уравнением Соболева, соответственно, а также поставлен ряд новых задач математической физики. В частности, задача о поведении решений краевых задач для системы (0.2) и уравнения (0.3) при $t \to \infty$ (см. [6], [7]).

Отметим, что оценки решений первой краевой задачи в цилиндрической области для уравнения Соболева при $t \gg 1$ были получены в работах [1], [3], [4].

1. Формулировка основных результатов

В этом параграфе мы приведем основные результаты, полученные в работе. В дальнейшем будем предполагать, что область G является звездной относительно некоторого круга.

Теорема 1. *Пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — функции из класса $W_2^m(G)$, $m \geq 2$ — целое. Тогда в любой внутренней подобласти $G' \subset \overline{G'} \subset G$ для решения $u(t,x)$ краевой задачи* (0.1)*, удовлетворяющего условию*

$$\int\limits_G u(t,x)dx = 0, \tag{1.1}$$

имеет место оценка

$$\| D_t^l u(t,x), W_2^m(G') \| \leq c_1 + c_2 t^{m-1}, \quad l \geq 2, \tag{1.2}$$

где константы $c_1, c_2 > 0$ зависят от $G', G, \varphi_1, \varphi_2$ и не зависят от t.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда для решения задачи* (0.1)*, удовлетворяющего условию* (1.1)*, справедливо неравенство*

$$\| D_t^l u(t,x), W_2^s(G') \| \leq c_1 + c_2 t^{s-1}, \quad l \geq 2, \tag{1.3}$$

где $s = m - \theta$, $0 < \theta < 1$, константы $c_1, c_2 > 0$ не зависят от t.

Теорема 2. *Пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — функции из класса $W_2^2(G)$. Тогда в любой внутренней подобласти $G' \subset \overline{G'} \subset G$ для решения задачи* (0.1)*, удовлетворяющего условию* (1.1)*, для любого $\varepsilon \in (0,1)$ имеет место оценка*

$$\max_{\overline{G'}} |u_{tt}(t,x)| \leq c_1 + c_2(\varepsilon) t^{\varepsilon}, \tag{1.4}$$

где константы $c_1, c_2(\varepsilon) > 0$ *не зависят от* t.

Замечание. Из теоремы 2 вытекает, что вторая производная по t решения краевой задачи (0.1), удовлетворяющего условию (1.1), не может иметь степенной рост при $t \to \infty$.

2. Внутренние оценки

В это параграфе мы докажем теоремы 1, 2.

Прежде всего отметим, что если $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — функции из класса $W_2^m(G)$, из работы [6] вытекает существование решения краевой задачи (0.1):

$$u(t,x) \in C^k(R_+; W_2^m(G)), \quad k \in \mathbb{N},$$

при этом в случае выполнения условия ортогональности (1.1), решение — единственное.

Для получения оценок (1.2) введем "промежуточную" подобласть G'' :

$$\overline{G'} \subset G'' \subset \overline{G''} \subset G$$

и рассмотрим вспомогательную функцию $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2),\ 0 \leq \chi(x) \leq 1$ такую, что

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in G' \\ 0, & x \notin G''. \end{cases}$$

Тогда для функции $v(t,x) = u(t,x)\chi(x)$ имеет место равенство

$$(\Delta D_t^2 + D_{x_2}^2)v(t,x) = 2\nabla\chi(x)\nabla D_t^2 u(t,x) + 2D_{x_2}\chi(x)D_{x_2}u(t,x) + \\ + \Delta\chi(x)D_t^2 u(t,x) + D_{x_2}^2\chi(x)u(t,x). \quad (2.1)$$

Отметим, что $v(t,x) = 0$ при всех $t > 0$ в некоторой приграничной полосе области G.

Обозначим правую часть в (2.1) через $F(t,x)$. Докажем, что при всех $t > 0$ справедлива оценка

$$\| F(t,x), L_2(G) \| \leq c_1 + c_2 t, \quad (2.2)$$

где c_1, c_2 — константы.

При доказательстве (2.2) мы будем использовать законы сохранения энергии [6], [7] для задачи (0.1):

$$E_l(t) = \frac{1}{2}\int\limits_G (|\nabla D_t^l u(t,x)|^2 + |D_{x_2}D_t^{l-1}u(t,x)|^2)dx \equiv E_l(0), \quad l \geq 1, \quad (2.3)$$

и неравенство Пуанкаре, справедливое для функций из соболевского пространства $W_2^1(G)$, определенных в областях, звездных относительно круга:

$$\| v(x), L_2(G) \| \leq c\left(\left|\int\limits_G v(x)dx\right| + \| \nabla v(x), L_2(G) \| \right), \quad (2.4)$$

где константа $c > 0$ не зависит от $v(x)$ (см., например, [5]).

Из тождества для интеграла энергии (2.3), очевидно, имеем

$$\int\limits_G |\nabla u_t(t,x)|^2 dx \leq c^1 \leq 2E_1(0), \tag{2.5}$$

$$\int\limits_G |D_{x_2} u(t,x)|^2 dx \leq c^1 \leq 2E_1(0), \tag{2.6}$$

а в силу неравенства Пуанкаре (2.4)

$$\| u_t, L_2(G) \| \leq c\left(\left| \int\limits_G u_t dx \right| + \| \nabla u_t, L_2(G) \| \right).$$

Отсюда, учитывая условия ортогональности (1.1), из оценки (2.5) получаем

$$\int\limits_G |u_t(t,x)|^2 dx \leq \hat{c}. \tag{2.7}$$

Из этого неравенства в силу формулы Ньютона–Лейбница имеем также

$$\| u(t,x), L_2(G) \| \leq c^3 + c^4 t, \quad t > 0. \tag{2.8}$$

Повторяя подобные рассуждения, для любого $l \geq 2$ получим следующие оценки

$$\int\limits_G |\nabla D_t^l u(t,x)|^2 dx \leq c_l^1, \tag{2.9}$$

$$\int\limits_G |D_{x_2} D_t^{l-1} u(t,x)|^2 dx \leq c_l^1, \tag{2.10}$$

$$\int\limits_G |D_t^l u(t,x)|^2 dx \leq c_l^1, \quad t > 0. \tag{2.11}$$

В силу определения функции $F(t,x)$ из оценок (2.5)–(2.11) непосредственно вытекает неравенство (2.2).

Проводя аналогичные рассуждения, получим также следующие оценки

$$\| D_t^l F(t,x), L_2(G) \| \leq c, \quad l \geq 1, \quad t > 0, \tag{2.12}$$

где $c > 0$ — константа.

Перейдем к доказательству оценок (1.2) при $m = 2$. Для этого продифференцируем по t равенство (2.1), тогда

$$(\Delta D_t^3 + D_{x_2}^2 D_t) v(t,x) = D_t F(t,x), \quad (t,x) \in Q. \tag{2.13}$$

А затем умножим полученное равенство на функцию $\Delta D_t^2 v(t,x)$ и проинтегрируем по области G

$$\int\limits_G \Delta D_t^3 v \cdot \Delta D_t^2 v dx + \int\limits_G D_{x_2}^2 D_t v \cdot \Delta D_t^2 v dx = \int\limits_G D_t F \cdot \Delta D_t^2 v dx.$$

Рассмотрим отдельно первый интеграл слева. Имеем

$$\int\limits_G \Delta D_t^3 v \cdot \Delta D_t^2 v dx = D_t \int\limits_G \Delta D_t^2 v \cdot \Delta D_t^2 v dx - \int\limits_G \Delta D_t^2 v \cdot \Delta D_t^3 v dx,$$

то есть

$$\int\limits_G \Delta D_t^3 v \cdot \Delta D_t^2 v dx = \frac{1}{2} D_t \parallel \Delta D_t^2 v, L_2(G) \parallel^2 .$$

Рассмотрим теперь второй интеграл:

$$\int\limits_G D_{x_2}^2 D_t v \cdot \Delta D_t^2 v dx = \int\limits_G D_{x_2}(D_{x_2} D_t v \cdot \Delta D_t^2 v) dx - \int\limits_G D_{x_2} D_t v \cdot D_{x_2} \Delta D_t^2 v dx.$$

Первый интеграл справа в силу определения $v(t,x)$ и формулы Гаусса – Остроградского равен нулю. Тогда

$$\int\limits_G D_{x_2}^2 D_t v \cdot \Delta D_t^2 v dx = - \int\limits_G D_{x_2} D_t v \cdot D_{x_2} \Delta D_t^2 v dx$$

$$= - \int\limits_G div(D_{x_2} D_t v \cdot D_{x_2} \nabla D_t^2 v) dx + \int\limits_G D_{x_2} \nabla D_t v \cdot D_{x_2} \nabla D_t^2 v dx.$$

Первый интеграл справа также равен нулю. Отсюда

$$\int\limits_G D_{x_2}^2 D_t v \cdot \Delta D_t^2 v dx = \frac{1}{2} D_t \parallel D_{x_2} \nabla D_t v, L_2(G) \parallel^2 .$$

После всех преобразований имеем

$$\frac{1}{2} D_t (\parallel \Delta D_t^2 v, L_2(G) \parallel^2 + \parallel D_{x_2} \nabla D_t v, L_2(G) \parallel^2) = \int\limits_G D_t F \cdot \Delta D_t^2 v dx.$$

Проинтегрируем это равенство по t, тогда

$$\parallel \Delta D_t^2 v, L_2(G) \parallel^2 + \parallel D_{x_2} \nabla D_t v, L_2(G) \parallel^2 = 2 \int\limits_0^t \int\limits_G D_\tau F \cdot \Delta D_\tau^2 v dx d\tau +$$

$$+ \parallel \Delta D_t^2 v|_{t=0}, L_2(G) \parallel^2 + \parallel D_{x_2} \nabla D_t v|_{t=0}, L_2(G) \parallel^2 . \qquad (2.14)$$

Отсюда

$$\| \Delta D_t^2 v(t,x), L_2(G) \|^2 \le c + 2\int\limits_0^t \| D_\tau F, L_2(G) \| \| \Delta D_\tau^2 v, L_2(G) \| \, d\tau.$$

Поэтому, учитывая неравенство (2.12), получим

$$\| \Delta D_t^2 v(t,x), L_2(G) \|^2 \le c + \widetilde{c}\int\limits_0^t \| \Delta D_\tau^2 v, L_2(G) \| \, d\tau,$$

где $c, \widetilde{c} > 0$ — константы. Вводя обозначение

$$A(t) = \| \Delta D_t^2 v(t,x), L_2(G) \|,$$

перепишем это неравенство в виде:

$$A^2(t) \le c + \widetilde{c}\int\limits_0^t A(\tau) d\tau.$$

Нетрудно показать, что из этого неравенства вытекает оценка

$$A(t) \le c_1 + c_2 t, \tag{2.15}$$

где $c_1, c_2 > 0$ — константы.

Для этого введем обозначение

$$B(t) = c + \widetilde{c}\int\limits_0^t A(\tau) d\tau.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} B(t) = \widetilde{c} A(t).$$

Так как $A^2(t) \le B(t)$, то $A(t) \le \sqrt{B(t)}$ и, следовательно,

$$\frac{d}{dt} B(t) \le \widetilde{c}\sqrt{B(t)}.$$

Поскольку $c, \widetilde{c} > 0$, $A(t) \ge 0$, то $B(t) > 0$ при $t \ge 0$, поэтому разделив наше неравенство на $\sqrt{B(t)}$, получим

$$2\frac{d}{dt}\sqrt{B(t)} \le \widetilde{c}.$$

Отсюда

$$2\left(\sqrt{B(t)} - \sqrt{B(0)}\right) \leq \widetilde{c}t.$$

Тогда $\sqrt{B(t)} \leq c_1 + c_2 t$ и неравенство (2.15) доказано.

Итак,

$$\| \Delta D_t^2 v(t,x), L_2(G) \| \leq c_1 + c_2 t, \quad t > 0. \tag{2.16}$$

Из этого неравенства можно получить оценки всех вторых производных функции $D_t^2 v(t,x)$ по пространственным переменным

$$\| D_{x_i x_j}^2 D_t^2 v(t,x), L_2(G) \| \leq c_1 + c_2 t, \quad t > 0. \tag{2.17}$$

Действительно, поскольку $v(t,x) = 0$ при $x \notin G''$, то, продолжая функцию $v(t,x)$ нулем на все $\mathbb{R}^2$ и сохраняя обозначения, из (2.16) получим

$$\| \Delta D_t^2 v(t,x), L_2(\mathbb{R}^2) \| \leq c_1 + c_2 t, \quad t > 0.$$

Из равенства Парсеваля следует, что

$$\| |\xi|^2 D_t^2 \widehat{v}(t,\xi), L_2(\mathbb{R}^2) \| \leq c_1 + c_2 t, \quad t > 0.$$

Отсюда при любых i, j

$$\| \xi_i \xi_j D_t^2 \widehat{v}(t,\xi), L_2(\mathbb{R}^2) \| \leq c_1 + c_2 t, \quad t > 0,$$

и вновь, используя равенство Парсеваля и свойства преобразования Фурье, получим оценку

$$\| D_{x_i x_j}^2 D_t^2 v(t,x), L_2(\mathbb{R}^2) \| \leq c_1 + c_2 t, \quad t > 0,$$

которая влечет (2.17).

На основании определения функции $v(t,x)$ при $x \in G'$ справедливо равенство: $u(t,x) = v(t,x)$. Поэтому из неравенств (2.9), (2.11), (2.17) получаем оценку (1.2) при $m = 2$, $l = 2$. Неравенство (1.2) при $l > 2$ доказывается аналогичным образом.

Отметим, что, используя неравенство (2.16), из (2.14) можно получить оценку

$$\| D_{x_2} \nabla D_t v(t,x), L_2(G) \| \leq c_3 + c_4 t, \quad t > 0. \tag{2.18}$$

Действительно, из (2.14) имеем

$$\| D_{x_2} \nabla D_t v(t,x), L_2(G) \|^2 \leq c + 2 \int_0^t \| D_\tau F, L_2(G) \| \| \Delta D_\tau^2 v, L_2(G) \| \, d\tau.$$

Тогда, учитывая неравенства (2.12) и (2.16), получим

$$\| D_{x_2} \nabla D_t v(t,x), L_2(G) \|^2 \leq c + \widetilde{c} \int_0^t (c_1 + c_2 \tau) d\tau.$$

Отсюда следует (2.18).

Аналогичным образом доказывается оценка

$$\| D_{x_2} \nabla D_t^l v(t,x), L_2(G) \| \leq c_3 + c_4 t, \quad t > 0, \quad l > 1.$$

Докажем теперь неравенство (1.2) при $m = 3$. Для этого вначале применим оператор Лапласа к равенству (2.13):

$$(\Delta^2 D_t^3 + \Delta D_{x_2}^2 D_t) v(t,x) = \Delta D_t F(t,x), \quad (t,x) \in Q, \tag{2.19}$$

и умножим на функцию $\Delta D_t^2 v(t,x)$. Тогда после интегрирования по области G получим

$$\int\limits_G \Delta\Delta D_t^3 v \cdot \Delta D_t^2 v dx + \int\limits_G \Delta D_{x_2}^2 D_t v \cdot \Delta D_t^2 v dx = \int\limits_G \Delta D_t F \cdot \Delta D_t^2 v dx.$$

Вначале рассмотрим первый интеграл слева. Имеем

$$\int\limits_G \Delta\Delta D_t^3 v \cdot \Delta D_t^2 v dx = \int\limits_G \operatorname{div}(\nabla \Delta D_t^3 v \cdot \Delta D_t^2 v) dx - \int\limits_G \nabla \Delta D_t^3 v \cdot \nabla \Delta D_t^2 v dx.$$

Используя формулу Гаусса – Остроградского и учитывая, что $v(t,x) = 0$ при $x \notin G''$, получим

$$\int\limits_G \Delta\Delta D_t^3 v \cdot \Delta D_t^2 v dx = -\frac{1}{2} D_t \| \nabla \Delta D_t^2 v, L_2(G) \|^2 .$$

Рассмотрим теперь второй интеграл:

$$\int\limits_G \Delta D_{x_2}^2 D_t v \cdot \Delta D_t^2 v dx = \int\limits_G D_{x_2}(D_{x_2} \Delta D_t v \cdot \Delta D_t^2 v) dx$$

$$- \int\limits_G D_{x_2} \Delta D_t v \cdot D_{x_2} \Delta D_t^2 v dx.$$

Первый интеграл справа в силу формулы Гаусса – Остроградского равен нулю. Поэтому

$$\int\limits_G \Delta D_{x_2}^2 D_t v \cdot \Delta D_t^2 v dx = -\frac{1}{2} D_t \| D_{x_2} \Delta D_t v, L_2(G) \|^2 .$$

После этих преобразований получим равенство

$$-\frac{1}{2} D_t (\| \nabla \Delta D_t^2 v, L_2(G) \|^2 + \| D_{x_2} \Delta D_t v, L_2(G) \|^2) = \int\limits_G \Delta D_t F \cdot \Delta D_t^2 v dx.$$

Представим интеграл справа в виде

$$\int\limits_G \Delta D_t F \cdot \Delta D_t^2 v dx = \int\limits_G \operatorname{div}\,(\nabla D_t F \cdot \Delta D_t^2 v) dx - \int\limits_G \nabla D_t F \cdot \nabla \Delta D_t^2 v dx$$

Применяя формулу Гаусса – Остроградского, отсюда получим

$$\frac{1}{2} D_t(\parallel \nabla \Delta D_t^2 v, L_2(G) \parallel^2 + \parallel D_{x_2} \Delta D_t v, L_2(G) \parallel^2) = \int\limits_G \nabla D_t F \cdot \nabla \Delta D_t^2 v dx.$$

Интегрируя это равенство по t, имеем

$$\parallel \nabla \Delta D_t^2 v, L_2(G) \parallel^2 + \parallel D_{x_2} \Delta D_t v, L_2(G) \parallel^2 =$$

$$= 2 \int\limits_0^t \int_G \nabla D_\tau F \cdot \nabla \Delta D_\tau^2 v \; dx d\tau + \parallel \nabla \Delta D_t^2 v|_{t=0}, L_2(G) \parallel^2 +$$

$$+ \parallel D_{x_2} \Delta D_t v|_{t=0}, L_2(G) \parallel^2 . \tag{2.20}$$

Отсюда

$$\parallel \nabla \Delta D_t^2 v(t,x), L_2(G) \parallel^2 \leq c + 2 \int\limits_0^t \parallel \nabla D_\tau F, L_2(G) \parallel \parallel \nabla \Delta D_\tau^2 v, L_2(G) \parallel d\tau.$$

Отметим,что в силу определения функции $F(t,x)$ из оценок (2.5), (2.7), (2.9)–(2.11), (2.17), (2.18) вытекает неравенство

$$\parallel \nabla D_t F(t,x), L_2(G) \parallel \leq c_1 + c_2 t, \quad t > 0.$$

Тогда

$$\parallel \nabla \Delta D_t^2 v(t,x), L_2(G) \parallel^2 \leq c + 2 \int\limits_0^t (c_1 + c_2 \tau) \parallel \nabla \Delta D_\tau^2 v, L_2(G) \parallel d\tau.$$

Вводя обозначение

$$A(t) = \parallel \nabla \Delta D_t^2 v(t,x), L_2(G) \parallel,$$

перепишем это неравенство в виде

$$A^2(t) \leq c + 2 \int\limits_0^t (c_1 + c_2 \tau) A(\tau) d\tau.$$

Покажем, что отсюда вытекает оценка

$$A(t) \leq c_3 + c_4 t^2, \tag{2.21}$$

где c_3, $c_4 > 0$ — константы.

По аналогии с доказательством (2.15) введем обозначение

$$B(t) = c + 2 \int_0^t (c_1 + c_2\tau) A(\tau) d\tau.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} B(t) = 2(c_1 + c_2 t) A(t),$$

а так как $A^2(t) \leq B(t)$, то $A(t) \leq \sqrt{B(t)}$ и, следовательно,

$$\frac{d}{dt} B(t) \leq 2(c_1 + c_2 t)\sqrt{B(t)}.$$

Поскольку $B(t) > 0$, $t > 0$, то, разделив наше неравенство на $\sqrt{B(t)}$, получим

$$\frac{d}{dt}\sqrt{B(t)} \leq (c_1 + c_2 t).$$

Отсюда

$$\sqrt{B(t)} - \sqrt{B(0)} \leq c_1 t + c_2 \frac{t^2}{2},$$

а поскольку $A(t) \leq \sqrt{B(t)}$, то получаем (2.21), т. е.

$$\| \nabla \Delta D_t^2 v(t,x), L_2(G) \| \leq c_3 + c_4 t^2. \tag{2.22}$$

Учитывая эту оценку из (2.20), можно получить неравенство

$$\| D_{x_2} \Delta D_t^2 v(t,x), L_2(G) \| \leq c_1 + c_2 t^2, \quad t > 0.$$

Отметим, что из оценки (2.22) вытекает также неравенство

$$\| D^3_{x_i x_j x_k} D_t^2 v(t,x), L_2(G) \| \leq c_3 + c_4 t^2, \quad t > 0. \tag{2.23}$$

Для доказательства этого достаточно повторить рассуждения, как при выводе (2.17).

В силу определения функции $v(t,x)$ из неравенств (2.9), (2.11), (2.17), (2.23) вытекает оценка (1.2) при $m = 3$, $l = 2$. Неравенство (1.2) при $l > 2$ доказывается аналогично.

Анализируя схему рассуждений при доказательстве оценок (1.2) при $m = 2$, $m = 3$, нетрудно указать алгоритм, следуя которому, можно доказать оценки (1.2) при любых $m \geq 4$. А именно, нужно рассматривать два случая: $m = 2k$ и $m =$

$2k+1$, и проводить все оценки последовательно. В случае, когда $m = 2k$, нужно к равенству (2.13) вначале применить оператор Δ^{k-1}, а затем полученное равенство умножить на функцию $\Delta^k D_t^2 v(t,x)$ скалярно в $L_2(G)$ и проводить рассуждения, аналогичные как при $m = 2$.

В случае, когда $m = 2k+1$, нужно к равенству (2.13) вначале применить оператор Δ^k, а затем полученное равенство умножить на функцию $\Delta^k D_t^2 v(t,x)$ скалярно в $L_2(G)$ и проводить рассуждения, аналогичные как при $m = 3$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия. Пусть $l_1 > l_2 \geq 0$, $\theta \in (0,1)$. Для любой функции $v(x) \in W_2^{l_1}(G)$ справедливо интерполяционное неравенство (см., например, [2])

$$\| v, W_2^{(1-\theta)l_1+\theta l_2}(G) \| \leq \| v, W_2^{l_1}(G) \|^{(1-\theta)} \| v, W_2^{l_2}(G) \|^{\theta} .$$

Отсюда, учитывая оценку (1.2), получаем (1.3).

Следствие доказано.

Доказательство теоремы 2. Напомним, что для пространств Соболева – Слободецкого также справедлива теорема вложения $W_2^l(G) \subset C(\overline{G})$ при $2l > n$. Поэтому оценка (1.4) вытекает непосредственно из неравенства (1.3).

Теорема 2 доказана.

Список цитируемых источников

1. *Демиденко Г. В.* Оценки при $t \to \infty$ решения одной задачи С. Л. Соболева // Сиб. мат. журн. — 1984. — Т. 25, № 2. — С. 112–120.

   Demidenko G. V. Estimates for $t \to \infty$ of the solutions to a problem of Sobolev. Siberian Math. J., 25, No. 2, 257–264 (1984).

2. *Демиденко Г. В.* Пространства Соболева и обобщенные решения. — Новосибирск: РИЦ НГУ, 2015.

   Demidenko G. V. Sobolev Spaces and Generalized Solutions. Novosibirsk: Publishing Office of the Novosibirsk State University, 2015. (in Russian)

3. *Капитонов Б. В.* Теория потенциалов для уравнений малых колебаний вращающейся жидкости // Мат. сб. — 1979. — Т. 109, № 4. — С. 607–628.

   Kapitonov B. V. Potential theory for the equation of small oscillations of a rotating fluid. Mathematics of the USSR – Sbornik, 37, No. 4, 559–579 (1980).

4. *Сказка В. В.* Асимптотика при $t \to \infty$ смешанных задач для одного уравнения математической физики // Сиб. мат. журн. — 1981. — Т. 22, № 1. — С. 129–143.

   Skazka V. V. Asymptotic estimates for $t \to \infty$ of mixed problems for an equation of mathematical physics. Siberian Math. J., 22, No. 1, 95–106 (1981).

5. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1950. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1962. — Изд. 3-е, перераб. и доп. — М.: Наука, 1988.

   Sobolev S. L. Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics. Providence: Amer. Math. Soc. (Math. Monogr.; Vol. 7), 1963.

Sobolew S. L. Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik. Berlin: Akademie-Verlag, 1964.

Sobolev S. L. Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics. Providence: Amer. Math. Soc. (Math. Monogr.; Vol. 90), 1991.

6. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954. — Т. 18, № 1. — С. 3–50.

Sobolev S. L. On a new problem of mathematical physics. Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 18, No. 1, 3–50 (1954). (in Russian)

7. *Соболев С. Л.* Избранные труды. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Филиал “Гео” Изд-ва СО РАН. — Т. I, 2003. — Т. II, 2006.

Sobolev S. L. Selected Works. Vol. I. Equations of Mathematical Physics, Computational Mathematics, and Cubature Formulas. New York, NY: Springer, 2006.

Sobolev, S.L. Selected Works. Vol. II. Functional Analysis, Partial Differential Equations. Novosibirsk: IM SB RAS, “Geo”, 2006. (in Russian)

Получена 10.02.2018